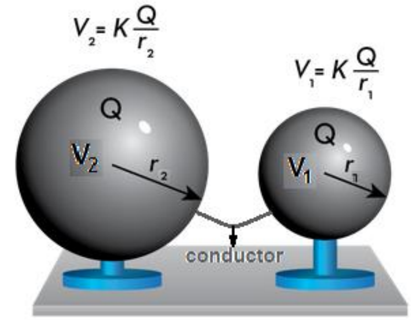
EL CAMPO ELÉCTRICO

1.- Dos esferas metálicas de 6,0 y 9,0 cm de radio se cargan a $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ C cada una, y luego se unen con un hilo conductor de capacidad despreciable. Calcula:
a) El potencial de cada esfera después de la unión.
b) La carga de cada esfera después de la unión.



a) De la fórmula del potencial ($V = K\dfrac{Q}{r}$) se deduce que el potencial de la primera esfera es mayor debido a que $r_1 < r_2$.
Por tanto, si se ponen en contacto pasarán electrones de la segunda esfera a la primera hasta que se igualan los potenciales. Estos electrones suponen un total de carga igual a $-q$

En el instante de la igualación de potenciales se cumple:

$$V_1 = K\frac{Q+(-q)}{r_1}$$

$$V_2 = K\frac{Q-(-q)}{r_2}$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow K\frac{Q+(-q)}{r_1} = K\frac{Q-(-q)}{r_2} \Rightarrow \frac{Q-q}{r_1} = \frac{Q+q}{r_2}$$

$$\frac{10^{-6}-q}{6\cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-6}+q}{9\cdot 10^{-2}}$$

De donde se deduce que: $q = 0{,}2\cdot 10^{-6}\,C$

En el equilibrio electrostático el potencial común de ambas esferas será:

$$V_1 = V_2$$

$$V_1 = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} - 0{,}2\cdot 10^{-6}}{6\cdot 10^{-2}} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{8\cdot 10^{-7}}{6\cdot 10^{-2}} = 1{,}2\cdot 10^5\,V$$

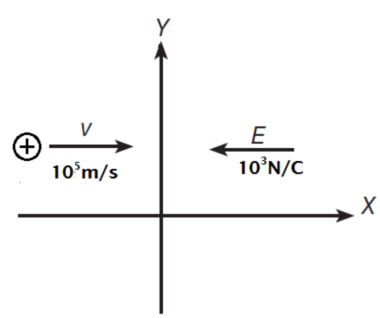
No es necesario calcular V_2 ya que su valor es el mismo que V_1.

b) Carga de cada esfera en equilibrio electrostático:

$q_1 = 10^{-6} - 0{,}2\cdot 10^{-6} = 8\cdot 10^{-7}C$

$q_2 = 10^{-6} + 0{,}2\cdot 10^{-6} = 1{,}2\cdot 10^{-6}C$

2.- En una región del espacio existe un campo eléctrico uniforme $E = -10^3\,\vec{i}$ N/C. Un protón penetra en dicha región con una velocidad $v = 10^5\,\vec{i}$ m/s. Calcula:
a) El espacio recorrido 1 µs después de haber penetrado en esa región.
b) Su velocidad en ese instante.
Datos: carga del protón $q = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.



La carga está sometida a un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (con aceleración negativa porque la fuerza que actúa sobre la carga tiene el sentido contrario a la velocidad).
Para calcular el valor de la aceleración del protón, aplicamos la ley de la dinámica:

$$a = \frac{F_e}{m}$$

$$a = \frac{E\cdot q}{m} = \frac{-10^3\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{1{,}67\cdot 10^{-27}} = -9{,}58\cdot 10^{10}\,\frac{m}{s^2}$$

a) Al cabo de 1 μs habrá recorrido el siguiente espacio:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 10^5 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2} \cdot 9,58 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-12} = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

b) Para calcular la nueva velocidad aplicamos la fórmula de la velocidad en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

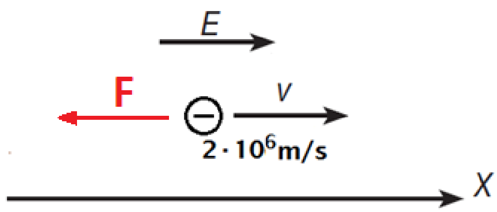
$$v = v_0 + at = 10^5 - 9,58 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6} = 4,2 \cdot 10^3 \; m/s$$

3.- Un electrón que se mueve con una velocidad $\vec{v} = 2 \cdot 10^6 \, \vec{i}$ m/s penetra en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme. Debido a la acción del campo, la velocidad del electrón se anula cuando este ha recorrido 90 cm. Calcula, despreciando los efectos de la fuerza gravitatoria:

a) El módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico existente en dicha región.

b) El trabajo realizado por el campo eléctrico en el proceso de frenado del electrón.

Datos: masa y carga del electrón m = 9,11 · 10^{-31} kg; q = -1,60 · 10^{-19} C.



La fuerza está dirigida en sentido opuesto a la velocidad; por tanto, el movimiento es uniformemente retardado hasta que el electrón se detiene.

Hallamos la aceleración:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x$$
$$v_f^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot x$$

$$a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2 \cdot x} = \frac{0 - (2 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 0,9} = -2,22 \cdot 10^{12} \frac{m}{s^2}$$

Calculamos la intensidad del campo: $$E = \frac{F}{q} = \frac{ma}{q} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (-2,22 \cdot 10^{12})}{-1,6 \cdot 10^{-19}} = 12,65 \; N/C$$

El campo es en dirección del eje X y con sentido positivo:

$$\vec{E} = 12,65 \vec{i} \; \frac{N}{C}$$

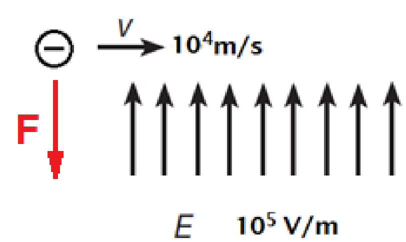
b) La fuerza que ejerce el campo y el espacio recorrido son de sentido contrario, por lo que:

$$W = F \cdot x \cdot \cos\alpha = F \cdot x \cdot \cos 180º = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 2,22 \cdot 10^{12} \cdot 0,9 \cdot (-1) = -1,82 \cdot 10^{-18} \text{J}$$

4.- Un electrón penetra en un campo eléctrico uniforme normalmente a sus líneas de fuerza con una velocidad v = 10^4 m/s. La intensidad del campo es 10^5 V/m. Calcula:

a) La aceleración que experimenta el electrón.

b) La ecuación de la trayectoria que sigue el electrón.



a) La fuerza sobre el electrón en el interior de un campo eléctrico es F =q·E.

Por otra parte, se cumple la Segunda Ley de Newton, F = m·a, así que:

$$F = q \cdot E = m_e \cdot a$$

$$a = \frac{q \cdot E}{m_e} = \frac{-1,6 \cdot 10^{-19} C \cdot 10^5 \, V/m}{9,11 \cdot 10^{-31} kg} = -1,76 \cdot 10^{-16} \frac{m}{s^2}$$

La dirección de la aceleración es la del campo, que suponemos la del eje OY y el sentido hacia abajo.

b) El electrón está sometido a dos movimientos: uno uniforme a lo largo del eje OX y otro uniformemente acelerado según el eje OY, cuyas ecuaciones son:

$$x = v_0 t = 10^4 t$$

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(-1,76 \cdot 10^{16}\right)t^2$$

Despreciamos los efectos gravitatorios. Eliminando el tiempo de las expresiones anteriores obtenemos la ecuación cartesiana de la trayectoria:

$$t = \frac{x}{10^4}$$

$$y = \frac{\ }{2} \cdot \left(-1,76 \cdot 10^{16}\right)\left(\frac{x}{10^4}\right)^2$$

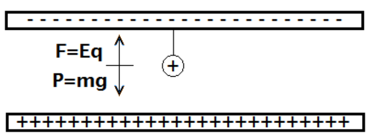
$$y = -8,8 \cdot 10^7 x^2$$

5.- Una esferita que porta una carga de +25 · 10⁻⁹ C está sostenida por un hilo entre dos placas paralelas horizontales que se encuentran a 3,0 cm de distancia entre sí.

a) Cuando la diferencia de potencial entre las placas es de 6 000 V, la tensión del hilo es cero. ¿Cuál es la masa de la esfera?

b) ¿Cuál es la tensión del hilo cuando se invierte la polaridad de las placas?

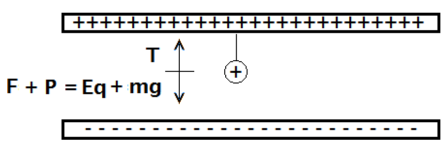
a)



$$Eq = mg \Rightarrow \frac{V}{d}q = mg$$

$$m = \frac{V \cdot q}{d \cdot g} = \frac{6000V \cdot 25 \cdot 10^{-9}C}{3 \cdot 10^{-2}m \cdot 9,8\frac{m}{s^2}} = 5,1 \cdot 10^{-4}kg$$

b) Cuando se invierte la polaridad existe tensión y se cumple:



$$T = mg + \frac{V}{d}q = 5,1 \cdot 10^{-4} \cdot 9,8 + \frac{6000}{3 \cdot 10^{-2}} \cdot 25 \cdot 10^{-9} = 10^{-2}N$$

6.- Si el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie gaussiana que rodea a una esfera conductora cargada y en equilibrio electrostático es Q/ε_o, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es:
a) Cero; b) $Q/4\pi\varepsilon_o r^2$; c) Q/ε_o. Razona la respuesta correcta.

La esfera cargada se comporta como una carga puntual colocada en el centro. Para hallar el campo en un punto exterior que dista *r* del centro de la esfera cargada aplicamos la definición de flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana que pase por dicho punto:

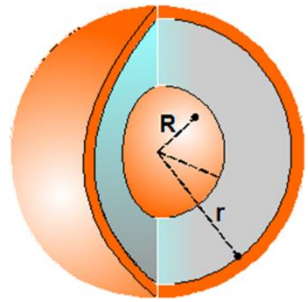
$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E \cdot S \Rightarrow E = \frac{Q}{S \cdot \varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0}$$

La respuesta correcta es la b)

7.- Una superficie esférica de radio R tiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente en ella.

a) Deduce la expresión del módulo del vector campo eléctrico en un punto situado en el exterior de dicha superficie haciendo uso del teorema de Gauss.

b) ¿Cuál es la razón entre los módulos de los vectores campo en dos puntos situados a las distancias del centro de la esfera $r_1 = 2R$ y $r_2 = 3R$?

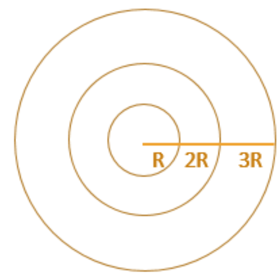


a) Al ser una distribución de carga esférica el campo eléctrico debe ser radial y sólo puede depender de la distancia al centro. Para calcular el campo eléctrico con la ley de Gauss tomamos como superficie gaussiana una superficie esférica de radio r > R.

Dado que la dirección del campo eléctrico es perpendicular a la superficie esférica y el módulo del campo es constante en toda la superficie, el flujo del campo eléctrico a través de esta superficie será:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos\alpha = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$$

Por otra parte la ley de Gauss dice que el flujo es igual a la carga encerrada dividida por ε_0, como la carga encerrada es igual a la carga Q tenemos: $\Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$



b) Utilizamos como superficies gaussianas otras esferas concéntricas con la esfera dada y cada una que pase por cada uno de los puntos citados (radios 2R y 3R). Aplicamos el teorema Gauss a cada esfera gaussiana:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\dfrac{Q}{4\pi(3R)^2\varepsilon_0}}{\dfrac{Q}{4\pi(2R)^2\varepsilon_0}} = \frac{4}{9}$$

8.- a) Defina el flujo de una magnitud vectorial. Enuncie el teorema de Gauss.

b) Considérese una carga puntual, q, en el origen de coordenadas. Determine la expresión del flujo del campo eléctrico que crea dicha carga a través de una superficie esférica de radio R centrada en el origen. Utilice el teorema de Gauss para determinar el valor de ese campo eléctrico.

a) Flujo Φ de una magnitud vectorial a través de una superficie es una magnitud escalar que cualitativamente mide la cantidad de vectores que la atraviesan.

Matemáticamente para el campo eléctrico:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Si el campo tiene un módulo uniforme en toda la superficie, y forma un ángulo fijo con el vector superficie, se tiene

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos\alpha$$

En el caso habitual de que el vector campo y el vector superficie sean paralelos (campo perpendicular a la superficie)

$$\Phi = E \cdot S$$

Unidades flujo campo eléctrico en SI:

$$\frac{N}{C} \cdot m^2 \text{ o } \frac{V}{m} \cdot m^2 = V \cdot m$$

(El vector superficie S: módulo igual a área, dirección normal, y sentido hacia parte convexa superficie).

El teorema de Gauss indica que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma de las cargas contenidas en esa superficie dividida por la permitividad eléctrica del medio. Esto es cierto sea cual sea la forma de dicha superficie cerrada.

Matemáticamente en forma integral:

$$\Phi_C = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

b) Tomamos como superficie una esfera centrada en la carga q. Utilizando la simetría esférica que nos indica que el campo siempre será radial y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera, y la fórmula de superficie de la esfera, podemos plantear el teorema de Gauss en este caso:

$$\Phi_C = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$E = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0 S \cos\alpha}$$

Como $\cos\alpha = \cos 0^\circ = 1 \Rightarrow$

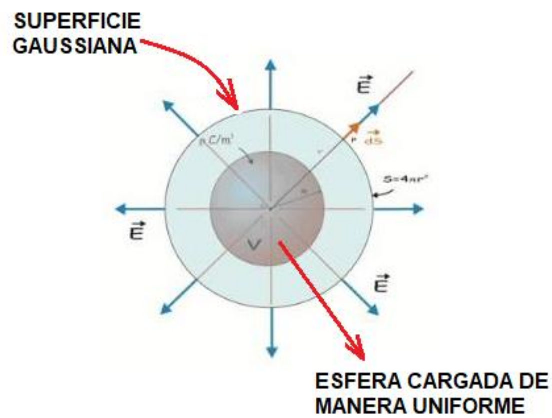
$$E = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0 S}$$

Y como se trata de una esfera y el valor de la superficie de una esfera es:

$$S = 4\pi r^2$$

Nos queda:

$$E = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi r^2}$$



9.- Dado un plano, que puede considerarse infinito, cargado con una densidad superficial de carga de valor σ=1 μC·cm^{-2}. Determine:

a) El campo eléctrico $\vec{E}$ a uno y otro lado del plano, a una distancia d = 5 cm del mismo.

b) El trabajo requerido para llevar una carga q = 5 μC desde un punto que dista 5 cm del plano a otro que está a una distancia de 15 cm del plano, en el mismo semiespacio.

Dato: Permitividad del vacío, ε_0= 1/(4πK) = 8,85·10^{-12} N^{-1}C^{2}m^{-2}.

a) Utilizamos directamente la expresión del campo generado por una lámina infinita cargada, que se puede deducir utilizando la ley de Gauss. El campo es perpendicular al plano, y como la densidad superficial de carga es positiva, el campo va dirigido hacia fuera del plano, siendo su módulo:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon}$$

independientemente de la distancia a la que nos encontremos del plano.

Utilizando unidades del SI:

$$\sigma = 1\,\frac{\mu C}{cm^2}\left(\frac{10^{-6}C}{1\mu C}\right)\left(\frac{10^4 cm^2}{1m^2}\right) = 10^{-2}\,\frac{C}{m^2}$$

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon} = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 5{,}65 \cdot 10^8\,\frac{N}{C}$$

b) El campo eléctrico es conservativo: el trabajo realizado por el campo para llevar una carga de un punto a otro solamente depende de la diferencia de potencial entre ambos puntos, no de la trayectoria recorrida entre ambos:

$$W_{1\to 2} = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_2 - V_1) = -5 \cdot 10^{-6} \cdot (-5{,}65 \cdot 10^8 \cdot 0{,}10) = 2{,}83 \cdot 10^2\,J$$

El signo positivo, según convenio, indica que se realiza a favor del campo: el trabajo lo realiza el campo. Una carga positiva se mueve hacia potenciales menores, y se movería alejándose del plano cargado positivamente. El trabajo realizado externamente el campo sería negativo -2,83·10^2 J