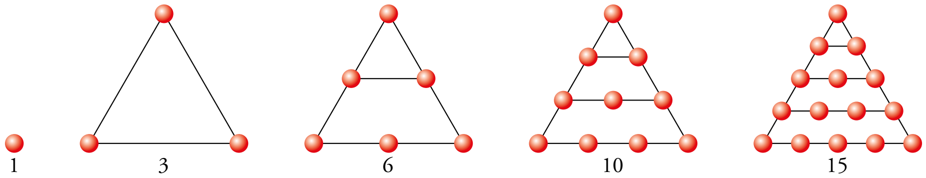
1 LOS NÚMEROS NATURALES Y LOS NÚMEROS ENTEROS

Página 8

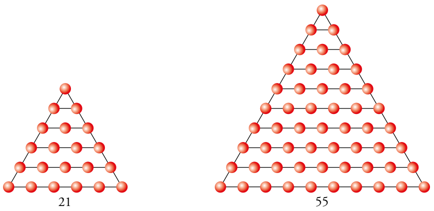
Los pitagóricos: números y geometría

Los pitagóricos estudiaron los números desde el punto de vista teórico, sacando a la luz curiosas propiedades y clasificaciones.

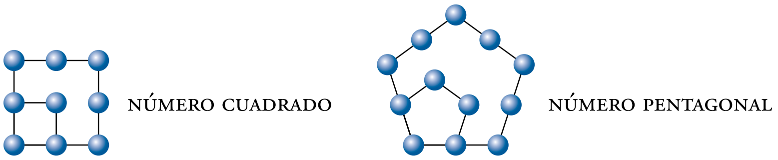
Por ejemplo, a estos números los llamaban triangulares.

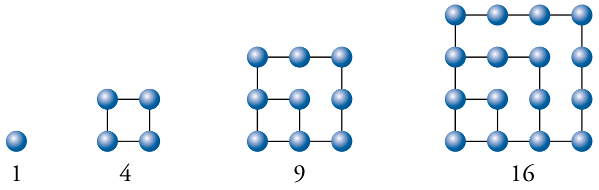


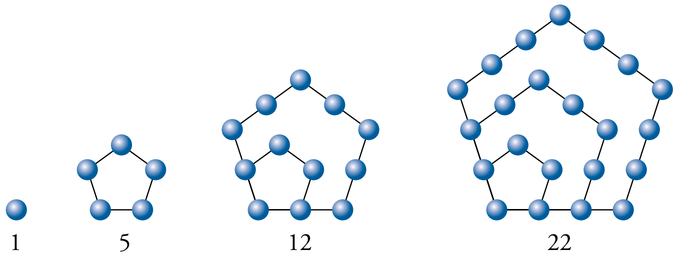
1 **¿Serías capaz de dibujar el siguiente? ¿Y el décimo?**



2 **Teniendo en cuenta lo anterior, dibuja los cuatro primeros números cuadrados y los cuatro primeros pentagonales.**







Página 9

Tener y deber

Una actualización concreta de las dos frases del escrito hindú podría redactarse así:

a) Si te perdonan una deuda de cinco euros, tienes cinco euros más.

b) Si compras a crédito algo que cuesta de cinco euros, tienes cinco euros menos…

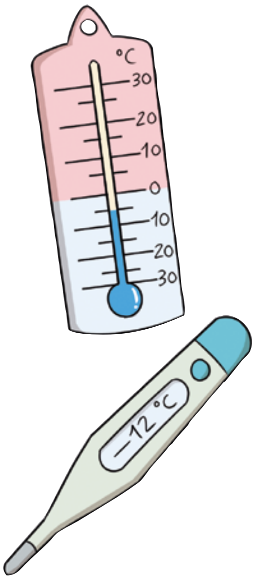
3 **¿Cuál de las siguientes expresiones asignas a cada una de las frases anteriores?**

$$+(+5) = +5 \qquad +(-5) = -5 \qquad -(+5) = -5 \qquad -(-5) = +5$$

a) $-(-5) = +5$ b) $-(+5) = -5$

Y tú, ya los usas

Observa las temperaturas que marcan los termómetros analógicos y digitales.



4 **¿Qué lectura haces de cada uno?**

El analógico marca –5 °C y el digital marca –12 °C.

5 **Dibuja, en termómetros analógicos y en digitales, las siguientes temperaturas:**

a) **Quince grados centígrados.**

b) **Once grados bajo cero.**

Respuesta abierta.

6 **El número negativo –2 se considera mayor que el número negativo –5. ¿Por qué crees que es así? Encuentra una razón para ello.**

Respuesta abierta, por ejemplo: Si debemos 2 € a alguien, tenemos una deuda menor que si le debemos 5 €.

1 ▶ EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Página 11

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

7 **Pasa a forma compleja.**

a) 257'

$$\begin{array}{r|l} 257' & 60 \\ \cline{2-2} 17' & 4^\circ \end{array}$$

257' = …° …'

b) 873 s

$$\begin{array}{r|l} 873\text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} \square\text{ s} & \square\text{ min} \end{array}$$

873 s = … min … s

c) 8 534 s

$$\begin{array}{r|ll} 8\,534\text{ s} & 60 & \\ \cline{2-2} \square\text{ s} & 142\text{ min} & \multicolumn{1}{|l}{60} \\ \cline{3-3} & \square\text{ min} & \square\text{ h} \end{array}$$

8 534 s = … h … min … s

a)

$$\begin{array}{r|l} 257' & 60 \\ \cline{2-2} 17' & 4^\circ \end{array}$$

257' = 4° 17'

b)

$$\begin{array}{r|l} 873\text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} 33\text{ s} & 14\text{ min} \end{array}$$

873 s = 14 min 33 s

c)

$$\begin{array}{r|ll} 8\,534\text{ s} & 60 & \\ \cline{2-2} 14\text{ s} & 142\text{ min} & \multicolumn{1}{|l}{60} \\ \cline{3-3} & 22\text{ min} & 2\text{ h} \end{array}$$

8 534 s = 2 h 22 min 14 s

8 **Pasa 2 horas y 24 minutos a forma incompleja (primero a minutos y después a segundos).**

a) Paso a minutos: 2 h 24 min → (2 · 60 + 24) min = (… + …) min = … min

b) Paso a segundos: 2 h 24 min → (2 · 3 600 + 24 · …) s = … s

a) (2 · 60 + 24) min = (120 + 24) min = 144 min

b) (2 · 3 600 + 24 · 60) s = 8 640 s

2 ▸ LA RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD

Página 14

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Divide, observa y contesta.**

$$\begin{array}{l|l} 173 & 19 \\ \cline{2-2} 02 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 228 & 19 \\ \cline{2-2} \dots & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 516 & 43 \\ \cline{2-2} \dots & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 743 & 43 \\ \cline{2-2} \dots & \dots \end{array}$$

a) ¿Es 173 múltiplo de 19? ¿Y 228?

b) ¿Es 43 divisor de 516? ¿Y de 743?

$$\begin{array}{l|l} 173 & 19 \\ \cline{2-2} 02 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 228 & 19 \\ \cline{2-2} 38 & 12 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 516 & 43 \\ \cline{2-2} 86 & 12 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 743 & 43 \\ \cline{2-2} 313 & 17 \\ 12 & \end{array}$$

a) 173 no es múltiplo de 19 porque la división no es exacta. En cambio, 228 sí es múltiplo de 19.

b) 43 es divisor de 516 porque la división es exacta. En cambio, 43 no es divisor de 743.

2 **Escribe los ocho primeros múltiplos de 13.**

13 - … - … - … - … - … - … - …

13 - 26 - 39 - 52 - 65 - 78 - 91 - 104

3 **Observa y escribe todos los divisores de 42.**

$$\begin{array}{cccccc} \begin{array}{l|l} 42 & 1 \\ \cline{2-2} 00 & 42 \end{array} & \begin{array}{l|l} 42 & 2 \\ \cline{2-2} 02 & 21 \\ 0 & \end{array} & \begin{array}{l|l} 42 & 3 \\ \cline{2-2} 12 & 14 \\ 0 & \end{array} & \xcancel{\begin{array}{l|l} 42 & 4 \\ \cline{2-2} 02 & 10 \end{array}} & \xcancel{\begin{array}{l|l} 42 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 8 \end{array}} & \begin{array}{l|l} 42 & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 7 \end{array} \\ & & & 2 & & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \begin{array}{l|l} 42 & 42 \\ \cline{2-2} 00 & 1 \end{array} & \begin{array}{l|l} 42 & 21 \\ \cline{2-2} 00 & 2 \end{array} & \begin{array}{l|l} 42 & 14 \\ \cline{2-2} 00 & 3 \end{array} & & & \begin{array}{l|l} 42 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\textbf{Divisores de 42:}} \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 42 & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Divisores de 42:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 42 & 21 & 14 & 7 \end{array}$$

4 **Busca todos los múltiplos de 14 comprendidos entre 250 y 300.**

$$\begin{array}{l|l} 250 & 14 \\ \cline{2-2} 110 & 17 \\ 12 & \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 14 \cdot 17 = 238 \\ 14 \cdot 18 = \dots \\ 14 \cdot 19 = \dots \\ 14 \cdot \dots = \dots \\ 14 \cdot \dots = \dots \end{array} \right\} \rightarrow$$

Los múltiplos de 14 comprendidos entre 250 y 300 son: …

$$\left\{ \begin{array}{l} 14 \cdot 17 = 238 \\ 14 \cdot 18 = 252 \\ 14 \cdot 19 = 266 \\ 14 \cdot 20 = 280 \\ 14 \cdot 21 = 294 \end{array} \right\} \rightarrow$$

Los múltiplos de 14 comprendidos entre 250 y 300 son: 252, 266, 288 y 294.

Para practicar

1 **Escribe:**

a) Los cinco primeros múltiplos de 20.

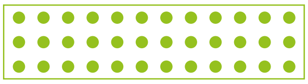
b) Todos los divisores de 20.

a) 20, 40, 60, 80, 100

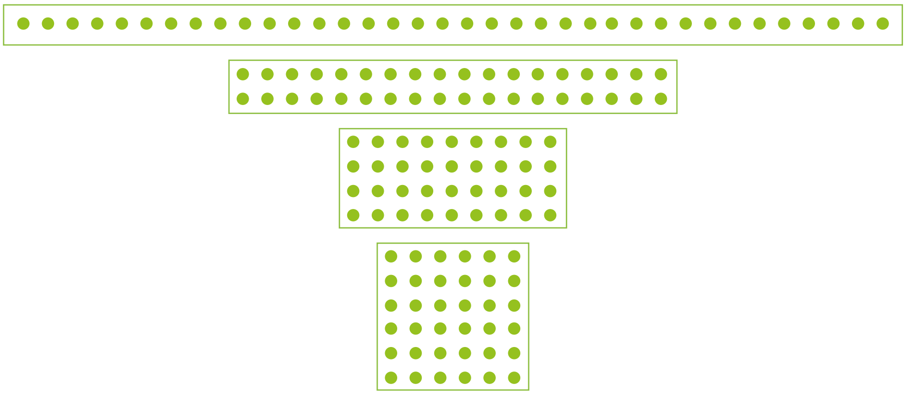
b) 1, 2, 4, 5, 10 y 20

2 **Dibuja todas las formas de representar 36 como número rectangular.**

36 = 3 · 12



¿Qué relación tienen con los divisores de 36?



Las dimensiones de los rectángulos son los divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

3 **Escribe todas las parejas de números cuyo producto es 60.**

1 · 60, 2 · 30, 3 · 20, 4 · 15, 5 · 12 y 6 · 10

4 **Busca:**

a) Los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 150.

b) El primer múltiplo de 13 después de 1 000.

a) 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147

b) 1 001

5 **Copia, rodea los pares y tacha los múltiplos de 3.**

45 - 67 - 74 - 96 - 143 - 138 - 251 - 309 - 488

$\cancel{45} - 67 - \boxed{74} - \boxed{\cancel{96}} - 143 - \boxed{\cancel{138}} - 251 - \cancel{309} - \boxed{488}$

6 **Qué valores debe tomar la cifra *a* para que el número:**

$\boxed{5}\boxed{6}\boxed{a}$

a) Sea múltiplo de 2.	**b) Sea múltiplo de 3.**	**c) Sea múltiplo de 5.**	**d) Sea múltiplo de 9.**
a) a = 0, 2, 4, 6, 8	b) a = 1, 4, 7	c) a = 0, 5	d) a = 7

7 **Selecciona, entre estos números, los múltiplos de 11.**

286 611 913 1 804 2 444 3 333

Múltiplos de 11: 286, 913, 1 804 y 3 333.

8 **Observa, copia y completa en tu cuaderno.**

a) $n = 2 \cdot 3 \cdot k = 6 \cdot k \rightarrow$ Si un número, *n*, es múltiplo de 2 y de 3, también es múltiplo de 6.

b) $m = 2 \cdot 5 \cdot k = 10 \cdot k \rightarrow$ Si un número, *m*, es múltiplo de 2 y de 5, también es múltiplo de…

c) $p = 15 \cdot k = 3 \cdot 5 \cdot k \rightarrow$ Si un número, *p*, es múltiplo de 15, también lo es de … y de…

b) Si un número, *m,* es múltiplo de 2 y de 5, también es múltiplo de 10.

c) Si un número, *p,* es múltiplo de 15, también lo es de 3 y de 5.

3 ▸ NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Página 15

Para practicar

1 Separa, entre los siguientes números, los primos de los compuestos.

29 39 57 83 91 101 111 113 243 341

Primos: 29, 83, 101, 113

Compuestos: 39, 57, 91, 111, 243, 341

2 Copia y completa los procesos de descomposición factorial.

$$\begin{array}{r|l} 2\ 9\ 4 & 2 \\ \square\square\square & 3 \\ \square\square & 7 \\ \square & 7 \\ \square & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 495 & \square \\ 165 & \square \\ 55 & \square \\ 11 & \square\square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 294 = \square \cdot \square \cdot \square^2 \\ 495 = \square^2 \cdot \square \cdot \square\square \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \\ 495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \end{array}$$

3 Descompón estos números en factores primos.

a) 84 **b)** 130 **c)** 160 **d)** 594

e) 720 **f)** 975 **g)** 2 340 **h)** 5 220

a) $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

b) $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$

c) $160 = 2^5 \cdot 5$

d) $594 = 2 \cdot 3^3 \cdot 11$

e) $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

f) $975 = 3 \cdot 5^2 \cdot 13$

g) $2\,340 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$

h) $5\,220 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 29$

4 Escribe factorizados sin hacer ninguna operación:

a) Tres múltiplos de 12 = $2^2 \cdot 3$.

b) Todos los divisores de 75 = $3 \cdot 5 \cdot 5$.

a) Por ejemplo: $2^2 \cdot 3 \cdot 2$; $2^2 \cdot 3 \cdot 3$; $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

b) $3 \cdot 5 \cdot 5$; $5 \cdot 5$; $3 \cdot 5$; 5; 3; 1

5 Teniendo en cuenta que $m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $n = 2^3 \cdot 3$, escribe:

a) Tres múltiplos comunes de m y n.

b) Tres divisores comunes de m y n.

a) Por ejemplo: $2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $2^4 \cdot 3 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

b) Por ejemplo: 2; 3; $2^2 \cdot 3$

4 ▶ MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE DOS O MÁS NÚMEROS

Página 16

Para practicar

1 Calcula mentalmente.

a) mín. c. m. (3, 5) **b) mín. c. m. (6, 11)**

c) mín. c. m. (10, 15) **d) mín. c. m. (10, 25)**

e) mín. c. m. (30, 40) **f) mín. c. m. (50, 100)**

a) 15 b) 66 c) 30 d) 50 e) 120 f) 100

2 Calcula.

a) mín. c. m. (18, 24) **b) mín. c. m. (21, 35)**

c) mín. c. m. (72, 90) **d) mín. c. m. (90, 120)**

e) mín. c. m. (60, 72, 90) **f) mín. c. m. (50, 75, 100)**

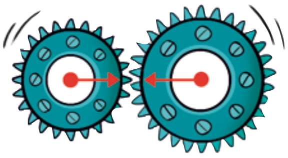
a) 72 b) 105 c) 360 d) 360 e) 360 f) 300

3 Cierto supermercado hace inventario cada 36 días y recoloca los expositores cada 24 días. ¿Cada cuánto tiempo coinciden ambos trabajos en el mismo día?

mín. c. m. (36, 24) = 72

Cada 72 días coindicen ambos trabajos.

4 Dos ruedas, una de 24 dientes y la otra de 32, giran acopladas al poner en marcha un engranaje. ¿Cuántas vueltas dará cada una hasta quedar enfrentadas en la posición inicial?



mín. c. m. (24, 32) = 96

$96 = 24 \cdot 4 = 32 \cdot 3$

Vuelven a coincidir en la posición inicial después de que la rueda de 24 dientes dé 4 vueltas y la rueda de 32 dientes dé 3 vueltas.

5 ▶ MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE DOS O MÁS NÚMEROS

Página 17

Para practicar

1 **Calcula mentalmente.**

a) máx. c. d. (4, 6) **b) máx. c. d. (6, 8)**

c) máx. c. d. (5, 10) **d) máx. c. d. (15, 20)**

e) máx. c. d. (18, 24) **f) máx. c. d. (50, 75)**

a) 2 b) 2 c) 5 d) 5 e) 6 f) 25

2 **Una hortelana destina a semillero una parcela rectangular de 248 cm × 250 cm. La quiere dividir en cuadrados, todos iguales y lo más grandes posible.**

¿Cuáles serán las dimensiones de cada semillero?

máx. c. d. (248, 250) = 2

Las dimensiones de cada semillero serán cuadrados de 2 cm de lado.

3 **Calcula.**

a) máx. c. d. (24, 36) **b) máx. c. d. (28, 42)**

c) máx. c. d. (63, 99) **d) máx. c. d. (90, 126)**

e) máx. c. d. (165, 275) **f) máx. c. d. (360, 450)**

a) 12 b) 14 c) 9 d) 18 e) 55 f) 90

4 **Un almacenista desea envasar 885 litros de aceite de oliva y 705 litros de aceite de girasol, en garrafas iguales y lo más grandes posible. ¿Cuál debe ser la capacidad de las garrafas para que todas queden llenas y sin que sobre aceite?**

máx. c. d. (885, 705) = 15

La capacidad de las garrafas debe ser 15 litros.

6 ▸ EL CONJUNTO $\mathbb{Z}$ DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Página 18

Para practicar

1 **Escribe el valor absoluto y el opuesto de cada número.**

a) -3 **b)** $+8$ **c)** -11 **d)** $+23$ **e)** -37 **f)** $+60$

a) $|-3| = 3$. Opuesto de $(-3) \rightarrow +3$

b) $|+8| = 8$. Opuesto de $(+8) \rightarrow -8$

c) $|-11| = 11$. Opuesto de $(-11) \rightarrow +11$

d) $|+23| = 23$. Opuesto de $(+23) \rightarrow -23$

e) $|-37| = 37$. Opuesto de $(-37) \rightarrow +37$

f) $|+60| = 60$. Opuesto de $(+60) \rightarrow -60$

2 **Ordena de menor a mayor.**

$$-7,\ -13,\ +8,\ -1,\ +1,\ +5,\ 0,\ +10,\ -24$$

$$-24 < -13 < -7 < -1 < 0 < +1 < +5 < +8 < +10$$

3 **¿Verdadero o falso?**

a) Cualquier número entero es también natural.

b) Cualquier número natural es entero.

c) Solo los negativos tienen opuesto.

d) Dos números enteros opuestos tienen el mismo valor absoluto.

a) Falso. Los números negativos son enteros pero no naturales.

b) Verdadero.

c) Falso. Todos los números tienen opuesto.

d) Verdadero. $|a| = |-a| = a$

7 OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

Página 19

Para fijar ideas

1 Lee, reflexiona y completa en tu cuaderno.

a) Si me dan 5 € y después me dan 3 €, tendré 8 € más.

+5 + 3 = …

c) Si me dan 10 € y me quitan 3 €, tendré … € …

+10 – 3 = …

b) Si gasto 4 € y después gasto 2 €, tendré … € menos.

–4 – 2 = …

d) Si me dan 3 € y gasto 7 €, tendré … € …

+3 – 7 = …

a) Si me dan 5 € y después me dan 3 €, tendré 8 € más.

+5 + 3 = +8

b) Si gasto 4 € y después gasto 2 €, tendré 6 € menos.

–4 – 2 = –6

c) Si me dan 10 € y me quitan 3 €, tendré 7 € más.

+10 – 3 = +7

d) Si me dan 3 € y gasto 7 €, tendré 4 € menos.

+3 – 7 = –4

2 Copia y completa para resolver la misma expresión de dos formas diferentes.

3 – 7 – 5 + 8 = ☐ – 5 + 8 = ☐ + 8 = …

3 – 7 – 5 + 8 = 3 + 8 – 7 – 5 = +11 – ☐ = …

3 – 7 – 5 + 8 = –4 – 5 + 8 = –9 + 8 = –1

3 – 7 – 5 + 8 = 3 + 8 – 7 – 5 = +11 – 12 = –1

Para practicar

1 Calcula mentalmente.

a) 5 – 7 **b) 2 – 9** **c) –1 – 9** **d) –12 + 17** **e) –22 + 10** **f) –12 – 13**

a) –2 b) –7 c) –10 d) 5 e) –12 f) –25

2 Resuelve.

a) 10 – 3 + 5 **b) 2 – 9 + 1** **c) 16 – 4 – 6**

d) 7 – 10 – 3 **e) –7 – 8 + 5** **f) –5 + 8 + 4**

g) –8 + 2 + 3 **h) –1 – 2 – 3** **i) –7 – 3 – 4**

a) 12 b) –6 c) 6

d) –6 e) –10 f) +7

g) –3 h) –6 i) –14

3 **Calcula.**

a) $3 - 7 + 2 - 5$

b) $2 - 6 + 9 - 3 + 4$

c) $7 - 10 - 5 + 4 + 6 - 1$

d) $-6 + 4 - 3 - 2 - 8 + 5$

e) $12 + 5 - 17 - 11 + 20 - 13$

f) $16 - 22 + 24 - 31 + 12 - 15$

a) -7 b) 6 c) 1 d) -10 e) -4 f) -16

Página 20

Para fijar ideas

3 **Copia y completa para resolver la misma expresión de dos formas diferentes.**

a) Quitando primero los paréntesis.

$(7 - 10) - (2 - 5 + 4 - 9) = 7 - \square - 2 + \square - \square + \square = 7 + 5 + 9 - \square - \square - \square = 21 - \square = \ldots$

b) Operando primero dentro de los paréntesis.

$(7 - 10) - (2 - 5 + 4 - 9) = (-3) - (\square - \square) = (-3) - (-\square) = \ldots$

a) $(7 - 10) - (2 - 5 + 4 - 9) = 7 - 10 - 2 + 5 - 4 + 9 = 7 + 5 + 9 - 10 - 2 - 4 = 21 - 16 = 5$

b) $(7 - 10) - (2 - 5 + 4 - 9) = (-3) - (6 - 14) = (-3) - (-8) = -3 + 8 = 5$

Para practicar

4 **Quita paréntesis y calcula.**

a) $(-3) - (+4) - (-8)$

b) $-(-5) + (-6) - (-3)$

c) $(+8) - (+6) + (-7) - (-4)$

d) $-(-3) - (+2) + (-9) + (+7)$

a) $(-3) - (+4) - (-8) = -3 - 4 + 8 = 1$

b) $-(-5) + (-6) - (-3) = 5 - 6 + 3 = 2$

c) $(+8) - (+6) + (-7) - (-4) = 8 - 6 - 7 + 4 = -1$

d) $-(-3) - (+2) + (-9) + (+7) = 3 - 2 - 9 + 7 = -1$

5 **Resuelve quitando los paréntesis.**

a) $(4 - 9) - (5 - 8)$

b) $-(1 - 6) + (4 - 7)$

c) $4 - (8 + 2) - (3 - 13)$

d) $12 + (8 - 15) - (5 + 8)$

e) $22 - (7 - 11 - 3) - 13$

a) $(4 - 9) - (5 - 8) = 4 - 9 - 5 + 8 = 12 - 14 = -2$

b) $-(1 - 6) + (4 - 7) = -1 + 6 + 4 - 7 = 10 - 8 = 2$

c) $4 - (8 + 2) - (3 - 13) = 4 - 8 - 2 - 3 + 13 = 17 - 13 = 4$

d) $12 + (8 - 15) - (5 + 8) = 12 + 8 - 15 - 5 - 8 = 20 - 28 = -8$

e) $22 - (7 - 11 - 3) - 13 = 22 - 7 + 11 + 3 - 13 = 36 - 20 = 16$

6 **Resuelve operando primero dentro de los paréntesis.**

a) $(2 - 6) + (4 - 8)$

b) $(8 - 10) - (12 - 7)$

c) $15 - (2 - 5 + 8) + (6 - 9)$

d) $(8 - 6) - (3 - 7 - 2) + (1 - 8 + 2)$

e) $(5 - 16) - (7 - 3 - 6) - (9 - 13 - 5)$

a) $(2 - 6) + (4 - 8) = (-4) + (-4) = -4 - 4 = -8$

b) $(8 - 10) - (12 - 7) = (-2) - (+5) = -2 - 5 = -7$

c) $15 - (2 - 5 + 8) + (6 - 9) = 15 - (+5) + (-3) = 15 - 5 - 3 = 7$

d) $(8 - 6) - (3 - 7 - 2) + (1 - 8 + 2) = (+2) - (-6) + (-5) = 2 + 6 - 5 = 3$

e) $(5 - 16) - (7 - 3 - 6) - (9 - 13 - 5) = (-11) - (-2) - (-9) = -11 + 2 + 9 = 0$

7 **Resuelve de dos formas, como en el ejemplo.**

- **$10-(13-7)=10-(+6)=10-6=4$**
  $10-(13-7)=10-13+7=17-13=4$

a) $15-(12-8)$ **b) $9-(20-6)$** **c) $8-(15-12)$**

d) $6-(13-2)$ **e) $15-(6-9+5)$** **f) $21-(3-10+11+6)$**

a) $15-(12-8)=15-(+4)=15-4=11$
$15-(12-8)=15-12+8=23-12=11$

b) $9-(20-6)=9-(+14)=9-14=-5$
$9-(20-6)=9-20+6=15-20=-5$

c) $8-(15-12)=8-(+3)=8-3=5$
$8-(15-12)=8-15+12=20-15=5$

d) $6-(13-2)=6-(+11)=6-11=-5$
$6-(13-2)=6-13+2=8-13=-5$

e) $15-(6-9+5)=15-(11-9)=15-(+2)=15-2=13$
$15-(6-9+5)=15-6+9-5=24-11=13$

f) $21-(3-10+11+6)=21-(20-10)=21-(+10)=21-10=11$
$21-(3-10+11+6)=21-3+10-11-6=31-20=11$

8 **Calcula.**

a) $7-[1+(9-13)]$ **b) $-9+[8-(13-4)]$** **c) $12-[6-(15-8)]$**

d) $-17+[9-(3-10)]$ **e) $2+[6-(4-2+9)]$** **f) $15-[9-(5-11+7)]$**

a) $7-[1+(9-13)]=7-[1+9-13]=7-1-9+13=20-10=10$

b) $-9+[8-(13-4)]=-9+[8-(+9)]=-9+[8-9]=-9+[-1]=-9-1=-10$

c) $12-[6-(15-8)]=12-[6-15+8]=12-6+15-8=27-14=13$

d) $-17+[9-(3-10)]=-17+[9-(-7)]=-17+[9+7]=-17+16=-1$

e) $2+[6-(4-2+9)]=2+[6-4+2-9]=2+6-4+2-9=10-13=-3$

f) $15-[9-(5-11+7)]=15-[9-(12-11)]=15-[9-(+1)]=15-[9-1]=$
$=15-[+8]=15-8=7$

9 **Resuelve.**

a) $(2-9)-[5+(8-12)-7]$ **b) $13-[15-(6-8)+(5-9)]$**

c) $8-[(6-11)+(2-5)-(7-10)]$ **d) $(13-21)-[12+(6-9+2)-15]$**

e) $[4+(6-9-13)]-[5-(8+2-18)]$ **f) $[10-(21-14)]-[5+(17-11+6)]$**

a) $(2-9)-[5+(8-12)-7]=(2-9)-[5+(-4)-7]=(2-9)-[5-4-7]=$
$=(-7)-[5-11]=-7-[-6]=-7+6=-1$

b) $13-[15-(6-8)+(5-9)]=13-[15-6+8+5-9]=13-15+6-8-5+9=28-28=0$

c) $8-[(6-11)+(2-5)-(7-10)]=8-[(-5)+(-3)-(-3)]=8-[-5-3+3]=$
$=8-[-8+3]=8-[-5]=8+5=13$

d) $(13-21)-[12+(6-9+2)-15]=(13-21)-[12+6-9+2-15]=$
$=13-21-12-6+9-2+15=37-41=-4$

e) $[4+(6-9-13)]-[5-(8+2-18)]=[4+(6-22)]-[5-(10-18)]=$
$=[4-16]-[5+8]=-12-13=-25$

f) $[10-(21-14)]-[5+(17-11+6)]=[10-21+14]-[5+17-11+6]=$
$=10-21+14-5-17+11-6=35-49=-14$

Página 21

Para practicar

10 **Multiplica.**

a) $(+10)\cdot(-2)$	**b)** $(-4)\cdot(-9)$	**c)** $(-7)\cdot(+5)$	**d)** $(+11)\cdot(+7)$
a) -20	b) 36	c) -35	d) 77

11 **Observa los ejemplos y multiplica de las dos formas que se indican.**

- $\underbrace{(-3)\cdot(+2)}\cdot(-5) = (-6)\cdot(-5) = +30$

  $(-3)\cdot\underbrace{(+2)\cdot(-5)} = (-3)\cdot(-10) = +30$

a) $(-2)\cdot(-3)\cdot(+4)$ **b)** $(-1)\cdot(+2)\cdot(-5)$ **c)** $(+4)\cdot(-3)\cdot(+2)$ **d)** $(-6)\cdot(-2)\cdot(-5)$

a) $(-2)\cdot(-3)\cdot(+4) = (+6)\cdot(+4) = +24$
$(-2)\cdot(-3)\cdot(+4) = (-2)\cdot(-12) = +24$

b) $(-1)\cdot(+2)\cdot(-5) = (-2)\cdot(-5) = +10$
$(-1)\cdot(+2)\cdot(-5) = (-1)\cdot(-10) = +10$

c) $(+4)\cdot(-3)\cdot(+2) = (-12)\cdot(+2) = -24$
$(+4)\cdot(-3)\cdot(+2) = (+4)\cdot(-6) = -24$

d) $(-6)\cdot(-2)\cdot(-5) = (+12)\cdot(-5) = -60$
$(-6)\cdot(-2)\cdot(-5) = (-6)\cdot(+10) = -60$

12 **Divide.**

a) $(-18):(+3)$	**b)** $(-15):(-5)$	**c)** $(+36):(-9)$
d) $(-30):(-10)$	**e)** $(-52):(+13)$	**f)** $(+22):(+11)$
a) -6	b) $+3$	c) -4
d) $+3$	e) -4	f) $+2$

13 **Copia, completa y compara. ¿Qué observas?**

$(+60):[(-30):(-2)] = (+60):[+15] = \square$

$[(+60):(-30)]:(-2) = [\square]:(-2) = \square$

$(+60):[(-30):(-2)] = (+60):[+15] = +4$

$[(+60):(-30)]:(-2) = [-2]:(-2) = +1$

Se observa que la división no es asociativa.

14 **Calcula el valor de** x **en cada caso.**

a) $(-18):x = +6$	**b)** $(+4)\cdot x = -36$	**c)** $x\cdot(-13) = +91$	**d)** $x:(-11) = +5$
a) $x = -3$	b) $x = -9$	c) $x = -7$	d) $x = -55$

Página 22

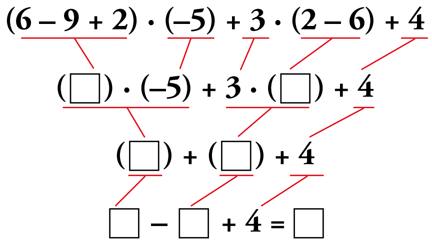
Para fijar ideas

4 **Copia y completa para obtener el valor de la siguiente expresión:**

$(6-9+2)\cdot(-5)+3\cdot(2-6)+4 =$

$= (\square)\cdot(-5)+3\cdot(\square)+4 =$

$= (\square)+(\square)+4 = \square-\square+4 = \square$



$(6-9+2)\cdot(-5)+3\cdot(2-6)+4 = (-1)\cdot(-5)+3\cdot(-4)+4 = (+5)+(-12)+4 = 5-12+4 = -3$

Para practicar

15 Calcula como en los ejemplos.

- **15 – 8 · 3 = 15 – 24 = –9**
- **18 : 6 – 5 = 3 – 5 = –2**

a) 18 – 5 · 3 b) 6 – 4 · 2 c) 7 · 2 – 16 d) 18 – 15 : 3 e) 5 – 30 : 6 f) 20 : 2 – 11

a) 18 – 5 · 3 = 18 – 15 = 3
b) 6 – 4 · 2 = 6 – 8 = –2
c) 7 · 2 – 16 = 14 – 16 = –2
d) 18 – 15 : 3 = 18 – 5 = 13
e) 5 – 30 : 6 = 5 – 5 = 0
f) 20 : 2 – 11 = 10 – 11 = –1

16 Calcula como en el ejemplo.

- **21 – 4 · 6 + 12 : 3 = 21 – 24 + 4 = 25 – 24 = 1**

a) 20 – 4 · 7 + 11 b) 12 – 6 · 5 + 4 · 2 c) 15 – 20 : 5 – 3
d) 6 – 10 : 2 – 14 : 7 e) 5 · 3 – 4 · 4 + 2 · 6 f) 7 · 3 – 5 · 4 + 18 : 6

a) 20 – 4 · 7 + 11 = 20 – 28 + 11 = 31 – 28 = 3
b) 12 – 6 · 5 + 4 · 2 = 12 – 30 + 8 = 20 – 30 = –10
c) 15 – 20 : 5 – 3 = 15 – 4 – 3 = 15 – 7 = 8
d) 6 – 10 : 2 – 14 : 7 = 6 – 5 – 2 = 6 – 7 = –1
e) 5 · 3 – 4 · 4 + 2 · 6 = 15 – 16 + 12 = 27 – 16 = 11
f) 7 · 3 – 5 · 4 + 18 : 6 = 21 – 20 + 3 = 24 – 20 = 4

17 Observa el ejemplo y calcula.

- **(–3) · (–4) + (–6) · 3 = (+12) + (–18) = 12 – 18 = –6**

a) 5 · (–8) – (+9) · 4 b) 32 : (–8) – (–20) : 5 c) (–2) · (–9) + (–5) · (+4)
d) (+25) : (–5) + (–16) : (+4) e) (+6) · (–7) + (–50) : (–2) f) (+56) : (–8) – (–12) · (+3)

a) 5 · (–8) – (+9) · 4 = (–40) – (+36) = –40 – 36 = –76
b) 32 : (–8) – (–20) : 5 = (–4) – (–4) = –4 + 4 = 0
c) (–2) · (–9) + (–5) · (+4) = (+18) + (–20) = 18 – 20 = –2
d) (+25) : (–5) + (–16) : (+4) = (–5) + (–4) = –5 – 4 = –9
e) (+6) · (–7) + (–50) : (–2) = (–42) + (+25) = –42 + 25 = –17
f) (+56) : (–8) – (–12) · (+3) = (–7) – (–36) = –7 + 36 = 29

18 Copia, calcula y completa.

a) 18 – 5 · (3 – 8) = 18 – 5 · (☐) = 18 + ☐ = ☐
b) 4 · (8 – 11) – 6 · (7 – 9) = 4 · (☐) – 6 · (☐) = ☐
c) (4 – 5) · (–3) – (8 – 2) : (–3) = ☐

a) 18 – 5 · (3 – 8) = 18 – 5 · (–5) = 18 – (–25) = 18 + 25 = 43
b) 4 · (8 – 11) – 6 · (7 – 9) = 4 · (–3) – 6 · (–2) = (–12) – (–12) = –12 + 12 = 0
c) (4 – 5) · (–3) – (8 – 2) : (–3) = (–1) · (–3) – (+6) : (–3) = (+3) – (–2) = 3 + 2 = 5

19 Ejercicio resuelto.

20 Calcula.

a) 28 : (–7) – (–6) · [23 – 5 · (9 – 4)] b) (–2) · (7 – 11) – [12 – (6 – 8)] : (–7)

a) 28 : (–7) – (–6) · [23 – 5 · (9 – 4)] = (–4) – (–6) · [23 – 5 · (5)] = –4 + 6 · [23 – 25] =
= –4 + 6 · [–2] = –4 + (–12) = –16

b) (–2) · (7 – 11) – [12 – (6 – 8)] : (–7) = (–2) · (–4) – [12 – (–2)] : (–7) = 8 – [12 + 2] : (–7) =
= 8 – [14] : (–7) = 8 – (–2) = 8 + 2 = 10

8 ▶ POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS

Página 24

Para practicar

1 Escribe en forma de producto y calcula.

a) $(-5)^2$ **b)** $(-10)^5$ **c)** $(-8)^3$

a) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25$

b) $(-10)^5 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) = -100\,000$

c) $(-8)^3 = (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) = -512$

2 Calcula con ayuda de la calculadora de cuatro operaciones como en el ejemplo.

- $12^5 \rightarrow \boxed{1}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=} \rightarrow \boxed{248832}$

a) $(-11)^3$ **b)** 17^5 **c)** $(-27)^4$

a) $(-11)^3 = -1\,331$

b) $17^5 = 1\,419\,857$

c) $(-27)^4 = 531\,441$

3 Reduce a una sola potencia como en los ejemplos.

- $2^5 \cdot (-3)^5 = [2 \cdot (-3)]^5 = (-6)^5$
- $(-15)^4 : (+3)^4 = [(-15) : (+3)]^4 = (-5)^4 = 5^4$

a) $3^2 \cdot 4^2$ **b)** $(-2)^3 \cdot 4^3$ **c)** $(-5)^2 \cdot (+3)^2$

d) $(+15)^3 : (-5)^3$ **e)** $(-20)^2 : (-4)^2$ **f)** $(-18)^4 : (+6)^4$

a) $3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2$

b) $(-2)^3 \cdot 4^3 = [(-2) \cdot 4]^3 = (-8)^3$

c) $(-5)^2 \cdot (+3)^2 = [(-5) \cdot (+3)]^2 = (-15)^2$

d) $(+15)^3 : (-5)^3 = [(15) : (-5)]^3 = (-3)^3 = -3^3$

e) $(-20)^2 : (-4)^2 = [(-20) : (-4)]^2 = 5^2$

f) $(-18)^4 : (+6)^4 = [(-18) : (+6)]^4 = (-3)^4 = 3^4$

4 Reduce aplicando la propiedad $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

a) $x^2 \cdot x^3$ **b)** $a^4 \cdot a^4$ **c)** $z^5 \cdot z$

a) $x^2 \cdot x^3 = x^5$

b) $a^4 \cdot a^4 = a^8$

c) $z^5 \cdot z = z^6$

5 Reduce a una sola potencia.

a) $(-2)^5 \cdot 2^7$ **b)** $(-2)^3 \cdot (+2)^6$ **c)** $(-12)^2 \cdot (+12)^2$ **d)** $(+9)^4 \cdot (-9)^2$

a) $(-2)^5 \cdot 2^7 = (-2)^{12} = 2^{12}$

b) $(-2)^3 \cdot (+2)^6 = (-2)^9$

c) $(-12)^2 \cdot (+12)^2 = 12^4$

d) $(+9)^4 \cdot (-9)^2 = 9^6$

6 Reduce aplicando la propiedad $a^m : a^n = a^{m-n}$.

a) $x^7 : x^4$ **b)** $a^7 : a^2$ **c)** $z^8 : z^3$

a) $x^7 : x^4 = x^3$

b) $a^7 : a^2 = a^5$

c) $z^8 : z^3 = z^5$

7 Reduce a una potencia única.

a) $(-7)^8 : (-7)^5$ **b)** $10^9 : (-10)^4$ **c)** $12^4 : (-12)$ **d)** $(-4)^{10} : (+4)^6$

a) $(-7)^8 : (-7)^5 = -7^3$

b) $10^9 : (-10)^4 = 10^5$

c) $12^4 : (-12) = -12^3$

d) $(-4)^{10} : (+4)^6 = 4^4$

8 Aplica la propiedad $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, y reduce.

a) $(x^3)^2$ **b)** $(a^3)^3$ **c)** $(z^6)^3$

a) $(x^3)^2 = x^6$

b) $(a^3)^3 = a^9$

c) $(z^6)^3 = z^{18}$

9 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $(3^2)^4 = 3^{\square}$ **b)** $[(-2)^4]^3 = (-2)^{\square}$ **c)** $[(+5)^2]^2 = (+5)^{\square}$ **d)** $[(-6)^3]^5 = (-6)^{\square}$

a) $(3^2)^4 = 3^8$ b) $[(-2)^4]^3 = (-2)^{12}$ c) $[(+5)^2]^2 = (+5)^4$ d) $[(-6)^3]^5 = (-6)^{15}$

10 Reduce como en el ejemplo.

- $(a^6 \cdot a^4) : a^7 = a^{10} : a^7 = a^3$

a) $(x^5 \cdot x^2) : x^4$ **b)** $m^7 : (m^2 \cdot m^3)$

c) $(a \cdot a^6) : (a^2 \cdot a^4)$ **d)** $(z^5 \cdot z^3) : (z^4 \cdot z^2)$

a) $(x^5 \cdot x^2) : x^4 = x^3$ b) $m^7 : (m^2 \cdot m^3) = m^7 : m^5 = m^2$

c) $(a \cdot a^6) : (a^2 \cdot a^4) = a^7 : a^6 = a$ d) $(z^5 \cdot z^3) : (z^4 \cdot z^2) = z^8 : z^6 = z^2$

11 Opera y calcula.

a) $10^6 : (5^4 \cdot 2^4)$

b) $(-12)^7 : [(-3)^5 \cdot 4^5]$

c) $[(-9)^5 \cdot (-2)^5] : 18^4$

d) $[5^7 \cdot (-4)^7] : 20^4$

a) $10^6 : (5^4 \cdot 2^4) = 10^6 : (5 \cdot 2)^4 = 10^6 : (10)^4 = 10^2 = 100$

b) $(-12)^7 : [(-3)^5 \cdot 4^5] = (-12)^7 : [(-3) \cdot 4]^5 = (-12)^7 : (-12)^5 = (-12)^2 = 144$

c) $[(-9)^5 \cdot (-2)^5] : 18^4 = [(-9) \cdot (-2)]^5 : 18^4 = 18^5 : 18^4 = 18$

d) $[5^7 \cdot (-4)^7] : 20^4 = [5 \cdot (-4)]^7 : 20^4 = (-20)^7 : 20^4 = (-20)^3 = -8\,000$

9 ▸ RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO ENTERO

Página 25

Para practicar

1 Calcula, si existen, estas raíces.

a) $\sqrt{(+1)}$ **b)** $\sqrt{(-1)}$ **c)** $\sqrt{(+25)}$ **d)** $\sqrt{(-36)}$ **e)** $\sqrt{(+100)}$

f) $\sqrt{(-100)}$ **g)** $\sqrt{(-169)}$ **h)** $\sqrt{(+400)}$ **i)** $\sqrt{(-900)}$

a) ±1 b) No existe. c) ±5 d) No existe. e) ±10

f) No existe. g) No existe. h) ±20 i) No existe.

2 Reflexiona y calcula, si existen.

a) $\sqrt[3]{27}$ **b)** $\sqrt[3]{-27}$ **c)** $\sqrt[4]{16}$

d) $\sqrt[4]{-16}$ **e)** $\sqrt[5]{32}$ **f)** $\sqrt[4]{-32}$

g) $\sqrt[7]{-1}$ **h)** $\sqrt[8]{-1}$ **i)** $\sqrt[6]{+64}$

a) 3 b) –3 c) ±2

d) No existe. e) 2 f) No existe.

g) –1 h) No existe. i) ±2

Página 26

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sistemas de numeración

1 Observa un número escrito en dos sistemas de numeración diferente:

Sistema de numeración egipcio.

Sistema de numeración maya.

a) Explica el significado de los signos en cada caso.

b) Escribe en ambos sistemas el número anterior y el posterior.

a)

Egipcio

 = 100 unidades  = 10 unidades  = 1 unidad

El número es 100 + 30 + 4 = 134

Maya

• = 1 unidad ▬ = 5 unidades

20 · (5 + 1)

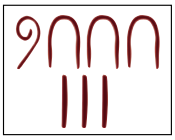
5 · 2 + 4

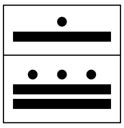
El número es 120 + 14 = 134

b)

Egipcio Maya

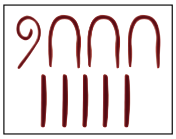
133 →

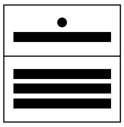




Egipcio Maya

135 →





2 **En la siguiente serie puedes ver los diez primeros números naturales, escritos en el sistema binario (solo utiliza los signos 1 y 0):**

0 - 1 - 10 - 11 - 100 - 101 - 110 - 111 - 1000 - 1001

Escribe los diez siguientes.

1010 - 1011 - 1100 - 1101 - 1110 - 1111 - 10000 - 10001 - 10010 - 10011

3 **Copia, calcula y completa.**

a) 23 min 45 s → … s
b) 1 h 13 min 27 s → … s
c) 587 min → … h … min
d) 6 542 s → … h … min … s

a) 1 425 s
b) 4 407 s
c) 9 h 47 min
d) 1 h 49 min 2 s

Múltiplos y divisores

4 **Responde y justifica tu respuesta.**

a) ¿Es 132 múltiplo de 11?
b) ¿Es 11 divisor de 132?
c) ¿Es 574 múltiplo de 14?
d) ¿Es 27 divisor de 1 542?

a) Sí, 132 = 12 · 11
b) Sí, 132 : 11 = 12
c) Sí, 574 = 41 · 14
d) No, 1 542 = 57 · 27 + 3 → división con resto

5 **Calcula.**

a) Los cinco primeros múltiplos de 10.
b) Los cinco primeros múltiplos de 31.
c) Todos los divisores de 23.
d) Todos los divisores de 32.

a) 10, 20, 30, 40 y 50
b) 31, 62, 93, 124 y 155
c) 1 y 23
d) 1, 2, 4, 8, 16 y 32

6 **Copia estos números y selecciona:**

66 71 90 103 105
156 220 315 421 825
1 000 2 007 4 829 5 511 6 005

a) Los múltiplos de 2.
b) Los múltiplos de 3.
c) Los múltiplos de 5.
d) Los múltiplos de 11.

a) 66, 90, 156, 220, 1 000
b) 66, 90, 105, 156, 315, 825, 2 007, 5 511
c) 90, 105, 220, 315, 825, 1 000, 6 005
d) 66, 220, 4 829, 5 511

Números primos y compuestos

7 **Escribe.**

a) Los diez primeros números primos.

b) Los números primos comprendidos entre 50 y 60.

c) Los números primos comprendidos entre 80 y 100.

d) Los tres primeros primos mayores que 100.

a) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29

b) 53 y 59

c) 83, 89 y 97

d) 101, 103 y 107

8 **Copia y completa para descomponer los siguientes números en factores primos.**

$$\begin{array}{r|l} 1\,4\,0\,0 & 2 \\ 7\,0\,0 & 2 \\ \square\square\square & 2 \\ \square\square\square & \square \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,4\,8\,5 & \square \\ \square\square\square & \square \\ \square\square\square & \square \\ \square\square & \square \\ \square\square & 11 \\ \square & \end{array}$$

$$\mathbf{1\,400 = 2^{\square} \cdot \square^{\square} \cdot \square} \qquad \mathbf{1\,485 = \square^{\square} \cdot \square \cdot 11}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,4\,0\,0 & 2 \\ 7\,0\,0 & 2 \\ 3\,5\,0 & 2 \\ 1\,7\,5 & 5 \\ 3\,5 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,4\,8\,5 & 3 \\ 4\,9\,5 & 3 \\ 1\,6\,5 & 3 \\ 5\,5 & 5 \\ 1\,1 & 1\,1 \\ 1 & \end{array}$$

$1\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ $\qquad$ $1\,485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$

9 **Descompón en el máximo número de factores.**

a) 378 **b) 1 144** **c) 1 872**

a) $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$

b) $1\,144 = 2^3 \cdot 11 \cdot 13$

c) $1\,872 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

10 **Calcula mentalmente.**

a) mín. c. m. (2, 3) **b) mín. c. m. (6, 9)** **c) mín. c. m. (4, 10)**

d) mín. c. m. (6, 10) **e) mín. c. m. (6, 12)** **f) mín. c. m. (12, 18)**

a) mín. c. m. (2, 3) = 6

b) mín. c. m. (6, 9) = 18

c) mín. c. m. (4, 10) = 20

d) mín. c. m. (6, 10) = 30

e) mín. c. m. (6, 12) = 12

f) mín. c. m. (12, 18) = 36

11 **Calcula.**

a) mín. c. m. (12, 15) **b) mín. c. m. (24, 60)** **c) mín. c. m. (48, 54)**

d) mín. c. m. (90, 150) **e) mín. c. m. (6, 10, 15)** **f) mín. c. m. (8, 12, 18)**

a) 60

b) 120

c) 432

d) 450

e) 30

f) 72

12 **Calcula mentalmente.**

a) máx. c. d. (4, 8) **b) máx. c. d. (6, 9)** **c) máx. c. d. (10, 15)**
d) máx. c. d. (12, 16) **e) máx. c. d. (16, 24)** **f) máx. c. d. (18, 24)**
a) 4 b) 3 c) 5
d) 4 e) 8 f) 6

13 **Calcula.**

a) máx. c. d. (36, 45) **b) máx. c. d. (48, 72)** **c) máx. c. d. (105, 120)**
d) máx. c. d. (135, 180) **e) máx. c. d. (8, 12, 16)** **f) máx. c. d. (45, 60, 105)**
a) 9 b) 24 c) 15
d) 45 e) 4 f) 15

Página 27

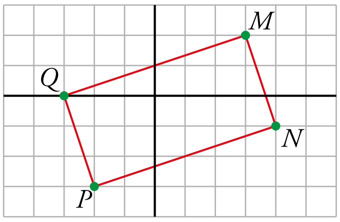
Los números enteros

14 **Ordena de menor a mayor.**

–6, +8, –16, –3, +12, –7, +4, +15, –11

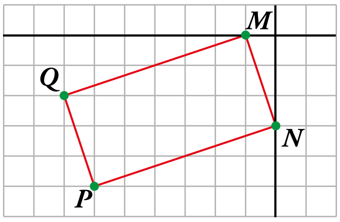
–16 < –11 < –7 < – 6 < –3 < +4 < +8 < +12 < +15

15 **Escribe las coordenadas de los vértices de este rectángulo.**



P = (–2, –3) *Q* = (–3, 0) *M* = (3, 2) *N* = (4, –1)

16 **Dibuja un rectángulo igual que el anterior, con el vértice *M* en el punto (–1, 0), y escribe las coordenadas de los otros tres.**



N = (0, –3) *P* = (–6, –5) *Q* = (–7, –2)

Suma y resta de números enteros

17 **Calcula.**

a) 5 – 8 – 4 + 3 – 6 + 9 **b) 10 – 11 + 7 – 13 + 15 – 6**
c) 9 – 2 – 7 – 11 + 3 + 18 – 10 **d) –7 – 15 + 8 + 10 – 9 – 6 + 11**
a) –1 b) 2
c) 0 d) –8

18 **Opera.**

a) 8 – [(6 – 9) – (7 – 13)] **b) (6 – 15) – [1 – (1 – 5 – 4)]**
c) (2 – 12 + 7) – [(4 – 10) – (5 – 15)] **d) [9 – (5 – 17)] – [11 – (6 – 13)]**
a) 5 b) –18
c) –7 d) 3

Multiplicación y división de números enteros

19 Opera aplicando la regla de los signos.

a) $(-4) \cdot (+7)$ **b)** $(-21) : (+3)$ **c)** $(-6) \cdot (-8)$ **d)** $(+30) : (+5)$

e) $(+10) \cdot (+5)$ **f)** $(-63) : (-9)$ **g)** $(-9) \cdot (-5)$ **h)** $(+112) : (-14)$

a) -28 b) -7 c) $+48$ d) $+6$

e) $+50$ f) $+7$ g) $+45$ h) -8

20 Calcula.

a) $(-2) \cdot [(+3) \cdot (-2)]$ **b)** $[(+5) \cdot (-3)] \cdot (+2)$

c) $(+6) : [(-30) : (-15)]$ **d)** $[(+40) : (-4)] : (-5)$

e) $(-5) \cdot [(-18) : (-6)]$ **f)** $[(-8) \cdot (+3)] : (-4)$

g) $[(-21) : 7] \cdot [8 : (-4)]$ **h)** $[6 \cdot (-10)] : [(-5) \cdot 6]$

a) 12 b) -30 c) 3 d) 2 e) -15 f) 6 g) 6 h) 2

Operaciones combinadas con números enteros

21 Calcula.

a) $5 - 4 \cdot 3$ **b)** $2 \cdot 9 - 7$ **c)** $4 \cdot 5 - 6 \cdot 3$

d) $2 \cdot 8 - 4 \cdot 5$ **e)** $16 - 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 - 19$ **f)** $5 \cdot 6 - 21 - 3 \cdot 7 + 12$

a) -7 b) 11 c) 2

d) -4 e) -21 f) 0

22 Calcula y observa que el resultado varía según la posición de los paréntesis.

a) $17 - 6 \cdot 2$ **b)** $(17 - 6) \cdot 2$ **c)** $(-10) - 2 \cdot (-3)$

d) $[(-10) - 2] \cdot (-3)$ **e)** $(-3) \cdot (+5) + (-2)$ **f)** $(-3) \cdot [(+5) + (-2)]$

a) $17 - 12 = 5$ b) $11 \cdot 2 = 22$ c) $-10 + 6 = -4$

d) $(-12) \cdot (-3) = 36$ e) $-15 - 2 = -17$ f) $(-3) \cdot (+3) = -9$

23 Opera.

a) $5 \cdot [11 - 4 \cdot (11 - 7)]$ **b)** $(-4) \cdot [12 + 3 \cdot (5 - 8)]$

c) $6 \cdot [18 + (-4) \cdot (9 - 4)] - 13$ **d)** $4 - (-2) \cdot [-8 - 3 \cdot (5 - 7)]$

e) $24 - (-3) \cdot [13 - 4 - (10 - 5)]$ **f)** $6 \cdot (7 - 11) + (-5) \cdot [5 \cdot (8 - 2) - 4 \cdot (9 - 4)]$

a) $5 \cdot [11 - 4 \cdot 4] = 5 \cdot [11 - 16] = 5 \cdot (-5) = -25$

b) $(-4) \cdot [12 + 3 \cdot (-3)] = (-4) \cdot [12 - 9] = (-4) \cdot 3 = -12$

c) $6 \cdot [18 + (-4) \cdot 5] - 13 = 6 \cdot [18 - 20] - 13 = 6 \cdot (-2) - 13 = -12 - 13 = -25$

d) $4 + 2 \cdot [-8 - 3 \cdot (-2)] = 4 + 2 \cdot [-8 + 6] = 4 + 2 \cdot [-2] = 4 - 4 = 0$

e) $24 + 3 \cdot [13 - 4 - 5] = 24 + 3 \cdot 4 = 24 + 12 = 36$

f) $6 \cdot (-4) + (-5) \cdot [5 \cdot 6 - 4 \cdot 5] = -24 - 5 \cdot [30 - 20] = -24 - 5 \cdot 10 = -24 - 50 = -74$

Potencias de números enteros

24 Calcula.

a) $(-5)^4$ **b)** $(+4)^5$ **c)** $(-6)^3$

d) $(+7)^3$ **e)** $(-8)^2$ **f)** $(-10)^7$

a) 625 b) $1\,024$ c) -216

d) 343 e) 64 f) $-10\,000\,000$

25 **Expresa como potencia de un único número.**

a) $\mathbf{10^4 : 5^4}$ **b)** $\mathbf{12^7 : (-4)^7}$ **c)** $\mathbf{(-9)^6 : 3^6}$

d) $\mathbf{2^6 \cdot 2^6}$ **e)** $\mathbf{(-4)^5 \cdot (-2)^5}$ **f)** $\mathbf{2^4 \cdot (-5)^4}$

a) $10^4 : 5^4 = (2 \cdot 5)^4 : 5^4 = (2^4 . 5^4) : 5^4 = 2^4$

b) $12^7 : (-4)^7 = (3 \cdot 4)^7 : (-4)^7 = (3^7 \cdot 4^7) : (-4)^7 = -3^7$

e) $(-9)^6 : 3^6 = 3^{12} : 3^6 = 3^6$

d) $2^6 \cdot 2^6 = 2^{12}$

e) $(-4)^5 \cdot (-2)^5 = -(4^5) \cdot (-2)^5 = 4^5 . 2^5 = 2^{10} . 2^5 = 2^{15}$

f) $2^4 . (-5)^4 = 2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4$

26 **Reduce a una sola potencia.**

a) $\mathbf{(x^2)^5}$ **b)** $\mathbf{(m^4)^3}$ **c)** $\mathbf{[a^{10} : a^6]^2}$

d) $\mathbf{(a \cdot a^3)^3}$ **e)** $\mathbf{(x^5 : x^2) \cdot x^4}$ **f)** $\mathbf{(x^6 \cdot x^4) : x^7}$

a) $(x^2)^5 = x^{10}$ b) $(m^4)^3 = m^{12}$ c) $[a^{10} : a^6]^2 = a^8$

d) $(a \cdot a^3)^3 = a^{12}$ e) $(x^5 : x^2) \cdot x^4 = x^7$ f) $(x^6 \cdot x^4) : x^7 = x^3$

Raíz cuadrada de números enteros

27 **Calcula.**

a) $\mathbf{\sqrt{49}}$ **b)** $\mathbf{\sqrt{7^2}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{-49}}$

d) $\mathbf{\sqrt{15^2}}$ **e)** $\mathbf{\sqrt{225}}$ **f)** $\mathbf{\sqrt{-225}}$

g) $\mathbf{\sqrt{2\,500}}$ **h)** $\mathbf{\sqrt{50^2}}$ **i)** $\mathbf{\sqrt{-2\,500}}$

a) ±7 b) ±7 c) No existe.

d) ±15 e) ±15 f) No existe.

g) ±50 h) ±50 i) No existe.

28 **Observa el ejemplo y reduce.**

- $\mathbf{\sqrt{x^6} = \sqrt{x^{3 \cdot 2}} = \sqrt{(x^3)^2} = x^3}$

a) $\mathbf{\sqrt{(x^2)^2}}$ **b)** $\mathbf{\sqrt{(m^3)^2}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{(a^4)^2}}$

d) $\mathbf{\sqrt{x^4}}$ **e)** $\mathbf{\sqrt{m^6}}$ **f)** $\mathbf{\sqrt{a^8}}$

a) $\sqrt{(x^2)^2} = x^2$ b) $\sqrt{(m^3)^2} = m^3$ c) $\sqrt{(a^4)^2} = a^4$

d) $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = x^2$ e) $\sqrt{m^6} = \sqrt{(m^3)^2} = m^3$ f) $\sqrt{a^8} = \sqrt{(a^4)^2} = a^4$

Página 28

Raíces de índice superior a dos

29 **Observa el ejemplo y calcula.**

- $\mathbf{\sqrt[3]{-125} = -5 \rightarrow}$ **porque** $\mathbf{(-5^3) = -125}$

a) $\mathbf{\sqrt[3]{1}}$ **b)** $\mathbf{\sqrt[3]{-1}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt[3]{27}}$

d) $\mathbf{\sqrt[3]{-27}}$ **e)** $\mathbf{\sqrt[3]{216}}$ **f)** $\mathbf{\sqrt[3]{-216}}$

a) $\sqrt[3]{1} = 1 \rightarrow$ porque $(1)^3 = 1$ b) $\sqrt[3]{-1} = -1 \rightarrow$ porque $(-1)^3 = -1$

c) $\sqrt[3]{27} = 3 \rightarrow$ porque $(3)^3 = 27$ d) $\sqrt[3]{-27} = -3 \rightarrow$ porque $(-3)^3 = -27$

e) $\sqrt[3]{216} = 6 \rightarrow$ porque $(6)^3 = 216$ f) $\sqrt[3]{-216} = -6 \rightarrow$ porque $(-6)^3 = -216$

Reflexiona, decide, aplica

30 Marta ha comprado varios balones por 69 €. El precio de un balón era un número exacto de euros, sin decimales. ¿Cuántos balones ha comprado y cuánto costaba cada balón?

Descomponemos 69 en factores primos, para ver cuántos balones compró y cuánto pagó por cada balón:

$$69 = 3 \cdot 23$$

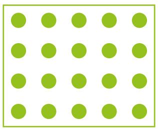
Así, Marta pudo comprar 3 balones a 23 € cada balón, o pudo comprar 23 balones a 3 € cada uno.

31 Una tienda de ropa pone a la venta una partida de camisetas, todas del mismo precio. El primer día vende unas cuantas por valor de 221 € y el segundo día unas pocas más por valor de 272 €. ¿Cuál crees que es el precio de una camiseta?

máx. c. d. (272, 221) = 17

El precio de una camiseta es de 17 € ya que 17 es el único divisor que tienen en común 272 y 221, a parte del 1.

32 Un grupo de 20 personas se pueden organizar en un número exacto de filas y columnas. Por ejemplo, cuatro filas y cinco columnas.



Sin embargo, no se puede hacer lo mismo con un grupo de 13 personas, que solo se pueden poner en una única fila.

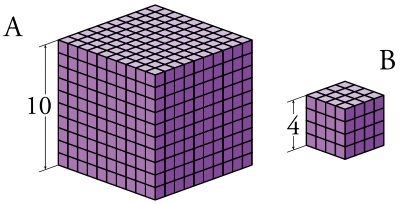
Busca todos los números comprendidos entre 150 y 170 que solo se puedan organizar en una única fila.

El problema nos está pidiendo los números primos que hay entre 150 y 170.

Estos son: 151 - 157 - 163 - 167

Interpreta, describe, exprésate

33 Piensa en dos cubos, uno de arista 10, y otro de arista 4, construidos con cubitos unitarios de arista 1.

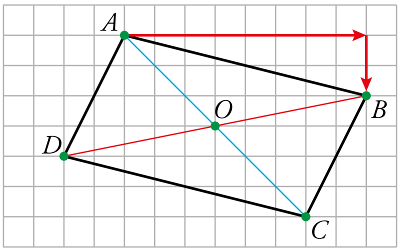


Indica cuál o cuáles de las siguientes expresiones responde a la pregunta: ¿Cuántos cubos como el B se podrían formar con los cubitos del A?

a) $10^4 : 4^4$ **b)** $10^3 : 4^3$ **c)** $(10 : 4)^4$ **d)** $(10 : 4)^3$

b) $10^3 : 4^3$ y d) $(10 : 4)^3$

34 **En el siguiente paralelogramo definimos, con dos números enteros, el desplazamiento que nos lleva desde el punto A al punto B.**



Desplazamiento desde A hasta B

$$\downarrow$$

[+8, –2]

a) ¿Cómo definiríamos, con el mismo código, el desplazamiento desde B hasta A?

b) ¿De qué vértice a qué vértice irías con el desplazamiento [–2, –4]?

c) Expresa, con el mismo código, los desplazamientos que llevan desde el centro O a cada uno de los vértices.

a) Desplazamiento desde B hasta $A \rightarrow [-8, +2]$

b) Nos desplazaríamos desde A hasta D y, también, desde B hasta C.

c) Desplazamiento desde O hasta $A \rightarrow [-3, +3]$

Desplazamiento desde O hasta $B \rightarrow [+5, +1]$

Desplazamiento desde O hasta $C \rightarrow [+3, -3]$

Desplazamiento desde O hasta $D \rightarrow [-5, -1]$

Resuelve problemas con números naturales

35 **Una compañía de danza de 156 bailarines y bailarinas hace una coreografía formando filas y columnas. Si en una fila hay 20 más que en una columna, ¿cuántas filas y cuántas columnas son?**

DIVISORES DE 156	1	2	3	4	6	12
	156	78	52	39	26	13

Buscando los divisores de 156, vemos que los únicos que difieren en 20 unidades son 6 y 26, por lo que habrá 6 filas y 26 columnas.

36 **Los miembros de un equipo de atletismo acuerdan regalar a su entrenadora un cronómetro que cuesta 130 €. ¡Lástima que no participen los lanzadores de peso, disco y jabalina! –comenta la capitana–, siendo tres más, nos habría tocado poner 3 € menos a cada uno. ¿Cuántos son para el regalo, sabiendo que a cada uno le toca poner una cantidad entera de euros, sin céntimos?**

Sabemos que el cronómetro vale 130 €.

Si n es el número de atletas, y a son los euros que pone cada atleta podemos escribir:

$$n \cdot a = 130 \rightarrow 130 : n = a$$

Es decir, que queremos encontrar dos divisores de 130 que multiplicados den 130.

$$130 = 130 \cdot 1 = 65 \cdot 2 = 26 \cdot 5 = 13 \cdot 10$$

De entre todas las parejas de divisores tenemos que escoger una, y sabemos que si fueran 3 más pagarían 3 euros menos.

Por tanto:

Son 10 y pagaran 13 € cada uno.

Si fueran 13, pagarían 10 € cada uno.

37 **Se apilan, en una torre, cubos de 30 cm de arista y, al lado, en otra torre, cubos de 36 cm de arista. ¿A qué altura coinciden las cimas de ambas torres?**

mín. c. m. (30, 36) = 180

Las cimas de las torres coincidirán a una altura de 180 cm.

38 **Se desea dividir un terreno rectangular, de 100 m de ancho por 120 m de largo, en parcelas cuadradas lo más grandes posible. ¿Cuánto debe medir el lado de cada parcela?**

máx. c. d. (100, 120) = 20

El lado de cada parcela debe medir 20 m.

39 **Un rollo de cable mide más de 150 m y menos de 200 m. ¿Cuál es su longitud exacta, sabiendo que se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m sin desperdiciar nada?**

mín. c. m. (15, 18) = 90 → El primer múltiplo de 90 comprendido entre 150 y 200 es 180.

La longitud del rollo es de 180 m.

40 **Julia ha formado el cuadrado más pequeño posible uniendo piezas rectangulares de cartulina, de 12 cm por 18 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? ¿Cuántas piezas ha empleado?**

mín. c. m. (12, 18) = 36

(36 cm) : (12 cm) = 3 → Caben 3 anchos del rectángulo en el lado del cuadrado.

(36 cm) : (18 cm) = 2 → Caben 2 largos del rectángulo en el lado del cuadrado.

$3 \cdot 2 = 6$ piezas.

El lado del cuadrado mide 36 cm y se han empleado 6 piezas.

Página 29

41 **En un horno se han fabricado 2 400 magdalenas y 2 640 mantecados, que se desean comercializar en bolsas con el mismo número de unidades y sin mezclar ambos productos. ¿Cuántas magdalenas o cuántos mantecados se pueden poner en cada bolsa, teniendo en cuenta que el número debe ser superior a 15 e inferior a 30?**

$2\,400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$

$2\,640 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

Los divisores comunes de 2 400 y 2 640 que son mayores que 15 y menores que 30 son:

$$2^4 = 16 \qquad 2^3 \cdot 3 = 24 \qquad 2^2 \cdot 5 = 20$$

Se pueden poner 16, 20 o 24 unidades en cada bolsa.

42 **Se han apilado tablones de un grosor de 50 mm y al lado otros tablones de 65 mm. ¿Cuántas tablas van en cada pila si la segunda, con una tabla menos, es un poco más alta?**

$2 \cdot 50 = 100$	$1 \cdot 65 = 65$
$3 \cdot 50 = 150$	$2 \cdot 65 = 130$
$4 \cdot 50 = 200$	$3 \cdot 65 = 195$
$5 \cdot 50 = 250$	$4 \cdot 65 = 260$

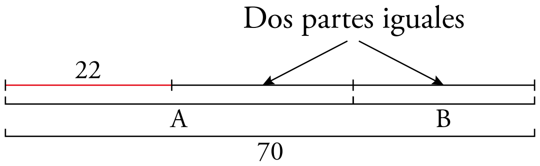
Debemos apilar 5 tablones de 50 mm y 4 tablones de 65 mm. Entonces la segunda pila medirá 10 mm más que la primera.

Resuelve problemas con números enteros

43 ***La suma de dos números enteros es menos cinco (–5) y su diferencia diecinueve (+19). ¿Cuáles son esos números?***

Problema resuelto.

44 **La suma de dos números enteros es –22, y la suma de sus valores absolutos, 70. ¿Cuáles son esos números?**



$70 - 22 = 48$ y $48 : 2 = 24$

$B = 24$ y $A = -(24 + 22) = -46$

Los dos números son 24 y –46.

45 **Si escribes todos los números enteros desde –50 hasta +50, ¿cuántas veces habrás utilizado la cifra 7? ¿Y la cifra 5? ¿Y la cifra 3?**

– La cifra 7 se ha utilizado 10 veces.

– La cifra 5 se ha utilizado 12 veces.

– La cifra 3 se ha utilizado 30 veces.

Problemas «+»

46 **En el obrador de bollería han horneado magdalenas. Las empaquetan en bolsas de media docena y sobran dos.**

Si las hubieran empaquetado en bolsas de 5, habrían sobrado tres, y si las bolsas hubieran sido de 8, habrían quedado justas.

Sabiendo que han llenado poco más de 40 bolsas, ¿cuántas magdalenas han salido del horno?

Sabemos que, si las empaquetan con media docena de magdalenas en cada bolsa sobran 2, entonces:

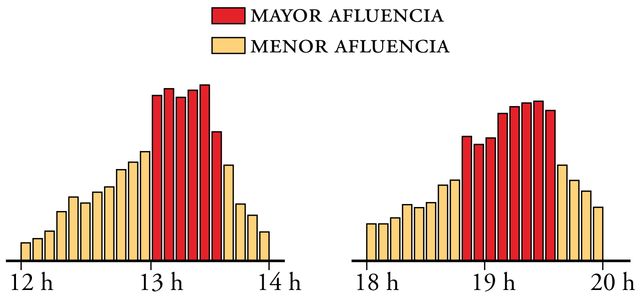
$$40 \cdot 6 + 2 = 242$$

Probando con los siguientes números hasta encontrar el que cumpla todas las condiciones expuestas en el problema encontramos el 248, que es múltiplo de 8, si le quitamos 3 (245) es múltiplo de 5 y, si le quitamos 2 (246) es múltiplo de 6.

Entonces, se han llenado 41 bolsas con 6 magdalenas y han sobrado 2.

Del horno han salido 248 magdalenas.

47 **Un museo decide editar un vídeo para pasarlo de forma ininterrumpida en los tramos horarios de mayor afluencia de visitantes.**



¿Cuál es la máxima duración que puede tener cada pase, para que las sucesivas repeticiones ocupen exactamente los tramos de mayor afluencia, tanto en el horario de la mañana como en el de la tarde?

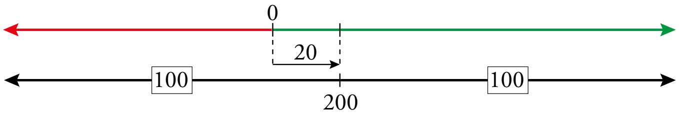
El tramo horario de máxima audiencia de la mañana va de las 13 h a las 13:36 h, y dura 36 minutos.

El tramo horario de máxima audiencia de la tarde va de las 18:48 h a las 19:36 h, y dura 48 minutos.

máx. c. d. (36, 48) = 12

Por tanto, debe durar 12 minutos.

48 **Tengo dos cuentas en el mismo banco. En la primera hay 200 € más que en la segunda, pero si pasara dinero de una a la otra, dejándolas igualadas, cada una quedaría con 20 €. ¿Cuánto hay en cada cuenta?**



Sabemos que, una vez igualado el saldo de las dos cuentas, ambas tendrán 20 €. Así el saldo de las dos cuentas sumadas será 40 €.

Eso nos indica que la segunda cuenta está en números rojos antes de pasar dinero de una a otra.

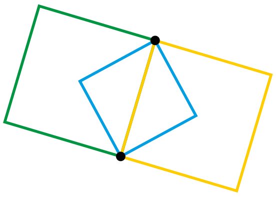
Como en la primera cuenta hay 200 € más que en la segunda cuenta, pasaremos 100 € de una a la otra y las dos quedaran con 20 €.

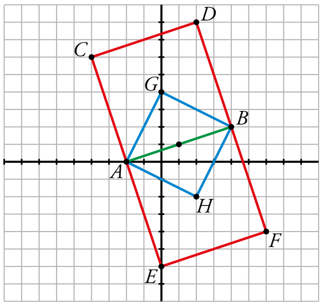
Es decir, la primera cuenta había 20 € + 100 € = 120 € y en la segunda cuenta había 20 € – 100 € = –80 €.

49 **Dibuja unos ejes de coordenadas y los puntos $A(-2, 0)$ y $B(4, 2)$.**

Traza todos los cuadrados que tienen dos vértices en esos puntos (son tres distintos).

Por último, escribe las coordenadas de los vértices de cada uno de esos cuadrados.





$C(-4, 6)$ $D(2, 8)$ $E(0, -6)$ $F(6, -4)$ $G(0, 4)$ $H(2, -2)$

Página 30

INVESTIGA

Números perfectos

- **Entre 25 y 30 hay otro número perfecto. ¿Serás capaz de encontrarlo?**

  Es el número 28, cuyos divisores propios son 1, 2, 4, 7 y 14.

  Efectivamente, 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.

Números amigos

- **El número 220 tiene un amigo. ¿Serás capaz de encontrarlo?**

  El número 284 es amigo de 220.

  Divisores propios de 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110

  Divisores propios de 284: 1, 2, 4, 71 y 142

  La suma de los divisores propios de 220 es 284 y la suma de los divisores propios de 284 es 220.

Página 31

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

No es como parece

- **Tres peregrinos se encuentran en un cruce de caminos y se sientan a comer. Uno aporta 5 tortas; otro, 4 tortas, y el tercero, que no tiene tortas, paga a sus compañeros con 9 monedas. ¿Cómo deben distribuirse las monedas?**

  Se comen 9 tortas entre los tres, es decir, 3 tortas cada uno.

  El peregrino que no aporta comida paga 9 monedas por las 3 tortas que se comió. Es decir, 3 monedas por cada torta.

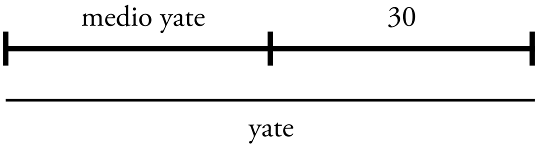
  Quien puso 4 tortas se comió 3 y cedió una, por lo que debe cobrar 3 monedas.

  Quien puso 5 tortas se comió 3 y cedió dos, por lo que debe cobrar 6 monedas.

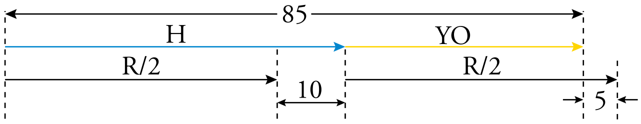
Haz un gráfico

- **El yate que estoy viendo entrar en el puerto mide 30 metros más la mitad de su propia longitud. ¿Cuánto mide el yate?**

  El yate mide 60 metros.



- **Voy con mi hermano a comprar el regalo que hemos elegido para nuestra madre. Mi hermano dice que después de poner su parte, aún le sobrarán 10 €. Yo le pido un préstamo, porque me faltan 5 € para poner la mía. ¿Cuánto cuesta el regalo, sabiendo que entre los dos tenemos 85 €?**



  El regalo cuesta 80 €. Cada uno debía poner 40 €. Un hermano tenía 50 € (le sobraban 10 €) y el otro 35 € (le faltaban 5 €).

AUTOEVALUACIÓN

1 **Escribe.**

a) Los cuatro primeros múltiplos de 17.

b) Todos los divisores de 72.

a) 17, 34, 51, 68

b) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 y 72

2 **Busca el primer múltiplo de 17 después de 1 000.**

El resto que resulta al dividir 1 000 entre 17 es 14. Por tanto, si añadimos 3 unidades al 1 000, el número que resulte, 1 003, será múltiplo de 17.

3 **Escribe los números primos comprendidos entre 20 y 40.**

23, 29, 31 y 37

4 **Razona si el número 143 es primo o compuesto.**

143 es compuesto, ya que $143 = 11 \cdot 13$.

5 **Indica cuáles de estos números son múltiplos de 2, cuáles de 3, cuáles de 5 y cuáles de 10:**

897 - 765 - 990 - 2713 - 6077 - 6324 - 7005

Múltiplos de 2: 990 - 6324

Múltiplos de 3: 897 - 765 - 990 - 6324 - 7005

Múltiplos de 5: 765 - 990 - 7005

Múltiplos de 10: 990

6 **Descompón en factores primos los números 150 y 225.**

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ $\qquad 225 = 3^2 \cdot 5^2$

7 **Calcula.**

a) máx. c. d. (150, 225) **b) mín. c. m. (150, 225)**

a) máx. c. d. $(150, 225) = 3 \cdot 5^2 = 75$

b) mín. c. m. $(150, 225) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$

8 **Calcula.**

a) $6 - 11 + (9 - 13)$ **b) $2 - (5 - 8)$**

c) $(7 - 15) - (6 - 2)$ **d) $5 - [2 - (3 - 2)]$**

a) $6 - 11 + (9 - 13) = 6 - 11 + (-4) = -5 - 4 = -9$

b) $2 - (5 - 8) = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5$

c) $(7 - 15) - (6 - 2) = (-8) - (4) = -12$

d) $5 - [2 - (3 - 2)] = 5 - [2 - 1] = 5 - 1 = 4$

9 **Calcula.**

a) $4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-8) - 4 \cdot (-3)$

b) $(10 - 3 \cdot 6) - 2 \cdot [5 + 3 \cdot (4 - 7)]$

c) $10 - 10 \cdot [-6 + 5 \cdot (-4 + 7 - 3)]$

a) $4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-8) - 4 \cdot (-3) = 20 + 6 - 40 + 12 = 38 - 40 = -2$

b) $(10 - 3 \cdot 6) - 2 \cdot [5 + 3 \cdot (4 - 7)] = (10 - 18) - 2 \cdot [5 + 3 \cdot (-3)] = -8 - 2 \cdot [5 - 9] =$
$= -8 - 2 \cdot [-4] = -8 + 8 = 0$

c) $10 - 10 \cdot [-6 + 5 \cdot (-4 + 7 - 3)] = 10 - 10 \cdot [-6 + 5 \cdot (0)] = 10 - 10 \cdot (-6) = 10 + 60 = 70$

10 **Reduce a una sola potencia.**

a) $a^3 : b^3$ **b)** $a^5 : b^5$ **c)** $a^4 \cdot a^2$

d) $x^6 \cdot x^4$ **e)** $(x^3)^3$ **f)** $(-5)^7 : (-5)^5$

a) $a^3 : b^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ b) $a^5 : b^5 = \left(\frac{a}{b}\right)^5$ c) $a^4 \cdot a^2 = a^6$

d) $x^6 \cdot x^4 = x^{10}$ e) $(x^3)^3 = x^9$ f) $(-5)^7 : (-5)^5 = (-5)^2 = 5^2$

11 **Opera y calcula.**

a) $10^4 : (5^3 \cdot 2^3)$ **b)** $(-15)^6 : [(-5)^4 \cdot 3^4]$

c) $[(-9)^5 \cdot (-2)^5] : 6^5$ **d)** $[(-5)^9 \cdot 4^9] : 20^6$

a) $10^4 : (5^3 \cdot 2^3) = 10^4 : 10^3 = 10$

b) $(-15)^6 = [(-5)^4 \cdot 3^4] = 15^6 : [15^4] = 15^2 = 225$

c) $[(-9)^5 \cdot (-2)^5] : 6^5 = 18^5 : 6^5 = 3^5 = 243$

12 **Calcula, si existen, estas raíces:**

a) $\sqrt{(+9)}$ **b)** $\sqrt{(-100)}$ **c)** $\sqrt{(-2)^2}$ **d)** $\sqrt[3]{-8}$ **e)** $\sqrt[4]{-16}$ **f)** $\sqrt[3]{(+5)^3}$

a) ±3 b) No existe. c) ±2 d) –2 e) No existe. f) +5

13 **Se desea poner un rodapié en dos de las paredes de una habitación rectangular de 420 cm × 540 cm. Para no tener que cortar, se van a encargar en la carpintería tramos de listón, todos iguales y lo más largos posible, que encajen en número exacto en ambas paredes. ¿Cuánto debe medir cada uno de los trozos a encargar en la carpintería?**

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

máx. c. d. $(420, 540) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Cada trozo debe medir 60 cm.

14 **En una fábrica se oye el escape de una válvula de gas cada 45 segundos, y el golpe de un martillo pilón cada 60 segundos. Si se acaban de oír ambos sonidos simultáneamente, ¿cuánto tardarán en coincidir de nuevo?**

$45 = 3^2 \cdot 5$

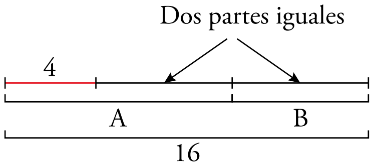
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

mín. c. m. $(45, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

Tardarán 180 segundos = 3 minutos en coincidir de nuevo.

15 **La suma de dos números enteros es 4, y la suma de sus valores absolutos, 16. ¿Qué números son?**

Llamamos A y B a los números enteros. Con los datos que nos da el enunciado elaboramos el siguiente gráfico:



$16 + 4 = 20$ y $20 : 2 = 10$

$B = 10$ y $A = -(10 - 4) = -6$

Los dos números son 10 y –6.

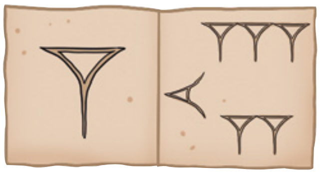
2 LOS NÚMEROS DECIMALES Y LAS FRACCIONES

Página 32

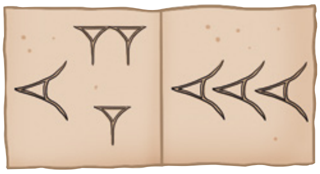
Números en Mesopotamia

Observa los números grabados en estas tablillas mesopotámicas.

$1 + \frac{15}{60}$



$13 + \frac{30}{60}$



1 **¿Sabrías expresar esas cantidades con nuestros números decimales?**

Ten en cuenta que $\frac{15}{60} = 15 : 60 = 0{,}25$ *y* $\frac{30}{60} = 30 : 60 = 0{,}5$.

$1 + \frac{15}{60} = 1{,}25$ $\qquad$ $13 + \frac{30}{60} = 13{,}5$

Página 33

Los decimales en la Europa del siglo XV

2 **¿Sabrías justificar por qué los números decimales 0,8 y 0,04 tienen respectivamente el mismo valor que las fracciones $\frac{48}{60}$ y $\frac{144}{60^2}$?**

Si hacemos las divisiones: $\frac{48}{60} = 0{,}8$; $\frac{144}{60^2} = 0{,}04$

3 **¿Cómo escribimos ahora el número $1 + \frac{45}{60}$ del siglo XV?**

$1 + \frac{45}{60} = 1{,}75$

Los decimales en la actualidad

4 **Escribe en forma decimal.**

a) $3 + \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2}$ $\qquad$ **b)** $\frac{3}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{5}{10^3}$

a) $3 + \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} = 3 + \frac{17}{100} = 3{,}17$

b) $\frac{3}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{5}{10^3} = \frac{385}{1\,000} = 0{,}385$

5 **Expresa como suma de fracciones decimales.**

a) **2,73** $\qquad$ **b)** **3,04** $\qquad$ **c)** **9,165**

a) $2{,}73 = 2 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2}$

b) $3{,}04 = 3 + \frac{4}{10^2}$

c) $9{,}165 = 9 + \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{5}{10^3}$

Horas, minutos y segundos

6 **¿Sabrías explicar la siguiente transformación?**

$$15 \text{ min } 36 \text{ s} = \left(\frac{15}{60} + \frac{36}{60^2}\right) \text{h} = (0{,}25 + 0{,}01) = 0{,}26 \text{ h}$$

Para pasar de minutos a horas, debemos dividir entre 60, ya que 1 hora = 60 minutos. Para pasar de segundos a horas, debemos dividir entre 60^2, ya que primero pasamos a minutos y luego a segundos, y cada paso supone dividir entre 60.

1 LOS NÚMEROS DECIMALES

Página 35

Para practicar

1 Escribe cómo se leen las cantidades de la tabla.

UM	C	D	U,	d	c	m	dm	cm	mm
			0,	0	3	7			
		1	5,	4	6	8			
			0,	0	0	2	4		
4	3	5	8,	6					
			0,	0	0	0	1	4	8

- 0,037 → Treinta y siete milésimas.
- 15,468 → Quince unidades y cuatrocientas sesenta y ocho milésimas.
- 0,0024 → Veinticuatro diezmilésimas.
- 4 358,6 → Cuatro mil trescientas cincuenta y ocho unidades y seis décimas.
- 0,000148 → Ciento cuarenta y ocho millonésimas.

2 Escribe cómo se leen las siguientes cantidades:

a) 1,37 **b) 5,048** **c) 2,0024**

d) 0,00538 **e) 0,000468** **f) 0,0000007**

a) Una unidad y treinta y siete centésimas.

b) Cinco unidades y cuarenta y ocho milésimas.

c) Dos unidades y veinticuatro diezmilésimas.

d) Quinientas treinta y ocho cienmilésimas.

e) Cuatrocientas sesenta y ocho millonésimas.

f) Siete diezmillonésimas.

3 Escribe con cifras.

a) Tres unidades y cinco centésimas. **b) Cuarenta y tres milésimas.**

c) Ocho milésimas. **d) Doscientas diecinueve millonésimas.**

e) Veintitrés millonésimas. **f) Catorce diezmillonésimas.**

a) 3,05 b) 0,043 c) 0,008

d) 0,000219 e) 0,000023 f) 0,0000014

4 Observa los siguientes números decimales:

1,292929… **$4{,}76\widehat{2}$** **$\pi = 3{,}14159265\ldots$** **3,7**

$13{,}\widehat{8}$ **$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$** **12,854** **5,3888…**

a) ¿Cuáles son decimales exactos? **b) ¿Cuáles son periódicos puros?**

c) ¿Cuáles son periódicos mixtos? **d) ¿Cuáles no son ni exactos ni periódicos?**

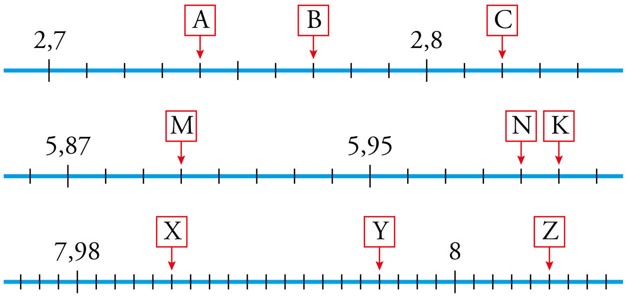
a) Decimales exactos: 3,7; 12,854

b) Periódicos puros: 1,292929…; $13{,}\widehat{8}$

c) Periódicos mixtos: $4{,}76\widehat{2}$; 5,3888…

d) Ni exactos ni periódicos: $\pi = 3{,}14159265\ldots$; $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

5 **Escribe el número asociado a cada letra.**



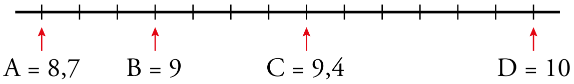
A = 2,74 B = 2,77 C = 2,82

M = 5,90 N = 5,99 K = 6,00

X = 7,985 Y = 7,996 Z = 8,005

6 **Dibuja una recta numérica y representa en ella los siguientes números:**

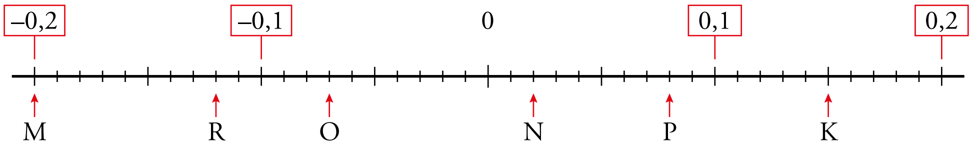
A = 8,7 **B = 9** **C = 9,4** **D = 10**



7 **Dibuja una recta numérica y representa los números siguientes sobre ella:**

M = –0,2 **N = 0,02** **O = –0,07**

P = 0,08 **K = 0,15** **R = –0,12**



8 **Ordena de menor a mayor en cada caso.**

a) 7,4; 6,9; 7,09; 7,11; 5,88 **b) 3,9; 4,04; 3,941; 3,906; 4,001**

c) 0,039; 0,01; 0,06; 0,009; 0,075 **d) 11,99; 11,909; 11,009; 12,01; 11,91**

a) 5,88 < 6,9 < 7,09 < 7,11 < 7,4 b) 3,9 < 3,906 < 3,941 < 4,001 < 4,04

c) 0,009 < 0,01 < 0,039 < 0,06 < 0,075 d) 11,009 < 11,909 < 11,91 < 11,99 < 12,01

9 **Copia y completa en tu cuaderno con los signos <, > o =, según corresponda.**

a) 2,5 ☐ 2,50 **b) 6,1 ☐ 6,987** **c) 3,009 ☐ 3,01** **d) 4,13 ☐ 4,1300**

a) 2,5 = 2,50 b) 6,1 < 6,987 c) 3,009 < 3,01 d) 4,13 = 4,1300

Página 37

Para fijar ideas

1 **Redondea, en tu cuaderno, el número 2,83516:**

a) A las unidades. → … **b) A las décimas. → …**

c) A las centésimas. → … **d) A las milésimas. → …**

a) A las unidades. → 3 b) A las décimas. → 2,8

c) A las centésimas. → 2,84 d) A las milésimas. → 2,835

2 **Copia y completa.**

a) Intercala tres números entre 2,58 y 2,59.

$$2{,}580 < \ldots < \ldots < \ldots < 2{,}590$$

b) Intercala tres números entre 3,4 y 3,41.

$$3{,}400 < \ldots < \ldots < \ldots < 3{,}\ldots$$

c) Intercala tres números entre 0,59 y 0,6.

$$0{,}59\ldots < \ldots < \ldots < \ldots < 0{,}6\ldots$$

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $2{,}580 < 2{,}582 < 2{,}583 < 2{,}589 < 2{,}590$

b) $3{,}400 < 3{,}403 < 3{,}405 < 3{,}409 < 3{,}410$

c) $0{,}590 < 0{,}593 < 0{,}594 < 0{,}597 < 0{,}600$

Para practicar

10 **Aproxima el número $6{,}\widehat{82}$:**

a) A las unidades. **b) A las décimas.**

c) A las centésimas. **d) A las milésimas.**

a) 7 b) 6,8

c) 6,83 d) 6,828

11 **Redondea a las décimas.**

a) 5,48 **b) 2,8346** **c) 3,057**

a) 5,5 b) 2,8 c) 3,1

12 **Redondea a las centésimas.**

a) 6,284 **b) 1,53369** **c) 0,79462**

a) 6,28 b) 1,53 c) 0,79

13 **Intercala un número decimal entre:**

a) 2,2 y 2,3 **b) 4,01 y 4,02**

c) 1,59 y 1,6 **d) 8 y 8,1**

a) $22 < 2{,}25 < 2{,}3$ b) $4{,}01 < 4{,}018 < 4{,}02$

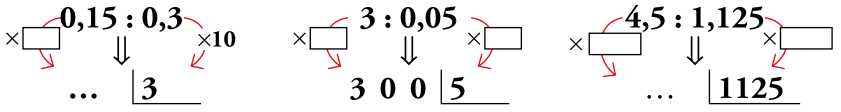
c) $1{,}59 < 1{,}594 < 1{,}6$ d) $8 < 8{,}06 < 8{,}1$

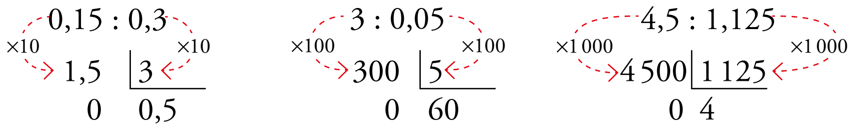
2 ▸ OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

Página 40

Para fijar ideas

1 **Copia y completa para obtener una división equivalente, pero sin decimales en el divisor. Después, completa la operación.**





2 **Observa el resultado que da la calculadora al dividir 2,5 : 6 y después copia y completa los enunciados, redondeando en cada caso con la precisión adecuada.**

2,5 ÷ **6** = → 0.4166666

a) Se han empleado 2,5 kg de plata en la fabricación de seis trofeos.

Cada trofeo contiene … kilos de plata. → Redondeo: … gramos

b) Se han empleado 2,5 kg de patatas para hacer seis tortillas.

Cada tortilla contiene … kilos de patatas. → Redondeo: … gramos

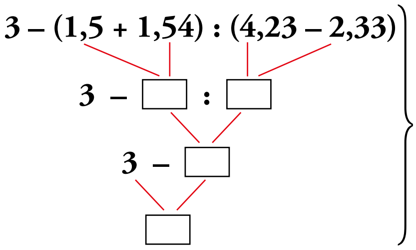
a) Se han empleado 2,5 kg de plata en la fabricación de seis trofeos.

Cada trofeo contiene 0,417 kilos de plata. → Redondeo: 417 gramos

b) Se han empleado 2,5 kg de patatas para hacer seis de tortillas.

Cada tortilla contiene 0,4 kilos de patatas. → Redondeo: 400 gramos

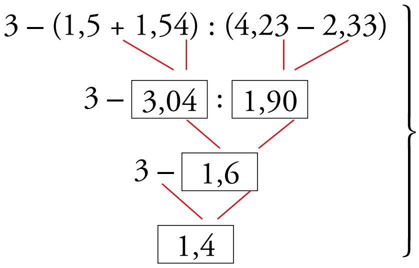
3 **Observa el esquema, copia y completa.**



3 – (1,5 + 1,54) : (4,23 – 2,33) =

= 3 – ☐ : ☐ = 3 – ☐ =

= ☐



3 – (1,5 + 1,54) : (4,23 – 2,33) =

= 3 – $\boxed{3,04}$: $\boxed{1,90}$ = 3 – $\boxed{1,6}$

= $\boxed{1,4}$

4 Vuelve a la factura del agua de la página 38. Copia y completa.

a) El importe del apartado A, para un gasto de 40 m^3, sería:

10 · 0,03 + … · 0,65 + … · 1,93 = …. + … + … = …

b) Calcula el «total a pagar» de la factura anterior para una familia que ha consumido 40 m^3 y no goza de ningún descuento.

c) ¿Tiene el mismo precio toda el agua gastada? ¿A qué crees que se debe eso?

a) El importe del apartado A, para un gasto de 40 m^3, sería:

10 · 0,03 + 19 · 0,65 + 11 · 1,93 = 0,3 + 12,35 + 21,23 = 33,88

b) Consumo de agua → 33,88 €
Contador (alquiler) → 1,85 €
IVA (10 %) → 33,88 · 0,1 = 3,39 €
Cuota fija → 12,33 €
Consumo → 40 · 0,418 = 16,72
Total: 33,88 + 1,85 + 3,39 + 12,33 + 16,72 = 68,17 €

c) No, cuanta más agua gastas, más se cobra por ella. Eso se debe a que se quiere potenciar el ahorro de agua por parte del consumidor.

Página 41

Para practicar

1 Responde mentalmente.

a) 0,75 + 0,25 **b) 0,75 – 0,25** **c) 1,80 + 1,20** **d) 1,80 – 1,20**
e) 2,30 + 1,80 **f) 2,30 – 1,80** **g) 3,50 + 1,75** **h) 3,50 – 1,75**

a) 1,00 b) 0,50 c) 3,00 d) 0,60
e) 4,10 f) 0,50 g) 5,25 h) 1,75

2 Calcula.

a) 2,37 + 0,356 **b) 5,86 – 1,749** **c) 13,2 + 4,08 + 2,635**
d) 15,4 – 6,843 **e) 7,04 + 12,283 + 0,05** **f) 0,35 – 0,0648**

a) 2,726 b) 4,111 c) 19,915
d) 8,557 e) 19,373 f) 0,2852

3 Recuerda el producto y el cociente por la unidad seguida de ceros y calcula.

a) 2,6 · 100 **b) 5,4 : 10** **c) 0,83 · 10**
d) 12 : 100 **e) 0,0048 · 1 000** **f) 350 : 1 000**

a) 260 b) 0,54 c) 8,3
d) 0,12 e) 4,8 f) 0,350

4 Calcula.

a) 6,3 · 1,24 **b) 0,44 · 2,375** **c) 0,016 · 0,0025**
d) 143 · 0,068 **e) 5,48 · 2,63** **f) 0,15 · 1,01**

a) 7,812 b) 1,045 c) 0,00004
d) 9,724 e) 14,4124 f) 0,1515

5 **Copia y completa para que sea cierta cada igualdad.**

a) 5,2 : 0,8 = 52 : …
b) 3 : 0,004 = … : 4
c) 6,31 : 2,5 = … : 25
d) 2,4 : 1,638 = 2 400 : …
e) 0,005 : 0,02 = 5 : …
f) 0,12 : 0,0012 = 1 200 : …

a) 5,2 : 0,8 = 52 : 8
b) 3 : 0,004 = 3 000 : 4
c) 6,31 : 2,5 = 63,1 : 25
d) 2,4 : 1,638 = 2 400 : 1 638
e) 0,005 : 0,02 = 5 : 20
f) 0,12 : 0,0012 = 1 200 : 12

6 **Calcula el cociente exacto o, como máximo, con tres cifras decimales.**

a) 8 : 6
b) 218 : 16
c) 3 : 4
d) 12 : 536
e) 149,04 : 23
f) 2,58 : 15

a) 1,333
b) 13,625
c) 0,75
d) 0,022
e) 6,48
f) 0,172

7 **Sustituye cada división por otra equivalente con el divisor entero. Después, calcula el cociente exacto o con tres cifras decimales.**

a) 6 : 0,2
b) 13 : 0,75
c) 53 : 4,11
d) 4 : 0,009
e) 45,6 : 3,8
f) 23,587 : 5,1
g) 2,549 : 8,5
h) 6,23 : 0,011

a) 6 : 0,2 = 60 : 2 = 30
b) 13 : 0,75 = 1 300 : 75 = 17,333
c) 53 : 4,11 = 5 300 : 411 = 12,895
d) 4 : 0,009 = 4 000 : 9 = 444,444
e) 45,6 : 3,8 = 456 : 38 = 12
f) 23,587 : 5,1 = 235,87 : 51 = 4,625
g) 2,549 : 8,5 = 25,49 : 85 = 0,300
h) 6,23 : 0,011 = 6 230 : 11 = 566,364

8 **Aproxima a las centésimas cada cociente.**

a) 5 : 6
b) 7 : 9
c) 6 : 3,5
d) 2,7 : 5,9

a) 5 : 6 = $0{,}8\widehat{3}$ = 0,83
b) 7 : 9 = $0{,}\widehat{7}$ = 0,78
c) 6 : 3,5 = 1,714... = 1,71
d) 2,7 : 5,9 = 0,457... = 0,46

9 **Resuelve.**

a) 2,37 – 1,26 + 0,8 – 0,35
b) 2,50 – 1,25 – 1,75 – 0,20
c) 13,48 – 10,7 + 5,328 – 6,726
d) 5,6 – 8,42 – 4,725 + 1,48

a) 3,17 – 1,61 = 1,56
b) 2,50 – 3,20 = –0,7
c) 18,808 – 17,426 = 1,382
d) 7,08 – 13,145 = –6,065

10 **Calcula.**

a) 6,2 – (7,2 – 4,63)
b) (12,85 – 7,9) – (6,2 + 3,28)
c) 5,6 – [4,23 – (5,2 + 1,75)]

a) 6,2 – (2,57) = 3,63
b) 4,95 – 9,48 = –4,53
c) 5,6 – [4,23 – 6,95] = 8,32

11 **Opera y resuelve.**

a) 3,6 – 1,2 · 0,6 – 4,5 : 1,8
b) 3,6 – 0,5 · (4 – 2,26)
c) 0,75 : (2,65 – 1,15) – 1,1
d) (0,5 + 0,1) · (0,5 – 0,1) – (0,6 – 0,4) · (0,6 + 0,4)
e) 5,4 – 1,5 · [3,2 + 10 · (0,63 – 1,25)]

a) 3,6 – 1,2 · 0,6 – 4,5 : 1,8 = 3,6 – 0,72 – 2,5= 3,6 – 3,22 = 0,38
b) 3,6 – 0,5 · (4 – 2,26) = 3,6 – 0,5 · 1,74 = 3,6 – 0,87 = 2,73
c) 0,75 : (2,65 – 1,15) – 1,1 = 0,75 : 1,50 – 1,1 = 0,5 – 1,1 = –0,6
d) (0,5 + 0,1) · (0,5 – 0,1) – (0,6 – 0,4) · (0,6 + 0,4) = 0,6 · 0,4 – 0,2 · 1 = 0,24 – 0,2 = 0,04
e) 5,4 – 1,5 · [3,2 + 10 · (0,63 – 1,25)] = 5,4 – 1,5 · [3,2 + 10 · (–0,62)] = 5,4 – 1,5 · [3,2 – 6,2] =
= 5,4 – 1,5 · [–3] = 5,4 + 4,5 = 9,9

12 Experimenta, pon ejemplos y, después, completa en tu cuaderno.

a) Multiplicar por 0,1 es lo mismo que dividir…

b) Dividir entre 0,1 es lo mismo que multiplicar…

c) Multiplicar por 0,5 es lo mismo que…

d) Dividir entre 0,5 es lo mismo que…

e) Multiplicar por 0,25 es lo mismo que…

f) Dividir entre 0,25 es lo mismo que…

a) Multiplicar por 0,1 es lo mismo que dividir entre 10.

b) Dividir entre 0,1 es lo mismo que multiplicar por 10.

c) Multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir entre 2.

d) Dividir entre 0,5 es lo mismo que multiplicar por 2.

e) Multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir entre 4.

f) Dividir entre 0,25 es lo mismo que multiplicar por 4.

13 Calcula mentalmente.

a) 12 · 0,5 **b) 28 · 0,5** **c) 8 · 0,25** **d) 0,24 · 0,25**

e) 17 · 0,1 **f) 0,6 · 0,1** **g) 7 : 0,5** **h) 2,3 : 0,5**

i) 2 : 0,25 **j) 0,6 : 0,25** **k) 8 : 0,1** **l) 4,8 : 0,1**

a) 6 b) 14 c) 2 d) 0,06

e) 1,7 f) 0,06 g) 14 h) 4,6

i) 8 j) 2,4 k) 80 l) 48

14 Estima mentalmente, sin decimales, y después comprueba con la calculadora.

a) 25,197 · 9,86 **b) 142,36 · 0,49** **c) 181,046 : 6,16** **d) 33,44 : 0,511**

Deberás desviarte en menos de dos unidades.

a) Estimado: 250 Con calculadora: 248,44

b) Estimado: 71 Con calculadora: 69,76

c) Estimado: 30 Con calculadora: 29,4

d) Estimado: 66 Con calculadora: 65,44

15 Resuelve con la calculadora y aproxima al orden de unidades que consideres adecuado.

a) Un paquete de 500 folios ha pesado 652 gramos. ¿Cuánto pesa un folio?

b) El pollo cuesta 3,49 €/kg. ¿Cuánto costará un pollo que ha pesado un kilo y 850 gramos?

c) Se va a partir un listón de 2 metros en siete trozos iguales. ¿Cuál será la longitud de cada trozo?

d) Un coche ha consumido 50 litros de gasolina en 837 km. ¿Cuánto consume a los 100 kilómetros?

a) 652 : 500 = 1,30 gramos

b) 1,850 · 3,49 = 6,46 €

c) 2 : 7 = 0,2857… = 0,29 metros

d) (50 : 837) · 100 = 5,973… = 6 litros

3 NÚMEROS DECIMALES Y NÚMEROS SEXAGESIMALES

Página 42

Para practicar

1 **Un grifo llena un depósito de 80 litros en 3 minutos y 12 segundos. ¿Cuántos litros arroja por segundo?**

Lo podemos hacer de dos formas:

- Pasamos el enunciado a segundos:

  3 minutos y 12 segundos = 3 · 60 + 12 = 180 + 12 = 192 segundos

$$\begin{array}{r|l} 800 & 192 \\ \cline{2-2} 320 & 0{,}41\overset{\frown}{6} \\ 1280 & \\ 128 & \end{array}$$

  Arroja 0,42 litros por segundo.

- Calculamos en minutos y luego pasamos a segundos:

  3 minutos y 12 segundos = 3 + 12 : 60 = 3 + 0,2 = 3,2 minutos

  Planteamos la división equivalente: 80 : 3,2 = 800 : 32

$$\begin{array}{r|l} 800 & 32 \\ \cline{2-2} 160 & 25 \\ 0 & \end{array}$$

  25 L/min → 25/60 L/s = 0,42 L/s

  Arroja 0,42 litros por segundo.

2 **Un grifo arroja 25 litros por minuto. ¿Cuánto tarda en llenar un depósito de 80 litros?**

$$\begin{array}{r|l} 80 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 3{,}2 \\ 0 & \end{array}$$

Tarda 3,2 minutos en llenar el depósito.

3 **Un centro comercial emite cíclicamente, durante 7 horas, una grabación musical que dura 5 minutos y 15 segundos. ¿Cuántas veces pasa la grabación en ese tiempo?**

Pasa todos los datos a minutos.

Pasamos todos los datos a minutos:

$$5'\ 15'' = 5 + 15/60 = 5 + 0{,}25 = 5{,}25 \text{ min}$$

$$7 \text{ h} = 7 \cdot 60 = 420 \text{ min}$$

Planteamos la división equivalente:

$$\begin{array}{r|l} 42\,000 & 525 \\ \cline{2-2} 00 & 80 \end{array}$$

La grabación pasa 80 veces.

4 ▸ RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO DECIMAL

Página 43

Para practicar

1 Calcula las siguientes raíces exactas:

a) $\sqrt{0,04}$ **b)** $\sqrt{0,49}$ **c)** $\sqrt{0,81}$ **d)** $\sqrt{0,0001}$ **e)** $\sqrt{0,0121}$ **f)** $\sqrt{0,1225}$

a) 0,2 b) 0,7 c) 0,9 d) 0,01 e) 0,11 f) 0,35

2 Obtén por tanteo, con una cifra decimal.

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{11,5}$ **c)** $\sqrt{150}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2^2 = 4 \\ 3^2 = 9 \end{array}\right\} 2 < \sqrt{8} < 3$ $\left.\begin{array}{l} 2,8^2 = 7,84 \\ 2,9^2 = 8,41 \end{array}\right\} 2,8 < \sqrt{8} < 2,9$

b) $\left.\begin{array}{l} 3^2 = 9 \\ 4^2 = 16 \end{array}\right\} 3 < \sqrt{11,5} < 4$ $\left.\begin{array}{l} 3,3^2 = 10,89 \\ 3,4^2 = 11,56 \end{array}\right\} 3,3 < \sqrt{11,5} < 3,4$

c) $\left.\begin{array}{l} 12^2 = 144 \\ 13^2 = 169 \end{array}\right\} 12 < \sqrt{150} < 13$ $\left.\begin{array}{l} 12,2^2 = 148,84 \\ 12,3^2 = 151,29 \end{array}\right\} 12,2 < \sqrt{150} < 12,3$

3 Calcula con lápiz y papel, utilizando el algoritmo. Si el resultado no es exacto, obtén dos cifras decimales.

a) $\sqrt{7,84}$ **b)** $\sqrt{56}$ **c)** $\sqrt{39,0625}$

a) $$\begin{array}{r|l} \sqrt{7,84} & 2,8 \\ \cline{2-2} -4 & 48 \cdot 8 \\ \cline{1-1} 3\ 84 & \\ -3\ 84 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r|l} \sqrt{56} & 7,48 \\ \cline{2-2} -49 & 144 \cdot 4 \\ \cline{1-2} 700 & 1488 \cdot 8 \\ -576 & \\ \cline{1-1} 12400 & \\ -11904 & \\ \cline{1-1} 496 & \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r|l} \sqrt{39,0625} & 6,25 \\ \cline{2-2} -36 & 122 \cdot 2 \\ \cline{1-2} 306 & 1245 \cdot 5 \\ -\ 244 & \\ \cline{1-1} 6225 & \\ -\ 6225 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

4 Usa la calculadora y redondea a las milésimas.

a) $\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{2,54}$ **c)** $\sqrt{76,38}$

a) $\sqrt{10} = 3,162$ b) $\sqrt{2,54} = 1,594$ c) $\sqrt{76,38} = 8,740$

5 LAS FRACCIONES

Página 44

Para practicar

1 **Escribe tres fracciones equivalentes a:**

a) $\mathbf{\frac{2}{3}}$ **b)** $\mathbf{\frac{6}{8}}$ **c)** $\mathbf{\frac{5}{50}}$

a) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15}$ b) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{18}{24} = \frac{30}{40}$ c) $\frac{5}{50} = \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{15}{150}$

2 **Divide, expresa en forma decimal y comprueba que las fracciones** $\mathbf{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}}$ **y** $\mathbf{\frac{3}{12}}$ **son equivalentes.**

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = 0,25$

3 **Obtén en cada caso la fracción irreducible.**

a) $\mathbf{\frac{15}{18}}$ **b)** $\mathbf{\frac{30}{54}}$ **c)** $\mathbf{\frac{25}{75}}$

a) $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ b) $\frac{30}{54} = \frac{5}{9}$ c) $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$

4 **Calcula, en cada igualdad, el término desconocido.**

a) $\mathbf{\frac{8}{20} = \frac{10}{x}}$ **b)** $\mathbf{\frac{25}{x} = \frac{15}{9}}$ **c)** $\mathbf{\frac{x}{21} = \frac{12}{28}}$

a) $8 \cdot x = 20 \cdot 10 \to x = 25$ b) $25 \cdot 9 = x \cdot 15 \to x = 15$ c) $x \cdot 28 = 21 \cdot 12 \to x = 9$

Página 45

Para practicar

5 **Copia y completa para conseguir fracciones equivalentes de igual denominador.**

$$\mathbf{2, \frac{3}{4}, \frac{7}{10} \to \frac{2 \cdot 20}{20}, \frac{3 \cdot \square}{20}, \frac{7 \cdot \square}{20}}$$

$$2, \frac{3}{4}, \frac{7}{10} \to \frac{2 \cdot 20}{20}, \frac{3 \cdot 5}{20}, \frac{7 \cdot 2}{20}$$

6 **Reduce al común denominador que se indica.**

a) $\mathbf{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}}$ **→ Denominador común: 8** **b)** $\mathbf{\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{9}}$ **→ Denominador común: 18**

c) $\mathbf{\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9}}$ **→ Denominador común: 36** **d)** $\mathbf{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}}$ **→ Denominador común: 20**

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \to \frac{4}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}$ b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{9} \to \frac{12}{18}, \frac{3}{18}, \frac{10}{18}$

c) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9} \to \frac{27}{36}, \frac{30}{36}, \frac{8}{36}$ d) $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10} \to \frac{5}{20}, \frac{12}{20}, \frac{6}{20}$

7 **Reduce a común denominador.**

a) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$

d) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{11}{18}$

e) $\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{15}$

f) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}$

g) $\frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$

h) $\frac{2}{5}, \frac{5}{9}, \frac{11}{15}, \frac{22}{45}$

a) $\frac{1}{4} = \frac{5}{4 \cdot 5} = \frac{5}{20}$

$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$

$\frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{4} = \frac{3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$

$\frac{1}{6} = \frac{2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$

$\frac{1}{12}$

d) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{12}{18}$

$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$

$\frac{11}{18}$

e) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{12}{30}$

$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$

$\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{16}{30}$

f) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{12}{16}$

$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{10}{16}$

$\frac{7}{16}$

g) $\frac{1}{15} = \frac{4}{15 \cdot 4} = \frac{4}{60}$

$\frac{1}{20} = \frac{3}{20 \cdot 3} = \frac{3}{60}$

$\frac{1}{30} = \frac{2}{30 \cdot 2} = \frac{2}{60}$

h) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{18}{45}$

$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{25}{45}$

$\frac{11}{15} = \frac{11 \cdot 3}{15 \cdot 3} = \frac{33}{45}$

$\frac{22}{45}$

8 **Reduce a común denominador y ordena de mayor a menor.**

a) $\frac{7}{12}, \frac{13}{30}, \frac{11}{20}$

b) $\frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{4}{15}, \frac{8}{25}, \frac{7}{30}$

a) mín. c. m. (12, 30, 20) = 60

$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{35}{60}$ $\quad \frac{13}{30} = \frac{13 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{26}{60}$ $\quad \frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{33}{60}$

Ya podemos ordenar las fracciones:

$$\frac{26}{60} < \frac{33}{60} < \frac{35}{60} \rightarrow \frac{13}{30} < \frac{11}{20} < \frac{7}{12}$$

b) mín. c. m. (6, 10, 15, 25, 30) = 150

$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 25}{6 \cdot 25} = \frac{25}{150}$ $\quad \frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 15}{10 \cdot 15} = \frac{45}{150}$ $\quad \frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 10}{15 \cdot 10} = \frac{40}{150}$

$\frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 6}{25 \cdot 6} = \frac{48}{150}$ $\quad \frac{7}{30} = \frac{7 \cdot 5}{30 \cdot 5} = \frac{35}{150}$

Ya podemos ordenar las fracciones:

$$\frac{25}{150} < \frac{35}{150} < \frac{40}{150} < \frac{45}{150} < \frac{48}{150} \rightarrow \frac{1}{6} < \frac{7}{30} < \frac{4}{15} < \frac{3}{10} < \frac{8}{25}$$

6 FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES

Página 47

Para practicar

1 **Expresa en forma decimal.**

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{2}{5}$

d) $\frac{7}{10}$ **e)** $\frac{2}{9}$ **f)** $\frac{17}{110}$

a) $\frac{1}{2} = 0,5$ b) $\frac{2}{3} = 0,\overset{\frown}{6}$ c) $\frac{2}{5} = 0,4$

d) $\frac{7}{10} = 0,7$ e) $\frac{2}{9} = 0,\overset{\frown}{2}$ f) $\frac{17}{110} = 0,1\overset{\frown}{54}$

2 **Asocia cada fracción con su forma decimal.**

$\boxed{\frac{3}{4}}$ $\boxed{\frac{1}{25}}$ $\boxed{\frac{1}{6}}$ $\boxed{\frac{2}{5}}$ $\boxed{\frac{13}{10}}$ $\boxed{\frac{5}{11}}$

$\boxed{0,04}$ $\boxed{1,3}$ $\boxed{0,75}$ $\boxed{0,1\overset{\frown}{6}}$ $\boxed{0,\overset{\frown}{45}}$ $\boxed{0,4}$

$\frac{3}{4} = 0,75$ $\frac{1}{25} = 0,04$ $\frac{1}{6} = 1,1\overset{\frown}{6}$ $\frac{2}{5} = 0,4$ $\frac{13}{10} = 1,3$ $\frac{5}{11} = 0,\overset{\frown}{45}$

3 **Expresa en forma de fracción.**

a) **0,8** **b)** **1,6** **c)** **1,35**

d) $0,\overset{\frown}{3}$ **e)** $2,1\overset{\frown}{3}$ **f)** $1,\overset{\frown}{25}$

a) $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ b) $1,6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ c) $1,35 = \frac{135}{100} = \frac{27}{20}$

d) $0,\overset{\frown}{3} = \frac{1}{3}$ e) $2,1\overset{\frown}{3} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$ f) $1,\overset{\frown}{25} = \frac{124}{99}$

4 **Separa los números racionales de los que no lo son.**

$\boxed{\frac{3}{4}}$ $\boxed{0,\overset{\frown}{37}}$ $\boxed{\frac{3}{7}}$ $\boxed{-125}$ $\boxed{0,00009}$

$\boxed{\sqrt{3}}$ $\boxed{13,6}$ $\boxed{2}$ $\boxed{0,12345678910...}$ $\boxed{7,4\overset{\frown}{8}}$

- Racionales: $\frac{3}{7}$; $0,\overset{\frown}{37}$; 2; -125; 0,00009; 13,6; $\frac{3}{4}$; $7,4\overset{\frown}{8}$
- No racionales: $\sqrt{3}$; 0,12345678910…

Página 48

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sistema de numeración decimal

1 **Copia y completa.**

a) 5 décimas = … milésimas **b) 2 milésimas = … millonésimas**

c) 6 cienmilésimas = … centésimas **d) 8 millonésimas = … milésimas**

a) 5 décimas = 500 milésimas

b) 2 milésimas = 2 000 millonésimas

c) 6 cienmilésimas = 0,006 centésimas

d) 8 millonésimas = 0,008 milésimas

2 **Ordena de menor a mayor en cada caso.**

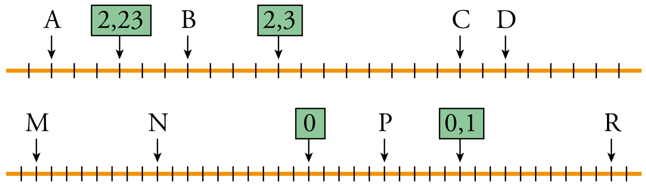
a) 5,1 - 5,099 - 4,83 - 4,9 - 4,99

b) 0,21 - 0,03 - 0,15 - 0,209 - 0,101 - 0,121

a) 4,83 < 4,9 < 4,99 < 5,099 < 5,1

b) 0,03 < 0,101 < 0,121 < 0,15 < 0,209 < 0,21

3 **Escribe el número asociado a cada letra.**



A = 2,20 B = 2,26 C = 2,38 D = 2,40

M = –0,18 N = –0,10 P = 0,05 R = 0,20

4 **Copia y completa la tabla en tu cuaderno.**

NÚMERO	$2,\widehat{7}$	$5,\widehat{29}$	$4,6\widehat{51}$
APROXIMACIÓN A LAS UNIDADES			
APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS MILÉSIMAS			

NÚMERO	$2,\widehat{7}$	$5,\widehat{29}$	$4,6\widehat{51}$
APROXIMACIÓN A LAS UNIDADES	3	5	5
APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS	2,8	5,3	4,7
APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS	2,78	5,29	4,65
APROXIMACIÓN A LAS MILÉSIMAS	2,778	5,293	4,652

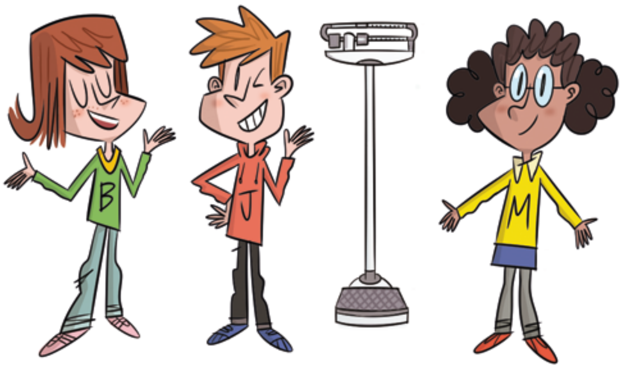
5 **Berta pesa 52 kg y 450 gramos. María pesa 52,5 kg. Jacinto pesa más que Berta, pero menos que María.**

a) ¿Qué puedes decir del error cometido al estimar el peso de Jacinto en 52 kilos?

b) ¿Y al estimarlo en cincuenta y dos kilos y medio?

a) El error es menor que medio kilogramo.

b) El error es menor que 50 gramos.



Operaciones con números decimales

6 **Calcula.**

a) 3,2 – 1,63 – 0,528	**b) 0,85 + 1,23 – 0,638 – 0,4**
c) 3,458 – (6,7 – 4,284)	**d) 5,2 – (2,798 + 1,36)**
a) 3,2 – 2,158 = 1,042	b) 2,08 – 1,038 = 1,042
c) 3,458 – 2,416 = 1,042	d) 5,2 – 4,158 = 1,042

7 **Opera con la calculadora y aproxima el resultado a las centésimas.**

a) 2,63 · 0,84	**b) 0,27 · 0,086**	**c) 62,35 : 12**
d) 5,27 : 153	**e) $\sqrt{851}$**	**f) $\sqrt{13{,}29}$**
a) 2,21	b) 0,02	c) 5,20
d) 0,03	e) 29,17	f) 3,65

8 **Obtén el resultado con ayuda de la calculadora y redondea a las centésimas.**

a) 8,73 : 1,7 – 3,42 : 2,1	**b) (8,73 : 1,7 – 3,42) : 2,1**
a) 3,51	b) 0,82

9 **Opera.**

a) 5,8 – 3,2 · 1,6 – 0,29

b) (5,8 – 3,2) · 1,6 – 0,29

c) 5,8 – 3,2 · (1,6 – 0,29)

d) 5,8 – (3,2 · 1,6 – 0,29)

a) 5,8 – 5,12 – 0,29 = 5,8 – 5,41 = 0,39

b) 2,6 · 1,6 – 0,29 = 4,16 – 0,29 = 3,87

c) 5,8 – 3,2 · 1,31 = 5,8 – 4,192 = 1,608

d) 5,8 – (5,12 – 0,29) = 5,8 – 4,83 = 0,97

10 **Calcula con lápiz y papel utilizando el algoritmo y comprueba con la calculadora.**

a) $\sqrt{5{,}24}$ **b) $\sqrt{12}$** **c) $\sqrt{73{,}96}$**

a)
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5{,}2400} & 2{,}28 \\ \cline{2-2} -4 & 42 \cdot 2 \\ \cline{1-1}\cline{2-2} 1\,24 & 448 \cdot 8 \\ -\ 84 & \\ \cline{1-1} 4000 & \\ -\ 3584 & \\ \cline{1-1} 416 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12{,}0000} & 3{,}46 \\ \cline{2-2} -\ 9 & 64 \cdot 4 \\ \cline{1-1}\cline{2-2} 3\,00 & 686 \cdot 6 \\ -\ 2\,56 & \\ \cline{1-1} 4400 & \\ -\ 4116 & \\ \cline{1-1} 284 & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{73{,}96} & 8{,}6 \\ \cline{2-2} -64 & 166 \cdot 6 \\ \cline{1-1} 9\,96 & \\ -9\,96 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

11 **Para multiplicar por 0,1 podemos dividir entre diez, como ves en el ejemplo.**

- **80 · 0,1 = 80 : 10 = 8**

Por qué número hay que dividir para:

a) Multiplicar por 0,01. **b) Multiplicar por 0,001.**

a) Para multiplicar por 0,01 se divide entre 100. b) Para multiplicar por 0,001 se divide entre 1 000.

12 **Para dividir entre 0,2 podemos multiplicar por diez y dividir entre dos.**

- **8 : 0,2 = 8 · 10 = 80 : 2 = 40**

Calcula mentalmente.

a) 6 : 0,2	**b) 15 : 0,2**	**c) 45 : 0,2**
d) 9 : 0,3	**e) 12 : 0,3**	**f) 33 : 0,3**
g) 6 : 0,6	**h) 18 : 0,6**	**i) 45 : 0,6**
a) 30	b) 75	c) 225
d) 30	e) 40	f) 110
g) 10	h) 30	i) 75

Página 49

13 **Copia y completa en tu cuaderno este cuadrado mágico.**

La suma de cada fila, de cada columna y de cada diagonal ha de ser la misma.

	1,23	
1,08	**0,03**	**0,78**

0,48	**1,23**	0,18
0,33	0,63	0,93
1,08	**0,03**	**0,78**

14 **Continúa en tres términos cada serie.**

a) 2,37 - 2,16 - 1,95 - 1,74 - …

b) 5 - 1 - 0,2 - 0,04 - …

c) 0,24 - 1,2 - 6 - 30 - …

a) 2,37 - 2,16 - 1,95 - 1,74 $\xrightarrow{(-0,21)}$ 1,53 - 1,32 - 1,11

b) 5 - 1 - 0,2 - 0,04 $\xrightarrow{(:5)}$ 0,008 - 0,0016 - 0,00032

c) 0,24 - 1,2 - 6 - 30 $\xrightarrow{(\times 5)}$ 150 - 750 - 3 750

15 **Calcula cada resultado con un error menor que media centésima.**

a) $4,\widehat{6} + 6,4\widehat{8}$ **b)** $6 - 2,\widehat{29}$ **c) 4,2864 · 0,03** **d) 6,28 : 9**

Redondeando a las centésismas el error será < 0,005:

a) $4,\widehat{6} + 6,4\widehat{8} = 4,67 + 6,49 = 11,16$ b) $6 - 2,\widehat{29} = 6 - 2,29 = 3,71$

c) 4,2864 · 0,03 = 0,13 d) 6,28 : 9 = 0,70

16 **Busca, y completa en tu cuaderno, el número decimal que debe ocupar cada casilla.**

a) □ · 4,8 = 9 **b) 0,2 · □ = 0,002**

c) 7 : □ = 5 **d) □ : 0,25 = 1,2**

a) 1,25 · 4,8 = 6 b) 0,2 · 0,01 = 0,002

c) 7 : 1,4 = 5 d) 0,3 : 0,25 = 1,2

17 **Calcula, con dos cifras decimales, la nota media de Julián en cada asignatura.**

a) Lengua: 8 - 6 - 7 - 7 - 6 - 7

b) Matemáticas: 5,2 - 6 - 5,8 - 4,5 - 7,1 - 5,7

a) 41 : 6 = 6,83 b) 34,3 : 6 = 5,72

18 **Investiga.**

a) ¿Por qué número decimal tengo que multiplicar una cantidad para reducirla a la quinta parte?

b) ¿Y para reducirla en un 20 %?

c) ¿Y para aumentarla en un 20 %?

a) Por 0,2. b) Por 0,8. c) Por 1,2.

19 **¿Verdadero o falso?**

a) El producto de un decimal por un entero es siempre decimal.

b) El producto de dos números decimales puede ser entero.

c) Al dividir dos números decimales nunca se obtiene un entero.

d) La raíz cuadrada de un número decimal siempre es menor que el número.

e) La raíz cuadrada de un número decimal nunca es un decimal exacto.

a) Falso, por ejemplo 1,5 · 2 = 3.

b) Verdadero, por ejemplo $1{,}5 \cdot 5{,}\widehat{3} = 8$.

c) Falso, por ejemplo 4,5 : 1,5 = 3.

d) Verdadero.

e) Falso, por ejemplo $\sqrt{73{,}96} = 8{,}6$.

20 **Reflexiona y calcula.**

a) Si multiplicas un número n por 0,1 y después por a, obtienes como resultado final n. ¿Cuánto vale a?

b) Si multiplicas un número n por 0,2 y después por b, obtienes como resultado final n. ¿Cuánto vale b?

a) $n \cdot 0{,}1 \cdot a = n \rightarrow 0{,}1 \cdot a = 1 \rightarrow a = 10$ b) $n \cdot 0{,}2 \cdot b = n \rightarrow 0{,}2 \cdot b = 1 \rightarrow b = 5$

21 **Reflexiona, busca ejemplos y responde.**

a) Un número aumenta si lo multiplicas por a. ¿Qué puedes decir de a?

b) Un número disminuye si lo multiplicas por b. ¿Qué puedes decir de b?

a) El número a es mayor que 1.

b) El número b es menor que 1.

Operaciones en el sistema sexagesimal

22 **Expresa en horas como número decimal y fracción.**

a) 48 min **b) 66 min** **c) 6 120 s**

a) $(48 : 60)\text{ h} = \dfrac{48}{60}\text{ h} = 0{,}8\text{ h}$

b) $(66 : 60)\text{ h} = \dfrac{66}{60}\text{ h} = 1{,}1\text{ h}$

c) $(6\,120 : 3\,600)\text{ h} = \dfrac{6\,120}{3\,600}\text{ h} = 1{,}7\text{ h}$

23 **Pasa a forma compleja.**

a) 12 639'' **b) 756,25'** **c) 45,15°**

a) $$\left.\begin{array}{llll} 12\,639'' & \underline{|\,60\quad} & & \\ \quad 63 & 210' & \underline{|\,60\quad} & \\ \quad\;\; 39'' & \;\;30' & 3^\circ & \end{array}\right\} 12\,639'' = 3^\circ\,30'\,39''$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 0{,}25 \cdot 60 = 15'' \rightarrow 756{,}25' = 756'\,15'' \\ \begin{array}{ll} 756' & \underline{|\,60\quad} \\ 156 & 12^\circ \\ \;\;36' & \end{array} \end{array}\right\} 756{,}25' = 12^\circ\,36'\,15''$$

c) $0{,}15 \cdot 60 = 9'$

$45{,}15^\circ = 45^\circ\,9'$

24 **Pasa a horas, minutos y segundos.**

a) 8,42 h **b) 123,45 min** **c) 12 746 s**

a) $8{,}42\text{ h} = 8\text{ h} + (0{,}42 \cdot 60)\text{ min} = 8\text{ h }25{,}2\text{ min} = 8\text{ h }25\text{ min} + (0{,}2 \cdot 60)\text{ s} = 8\text{ h }25\text{ min }12\text{ s}$

b) $$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{ll} 123{,}45\text{ min} & \underline{|\,60\quad} \\ \quad 3{,}45\text{ min} & 2\text{ h} \end{array} \\ 3{,}45\text{ min} = 3\text{ min} + (0{,}45 \cdot 60)\text{ s} = 3\text{ min }27\text{ s} \end{array}\right\} 123{,}45\text{ min} = 2\text{ h }3\text{ min }27\text{ s}$$

c) $$\left.\begin{array}{lll} 12\,746\text{ s} & \underline{|\,60\qquad\qquad} & \\ \quad 26\text{ s} & 212\text{ min} & \underline{|\,60\quad} \\ & \;\;32\text{ min} & 3\text{ h} \end{array}\right\} 12\,746\text{ s} = 3\text{ h }32\text{ min }26\text{ s}$$

25 ***a) Sumar → 14° 27' 54'' + 16° 42'18''***

b) Restar → 31° 10' 12'' – 14° 27' 54''

Ejercicio resuelto.

26 **Calcula.**

a) 37° 50' 18'' + 25° 39' **b) 53° 27' 46'' + 39° 43' 32''**

c) (3 h 13 min) – (1 h 52 min 28 s) **d) (4 h 16 min 24 s) – (2 h 39 min 51 s)**

a) $$\begin{array}{r} 37^\circ\,50'\,18'' \\ +\,25^\circ\,39'\quad\;\; \\ \hline 62^\circ\,89'\,18'' \end{array} \longrightarrow 63^\circ\,29'\,18''$$

b) $$\begin{array}{r} 53^\circ\,27'\,46'' \\ +\,39^\circ\,43'\,32'' \\ \hline 92^\circ\,70'\,78'' \end{array} \longrightarrow 93^\circ\,11'\,18''$$

c) $$\begin{array}{l} 3\text{ h }13\text{ min} \\ -1\text{ h }52\text{ min }28\text{ s} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 2\text{ h }72'\,60'' \\ -\;1\text{ h }52'\,28'' \\ \hline 1\text{ h }20'\,32'' \end{array}$$

d) $$\begin{array}{l} 4\text{ h }16\text{ min }24\text{ s} \\ -2\text{ h }39\text{ min }51\text{ s} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3\text{ h }75'\,84'' \\ -\;2\text{ h }39'\,51'' \\ \hline 1\text{ h }36'\,33'' \end{array}$$

27 **Calcula.**

a) (14 min 16 s) · 8 **b) (26° 52' 10") · 5**

c) (59° 46' 18") : 6 **d) (2 h 25 min 36 s) : 12**

a) (14 min 16 s) · 8 = 112 min 128 s = 114 min 8 s = 1 h 54 min 8 s

b) (26° 52' 10'') · 5 = 130° 260' 50'' =134° 20' 50''

c) (59° 46' 18'') : 6 = (3 540' + 46' + 18'') : 6 = (3 586' + 18'') : 6 = (215 160'' + 18'') : 6 =
= 215 178'' : 6 = 35 863''

$$\left.\begin{array}{llll} 35\,863'' & \underline{|60} & & \\ \ \ 586 & 597' & \underline{|60} & \\ \ \ \ 463 & \ 57' & 9° & \\ \ \ \ \ 63'' & & & \end{array}\right\} 35\,863'' = 9°\ 57'\ 43''$$

d) (2 h 25 min 36 s) : 12 = (120 min + 25 min + 36 s) : 12 = (145 min + 36 s) : 12 =
= (8 700 s + 36 s) : 12 = 8 736 s : 12 = 728 s

$$\left.\begin{array}{ll} 728\text{ s} & \underline{|60} \\ 128 & 12\text{ min} \\ \ \ 8\text{ s} & \end{array}\right\} 728\text{ s} = 12\text{ min } 8\text{ s}$$

Página 50

28 **Las coordenadas geográficas de Almería, expresadas en grados, son:**

Latitud → 36,84016 Norte

Longitud → 2,46792 Este

Exprésalas en grados, minutos y segundos.

Latitud → 36,84016° = 36° + 0,84016 · 60 = 36° + 50,4096' = 36° + 50' + 0,4096 · 60 =
= 36° + 50' + 24,576" = 36° 50' 25"

Longitud → 2,46792° = 2°+ 0,46792 · 60 = 2° + 28,0752' = 2° + 28' + 0,0752 · 60 =
= 2° + 28'+ 4,512" = 2° 28' 5"

Fracciones. Aplicación de conceptos

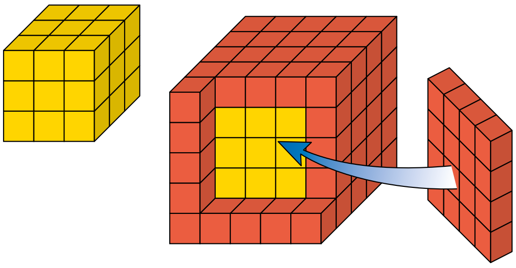
29 **Calcula mentalmente.**

a) $\frac{2}{3}$ **de 60** **b)** $\frac{1}{10}$ **de 90** **c)** $\frac{3}{4}$ **de 120**

a) $\frac{2}{3}$ de 60 = $\frac{2 \cdot 60}{3} = 40$ b) $\frac{1}{10}$ de 90 = $\frac{1 \cdot 90}{10} = 9$ c) $\frac{3}{4}$ de 120 = $\frac{3 \cdot 120}{4} = 90$

30 **El cubo pequeño está construido con dados amarillos. Para formar el cubo grande, recubrimos el anterior de dados rojos.**

¿Qué fracción de los dados del cubo grande son amarillos? ¿Y rojos?



El cubo pequeño tiene $3^3 = 27$ dados, todos amarillos.

El cubo grande tiene $5^3 = 125$ dados en total.

$\frac{27}{125}$ de los dados del cubo grande son amarillos y $\frac{98}{125}$ son rojos.

31 **La gráfica informa sobre los deportes preferidos en una clase de 30 estudiantes de segundo de ESO.**

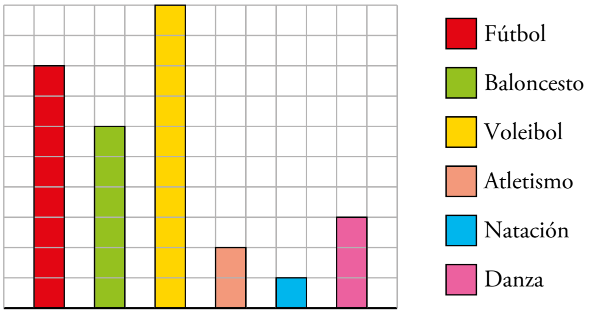
¿Qué fracción de la clase…

a) … practica fútbol?

b) … practica baloncesto?

c) … no practica baloncesto?

d) … no practica ni fútbol ni baloncesto?



a) $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ b) $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ c) $\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ d) $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

32 **¿Cuántos gramos son?**

a) $\frac{3}{4}$ **de kilo** **b)** $\frac{3}{5}$ **de kilo** **c)** $\frac{7}{20}$ **de kilo**

a) Teniendo en cuenta que 1 kilo son 1 000 gramos:

$\frac{3}{4}$ de 1 000 = (1 000 : 4) · 3 = 750 gramos

b) $\frac{3}{5}$ de 1 000 = (1 000 : 5) · 3 = 600 gramos

c) $\frac{7}{20}$ de 1 000 = (1 000 : 20) · 7 = 350 gramos

33 **¿Cuántos minutos son?**

a) $\frac{5}{6}$ **de hora** **b)** $\frac{3}{12}$ **de hora** **c)** $\frac{4}{5}$ **de hora**

a) Teniendo en cuenta que 1 hora son 60 minutos:

$\frac{5}{6}$ de hora = $\frac{5}{6}$ de 60 min = (60 : 6) · 5 = 50 min

b) $\frac{3}{12}$ de hora = $\frac{3}{12}$ de 60 min = (60 : 12) · 3 = 15 min

c) $\frac{4}{5}$ de hora = $\frac{4}{5}$ de 60 min = (60 : 5) · 4 = 48 min

34 **¿Qué fracción de hora son?**

a) 5 minutos **b) 24 minutos** **c) 360 segundos**

a) $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ b) $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ c) $\frac{360}{3\,600} = \frac{1}{10}$

Equivalencia de fracciones

35 **Escribe:**

a) Una fracción equivalente a 4/10 que tenga por numerador 6.

b) Una fracción equivalente a 15/45 que tenga por denominador 12.

c) Una fracción equivalente a 35/45 que tenga por numerador 91.

a) $\frac{6}{15}$, ya que $\frac{6}{15} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

b) $\frac{4}{12}$, ya que $\frac{4}{12} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{15}{45}$

c) $\frac{91}{117}$, ya que $\frac{91}{117} = \frac{13 \cdot 7}{13 \cdot 9} = \frac{7}{9} = \frac{35}{45}$

36 **Simplifica:**

a) $\frac{12}{16}$ **b)** $\frac{21}{28}$ **c)** $\frac{30}{48}$

d) $\frac{33}{55}$ **e)** $\frac{42}{99}$ **f)** $\frac{63}{180}$

a) $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{30}{48} = \frac{5}{8}$

d) $\frac{33}{55} = \frac{3}{5}$ e) $\frac{42}{99} = \frac{14}{33}$ f) $\frac{63}{180} = \frac{7}{20}$

37 **Reduce a común denominador.**

a) $\frac{5}{6}, \frac{1}{9}$ **b)** $1, \frac{3}{12}, \frac{5}{8}$ **c)** $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ **d)** $\frac{4}{9}, \frac{17}{33}, \frac{52}{99}$

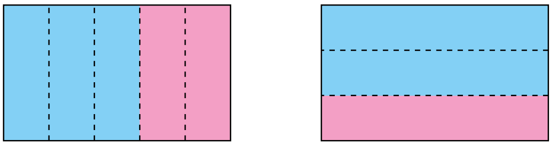
a) $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}, \frac{1}{9} = \frac{1 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{2}{18}$

b) $1 = \frac{24}{24}, \frac{3}{12} = \frac{3 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{6}{24}, \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$

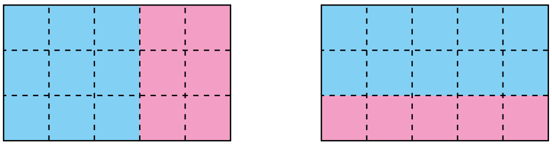
c) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 14}{3 \cdot 14} = \frac{28}{42} \quad \frac{1}{2} = \frac{21}{2 \cdot 21} = \frac{21}{42}, \frac{1}{7} = \frac{6}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42}$

d) $\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 11}{9 \cdot 11} = \frac{44}{99}, \frac{17}{33} = \frac{17 \cdot 3}{33 \cdot 3} = \frac{51}{99}, \frac{52}{99}$

38 **Estos dos trozos de tela son igual de grandes:**



¿Cuál de los dos tiene una porción mayor de azul? Explica la transformación que propone este gráfico para resolver la pregunta:



El color azul ocupa $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$ de cada trozo de tela, respectivamente. El gráfico propone una reducción de estas fracciones a común denominador:

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}; \ \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

De este modo, la comparación es obvia, $\frac{9}{15} < \frac{10}{15}$. La porción azul es mayor en el trozo de tela de la derecha.

39 **Calcula x en cada caso.**

a) $\frac{6}{22} = \frac{15}{x}$ **b)** $\frac{21}{49} = \frac{x}{35}$

c) $\frac{13}{x} = \frac{11}{99}$ **d)** $\frac{x}{78} = \frac{91}{169}$

a) $\frac{6}{22} = \frac{15}{x} \to 6 \cdot x = 15 \cdot 22 \to x = 55$ b) $\frac{21}{49} = \frac{x}{35} \to 49 \cdot x = 21 \cdot 35 \to x = 15$

c) $\frac{13}{x} = \frac{11}{99} \to 11 \cdot x = 13 \cdot 99 \to x = 117$ d) $\frac{x}{78} = \frac{91}{169} \to 169 \cdot x = 91 \cdot 78 \to x = 42$

Página 51

Fracciones y decimales

40 **Expresa en forma decimal:**

a) $\frac{7}{2}$ **b)** $\frac{27}{50}$ **c)** $\frac{13}{125}$ **d)** $\frac{7}{6}$ **e)** $\frac{4}{9}$ **f)** $\frac{5}{11}$

a) 3,5 b) 0,54 c) 0,104 d) $1,1\overset{\frown}{6}$ e) $0,\overset{\frown}{4}$ f) $0,\overset{\frown}{45}$

41 **Copia y completa con fracciones irreducibles.**

0,1	**0,2**	**1,5**	**0,05**	**0,16**	**0,55**	**1,25**	**2,5**
1/10							

0,1	**0,2**	**1,5**	**0,05**	**0,16**	**0,55**	**1,25**	**2,5**
1/10	1/5	3/2	1/20	4/25	11/20	5/4	5/2

42 **Pasa a forma fraccionaria.**

a) **1,1** **b)** **0,13** **c)** **0,008** **d)** $\mathbf{0,\overset{\frown}{8}}$

e) $\mathbf{1,\overset{\frown}{8}}$ **f)** $\mathbf{0,2\overset{\frown}{8}}$ **g)** $\mathbf{0,\overset{\frown}{24}}$ **h)** $\mathbf{0,0\overset{\frown}{2}}$

a) $\frac{11}{10}$ b) $\frac{13}{100}$ c) $\frac{8}{1000}$ d) $\frac{8}{9}$

e) $\frac{17}{9}$ f) $\frac{26}{9}$ g) $\frac{24}{99}$ h) $\frac{1}{45}$

Resuelve problemas con números decimales

43 **¿Cuánto cuestan dos kilos y ochocientos gramos de manzanas a 1,65 € el kilo?**

2 kg + 800 g = 2,8 kg → (2,8 kg) · (1,65 €/kg) = 4,62 €

Cuestan 4,62 €.

44 **¿Cuánto pagaré si compro 1,083 kg de salmón a 9,75 €/kg?**

Atención al redondeo.

(1,083 kg) · (9,75 €/kg) = 10,55925 € → 10,56 €

Pagaré 10,56 €.

45 **Para fabricar 3 500 dosis de cierto medicamento, se necesitan 1,96 kg de principio activo. ¿Cuántos gramos de este principio lleva cada dosis?**

1,96 kg = 1 960 g → (1 960 g) : (3 500 dosis) = 0,56 g/dosis

Cada dosis lleva 0,56 g de principio activo.

46 **Hemos gastado 6,08 € en la compra de un trozo de queso que se vende a 12,80 €/kg. ¿Cuánto pesa la porción adquirida?**

$$\frac{6,08\text{ €}}{12,80\text{ €/kg}} = 0,475\text{ kg} = 475\text{ gramos}$$

La porción pesa 475 gramos.

47 **Una sandía de 2 kilos y 625 gramos ha costado 4,20 €. ¿A cómo sale el kilo?**

$$\frac{4,20\text{ €}}{2,625\text{ kilo}} = 1,6\text{ €/kilo}$$

El kilo sale a 1,60 €.

48 **Marcelo compra un melón que pesa dos kilos y cuatrocientos gramos.**

Si el melón se vende a 1,99 €/kg, ¿cuál de estas cantidades debe pagar por la compra?

4,80 € **4,90 €** **4,78 €** **4,88 €**

$2{,}4 \cdot 1{,}99 = 4{,}776 \approx 4{,}78$

Debe pagar 4,78 €.

49 **Karla ha comprado 340 gramos de jamón, ha pagado con un billete de 10 € y le han devuelto 3,88 €. ¿A cómo está el kilo de jamón?**

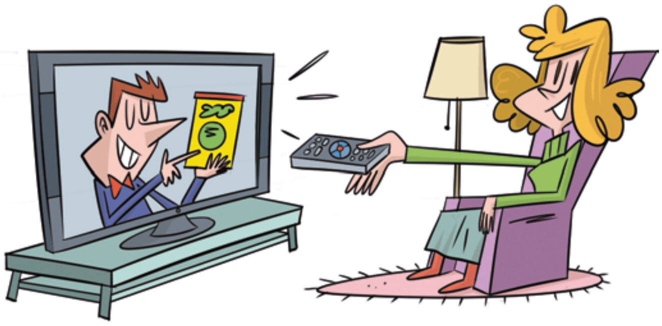
$$\left.\begin{array}{l} 10 - 3{,}88 = 6{,}12 \\ 6{,}12 : 0{,}34 = 18 \end{array}\right\} \text{El kilo de jamón está a 18 €.}$$

50 **Una cadena de radio inicia a las 18 h 45 min 13 s la emisión de un programa de música, pregrabado, que tiene una duración de 1 h 16 min 52 s. ¿A qué hora terminará el programa?**

$$\begin{array}{r} 18\text{ h }45\text{ min }13\text{ s} \\ +\ \ 1\text{ h }16\text{ min }52\text{ s} \\ \hline 19\text{ h }61\text{ min }65\text{ s} \end{array} \rightarrow\ 20\text{ h }2\text{ min }5\text{ s}$$

El programa terminará a las 20 h 2 min 5 s.

51 **He visto una película en la tele que tenía una duración de 1 h 53 min 23 s, pero con las cuñas publicitarias la emisión ha durado 2 h 12 min 15 s. ¿Cuánto tiempo se ha dedicado a publicidad?**

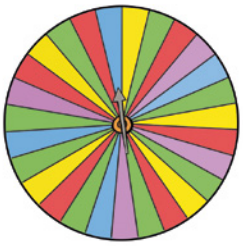


$$\begin{array}{r} 2\text{ h }12\text{ min }15\text{ s} \\ -1\text{ h }53\text{ min }23\text{ s} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1\text{ h }71\text{ min }75\text{ s} \\ -\ 1\text{ h }53\text{ min }23\text{ s} \\ \hline 18\text{ min }52\text{ s} \end{array}$$

Se ha dedicado a la publicidad 18 min 52 s.

52 **Una ruleta está dividida en 27 zonas iguales sobre las que se puede parar la aguja.**

¿Qué ángulo abarca cada zona?



$$\frac{360°}{27} = 13{,}\widehat{3}°$$

Cada zona tiene un ángulo de $13{,}\widehat{3}°$.

53 **El cañón de un telescopio ha girado desde la posición inicial (Norte), un ángulo de 158° 53' 20", en el sentido de las agujas del reloj.**

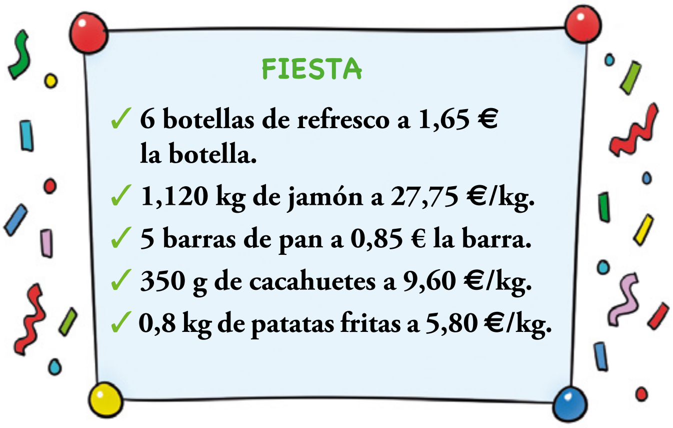
¿Qué ángulo debería haber girado en el sentido contrario para llegar a la misma posición?

Haremos la resta de los 360 grados de la circunferencia:

360° – (158° 53' 20") = 359° 59' 60" – (158° 53' 20") = 201° 6' 40"

Debería haber girado 201° 6' 40".

54 **Para celebrar una fiesta, trece amigos adquieren:**



FIESTA

- ✓ 6 botellas de refresco a 1,65 € la botella.
- ✓ 1,120 kg de jamón a 27,75 €/kg.
- ✓ 5 barras de pan a 0,85 € la barra.
- ✓ 350 g de cacahuetes a 9,60 €/kg.
- ✓ 0,8 kg de patatas fritas a 5,80 €/kg.

¿Cuánto debe poner cada uno?

Cada uno debe poner 4,10 € y sobrarán 0,07 €.

- ✓ Refrescos: 6 · 1,65 € = 9,90 €
- ✓ Jamón: (1,120 kg) · (27,75 €/kg) = 31,08 €
- ✓ Pan: 5 · 0,85 € = 4,25 €
- ✓ Cacahuetes: (0,350 kg) · (9,60 €/kg) = 3,36 €
- ✓ Patatas fritas: (0,8 kg) · (5,80 €/kg) = 4,64 €

Total: 53,23 €

53,23 : 13 = 4,0946…

Si cada uno pone 4,09 €, el total no es suficiente → cada uno tiene que poner 4,10 € y sobrarán 0,07 €.

55 **Una empresa inmobiliaria adquiere un terreno rectangular de 125,40 m de largo y 74,60 m de ancho por 350 000 €. Después, lo urbaniza, con un coste de 62 528,43 €. Y, por último, lo divide en parcelas y lo pone a la venta a 52,75 € el metro cuadrado.**

¿Qué beneficio espera obtener?

Espera obtener un beneficio de 80 939,38 €.

- Paga por terrenos: 350 000 €
- Paga por urbanizar: 62 528,43 €
- Gana en venta: (52,75 €/m^2) · (125,40 m · 74,60 m) = 493 467,81 €

Beneficio = 493 467,81 € – 350 000 € – 62 528,43 € = 80 939,38 €

Página 52

56 **Una furgoneta transporta 250 docenas de huevos que cuestan 0,98 € la docena. En una curva se vuelca una caja y se rompen 60 huevos. ¿Cuánto hay que aumentar el precio de la docena para que la mercancía siga valiendo lo mismo?**

Hay que aumentar la docena a 1 € (o en 0,02 €).

- 250 docenas · (0,98 €/docena) = 245 €
- Se rompen 60 huevos = 5 docenas
- Quedan 250 – 5 = 245 docenas → Para seguir ganando 245 € hemos de subir la docena a 1 €, es decir, aumentarla en 0,02 €.

57 ***Un ciclista ha cubierto los 52 kilómetros de una etapa contrarreloj en una hora y treinta seis minutos. ¿Cuál ha sido su velocidad media en km/h?***

Problema resuelto.

58 **Un camión ha realizado un viaje de 169,29 km en 2 h 42 min. ¿Cuál ha sido su velocidad media?**

La velocidad media es de 62,7 km/h.

2 h 42 min = 2 h + (42 : 60) h = 2 h + 0,7 h = 2,7 h

v_{media} = (159,29 km) : (2,7 h) = 62,7 km/h

59 **Un autobús interurbano da una vuelta a su recorrido cada hora y doce minutos. ¿Cuántas vueltas dará en las 12 horas que dura su servicio?**

Dará 10 vueltas.

1 h 12 min = 1 h + (12 : 60) h = 1 h + 0,2 h = 1,2 h

12 : 1,2 = 10 → 10 vueltas

60 ***Un ciclista ha cubierto los 52 kilómetros de una etapa contrarreloj a una velocidad de 32,5 km/h. ¿Cuánto tiempo ha invertido en la etapa?***

Problema resuelto.

61 **Una furgoneta ha viajado durante 4 horas y 36 minutos a una velocidad media de 65 kilómetros por hora. ¿Qué distancia ha recorrido?**

Pasamos a horas el tiempo del viaje:

$$\frac{36 \text{ minutos}}{60} = 0{,}6 \text{ horas} \rightarrow 4 \text{ h } 36 \text{ min} = 4{,}6 \text{ h}$$

65 km/h · 4,6 h = 299 km

Ha recorrido 299 kilómetros.

62 **Un tren de mercancías ha recorrido 187 km a 55 km/h. ¿Cuánto tiempo ha invertido en el trayecto?**

187 : 55 = 3,4 horas = 3 h + 0,4 · 60 min = 3 h 24 min

Ha invertido 3 h 24 min en el trayecto.

63 **Un autobús de línea ha invertido siete horas y doce minutos en el trayecto entre Barcelona y Bilbao. ¿Cuál ha sido la velocidad media del viaje?**

Si te falta algún dato, debes buscarlo.

Buscando en Internet, la distancia por autopista entre Barcelona y Bilbao es de 609,9 km.

609,9 : (7 + 12 : 60) = 609,9 : 7,2 = 84,71 km/h

La velocidad media habrá sido de 84,71 km/h.

64 **Un buque petrolero, a una velocidad media de 18 nudos, ha cubierto la distancia entre la plataforma de extracción y el puerto de la refinería en 12 horas y tres cuartos. ¿Qué distancia ha recorrido durante la travesía?**

¿Qué significa que la velocidad es 18 nudos?

Velocidad media = 18 nudos, lo que significa:

1 nudo = 1 milla marina por hora = 1,852 km/h → 18 nudos = 18 · 1,852 km/h = 33,34 km/h

Tarda 12 h 3/4, o lo que es lo mismo 12,75 h.

33,34 · 12,75 = 425,085 km

Ha recorrido 425,1 km durante la travesía.

65 **Un barco velero, a una velocidad media de 5 nudos, recorre la distancia entre dos islas en una hora y 24 minutos. ¿Qué distancia ha cubierto en la travesía?**

Hemos visto en la actividad 64 que 1 nudo = 1,852 km/h,
y como Espacio (km) = Velocidad (km/h) · Tiempo (h), calculamos:

$5 \cdot 1{,}852 \cdot (1 + 24 : 60) = 5 \cdot 1{,}852 \cdot 1{,}4 = 12{,}964$ km

El barco ha cubierto una distancia de 12,964 km.

66 ***Unos científicos han detectado un nuevo planeta a una distancia de 4,3 parsec de nuestro sistema solar.***

¿Cuánto tardaría una nave terrícola del futuro, a la velocidad de la luz, en llegar a dicho planeta?

Problema resuelto.

67 **¿Cuánto tardaría una sonda espacial, a una velocidad de 100 kilómetros por segundo, en llegar al planeta Marte si se calcula que en la trayectoria recorrería una distancia de 2,4 UA (unidades astronómicas)?**

¿Recuerdas qué es una UA?

Una unidad astronómica es aproximadamente la distancia que hay entre la Tierra y el Sol:

$$1 \text{ UA} = 149\,597\,870{,}7 \text{ km}$$

Así la distancia la podemos expresar en km:

$$2{,}4 \text{ UA} = 2{,}4 \cdot 149\,597\,870{,}7 \text{ km} = 359\,034\,889{,}68 \text{ km}$$

Veamos cuanto tiempo tardaría en recorrer dicha distancia, si su velocidad es de 100 km/s:

$$\frac{359\,034\,889{,}68 \text{ km}}{100 \text{ km/s}} = 3\,590\,348{,}8968 \text{ segundos}$$

Aproximadamente, tardaría 3 590 349 segundos, o lo que es lo mismo, expresado en días:

$$\frac{3\,590\,349}{60} = 59\,839{,}15 \text{ minutos} = \frac{59\,839}{60} \text{ horas} = 997{,}32 \text{ h} = \frac{997{,}32}{24} = 41{,}55 \text{ días}$$

Aproximadamente tardaría 41 días y medio.

Página 53

Analiza y exprésate

68 **Describe las distintas formas en que se ha resuelto el problema y di si aprecias errores en algunas de ellas.**

Un camión circula por una autopista a 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 300 km?

Resolución 1

$$\begin{array}{r|l}
300 & 90 \\ \cline{2-2}
30 \rightarrow 30 & 3 \text{ h } 20 \text{ min} \\
\underline{\times \quad 60} & \\
1800 & \\
000 &
\end{array}$$

El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 2

$$\begin{array}{r|l} 3\,0\,0{,}0\,0 & 90 \\ \cline{2-2} 3\,0\;\;0 & 3{,}33 \\ 3\;\;0\,0 & \\ 3\,0 & \end{array}$$

El camión tarda 3 h 33 min.

Resolución 3

$$\begin{array}{cccccccc} 300 = & 90 & + & 90 & + & 90 & + & 30 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 1\text{ h} & & 1\text{ h} & & 1\text{ h} & & 20\text{ min} \end{array}$$

Resolución 4

90 km/h = (90 000 : 60) m/min = 1 500 m/min
300 km = 300 000 m
300 000 m : 1 500 m/min = 200 min = 180 min + 20 min = 3 h 20 min
El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 5

$$\begin{array}{r|l} 3\,0\,0 & 90 \\ \cline{2-2} 3\,0\,0 & 3{,}33\text{ h} = 3\text{ h} + 0{,}33\text{ h} \\ 3\,0\,0 & \\ 3\,0 & \end{array}$$

0,33 h → $0{,}33 \cdot 60 = 19{,}8$ min = (19 + 0,8) min

0,8 min → $0{,}8 \cdot 60 = 48$ s

El camión tarda 3,33 h = 3 h 19 min 48 s.

Resolución 1

Aplica la relación tiempo = espacio : velocidad ($t = e : v$) y realiza la operación en forma completa.

El resultado es exacto.

Resolución 2

Aplica la misma relación, $t = e : v$, pero realiza la operación en forma decimal. La división es inexacta, dejando en el cociente un error igual a $0{,}00\widehat{3}$.

Interpreta mal el resultado, ya que 3,33 h no son 3 h 33 min, sino 3 horas y 33 centésimas de hora.

Resolución 3

Descompone la distancia 300 km en tres tramos de 90 km y uno de 30 km. Cada tramo de 90 km se recorre en 1 hora, y el de 30 km, en la tercera parte de una hora, es decir, 20 minutos.

La solución es, por tanto, 3 h 20 min.

Resolución 4

Pasa la distancia a metros y la velocidad a metros/minuto. Después, aplica la relación $t = e : v$ y obtiene 200 minutos, que pasados a forma compleja son 3 h 20 min.

Resolución 5

Aplica la relación $t = e : v$. Realiza la división en forma decimal y aproxima el cociente a las centésimas (3,33 h) dejando un error de $0{,}00\widehat{3}$.

Pasa el resultado a forma sexagesimal, obteniendo 3 h 19 min 48 s. La diferencia con el resultado exacto (3 h 20 min) se debe al error cometido en la división.

69 **¿Qué expresiones resuelven este problema?**

La familia López ha comprado un frigorífico que costaba 540 €, pagando una entrada de 120 € y el resto en seis plazos, con un recargo del 8 %. ¿Cuál es el importe de cada plazo?

a) $(540 - 120 \cdot 1{,}08) : 6$

b) $[(540 - 120) : 6] + 0{,}08$

c) $\dfrac{540 - 120}{6} \cdot \dfrac{100 + 8}{100}$

d) $\dfrac{540 - 120}{6} \cdot 0{,}8$

La expresión que resuelve el problema es la del apartado c).

El importe de cada plazo es 75,60 €.

Problemas «+»

70 **El gerente de una fábrica de pantalones vaqueros maneja los siguientes datos:**

- **Los depósitos de agua del taller de lavado a la piedra deben suministrar, durante toda la jornada laboral (6:00 h-20:00 h), un caudal de agua fijo de 15 litros por minuto, a 85 °C.**
- **Para subir un grado la temperatura de un metro cúbico de agua, se necesitan 0,65 litros de combustible, que tiene un coste de 1,08 € por litro.**
- **Durante el mes de marzo se han hecho diez mediciones de la temperatura del agua que suministra la red, y otras diez mediciones en julio:**

	TEMPERATURA (°C)									
MARZO	6	8	10	12	11	9	6	10	9	7
JULIO	25	27	30	29	26	25	28	30	32	35

Con estos datos, estima el ahorro en combustible durante el mes de julio, con respecto al mes de marzo, y su montante en euros.

- Temperatura media en marzo: 88/10 = 8,8 °C
- Temperatura media en julio: 287/10 = 28,7 °C
- Diferencia de temperaturas entre marzo y julio: 28,7 – 8,8 = 19,9 °C
- Duración de la jornada laboral: 20 – 6 = 14 horas
- Gasto de agua en un mes (22 días laborables) a razón de 15 L/min durante 14 horas diarias:

$$15 \cdot 60 \cdot 14 \cdot 22 = 277\,200 \text{ litros} = 277{,}2 \text{ m}^3$$

- Coste de elevar 19,9 °C la temperatura de 277,2 m^3 de agua, a razón de 0,65 litros de combustible por metro cúbico al precio de 1,08 €/litro:

$$277{,}2 \cdot 0{,}65 \cdot 1{,}08 \cdot 19{,}9 = 3\,872{,}4285 \text{ €}$$

Solución: El ahorro de combustible en julio respecto a marzo, se estima en unos 3 875 €.

71 ***¿Qué ángulo forman las dos agujas de un reloj a las 3 h 12 min?***

Ejercicio resuelto.

72 **Calcula el ángulo que forman las agujas de un reloj a las siguientes horas:**

a) 2 h 24 min **b) 7 h 42 min** **c) 13 h 18 min**

a) 2 h 24 min → 72°

2 h 24 min = 2 h + (24 : 60) h = 2,4 h

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{aguja pequeña: } \alpha = (2{,}4\text{ h})\cdot(30^\circ/\text{h}) = 72^\circ \\ \bullet\ \text{aguja grande: } \beta = (24\text{ min})\cdot(6^\circ/\text{min}) = 144^\circ\end{array}\right\}\ \beta - \alpha = 144^\circ - 72^\circ = 72^\circ$$

b) 7 h 42 min → 21°

7 h 42 min = 7 h + (42 : 60) h = 7,7 h

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{aguja pequeña: } \alpha = (7{,}7\text{ h})\cdot(30^\circ/\text{h}) = 231^\circ \\ \bullet\ \text{aguja grande: } \beta = (42\text{ min})\cdot(6^\circ/\text{min}) = 252^\circ\end{array}\right\}\ \beta - \alpha = 252^\circ - 231^\circ = 21^\circ$$

c) 13 h 18 min → 69°

13 h 18 min = 1 h 18 min = 1 h + (18 : 60) h = 1,3 h

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{aguja pequeña: } \alpha = (1{,}3\text{ h})\cdot(30^\circ/\text{h}) = 39^\circ \\ \bullet\ \text{aguja grande: } \beta = (18\text{ min})\cdot(6^\circ/\text{min}) = 108^\circ\end{array}\right\}\ \beta - \alpha = 108^\circ - 39^\circ = 69^\circ$$

73 **Las agujas de un reloj marcan las 10 h 36 min. ¿Qué ángulo girará cada una hasta llegar a las doce en punto?**

La aguja horaria está situada en las 10 horas, para llegar a las doce en punto tiene que girar 60 grados:

$$10 \cdot 6^\circ = 60^\circ$$

La aguja minutero está situada en los 36 minutos, para llegar a las doce en punto tiene que recorrer 24 minutos:

$$24 \cdot 6^\circ = 144^\circ$$

La aguja horaria girará 60° y la aguja minutero, 144°.

74 **¿Qué velocidad, en nudos, lleva un ferri que hace la travesía entre Valencia e Ibiza en 3 horas y 45 minutos?**

Si te falta algún dato, debes buscarlo.

Buscamos en Internet la distancia entre Valencia e Ibiza, que son 207,5 km aproximadamente.

Sabemos que tarda 3 h 45 min en recorrer dicha distancia, o lo que es lo mismo, 3,75 horas.

Veamos a qué velocidad va:

$$\frac{207{,}5\text{ km}}{3{,}75\text{ h}} = 55{,}33\text{ km/h}$$

Nos piden que expresemos la velocidad en nudos, por lo que debemos buscar qué relación hay entre nudos y km/h, y encontramos que:

$$1\text{ km/h} = 0{,}54\text{ nudos}$$

$$55{,}33\text{ km/h} \cdot 0{,}54 = 29{,}8782\text{ nudos}$$

Lleva una velocidad aproximada de 30 nudos.

Página 54

LEE E INFÓRMATE

Cosas de números

Comprueba con la calculadora estas divisiones que tienen como resultado números con infinitas cifras decimales:

$1 : 9 = 0{,}111...$ $2 : 9 = 0{,}222...$ $3 : 9 = 0{,}333...$ $4 : 9 = 0{,}444...$

Según esos resultados, 9 : 9 debería ser $0{,}99999... = 0{,}\overset{\frown}{9}$.

Sin embargo, sabemos que 9 : 9 = 1.

$$0{,}999... \leftrightarrow \boxed{\quad\quad 1}$$

- **¿Son distintos esos resultados? ¿Serías capaz de calcular su diferencia?**

  Al expresar $0{,}\overset{\frown}{9}$ estamos diciendo que este número tiene infinitos decimales y todos ellos son 9.

  Si queremos restar $1 - 0{,}\overset{\frown}{9}$ nos encontraremos que:

  $1 - 0{,}9 = 0{,}1$ el 1 está en la primera posición decimal

  $1 - 0{,}99 = 0{,}01$ el 1 está en la segunda posición decimal

  $1 - 0{,}999 = 0{,}001$ el 1 está en la tercera posición decimal

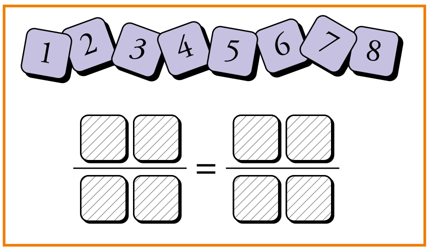
  …

  $1 - 0{,}\overset{\frown}{9} = 0{,}0000000...1$ el 1 está en la posición decimal infinita por lo que podemos aproximarlo a cero. Y así vemos que son aproximadamente iguales.

INVESTIGA

Una cifra en cada casilla

Copia en tu cuaderno y coloca las cifras del 1 al 8, una en cada casilla, de forma que resulten dos fracciones equivalentes.



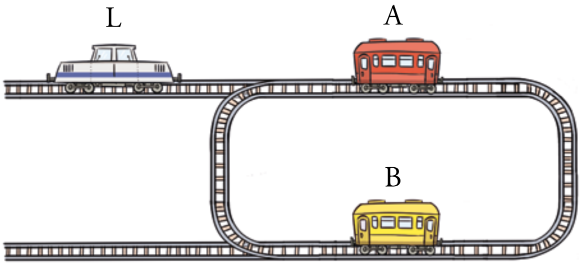
Por ejemplo: $\frac{17}{28} = \frac{34}{56}$ o $\frac{27}{18} = \frac{54}{36}$

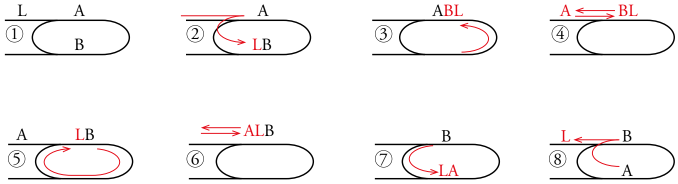
Página 54

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Lógica de trenes

Teniendo en cuenta que la locomotora puede avanzar hacia adelante y hacia atrás, arrastrar y empujar, ¿cómo intercambiar la posición de los vagones entre sí, dejando la locomotora en su posición actual?





Bailando

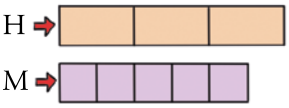
En la fiesta, al sonar el tango, dos tercios de los hombres bailaban con cuatro quintos de las mujeres.

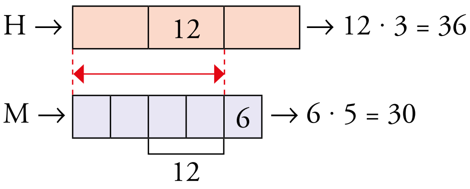
Seis mujeres no bailaban.

a) ¿Cuántos hombres no bailaban?

b) ¿Cuántas personas asistían a la fiesta?

El tango se baila por parejas.





a) No bailan 12 hombres.

b) A la fiesta asistían, 36 hombres y 30 mujeres, en total 66 personas.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Escribe cómo se leen:**

a) 1,07 **b) 0,0023** **c) 0,000234**

a) Una unidad y siete centésimas.

b) Veintitrés diezmilésimas.

c) Doscientas treinta y cuatro millonésimas.

2 **Escribe con cifras.**

a) Dieciocho centésimas.

b) Trece cienmilésimas.

c) Doscientas treinta y cinco millonésimas.

a) 0,18 b) 0,00013 c) 0,000235

3 **Redondea a las centésimas.**

a) 5,052 **b) 0,55555** **c) 0,7481**

a) 5,05 b) 0,56 c) 0,75

4 **Calcula.**

a) $\mathbf{0{,}25 \cdot 11{,}48}$ **b)** $\mathbf{23 : 4{,}5}$ **c)** $\mathbf{0{,}08 : 1{,}6}$ **d)** $\mathbf{10{,}2 : 0{,}034}$

a) 2,87 b) $5{,}\widehat{1}$ c) 0,05 d) 300

5 **Calcula.**

a) $\mathbf{1{,}4 - 1{,}8 \cdot 0{,}2 - 0{,}4 : 1{,}6}$

b) $\mathbf{2{,}024 - 0{,}3 \cdot (7{,}1 - 4{,}02)}$

c) $\mathbf{0{,}5 - 2{,}7 : [1{,}2 - 0{,}1 \cdot (0{,}25 - 1{,}75)]}$

a) 0,79 b) 1,1 c) –1,5

6 **Expresa en forma decimal.**

a) $\mathbf{\dfrac{2}{5}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{26}{13}}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{15}{12}}$

a) 0,4 b) 2 c) 1,25

7 **Expresa cada decimal con una fracción irreducible.**

a) 0,05 **b)** $\mathbf{0{,}\widehat{7}}$ **c)** $\mathbf{0{,}3\widehat{6}}$

a) $0{,}05 = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$ b) $0{,}\widehat{7} = \dfrac{7}{9}$ c) $0{,}\widehat{36} = \dfrac{33}{90} = \dfrac{11}{30}$

8 **Simplifica.**

a) $\mathbf{\dfrac{50}{75}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{27}{45}}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{210}{180}}$

a) $\dfrac{2 \cdot 5^2}{3 \cdot 5^2} = \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{3^3}{5 \cdot 3^2} = \dfrac{3}{5}$

c) $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \dfrac{7}{2 \cdot 3} = \dfrac{7}{6}$

9 **Reduce a común denominador las fracciones.**

a) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$ **b)** $\frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{11}{18}$ **c)** $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{7}{10}$ **d)** $\frac{2}{21}, \frac{5}{12}, \frac{13}{18}$

a) mín. c. m. (3, 6, 9) =18; $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}; \frac{1}{6} = \frac{3}{18}; \frac{1}{9} = \frac{2}{18}$

b) mín. c. m. (9, 12, 18) = 36; $\frac{5}{9} = \frac{20}{36}; \frac{7}{12} = \frac{21}{36}; \frac{11}{18} = \frac{22}{36}$

c) mín. c. m. (5, 15, 10) = 30; $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}; \frac{4}{15} = \frac{8}{30}; \frac{7}{10} = \frac{21}{30}$

d) mím. c. m. (21, 12, 18) =252; $\frac{2}{21} = \frac{24}{252}; \frac{5}{12} = \frac{105}{252}; \frac{13}{18} = \frac{182}{252}$

10 **Un automóvil realiza un viaje de ida y vuelta. En la ida gasta 13/15 de la capacidad total del depósito de combustible. A la vuelta, reposta, y consume 17/20 de este. ¿En cuál de los dos trayectos ha gastado más combustible?**

El mín. c. m. (15, 20) = 60.

Ida: $\frac{13}{15} = \frac{52}{60}$

Vuelta: $\frac{17}{20} = \frac{51}{60}$

Ha gastado más combustible en la ida $\left(\frac{52}{60}\right)$ que en la vuelta $\left(\frac{51}{60}\right)$.

11 **Un mayorista compra en una almazara 12 400 litros de aceite, a 1,60 €/litro, para envasarlo en botellas de 0,75 litros destinadas a una cadena de supermercados. Pero deja sin embotellar la última décima parte para no arrastrar posos. ¿Cuál será la ganancia si recibe 2,10 € por cada botella, vende el resto a una industria de jabones a 0,45 €/litro y estima sus gastos de almacén en 2 350 €?**

Gastos: 12 400 · 1,60 + 2 350 = 22 190 €

Cantidad que embotella: 12 400 · 0,9 = 11 160 litros

Cantidad para jabones: 12 400 · 0,1 = 1 240 litros

Botellas que envasa: 11 160 : 0,75 = 14 880 botellas

Ingresos: 14 880 · 2,10 + 1 240 · 0,45 = 31 806 €

Ganancia: 31 806 – 22 190 = 9 616 €

La ganancia será de 9 616 €.

12 **Una furgoneta realiza un viaje de 76 km circulando por una autovía a una velocidad constante de 95 km/h. ¿Cuánto dura el viaje?**

76 : 95 = 0,8 h = (0,8 · 60) min = 48 min

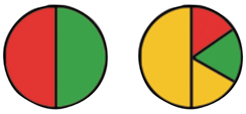
El viaje durará 48 min.

3 OPERACIONES CON FRACCIONES

Página 56

Repartos con fracciones unitarias

1 **Observa el gráfico y reparte al estilo egipcio dos panes entre tres.**

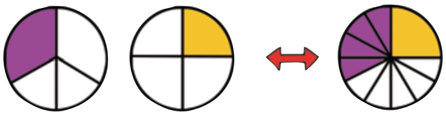


$\rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square}$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

2 **¿Qué fracción ordinaria sustituye a esta suma de fracciones unitarias?**

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \rightarrow$



$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

Página 57

Fracciones en Mesopotamia

3 **¿Qué fracción utilizaría un matemático de Mesopotamia para escribir $\frac{1}{2}$?**

$\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$

4 **En la tablilla de la derecha se ha grabado la fracción $\frac{40}{60}$. ¿Sabrías expresar ese mismo valor con otra fracción más sencilla?**

$0 + \frac{40}{60} \rightarrow$

$\frac{4}{60} = \frac{2}{3}$

Divisiones al estilo de la antigua China

5 **Divide por el método chino y por el nuestro, y después, compara los resultados.**

a) $\frac{1}{8} : \frac{1}{4}$

b) $\frac{4}{7} : \frac{3}{5}$

a) Método chino $\rightarrow \frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \frac{1}{8} : \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$

Método actual $\rightarrow \frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Los resultados son iguales una vez reducimos las fracciones.

b) Método chino $\rightarrow \frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{20}{35} : \frac{21}{35} = \frac{20}{21}$

Método actual $\rightarrow \frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{20}{21}$

Los resultados son iguales.

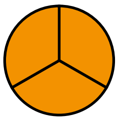
1 SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Página 59

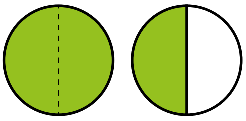
Para fijar ideas

1 **Observa, calcula mentalmente y contesta con una fracción.**

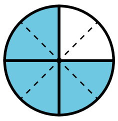
a) $1-\frac{1}{3}$



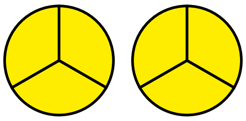
b) $1+\frac{1}{2}$



c) $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$



d) $2-\frac{2}{3}$



a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{8}$

d) $\frac{4}{3}$

2 **Copia y completa reduciendo a denominador común 30.**

a) $\frac{3}{10}+\frac{7}{15}=\frac{3\cdot\square}{10\cdot 3}+\frac{7\cdot\square}{15\cdot 2}=\frac{\square}{30}+\frac{\square}{30}=\frac{\square}{30}$

b) $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{5\cdot\square}{6\cdot 5}-\frac{4\cdot\square}{5\cdot\square}=\frac{\square}{30}-\frac{\square}{30}=\frac{\square}{30}$

c) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{1\cdot\square}{2\cdot\square}-\frac{2\cdot\square}{3\cdot\square}+\frac{3\cdot\square}{5\cdot\square}=\frac{\square}{30}-\frac{\square}{30}+\frac{\square}{30}=\frac{\square}{30}$

a) $\frac{3}{10}+\frac{7}{15}=\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{9}{30}+\frac{14}{30}=\frac{23}{30}$

b) $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}-\frac{4\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{25}{30}-\frac{24}{30}=\frac{1}{30}$

c) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 15}{2\cdot 15}-\frac{2\cdot 10}{3\cdot 10}+\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{15}{30}-\frac{20}{30}+\frac{18}{30}=\frac{13}{30}$

3 **Asocia cada pregunta con las expresiones de la derecha y calcula el resultado correspondiente. Según las estadísticas, en el barrio de Marta los tres quintos de la población escolar está en Infantil o Primaria, un tercio en Secundaria y el resto en Bachillerato.**

I $1-\frac{3}{5}$

II $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$

III $\frac{3}{5}-\frac{15}{100}$

IV $1-\left[\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right]$

a) ¿Qué fracción representa las etapas de Infantil, Primaria y Secundaria?

b) ¿Qué fracción representan Secundaria y Bachillerato?

c) ¿Qué fracción cursa Bachillerato?

d) Sabiendo que los de Infantil suponen el 15 %, ¿qué fracción supone Primaria?

a) $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=\frac{9+5}{15}=\frac{14}{15}$

b) $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

c) $1-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)=1-\frac{14}{15}=\frac{1}{15}$

d) $\frac{3}{5}-\frac{15}{100}=\frac{60-15}{100}=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$

Para practicar

1 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $\frac{2}{7}-\frac{2}{\square}=0$ **b)** $\frac{3}{4}+\frac{\square}{4}=0$ **c)** $\frac{1}{6}+\frac{1}{\square}=0$ **d)** $\frac{5}{8}-\frac{-5}{\square}=0$

a) $\frac{2}{7}-\frac{2}{7}=0$ b) $\frac{3}{4}+\frac{-3}{4}=0$ c) $\frac{1}{6}+\frac{1}{-6}=0$ d) $\frac{5}{8}-\frac{-5}{-8}=0$

2 Opera y simplifica.

a) $\frac{7}{6}+\frac{7}{12}$ **b)** $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$ **c)** $\frac{2}{7}-\frac{11}{14}$

d) $\frac{1}{6}-\frac{1}{14}$ **e)** $\frac{7}{15}-\frac{3}{10}$ **f)** $\frac{7}{20}-\frac{4}{15}$

a) $\frac{14}{12}+\frac{7}{12}=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}$ b) $\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{14}-\frac{11}{14}=-\frac{7}{14}=-\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{42}-\frac{3}{42}=\frac{4}{42}=\frac{2}{21}$ e) $\frac{14}{30}-\frac{9}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{21}{60}-\frac{16}{60}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$

3 Calcula, reduciendo al común denominador que se indica.

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ → **Denominador común: 8**

b) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ → **Denominador común: 6**

c) $\frac{7}{9}-\frac{4}{15}-\frac{1}{5}$ → **Denominador común: 45**

a) $\frac{4}{8}-\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

b) $\frac{6}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{7}{6}$

c) $\frac{35}{45}-\frac{12}{45}-\frac{9}{45}=\frac{14}{45}$

4 Calcula y simplifica los resultados.

a) $\frac{4}{9}+\frac{5}{6}-\frac{7}{18}$ **b)** $\frac{3}{7}-\frac{2}{5}+\frac{27}{35}$

c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{13}{12}-\frac{5}{8}-\frac{5}{6}$

a) $\frac{8}{18}+\frac{15}{18}-\frac{7}{18}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$ b) $\frac{15}{35}-\frac{14}{35}+\frac{27}{35}=\frac{28}{35}=\frac{4}{5}$

c) $\frac{25}{30}-\frac{3}{10}-\frac{6}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$ d) $\frac{26}{24}-\frac{15}{24}-\frac{20}{24}=-\frac{9}{24}=-\frac{3}{8}$

5 Quita paréntesis y calcula.

a) $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)$ **b)** $\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$ **d)** $\left(1-\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{9}{14}-\frac{1}{2}\right)$

a) $1-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{12-3-8}{12}=\frac{1}{12}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=\frac{18+5-20}{30}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$

c) $\frac{15+10-6-5}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$ d) $\frac{14-2-9+7}{14}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$

6 **Resuelve de dos formas:**

- **Quitando, primero, los paréntesis.**
- **Operando, primero, dentro de cada paréntesis.**

a) $\left(1-\frac{1}{4}\right)-\left(1-\frac{5}{9}\right)-\left(1-\frac{5}{6}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{7}{15}\right)$

a) $1-\frac{1}{4}-1+\frac{5}{9}-1+\frac{5}{6}=\frac{36-9-36+20-36+30}{36}=\frac{5}{36}$

$\frac{4-1}{4}-\frac{9-5}{9}-\frac{6-5}{6}=\frac{3}{4}-\frac{4}{9}-\frac{1}{6}=\frac{27-16-6}{36}=\frac{5}{36}$

b) $1-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{7}{15}=\frac{15-10-12+5+3-7}{15}=-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}$

$\frac{3-2}{3}-\frac{12-5}{15}+\frac{3-7}{15}=\frac{1}{3}-\frac{7}{15}+\frac{-4}{15}=\frac{5-7-4}{15}=-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}$

7 **Calcula.**

a) $\frac{7}{12}-\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\right]$

b) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left[\frac{7}{12}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\right]$

c) $\left[1-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\right]-\left[\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)\right]$

a) $\frac{7}{12}-\left[1-\frac{8-9}{12}\right]=\frac{7}{12}-\left[1+\frac{1}{12}\right]=\frac{7-12-1}{12}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$

b) $\frac{10-3}{15}-\left[\frac{7}{12}-\frac{5+3}{15}\right]=\frac{7}{15}-\left[\frac{7}{12}-\frac{8}{15}\right]=\frac{7}{15}-\frac{7}{12}+\frac{8}{15}=\frac{15}{15}-\frac{7}{12}=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

c) $\left[1-\frac{17}{12}\right]-\left[\frac{5}{12}-\frac{5}{24}\right]=\frac{12-17}{12}-\frac{10-5}{24}=\frac{-5}{12}-\frac{5}{24}=\frac{-10-5}{24}=-\frac{15}{24}=-\frac{5}{8}$

2 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

Página 61

Para fijar ideas

1 **Copia y completa.**

a) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot \square} = \frac{2}{\square}$ **b)** $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{4 \cdot 7}{\square \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$

c) $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{\square} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot \square}{7} = \frac{\square}{7}$ **d)** $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot \square} = \frac{14}{\square}$

e) $\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot \square}{\square \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$ **f)** $\frac{11}{2} : 5 = \frac{11}{2} : \frac{5}{\square} = \frac{11}{2 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$

a) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$ b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$

c) $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$ d) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$

e) $\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ f) $\frac{11}{2} : 5 = \frac{11}{2} : \frac{5}{1} = \frac{11}{2 \cdot 5} = \frac{11}{10}$

2 **Copia, completa y compara los resultados en cada apartado.**

a) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\square}{\square}$ **b)** $\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{5} = \frac{3}{2} : \frac{1}{5} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} : \frac{5}{3} = \frac{\square}{\square}$

- **¿Qué observas?**
- **¿Tiene la multiplicación de fracciones la propiedad asociativa? ¿Y la división?**

a) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$ b) $\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{5} = \frac{3}{2} : \frac{1}{5} = \frac{15}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$ $\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} : \frac{5}{3} = \frac{3}{10}$

- Que los resultados son iguales en a) pero no en b).
- La multiplicación de fracciones tiene la propiedad asociativa, pero no la tiene la división de fracciones.

3 **Asocia cada pregunta con dos expresiones de la derecha y calcula el resultado correspondiente.**

a) ¿Cuántas bolsas de cuarto de kilo se llenan con siete kilos y medio de café?

b) Marta compró la tercera parte de un queso y ha consumido la quinta parte de lo que compró. ¿Qué fracción de queso ha consumido?

c) En la fiesta de cumpleaños se partió la tarta en 15 trozos y cada uno de los cinco invitados comió dos trozos. ¿Qué fracción de tarta comieron entre todos?

I $\left(7 + \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4}$ **II** $2 \cdot \frac{1}{15} \cdot 5$

III $\frac{2}{15} \cdot 5$ **IV** $\frac{1}{3} : 5$

V $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ **VI** $\left(7 + \frac{1}{2}\right) \cdot 4$

a) I y VI. El resultado es 30.

b) IV y V. El resultado es $\frac{1}{15}$.

c) II y III. El resultado es $\frac{2}{3}$.

Para practicar

1 Multiplica y, si es posible, simplifica el resultado.

a) $\frac{3}{4} \cdot 8$

b) $\frac{5}{3} \cdot (-12)$

c) $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-18)$

d) $\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2}$

e) $\frac{(-3)}{5} \cdot \frac{(-5)}{3}$

f) $\frac{13}{21} \cdot \frac{7}{13}$

g) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2}$

h) $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$

i) $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{18}{35}\right)$

a) $\frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{24}{4} = 6$

b) $\frac{5}{3} \cdot (-12) = -\frac{60}{3} = -20$

c) $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-18) = \frac{18}{6} = 3$

d) $\frac{18}{18} = 1$

e) $\frac{15}{15} = 1$

f) $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

g) $\frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 2} = 6$

h) $-\frac{4 \cdot 10}{5 \cdot 3} = -\frac{8}{3}$

i) $\frac{7 \cdot 18}{9 \cdot 35} = \frac{2}{5}$

2 Divide.

a) $4 : \frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{5} : 2$

c) $\frac{3}{5} : \frac{8}{7}$

d) $\frac{1}{7} : \frac{1}{2}$

e) $\frac{2}{3} : \left(-\frac{1}{7}\right)$

f) $\left(-\frac{1}{5}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right)$

g) $\frac{2}{7} : \frac{3}{4}$

h) $\frac{2}{11} : \left(-\frac{3}{7}\right)$

i) $\frac{(-3)}{5} : \frac{2}{(-3)}$

a) 12

b) $\frac{3}{10}$

c) $\frac{21}{40}$

d) $\frac{2}{7}$

e) $-\frac{14}{3}$

f) $\frac{4}{15}$

g) $\frac{8}{21}$

h) $-\frac{14}{33}$

i) $\frac{9}{10}$

3 Divide y simplifica los resultados.

a) $6 : \frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{7} : (-2)$

c) $(-10) : \frac{(-5)}{6}$

d) $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$

e) $\frac{3}{4} : \frac{(-3)}{4}$

f) $\frac{5}{9} : \frac{2}{(-3)}$

g) $\frac{4}{21} : \frac{6}{7}$

h) $\left(-\frac{6}{35}\right) : \frac{3}{5}$

i) $\left(-\frac{1}{10}\right) : \frac{3}{(-8)}$

a) $\frac{30}{3} = 10$

b) $-\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$

c) $\frac{60}{5} = 12$

d) $\frac{3}{3} = 1$

e) $-\frac{12}{12} = -1$

f) $-\frac{15}{18} = -\frac{5}{6}$

g) $\frac{28}{126} = \frac{2}{9}$

h) $-\frac{6 \cdot 5}{35 \cdot 3} = -\frac{2}{7}$

i) $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

4 Ejercicio resuelto.

5 Calcula y compara los resultados de cada apartado.

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right)$

b) $\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{5}$

$\frac{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)$

a) $\frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 5} - \frac{3}{10} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{4-3}{10}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{15}{12} - \frac{2}{5} = \frac{75-24}{60} = \frac{51}{60} = \frac{17}{20}$

$\frac{15}{4} \cdot \frac{(-1)}{15} = \frac{-15}{4 \cdot 15} = -\frac{1}{4}$

La situación de los paréntesis afecta al resultado.

6 Opera.

a) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot 20$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : 7$

c) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$

d) $\frac{3}{21} : \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{3}\right)$

a) $\left(\frac{15-4}{20}\right) \cdot 20 = 11$

b) $\left(\frac{12-5}{20}\right) : 7 = \frac{7}{20} : 7 = \frac{1}{20}$

c) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{4-1}{6}\right) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{7}$

d) $\frac{3}{21} : \left(\frac{12-7}{21}\right) = \frac{3}{21} : \frac{5}{21} = \frac{3}{5}$

7 Calcula.

a) $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\right) : \frac{5}{28}$

c) $\left(\frac{3}{4} - \frac{7}{8}\right) \cdot \left[\frac{5}{3} : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)\right]$

a) $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{4}{3} \cdot \frac{13}{20} - \frac{2}{21} : \frac{5}{28} = \frac{13}{15} - \frac{8}{15} = \frac{1}{3}$

c) $-\frac{1}{8} \cdot \left[\frac{5}{3} : \frac{5}{12}\right] = -\frac{1}{8} \cdot 4 = -\frac{1}{2}$

3 ▸ PROBLEMAS CON FRACCIONES

Página 65

Para practicar

1 Calcula y contesta.

a) Roberto ha necesitado 100 pasos para avanzar 80 metros. ¿Qué fracción de metro recorre en cada paso?

b) Una liebre ha recorrido 40 metros en 25 saltos. ¿Qué fracción de metro avanza en cada salto?

a) En cada paso recorre $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ de metro.

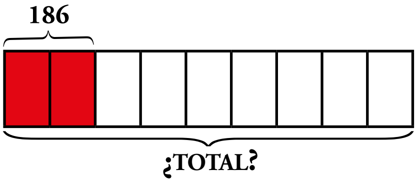
b) En cada salto avanza $\frac{40}{25} = \frac{8}{5}$ de metro.

2 Un colegio tiene matriculados 837 estudiantes, de los cuales $\frac{2}{9}$ están en primer ciclo de ESO. ¿Cuántos estudiantes hay en primer ciclo de ESO?

$\frac{2}{9}$ de 837 = $\frac{2 \cdot 837}{9} = 186$

En primer ciclo de ESO hay 186 estudiantes.

3 Un colegio tiene matriculados 186 estudiantes en primer ciclo de ESO, lo que supone los $\frac{2}{9}$ del total. ¿Cuántos estudiantes son en total?



186 son $\frac{2}{9}$ del total → $\frac{1}{9}$ del total son 186 : 2 = 93

En total son $\frac{9}{9}$ → $9 \cdot \frac{1}{9} = 9 \cdot 93 = 837$ estudiantes en total.

4 Una tienda de confección puso a la venta, la semana pasada, una partida de vestidos de señora. Ha vendido ya las dos quintas partes y aún le quedan 60 unidades. ¿Cuántos vestidos ha vendido?

Ha vendido $\frac{2}{5}$ → le quedan $\frac{3}{5}$ que son 60 unidades → $\frac{1}{5}$ son 60 : 3 = 20, y los $\frac{2}{5}$ que ha vendido son $2 \cdot 20 = 40$ vestidos.

5 **En un hotel, la mitad de las habitaciones están en el primer piso; la tercera parte, en el segundo piso, y el resto, en el ático, que tiene diez habitaciones.**

a) ¿Qué fracción del total de las habitaciones está en el ático?

Pisos 1.º y 2.º	**Ático**
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{\square}{\square}$

b) ¿Cuántas habitaciones hay en total?

c) ¿Y en cada piso?

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{6}$ $\qquad$ $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}$ de las habitaciones están en el ático.

b) $\frac{1}{6}$ del total = 10 $\qquad$ $6 \cdot 10 = 60$

Hay 60 habitaciones en total.

c) $\frac{1}{2} \cdot 60 = 30$ $\qquad$ $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$

En el primer piso hay 30 habitación y en el segundo piso, 20 habitaciones.

6 **En unas instalaciones deportivas, $\frac{3}{8}$ de los presentes están practicando atletismo; $\frac{2}{5}$ juegan al tenis; una décima parte, al fútbol, y los 16 restantes efectúan tareas no deportivas. ¿Cuántas personas hay en las instalaciones?**

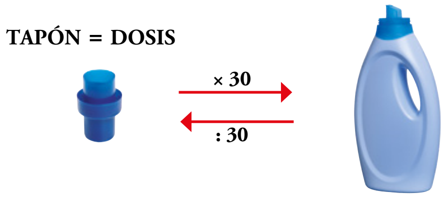
$$\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{15+16+4}{40}=\frac{35}{40}=\frac{7}{8}$$

Por tanto, $\frac{8}{8}-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$ no está haciendo deporte.

Como 16 personas son $\frac{1}{8}$ del total, hay $8 \cdot 16 = 128$ personas en las instalaciones.

7 **Lee, observa y contesta.**

Un bote de suavizante contiene 30 dosis que se administran con su propio tapón.



a) ¿Cuál es la capacidad del bote si la del tapón es de $\frac{3}{40}$ de litro?

b) ¿Cuál es la capacidad del tapón si la del bote es de dos litros y un cuarto?

a) $\frac{3}{40} \cdot 30 = \frac{9}{4}$

La capacidad del bote es 9/4, es decir, 2 litros y un cuarto.

b) $\left(2+\frac{1}{4}\right):30=\frac{9}{4}:30=\frac{9}{4 \cdot 30}=\frac{3}{40}$

La capacidad del tapón es 3/40 de litro.

8 **Un bote de suavizante de dos litros y un cuarto lleva un tapón dosificador con una capacidad de $\frac{3}{40}$ de litro. ¿Cuántas dosis contiene el bote?**

2 litros y cuarto = $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ L

El bote contiene $\frac{9}{4} : \frac{3}{40} = \frac{9 \cdot 40}{4 \cdot 3} = 30$ dosis.

9 **¿Cuántos litros de aceite son necesarios para llenar 300 botellas de tres cuartos de litro?**

$300 \cdot \frac{3}{4} = \frac{900}{4} = 225$. Se necesitan 225 litros.

10 **¿Cuántas botellas de vino de tres cuartos de litro se llenan con un tonel de 1 800 litros?**

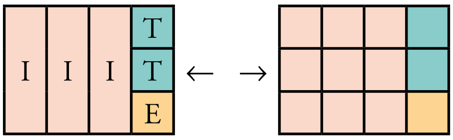
Se llenan $1\,800 : \frac{3}{4} = \frac{1800 \cdot 4}{3} = 2\,400$ botellas.

11 **Un embalse está lleno a principios de verano. En julio pierde $\frac{3}{7}$ de su contenido, y en agosto, $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba. ¿Qué fracción conserva aún a principios de septiembre?**

$$\begin{cases} \text{Julio} \rightarrow \frac{3}{7} \\ \text{Quedan} \rightarrow \frac{4}{7} \begin{cases} \text{Agosto} \rightarrow \frac{3}{4} \text{ de } \frac{4}{7} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \\ \text{Queda} \rightarrow \frac{1}{4} \text{ de } \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \end{cases} \end{cases}$$

La fracción que conserva a principios de septiembre es 1/7.

12 **Los $\frac{3}{4}$ de los empleados de una empresa tienen contrato indefinido; $\frac{2}{3}$ del resto tienen contrato temporal, y los demás son eventuales.**



a) ¿Qué fracción suponen los eventuales?

b) Sabiendo que hay 45 fijos, ¿cuántos son eventuales y cuántos tienen contrato temporal?

a)
$$\begin{cases} \text{Indefinido} \rightarrow \frac{3}{4} \\ \text{Quedan} \rightarrow \frac{1}{4} \begin{cases} \text{Temporal} \rightarrow \frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \\ \text{Quedan (Eventuales)} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{cases} \end{cases}$$

La fracción de eventuales es 1/12.

b) $\frac{3}{4}$ del total = 45 $\rightarrow \frac{45 \cdot 4}{3} = 60$

En total hay 60 trabajadores, entonces:

$$\frac{1}{6} \text{ de } 60 = 10 \qquad \frac{1}{12} \text{ de } 60 = 5$$

Hay 5 trabajadores eventuales y 10 trabajadores temporales.

4 POTENCIAS Y FRACCIONES

Página 67

Para fijar ideas

1 Copia, reduce y calcula.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{\square^4} = \frac{\square}{\square}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^{\square}}{3^{\square}} = \frac{\square}{\square}$

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1^3}{\square^{\square}} = \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{\square}\right)^3 = \square^3 = \square$

e) $\frac{8^4}{16^4} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^4 = \left(\frac{1}{\square}\right)^4 = \frac{1}{\square}$

f) $\frac{10^2}{15^2} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^2 = \left(\frac{\square}{3}\right)^2 = \frac{\square}{\square}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1^3}{10^3} = \frac{1}{1000}$

d) $\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27$

e) $\frac{8^4}{16^4} = \left(\frac{8}{16}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

f) $\frac{10^2}{15^2} = \left(\frac{10}{15}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

2 Copia, reduce y calcula.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 8^3 = \left(\frac{1}{4} \cdot \square\right)^3 = \left(\frac{\square}{4}\right)^3 = \square^3 = \square$

b) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \left(\frac{5}{\square} \cdot \frac{3}{\square}\right)^3 = \left(\frac{15}{\square}\right)^3 = \left(\frac{\square}{2}\right)^3 = \frac{\square}{\square}$

c) $5^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \left(5 : \frac{5}{4}\right)^3 = \left(\frac{\square}{5}\right)^3 = \square^3 = \square$

d) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{\square} : \frac{1}{\square}\right)^2 = \left(\frac{3}{\square}\right)^2 = \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \frac{\square}{\square}$

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 8^3 = \left(\frac{1}{4} \cdot 8\right)^3 = \left(\frac{8}{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

b) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{10}\right)^3 = \left(\frac{15}{30}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

c) $5^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \left(5 : \frac{5}{4}\right)^3 = \left(\frac{20}{5}\right)^3 = 4^3 = 64$

d) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6} : \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

3 Copia y completa, reduciendo a una sola potencia.

a) $x^3 \cdot x^2 = x^{\square + \square} = x^{\square}$

b) $\left(\frac{1}{a}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \left(\frac{1}{a}\right)^{\square + \square} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^7$

c) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{y}\right)^{\square + \square} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square}$

d) $x^5 : x^2 = x^{\square - \square} = x^{\square}$

e) $\left(\frac{1}{a}\right)^7 : \left(\frac{1}{a}\right)^4 = \left(\frac{1}{a}\right)^{\square - \square} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3$

f) $\left(\frac{x}{y}\right)^6 : \left(\frac{x}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{y}\right)^{\square - \square} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square}$

g) $\mathbf{(x^3)^2 = x^{\square \cdot \square} = x^{\square}}$

h) $\mathbf{\left[\left(\frac{1}{a}\right)^4\right]^3 = \left(\frac{1}{a}\right)^{\square \cdot \square} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\square}}$

i) $\mathbf{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^{\square \cdot \square} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\square}}$

a) $x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$

b) $\left(\frac{1}{a}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \left(\frac{1}{a}\right)^{4+3} = \left(\frac{1}{a}\right)^7$

c) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{y}\right)^{2+4} = \left(\frac{x}{y}\right)^6$

d) $x^5 : x^2 = x^{5-2} = x^3$

e) $\left(\frac{1}{a}\right)^7 : \left(\frac{1}{a}\right)^4 = \left(\frac{1}{a}\right)^{7-4} = \left(\frac{1}{a}\right)^3$

f) $\left(\frac{x}{y}\right)^6 : \left(\frac{x}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{y}\right)^{6-4} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

g) $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$

h) $\left[\left(\frac{1}{a}\right)^4\right]^3 = \left(\frac{1}{a}\right)^{4 \cdot 3} = \left(\frac{1}{a}\right)^{12}$

i) $\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^{2 \cdot 2} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$

Página 68

Para fijar ideas

4 Calcula en tu cuaderno.

a) $\mathbf{8^0 = \square}$

b) $\mathbf{(-8)^0 = \square}$

c) $\mathbf{\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \square}$

d) $\mathbf{\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \square}$

e) $\mathbf{\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \square}$

a) $8^0 = 1$

b) $(-8)^0 = 1$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

5 Expresa en forma de fracción.

a) $\mathbf{(2)^{-1} = \frac{1}{\square}}$

b) $\mathbf{(3)^{-1} = \frac{\square}{\square}}$

c) $\mathbf{(-2)^{-1} = \frac{\square}{-2}}$

d) $\mathbf{(4)^{-1} = \frac{\square}{\square}}$

e) $\mathbf{(10)^{-1} = \frac{\square}{\square}}$

a) $(2)^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $(3)^{-1} = \frac{1}{3}$

c) $(-2)^{-1} = \frac{1}{-2}$

d) $(4)^{-1} = \frac{1}{4}$

e) $(10)^{-1} = \frac{1}{10}$

6 Expresa en forma de potencia de exponente positivo.

a) $\mathbf{(5)^{-2} = \left(\frac{1}{\square}\right)^2}$

b) $\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \square^3}$

c) $\mathbf{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{\square}{2}}$

d) $\mathbf{\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{\square}\right)^2}$

e) $\mathbf{\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square}}$

a) $(5)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$

Página 69

Para practicar

1 Escribe la descomposición polinómica de:

a) 72,605 **b) 0,63842**

c) 658,32 **d) 18,0486**

a) $72{,}605 = 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-3}$

b) $0{,}63842 = 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-5}$

c) $658{,}32 = 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$

d) $18{,}0486 = 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$

2 Escribe con todas sus cifras el siguiente dato:

La masa de un átomo de plata es $1{,}79 \cdot 10^{-22}$ gramos.

¿Qué forma es más práctica, la abreviada o la extendida?

Masa de un átomo de plata: $1{,}79 \; . \; 10^{-22} = 0{,}\underbrace{000000000000000000000}_{21 \text{ ceros}}179$

Sin duda, la forma abreviada es más práctica.

3 Expresa con todas sus cifras.

a) $0{,}5 \cdot 10^6$ **b) $1{,}34 \cdot 10^7$**

c) $3{,}08 \cdot 10^{-5}$ **d) $1{,}26 \cdot 10^{-8}$**

a) $0{,}5 \cdot 10^6 = 500\,000$

b) $1{,}34 \cdot 10^7 = 13\,400\,000$

c) $3{,}08 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000308$

d) $1{,}26 \cdot 10^{-8} = 0{,}0000000126$

4 Expresa en notación científica.

a) Un año luz equivale a 9 460 800 000 000 km.

b) El radio de un átomo de oxígeno mide 0,000000066 mm.

a) 1 año luz = 9 460 800 000 000 km = $94\,608 \cdot 10^8$ km ≈ $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km

b) $r_{\text{átomo O}} = 0{,}000000066 \text{ mm} = 6{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ mm}$

Página 70

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Suma y resta de fracciones

1 **Calcula mentalmente.**

a) $1-\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$ **c)** $1+\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$ **e)** $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$ **f)** $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{3}{8}$

2 **Calcula y simplifica.**

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{2}{15}$

c) $\frac{1}{6}-\frac{5}{9}+\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{4}{3}-2+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}$

a) $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ b) $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

c) $\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$ d) $\frac{0}{6}=0$

3 **Calcula y simplifica.**

a) $\frac{11}{36}-\frac{5}{12}+\frac{4}{9}-\frac{7}{24}$ **b)** $\frac{13}{32}-\frac{5}{24}+\frac{17}{48}-\frac{7}{12}$

c) $\frac{17}{40}-\frac{11}{30}+\frac{13}{20}-\frac{9}{8}$ **d)** $\frac{21}{44}-\frac{31}{66}-\frac{13}{22}+\frac{11}{12}$

e) $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-\frac{4}{27}-\frac{2}{15}$ **f)** $\frac{23}{78}-\frac{5}{26}+\frac{23}{78}-\frac{25}{117}$

a) $\frac{22-30+32-21}{72}=\frac{3}{72}=\frac{1}{24}$ b) $\frac{36-20+34-56}{96}=-\frac{3}{96}=-\frac{1}{32}$

c) $\frac{51-44+78-135}{120}=-\frac{50}{120}=-\frac{5}{12}$ d) $\frac{63-62-78+121}{132}=\frac{44}{132}=\frac{1}{3}$

e) $\frac{90-27-20-18}{135}=\frac{25}{135}=\frac{5}{27}$ f) $\frac{69-45+69-50}{234}=\frac{43}{234}$

4 **Opera y simplifica los resultados. ¿Qué observas?**

a) $2-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ **b)** $2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{3}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}$ **d)** $\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)$

e) $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}-\frac{3}{10}$ **f)** $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{10}\right)$

a) $\frac{12-4+3}{6}=\frac{11}{6}$ b) $2-\left(\frac{4+3}{6}\right)=2-\frac{7}{6}=\frac{12-7}{6}=\frac{5}{6}$

c) $\frac{12-5-2}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{5}-\left(\frac{5-2}{20}\right)=\frac{3}{5}-\frac{3}{20}=\frac{12-3}{20}=\frac{9}{20}$

e) $\frac{15-8-6}{20}=\frac{1}{20}$

f) $\frac{3}{4}-\left(\frac{4-3}{10}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{15-2}{20}=\frac{13}{20}$

Que, si añadimos un paréntesis a la operación, el resultado varía.

5 **Opera.**

a) $\left(1-\frac{3}{4}\right)-\left(2-\frac{5}{4}\right)$

b) $\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{3}\right)$

c) $\left(3-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{7}{20}\right)$

d) $\frac{7}{6}-\left[2-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]$

e) $\left[3-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]-\left[2-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)\right]$

f) $\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{6}\right)\right]-\left[\frac{2}{5}-\left(\frac{7}{8}-\frac{5}{6}\right)\right]$

g) $\frac{7}{12}-\left[\frac{13}{20}-\left(\frac{1}{5}+\frac{8}{15}\right)\right]-\left[\frac{17}{30}+\left(\frac{1}{2}-\frac{23}{30}\right)\right]$

a) $\frac{1}{4}-\frac{3}{3}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

b) $\frac{8}{21}-\frac{-5}{21}=\frac{8+5}{21}=\frac{13}{21}$

c) $\frac{8}{3}-\frac{3}{20}+\frac{-5}{20}=\frac{160-9-15}{60}=\frac{34}{15}$

d) $\frac{7}{6}-2+\frac{7}{6}=\frac{7-12+7}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

e) $\left[3-\frac{7}{12}\right]-\left[2-\frac{7}{24}\right]=\frac{58-41}{24}=\frac{17}{24}$

f) $\left[\frac{4}{3}-\frac{5}{24}\right]-\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{24}\right]=\frac{27}{24}-\frac{43}{120}=\frac{135-43}{120}=\frac{92}{120}=\frac{23}{30}$

g) $\frac{7}{12}-\left[\frac{13}{20}-\frac{11}{15}\right]-\left[\frac{17}{30}+\frac{-8}{30}\right]=\frac{7}{12}-\frac{-5}{60}-\frac{9}{30}=\frac{7}{12}+\frac{5}{60}-\frac{9}{30}=\frac{22}{60}=\frac{11}{30}$

6 **Completa con fracciones irreducibles.**

a) $\frac{\square}{\square}-\frac{7}{15}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$

b) $\frac{6}{7}-\frac{11}{21}+\frac{\square}{\square}=1$

c) $\frac{5}{9}-\frac{\square}{\square}+\frac{5}{12}=\frac{3}{4}$

d) $2-\frac{7}{24}=\frac{3}{8}+\frac{\square}{\square}$

a) $\frac{5}{6}-\frac{7}{15}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$

b) $\frac{6}{7}-\frac{11}{21}+\frac{2}{3}=1$

c) $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}+\frac{5}{12}=\frac{3}{4}$

d) $2-\frac{7}{24}=\frac{3}{8}+\frac{4}{3}$

Multiplicación y división de fracciones

7 **¿Verdadero o falso?**

a) Las fracciones negativas tienen opuesta pero no inversa.

b) Para una fracción, la opuesta de la inversa es igual que la inversa de la opuesta.

c) Todos los números racionales tienen opuesto y también inverso.

d) Si *a* es un número positivo, su opuesto es menor que su inverso.

e) Si *a* es un número negativo, su opuesto es mayor que su inverso.

a) Falso

b) Verdadero

c) Falso, el 0 no tiene inverso.

d) Verdadero

e) Verdadero

8 **Calcula mentalmente y por escrito.**

a) El triple de un tercio.

b) La mitad de un cuarto.

c) Los tres quintos de 5.

d) La cuarta parte de un tercio.

a) $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

c) $\frac{3}{5}$ de $5 = 3$

d) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

9 **Copia y completa como en el ejemplo.**

- **Multiplicar por $\frac{1}{2}$ es igual que dividir entre 2.**

a) Multiplicar por $\frac{1}{10}$ es igual que dividir entre…

b) Dividir entre $\frac{1}{10}$ es igual que multiplicar por…

c) Multiplicar por $\frac{2}{3}$ es igual que dividir entre…

d) Multiplicar por $\frac{1}{3}$ y dividir entre 5 es igual que dividir entre 3 y multiplicar por…

a) Multiplicar por $\frac{1}{10}$ es igual que dividir entre 10.

b) Dividir entre $\frac{1}{10}$ es igual que multiplicar por 10.

c) Multiplicar por $\frac{2}{3}$ es igual que dividir entre $\frac{3}{2}$.

d) Multiplicar por $\frac{1}{3}$ y dividir entre 5 es igual que dividir entre 3 y multiplicar por $\frac{1}{5}$.

10 **Calcula y simplifica.**

a) $\frac{3}{7} \cdot 14$ **b)** $\frac{2}{5} : 4$ **c)** $\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{(-7)}$

d) $\frac{3}{11} : \frac{(-5)}{11}$ **e)** $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{20}$ **f)** $\frac{4}{15} : \frac{2}{5}$

g) $\frac{6}{35} \cdot \frac{(-77)}{36}$ **h)** $\frac{(-48)}{55} : \frac{12}{11}$ **i)** $\frac{-3}{8} : \frac{28}{(-9)}$

a) $\frac{42}{7}$ b) $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ c) $-\frac{4}{2} = -2$

d) $-\frac{3}{5}$ e) $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ f) $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

g) $\frac{-462}{1\,260} = \frac{-11}{30}$ h) $\frac{-528}{660} = \frac{-4}{5}$ i) $\frac{27}{224}$

Página 71

11 Ejercicio resuelto.

12 **Calcula y reduce.**

a) $\frac{1}{\frac{1}{6}}$ **b)** $\frac{6}{\frac{1}{5}}$

c) $\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}}$ **d)** $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{3}}$

a) $1 : \frac{1}{6} = 6$ b) $6 : \frac{1}{5} = 30$

c) $\frac{1}{10} : \frac{1}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{5} : \frac{4}{3} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

13 **Opera y reduce.**

a) $\frac{5}{11} \cdot \left(3 \cdot \frac{22}{15}\right)$ **b)** $\frac{7}{2} : \left(5 : \frac{10}{21}\right)$

c) $\frac{8}{9} \cdot \left(\frac{15}{26} : \frac{20}{30}\right)$ **d)** $\left(\frac{7}{20} : \frac{14}{15}\right) \cdot \frac{4}{9}$

a) $\frac{330}{165} = 2$ b) $\frac{7}{2} : \frac{105}{10} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{8}{9} \cdot \frac{450}{520} = \frac{3\,600}{4\,680} = \frac{10}{13}$ d) $\frac{105}{280} \cdot \frac{4}{9} = \frac{420}{2\,520} = \frac{1}{6}$

Potencias y fracciones

14 **Calcula.**

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ **d)** $\left(\frac{1}{10}\right)^6$

a) $\frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$ b) $\frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

c) $\frac{1^4}{5^4} = \frac{1}{625}$ d) $\frac{1^6}{10^6} = \frac{1}{1\,000\,000}$

15 **Calcula, como en el ejemplo, por el camino más corto.**

- $\mathbf{\frac{15^4}{5^4} = \left(\frac{15}{5}\right)^4 = 3^4 = 81}$

a) $\frac{12^3}{4^3}$ **b)** $\frac{8^5}{4^5}$ **c)** $\frac{5^4}{10^4}$

d) $5^2 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2$ **e)** $(-4)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ **f)** $10^2 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^2$

a) $\left(\frac{12}{4}\right)^3 = 3^3 = 27$ b) $\left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 32$ c) $\left(\frac{5}{10}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

d) $\left(\frac{5}{15}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ e) $-\left(\frac{4 \cdot 3}{4}\right)^3 = -3^3 = -27$ f) $\left(-\frac{10}{15}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

16 **Reduce y calcula.**

a) $\frac{6^4 \cdot 3^4}{9^4}$ **b)** $\frac{2^5 \cdot 3^5}{6^5}$

c) $\frac{3^3 \cdot 3^3}{12^3}$ **d)** $\frac{5^7 \cdot 4^7}{(-20)^7}$

e) $\frac{4^2 \cdot (-3)^2}{18^2}$ **f)** $\frac{(-6)^5 \cdot (-3)^5}{36^5}$

a) $\left(\frac{6 \cdot 3}{9}\right)^4 = 2^4 = 16$ b) $\left(\frac{2 \cdot 3}{6}\right)^5 = 1^5 = 1$

c) $\frac{3^3 \cdot 3^3}{4^3 \cdot 3^3} = \frac{27}{64}$ d) $\left(\frac{5 \cdot 4}{-20}\right)^7 = (-1)^7 = -1$

e) $\left(\frac{4 \cdot (-3)}{18}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ f) $\left(\frac{(-6) \cdot (-3)}{36}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

17 **Calcula.**

a) 2^0 **b)** 10^0 **c)** $\left(\frac{1}{5}\right)^0$ **d)** $\left(\frac{3}{7}\right)^0$

a) $2^0 = 1$ b) $10^0 = 1$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$ d) $\left(\frac{3}{7}\right)^0 = 1$

18 **Calcula.**

a) 2^{-2} **b)** $(-2)^{-2}$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **d)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

e) 2^{-3} **f)** $(-2)^{-3}$ **g)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **h)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

a) $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$ c) $2^2 = 4$ d) $(-2)^2 = 4$

e) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$ g) $2^3 = 8$ h) $(-2)^3 = -8$

19 Simplifica.

a) $x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$ **b)** $x^3 : \left(\frac{1}{x}\right)^5$ **c)** $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot b^4$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 : a^3$ **e)** $(a^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^7$ **f)** $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 : \left(\frac{1}{a^3}\right)^3$

a) $\frac{x^3}{x^5} = x^{-2}$ b) $x^3 \cdot x^5 = x^8$ c) $\frac{a^4 \cdot b^4}{b^4} = a^4$

d) $\frac{a^3}{b^3 \cdot a^3} = b^{-3}$ e) $\frac{a^6}{a^7} = a^{-1}$ f) $\frac{1}{a^6} : \frac{1}{a^9} = \frac{a^9}{a^6} = a^3$

20 Expresa sin usar potencias negativas.

a) x^{-2} **b)** x^{-3} **c)** x^{-4}

d) $\frac{1}{x^{-2}}$ **e)** $\frac{1}{x^{-3}}$ **f)** $\frac{1}{x^{-4}}$

a) $\frac{1}{x^2}$ b) $\frac{1}{x^3}$ c) $\frac{1}{x^4}$

d) x^2 e) x^3 f) x^4

21 Reduce a una potencia única.

a) $a^5 \cdot a^2$ **b)** $a \cdot a^2 \cdot a^3$ **c)** $x^5 \cdot x^{-3}$ **d)** $x^{-2} \cdot x^5$

e) $a^2 \cdot \frac{1}{a^{-2}}$ **f)** $\frac{1}{a^{-2}} \cdot a^{-3}$ **g)** $x^3 \cdot x^{-2} \cdot x$ **h)** $x^{-2} \cdot x^{-2} \cdot x^{-2}$

i) $\frac{a^3 \cdot a^4}{a^5}$ **j)** $\frac{a \cdot a^4}{a^3 \cdot a^5}$ **k)** $\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-3}}$ **l)** $\frac{x^{-1}}{x^2 \cdot x^{-4}}$

a) a^7 b) a^6 c) x^2 d) x^3

e) a^4 f) a^{-1} g) x^2 h) x^{-6}

i) a^2 j) a^{-3} k) x l) x

22 Reduce.

a) $x^3 \cdot x^{-2}$ **b)** $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^4}$ **c)** $\left(\frac{1}{x}\right)^{-3} \cdot x^{-3}$

d) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} : x^{-1}$ **e)** $\left(\frac{z}{m}\right)^{-2} : m^3$ **f)** $a^5 : \left(\frac{a}{b}\right)^{-4}$

a) $x^3 \cdot x^{-2} = x$ b) $\frac{1}{x^6} = x^{-6}$ c) $x^3 \cdot x^{-3} = x^0 = 1$

d) y e) $\frac{z^{-2}}{m} = z^{-2}m^{-1}$ f) $\frac{a^9}{b^4} = a^9 b^{-4}$

23 Escribe con todas sus cifras estas cantidades:

a) $261 \cdot 10^9$ **b)** $15{,}4 \cdot 10^8$

c) $3{,}28 \cdot 10^{11}$ **d)** $124 \cdot 10^{-7}$

e) $37{,}8 \cdot 10^{-7}$ **f)** $1{,}78 \cdot 10^{-10}$

a) $261 \cdot 10^9 = 261\,000\,000\,000$ b) $15{,}4 \cdot 10^8 = 1\,540\,000\,000$

c) $3{,}28 \cdot 10^{11} = 328\,000\,000\,000$ d) $124 \cdot 10^{-7} = 0{,}0000124$

e) $37{,}8 \cdot 10^{-7} = 0{,}00000378$ f) $1{,}78 \cdot 10^{-10} = 0{,}000000000178$

24 **Expresa en notación científica, igual que en los ejemplos.**

- **5 360 000 000 = 5,36 · 10^9**
- **0,0000004384 = 4,384 · 10^{-7}**

a) 8 420 000 **b) 61 500 000 000**

c) 0,0000074 **d) 0,000000128**

a) 8 420 000 = 8,42 · 10^6 b) 61 500 000 000 = 6,15 · 10^{10}

c) 0,0000074 = 7,4 · 10^{-6} d) 0,000000128 = 1,28 · 10^{-7}

Página 72

Interpreta, describe, exprésate

25 **Observa las resoluciones de David y Olga.**

Una empresa de vehículos usados recibe un lote de 180 coches. El primer mes vende las tres cuartas partes y el siguiente mes, la quinta parte del lote. ¿Cuántos coches le quedan aún por vender?

Solución de David

- **3/4 de 180 = (180 : 4) · 3 = 135**
- **1/5 de 180 = 180 : 5 = 36**
- **135 + 36 = 171**
- **180 – 171 = 9**

Solución de Olga

- $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{15+4}{20}=\frac{19}{20}$
- $\frac{20}{20}-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}$
- $\frac{1}{20}$ **de 180 = 180 : 20 = 9**

Indica el significado de cada operación y el resultado obtenido en cada caso.

Solución de David

- Coches vendidos el primer mes → $\frac{3}{4}$ de 180 = (180 : 4) · 3 = 135
- Coches vendidos el segundo mes → $\frac{1}{5}$ de 180 = 180 : 5 = 36
- Total de coches vendidos → 135 + 36 = 171
- Coches sin vender → 180 – 171 = 9

Solución de Olga

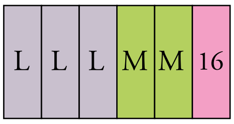
- Fracción de coches vendidos → $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{15+4}{20}=\frac{19}{20}$
- Fracción de coches sin vender → $\frac{20}{20}-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}$
- Cantidad de coches sin vender → $\frac{1}{20}$ de 180 = 180 : 20 = 9

26 **Observa estos problemas que pueden parecer similares por su enunciado pero que son muy diferentes.**

Problema 1

Un granjero esquila, un lunes, la mitad de sus ovejas, y el martes, la tercera parte de ellas. El miércoles esquila las 16 últimas y termina la faena. ¿Cuántas ovejas tiene en total?

Resolución

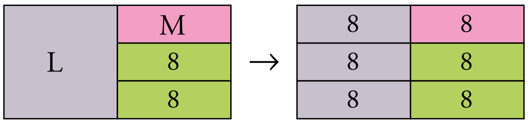


16 · 6 = 93 ovejas

Problema 2

Un granjero esquila, un lunes, la mitad de sus ovejas, y el martes, la tercera parte de las que quedaban. El miércoles esquila las 16 últimas y termina la faena. ¿Cuántas ovejas tiene en total?

Resolución



8 · 6 = 48 ovejas

Explica la diferencia entre ambos y el proceso seguido en la resolución de cada uno.

La diferencia entre ambos problemas está en la fracción de rebaño que se esquila el martes. En el primer problema se esquila la tercera parte del total, y en el segundo, la tercera parte de las que quedaban. Es decir, la tercera parte de la mitad.

Ambos problemas se han resuelto representando en un gráfico la parte esquilada y la parte restante.

En el primero, la parte restante es $\frac{1}{6}$ del total, ocupada por 16 ovejas. Por tanto, el total son $16 \cdot 6 = 96$ ovejas.

En el segundo, la parte restante son $\frac{2}{6}$ del total, ocupada por 16 ovejas. Por tanto, $\frac{1}{6}$ del total son 8 ovejas y el total, $8 \cdot 6 = 48$ ovejas.

Resuelve problemas

27 **Un pilón de riego con una capacidad de 2 800 m^3 guarda en este momento 1 600 m^3 de agua. ¿Qué fracción del pilón falta por completar?**

La cantidad en m^3 que falta por completar es $2\,800 - 1\,600 = 1\,200$, que representa una fracción de $\frac{1\,200}{2\,800} = \frac{3}{7}$ del total.

28 **Una furgoneta de reparto llevaba 36 cajas con 30 botellas de refrescos en cada una. Si en el trayecto se han roto 162 botellas por un frenazo, ¿qué fracción de las botellas se ha roto?**

Calculamos el total de botellas que llevaba la furgoneta, que son $36 \cdot 30 = 1\,080$ botellas.

La fracción de botellas rotas es $\frac{162}{1\,080} = \frac{3}{20}$.

29 **Un incendio ha arrasado las tres décimas partes de un monte de 1 700 hectáreas. ¿Cuántas hectáreas se han salvado de la quema?**

Se han salvado $\frac{10}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ del total, esto es $\frac{7}{10}$ de 1 700 = 1 190 hectáreas.

30 **Se ha volcado un palé que tenía 5 cajas con 30 docenas de huevos en cada una y se han estropeado dos quintas partes. ¿Cuántos huevos se han salvado?**

El número total de huevos que había en el palé era $5 \cdot 30 \cdot 12 = 1\,800$, y al estropearse las dos quintas partes, se han salvado tres quintas partes del total, que son $\frac{3}{5}$ de 1 800 = 1 080 huevos.

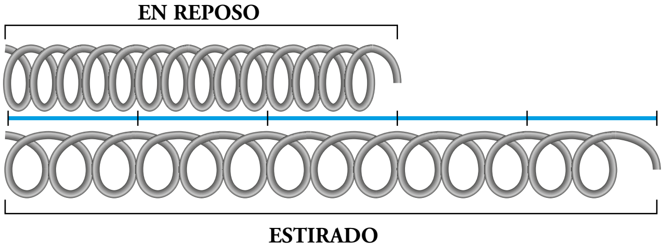
31 **Por tres cuartos de kilo de cerezas hemos pagado 1,80 €. ¿A cómo sale el kilo?**

$\frac{3}{4} \to$ 1,80 €

$\frac{1}{4} \to$ 1,80 : 3 = 0,60 €

1 kilo = $\frac{4}{4} \to$ 0,60 · 4 = 2,40 €

32 **El muelle de un resorte alcanza, estirado, 5/3 de su longitud inicial. Si estirado mide 4,5 cm, ¿cuánto mide en reposo?**



El resorte en reposo mide 2,7 cm.

$\frac{5}{3}$ de la longitud son 4,5 cm $\to$ $\frac{1}{3}$ es $\frac{4,5}{5} = 0,9$ cm

El total, $\frac{3}{3}$, es 3 · 0,9 = 2,7 cm.

33 **Un pilón de riego está lleno en sus cuatro séptimas partes y contiene 1 600 m^3 de agua. ¿Cuántos metros cúbicos caben en el pilón?**

$\frac{4}{7} \to 1\,600\ m^3$

$\frac{1}{7} \to 1\,600 : 4 = 400\ m^3$

$\frac{7}{7} \to 400 \cdot 7 = 2\,800\ m^3$

La capacidad del pilón es de 2 800 m^3.

34 **Amelia ha gastado 3/8 de sus ahorros en la compra de un teléfono móvil que le ha costado 90 €. ¿Cuánto dinero le queda todavía?**

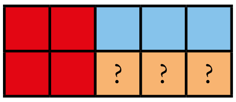
Le quedan 150 €.

Si $\frac{3}{8}$ son 90 €, $\frac{1}{8}$ son $\frac{90}{3} = 30$ €.

Le quedan $\frac{5}{8}$, que son 5 · 30 € = 150 €.

35 **Un decorador ha hecho una mezcla de 20 kilos de pintura que lleva dos quintas partes de rojo, tres décimas partes de azul y el resto de naranja. ¿Cuántos kilos de pintura amarilla llevará la mezcla?**

20 kg →



$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ $\qquad$ $\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

La mezcla llevará $\frac{3}{10}$ de 20 = 6 kilos de pintura amarilla.

36 **La tercera parte de los 240 viajeros que ocupan un avión son europeos y 2/5 africanos. El resto son americanos. ¿Cuántos americanos viajan en el avión?**

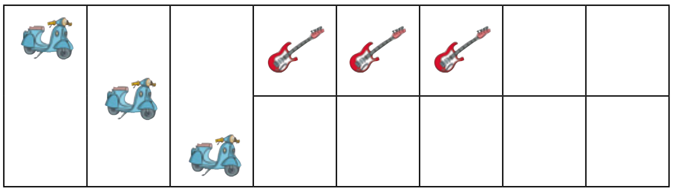
Viajan 64 americanos.

Europeos y africanos: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$ de 240 pasajeros.

El resto serán $\frac{4}{15}$ de 240 $\rightarrow$ $\frac{4}{15} \cdot 240 = 64$ americanos.

Página 73

37 **Begoña gasta 3/8 de sus ahorros en arreglar la moto y 3/10 del resto en un concierto. ¿Qué fracción de lo que tenía ahorrado le queda?**



Aunque puedas resolverlo observando el gráfico, escribe y explica las operaciones que llevan a la solución.

Moto $\rightarrow \frac{3}{8}$

Quedan $\rightarrow \frac{5}{8} \rightarrow \left\{ \text{Concierto} \rightarrow \frac{3}{10} \text{ de } \frac{5}{8} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16} \right.$

Total de gastos $\rightarrow \frac{3}{8} + \frac{3}{19} = \frac{9}{16}$

Le quedan $\frac{7}{16}$ de lo que tenía ahorrado.

38 **Javier ha gastado 3/5 de sus ahorros en un viaje y 3/4 del resto en reponer el vestuario. Si aún le quedan 140 euros, ¿cuánto tenía ahorrado?**

Viaje $\rightarrow \frac{3}{5}$

Quedan $\rightarrow \frac{2}{5} \left\{ \text{Vestuario} \rightarrow \frac{3}{4} \text{ de } \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \right.$

Total de gastos $\rightarrow \frac{3}{5} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

$\frac{1}{10} \rightarrow 140$ € $\qquad$ $\frac{10}{10} \rightarrow 1\,400$ €

Tenía ahorrados 1 400 €.

39 **Una confitería ha recibido un pedido de varias bolsas de caramelos. Dos quintas partes de las bolsas son de naranja, tres décimas partes de limón y el resto de fresa. Si había 6 bolsas de fresa, ¿cuántas bolsas formaban el pedido?**

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Fresa: $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ de las bolsas, que son 6 bolsas.

$\frac{1}{10}$ de las bolsas son $\frac{6}{3} = 2$ bolsas.

Como el total son $\frac{10}{10}$, el pedido lo formaban $10 \cdot \frac{1}{10} = 10 \cdot 2$ bolsas = 20 bolsas.

40 **Sara avanza 4 metros en 5 pasos. ¿Qué fracción de metro avanza en cada paso? ¿Y en 100 pasos?**

En cada paso avanza $\frac{4}{5}$ de metro. En 100 pasos avanza 80 metros.

41 **Un frasco de perfume tiene una capacidad de 1/20 de litro. ¿Cuántos frascos se pueden llenar con un bidón que contiene tres litros y medio?**

$3{,}5 \text{ L} = \left(3 + \frac{1}{2}\right) \text{L} = \frac{7}{2}$ L en el bidón.

Se pueden llenar $\frac{7}{2} : \frac{1}{20} = 70 \rightarrow$ 70 frascos.

42 **¿Cuántos litros de zumo se necesitan para llenar 200 botellas de 3/8 de litro cada una?**

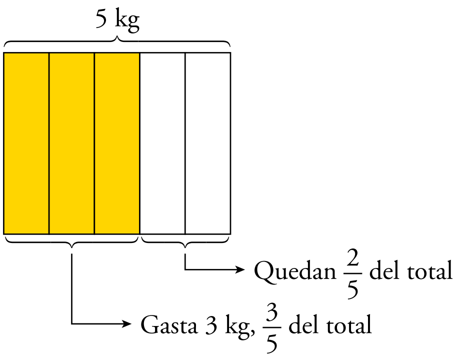
Se necesitan $200 \cdot \frac{3}{8} = 75 \rightarrow$ 75 litros.

43 **Dos problemas similares.**

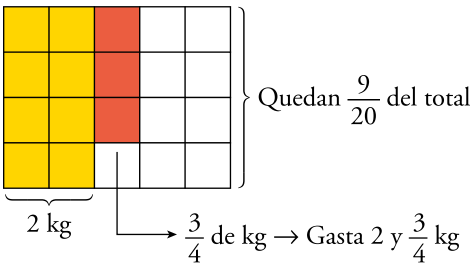
a) De un detergente de 5 kg se han consumido 3 kg. ¿Qué fracción queda del contenido original?

b) De un detergente de 5 kg se han consumido dos kilos y tres cuartos. ¿Qué fracción queda del contenido original?

a) Quedan $\frac{2}{5}$ del tambor.



b) Quedan $\frac{9}{20}$ del tambor.



44 ODS Meta 6.3. **Una planta potabilizadora trata tres metros cúbicos de agua en cinco horas. ¿Cuántos metros cúbicos de agua trata en hora y cuarto?**

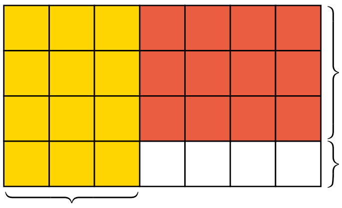
En una hora tratará $3 : 5 = \frac{3}{5}$.

En una hora y cuarto, que es $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ h, tratará $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4}$ m^3.

45 **Un manantial arroja nueve décimas partes de un metro cúbico de agua cada hora. ¿Cuánto tardará en llenar un depósito de 30 metros cúbicos?**

Tardará $30 : \frac{9}{10} = \frac{100}{3}$ h $= \frac{99}{3} + \frac{1}{3} = 33$ h $+ \frac{1}{3}$ h

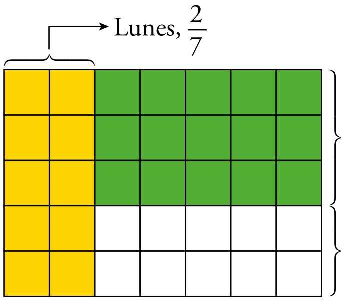
46 **Un granjero tiene a finales de mayo unas reservas de 2 800 kg de pienso para alimentar a su ganado. En junio gasta 3/7 de sus existencias, y en julio, 3/4 de lo que le quedaba. ¿Cuántos kilos de pienso tiene a primeros de agosto?**



Quedan $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$ del total $\rightarrow \frac{1}{7} \cdot 2800 = 400$ kg

Tiene 400 kg de pienso.

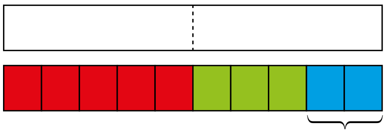
47 **Un jardinero poda el lunes 2/7 de sus rosales, el martes 3/5 del resto y el miércoles finaliza el trabajo podando los 20 que faltaban. ¿Cuántos rosales tiene en total en el jardín?**



Miércoles, $\frac{10}{35}$; que son 20 rosales $\rightarrow \frac{1}{35}$ serán $\frac{20}{10} = 2$ rosales

El jardín tiene $35 \cdot 2 = 70$ rosales.

48 **En una bolsa hay bolas rojas, verdes y azules. La mitad son rojas, las verdes igualan a los tres quintos de las rojas y las azules son 14. ¿Cuántas hay en total?**



$\frac{2}{10}$, que son 14 bolas $\rightarrow \frac{1}{10}$ serán 7 bolas

Hay 70 bolas en total.

49 **Las tres octavas partes de las personas residentes en cierta población tienen más de 50 años y de ellos, uno de cada veinte es una persona de más de ochenta años. ¿Cuántos residentes tiene esa población sabiendo que los mayores de ochenta son 48?**

$$\begin{cases} > 50 \rightarrow \dfrac{3}{8} \begin{cases} > 80 \rightarrow \dfrac{1}{20} \text{ de } \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{160} \rightarrow 48 \\ < 80 \rightarrow \dfrac{19}{20} \text{ de } \dfrac{3}{8} = \dfrac{57}{160} \end{cases} \\ < 50 \rightarrow \dfrac{5}{8} \end{cases}$$

Como $\frac{3}{160} \rightarrow 48$, entonces $\frac{1}{160} \rightarrow 48 : 3 = 16$.

La población tiene $16 \cdot 160 = 2\,560$ residentes.

50 **Una empresa de transportes trabaja con camiones de largo recorrido, furgonetas de reparto y motos de mensajería. De cada doce vehículos, siete son furgonetas y tres motos. Si los camiones son ocho, ¿cuántos vehículos tiene la empresa en total?**

Furgonetas $\rightarrow \frac{7}{12}$

Motos $\rightarrow \frac{3}{12}$

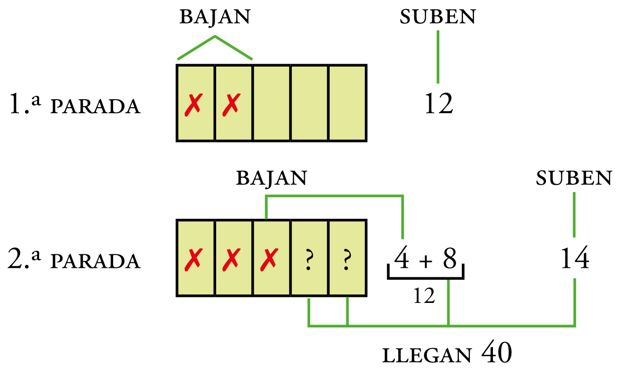
Camiones $\rightarrow \frac{12}{12} - \left(\frac{7}{12} + \frac{3}{12}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \frac{8}{x} \rightarrow x = 48$

La empresa tiene en total 48 vehículos.

Problemas «+»

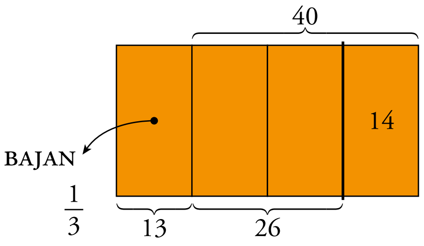
51 **Un autobús cubre el recorrido entre dos ciudades, entre las que hace dos paradas intermedias. Hoy, en la primera parada, ha dejado dos quintas partes de los viajeros y han subido 12. En la segunda parada, ha dejado la tercera parte de los que llevaba en ese momento, y han subido 14. Finalmente, llega a su destino con 40 ocupantes. ¿Con cuántos viajeros salió del origen?**

Apóyate en un esquema.



Segunda parada

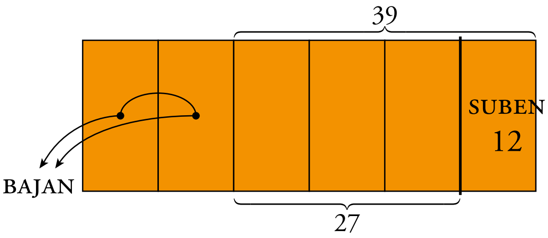
- Salió de ella con 40 viajeros.
- Antes de subir en esta parada los 14 viajeros, había 26. Y se habían bajado $\frac{1}{3}$ de ellos. Llegó, por tanto, a la segunda parada, con 39 viajeros.



Primera parada

- Salió con 39 viajeros.
- Antes de subir los 12, había 27, que son $\frac{3}{5}$ del número de viajeros con los que llegó el autobús.
- Llegó con (27 : 3) · 5 = 45

El autobús salió del origen con 45 viajeros.



52 **En un hotel, el lunes se marcharon dos terceras partes de los clientes y se registraron 20 nuevos ingresos. Y el martes se marcharon las tres cuartas partes, registrándose 7 ingresos. Así, el martes durmieron en el hotel 48 clientes. ¿Cuántos pernoctaron el domingo?**

MARTES

- Durmieron en el hotel 48 clientes.
- Llegaron 7 nuevos, por lo que antes había 41.
- Se habían ido 3/4 por lo que había 41 · 4 = 164 clientes.

LUNES

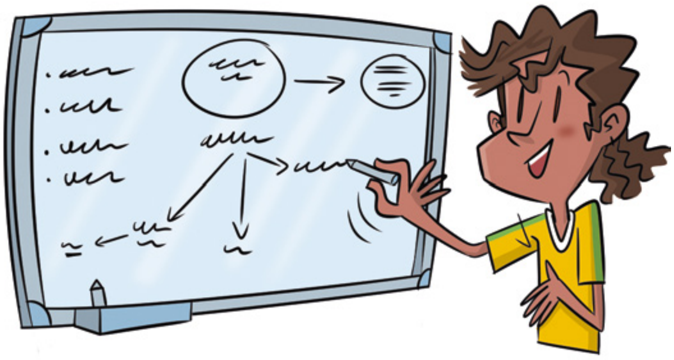
- Durmieron 164 clientes.
- Llegaron 20 nuevos, por lo que antes había 144.
- Se habían ido 2/3 por lo que había 144 · 3 = 432.

El domingo pernoctaron 432 clientes.

Página 74

LEE E INFÓRMATE

La utilidad de hacer esquemas



En la resolución de algunos problemas es de gran utilidad la elaboración de esquemas para:

— Ordenar y visualizar globalmente los datos.

— Organizar las ideas.

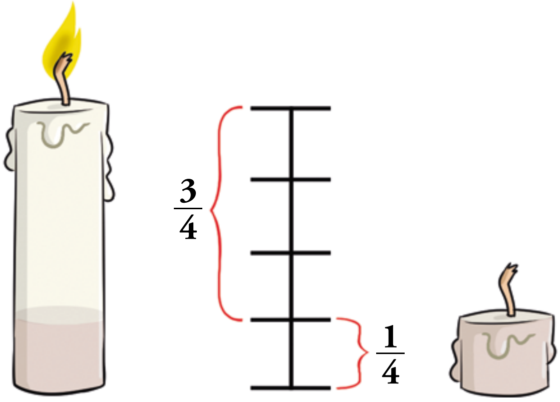
— Facilitar la exposición del proceso y de la solución.

- **Analiza e interpreta el esquema que explica este problema:**

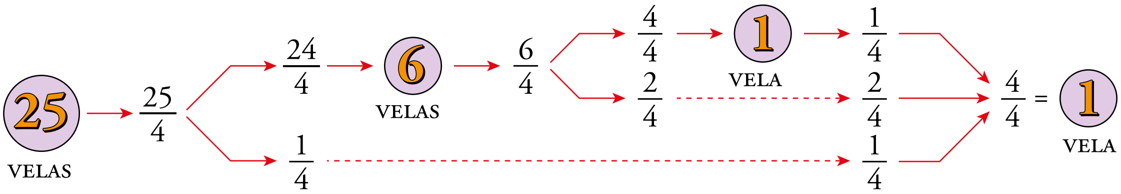
Problema

Una vela alumbra mientras se consumen tres cuartas partes de su longitud. Pero el cabo sobrante no se desaprovecha: con cuatro cabos, hacemos una vela nueva.

Si cada vela dura «una velada», ¿cuántas veladas podemos alumbrar con un paquete de 25 velas?

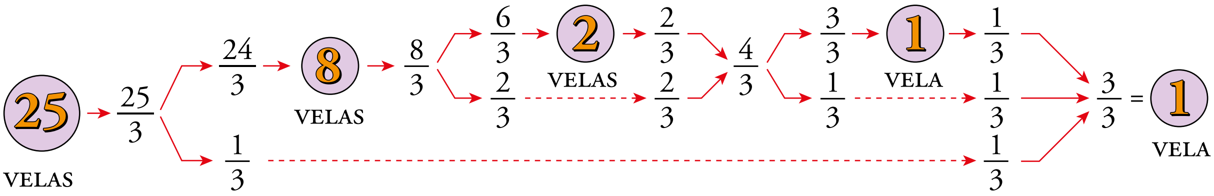


Esquema



Solución: **25 + 6 + 1 + 1 = 33 velas → Podemos alumbrar 33 veladas.**

- **Construye un esquema similar para el problema anterior, suponiendo que de cada vela se consumen solamente sus $\frac{2}{3}$.**



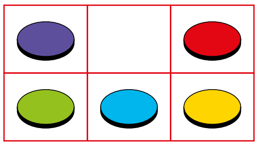
25 + 8 + 2 + 1 + 1 = 37 velas → 37 veladas

INVESTIGA

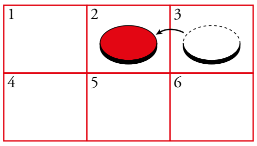
Un juego solitario

Intercambia la ficha amarilla y la ficha roja con el mínimo número de movimientos.

Explica cómo hacerlo.



Para explicar la solución, inventa un código. Por ejemplo, numerando las casillas:



(3 → 2)

(3 → 2): Significa que la ficha que ocupa la casilla n.º 3, pasa a la n.º 2.

Siguiendo el código que se da en el ejemplo.

3 → 2
6 → 3
5 → 6
4 → 5
1 → 4

2 → 1
3 → 2
6 → 3
5 → 6
2 → 5

3 → 2
6 → 3
5 → 6
4 → 5
1 → 4

2 → 1
5 → 2
4 → 5
1 → 4
2 → 1

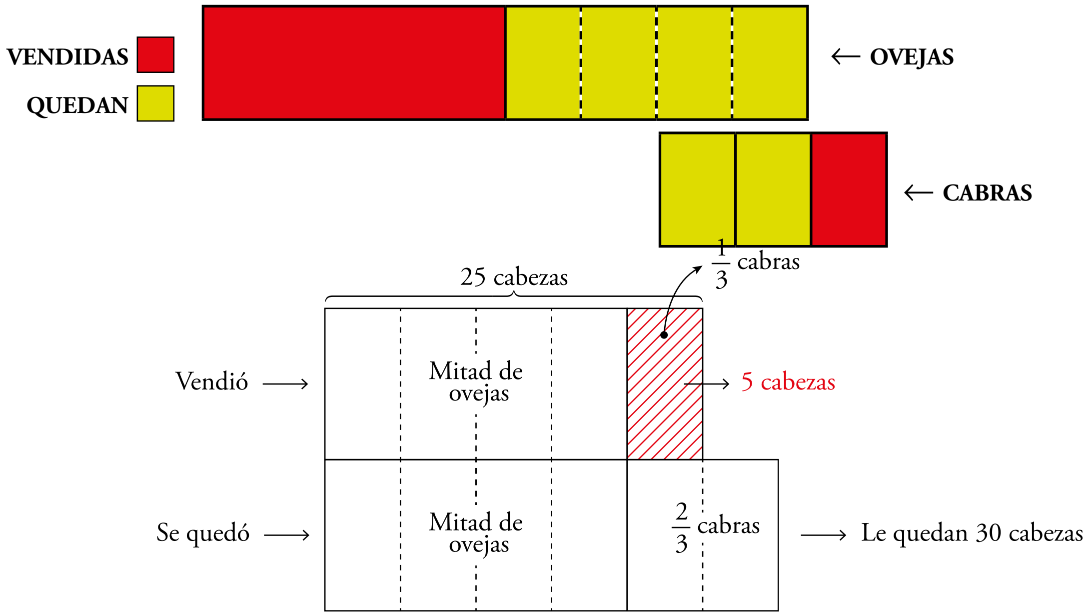
3 → 2
6 → 3
5 → 6

Página 75

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Apóyate en un gráfico

En un rebaño hay ovejas y cabras. El pastor vende la mitad de las ovejas y la tercera parte de las cabras y, aun así, las primeras doblan a las segundas. ¿Cuántas cabezas le quedan sabiendo que ha vendido 25?



Le quedan 30 cabezas.

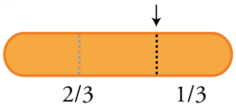
¡Echa cuentas!

Hoy es el último día de acampada y tenemos para merendar perritos calientes. El caso es que somos 18, todos con buen apetito, y solo nos quedan 30 perritos. A mí me ha tocado repartir. ¿Cuál es el mínimo número de cortes que necesito hacer para dar a todos lo mismo?

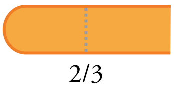
A cada persona le corresponde una salchicha entera y 2/3 de salchicha.

Dejamos 18 salchichas enteras y quedan 12.

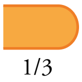
Estas últimas las dividimos así:

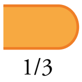


Doce personas recibirán sus 2/3 de salchicha así:



Las 6 restantes las recibirán así:





AUTOEVALUACIÓN

1 **Calcula.**

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$

b) $\frac{5}{9}-\frac{7}{12}+\frac{11}{18}$

a) $\frac{12}{18}+\frac{3}{18}-\frac{2}{18}=\frac{13}{18}$

b) $\frac{20}{36}-\frac{21}{36}+\frac{22}{36}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

2 **Opera.**

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}$

b) $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}$

c) $\frac{2}{3}\cdot 6$

d) $\frac{2}{3}:4$

a) $\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

b) $\frac{12}{3}=4$

c) $\frac{12}{3}=4$

d) $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

3 **Resuelve.**

a) $\dfrac{2}{\frac{1}{3}}$

b) $\dfrac{\frac{10}{3}}{6}$

c) $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{4}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 5}{\frac{1}{6}\cdot 10}$

a) $\dfrac{2}{\frac{1}{3}}=2:\frac{1}{3}=6$

b) $\dfrac{\frac{10}{3}}{6}=\frac{10}{3}:6=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

c) $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{4}}=\frac{2}{5}:\frac{2}{4}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

d) $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 5}{\frac{1}{6}\cdot 10}=\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{10}{6}}=\frac{5}{3}:\frac{10}{6}=\frac{30}{30}=1$

4 **Resuelve.**

a) $\frac{11}{12}-\left[1-\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\right]$

b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{5}\right)$

a) $\frac{11}{12}-\left[1+\frac{7}{12}\right]=\frac{11}{12}-\frac{19}{12}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{5}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

5 **Reduce.**

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{3}$

b) $\left(\frac{2}{x}\right)^{2}:\left(\frac{x}{2}\right)^{2}$

c) $\left[\left(\frac{1}{y}\right)^{2}\right]^{3}$

a) $\frac{a}{b}$

b) $\left(\frac{2}{x}\right)^{4}$

c) $\left(\frac{1}{y}\right)^{6}$

6 **Calcula.**

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot 6^{3}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2}:\left(\frac{3}{5}\right)^{3}$

a) $\frac{2^3}{3^3}\cdot 2^3\cdot 3^3=2^6=64$

b) $\frac{3^2}{5^2}\cdot\frac{5^3}{3^3}=\frac{5}{3}$

7 Escribe la descomposición polinómica de estos números:

a) 1 238 600 **b) 0,07586** **c) 340,578**

a) $1\,238\,600 = 1 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2$

b) $0{,}07586 = 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5}$

c) $340{,}578 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$

8 Escribe con todas sus cifras.

a) $1{,}38 \cdot 10^6$ **b) $8{,}451 \cdot 10^{-7}$**

a) $1{,}38 \cdot 10^6 = 1\,380\,000$ b) $8{,}451 \cdot 10^{-7} = 0{,}0000008451$

9 Expresa en notación científica.

a) 24 700 000 000 **b) 0,0000000238**

a) $24\,700\,000\,000 = 2{,}47 \cdot 10^{10}$ b) $0{,}0000000238 = 2{,}38 \cdot 10^{-8}$

10 Un quiosco vendió por la mañana $\frac{1}{3}$ del total de diarios recibidos y por la tarde $\frac{2}{5}$ también del total. Si le quedan sin vender 20 periódicos, ¿cuántos había recibido?

Vendió $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$

Quedan sin vender $1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$, que son 20 periódicos → $\frac{1}{15}$ son $20 : 4 = 5$

Había recibido $15 \cdot 5 = 75$ periódicos.

11 Un señor sale de compras y gasta $\frac{1}{3}$ de su dinero en una americana y $\frac{2}{5}$ de lo que le quedaba en el mercado. Si aún tiene 30 euros, ¿con cuánto dinero salió de casa?

Americana → $\frac{1}{3}$

Quedan → $\frac{2}{3}$ $\left\{\text{Mercado} \rightarrow \frac{2}{5} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{4}{15}\right.$

Le quedan → $\frac{15}{15} - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{15}\right) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ que son 30 euros.

Entonces $\frac{1}{5}$ son $30 : 2 = 15$ euros. Y salió de casa con $\frac{5}{5}$ que son $15 \cdot 5 = 75$ euros.

12 En una bolsa hay bolas blancas, negras y rojas. Las blancas suponen tres quintos del total y las rojas igualan a los dos tercios de las negras. ¿Qué fracción del total suponen las negras?

			R	R
			R	R
B	B	B	N	N
			N	N
			N	N

$N = \frac{6}{25}$

La fracción de bolas negras es $\frac{6}{25}$.

4 PROPORCIONALIDAD

Página 76

Proporcionalidad en la Antigüedad

1 Responde tú al problema egipcio anterior:

a) Dando el resultado en forma de fracción.

b) Dando el resultado en forma decimal, en litros.

c) Dando el resultado en centilitros.

a) $\frac{10}{365}$

b) $\frac{10\ \text{litros}}{365\ \text{días}} = 0{,}03$ litros al día

c) 3 centímetros al día

Proporcionalidad en la contabilidad y el comercio

2 Resolviendo el problema anterior, contesta paso a paso:

a) Si te presto 200 doblones durante un mes, me devolverás…

b) Si te presto 200 doblones durante dos meses, me devolverás…

c) Si te presto 200 doblones durante doce meses, me devolverás…

a) Si te presto 200 doblones durante un mes, me devolverás 212.

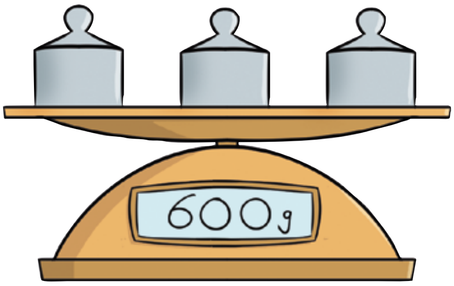
b) Si te presto 200 doblones durante dos meses, me devolverás 424.

c) Si te presto 200 doblones durante doce meses, me devolverás 2 544.

Página 77

Proporcionalidad práctica

3 Hay tres pesas iguales en la báscula que marca 600 gramos.



a) ¿Cuánto marcaría la báscula si hubiera solo dos pesas?

b) ¿Cuántas de esas mismas pesas habría si la báscula marcara un kilo?

a) $(600 : 3) \cdot 2 = 400$

La báscula marcaría 400 gramos.

b) $1\,000 : 200 = 5$

Habría 5 pesas.

4 **Vamos en coche por la autovía a velocidad constante, y desde un poste kilométrico al siguiente, cuento 30 segundos.**

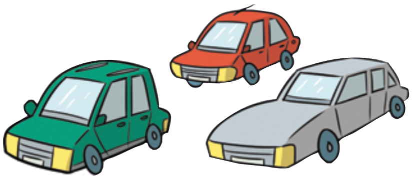
a) ¿Qué distancia recorremos en 10 minutos?

b) ¿A qué velocidad vamos?

a) En medio minuto recorremos un kilómetro, en un minuto recorremos dos kilómetros, así que en 10 minutos recorremos 20 kilómetros.

b) En 60 minutos recorremos 20 · 6 = 120 km, por lo que vamos a una velocidad de 120 km/h.

5 **He estado anotando, desde mi ventana, los colores de los últimos 100 coches que han pasado por la calle y 20 eran grises. Completa la frase: Uno de cada … coches era gris.**



De cada 100, 20 eran grises. De cada 10, dos eran grises. Uno de cada cinco coches era gris.

6 **Durante la fase de ensayo de una vacuna, se ha administrado a diez mil personas resultando eficaz para 9 792 de ellas. ¿Cuál de las siguientes valoraciones, respecto a su eficacia, consideras más exacta?**

A → Una de cada diez

B → Nueve de cada diez

C → 99 de cada 100

D → 98 de cada 100

9 792 : 10 000 = 0,98

La más exacta es la D.

1 ▶ RAZONES Y PROPORCIONES

Página 78

Para practicar

1 Elige la respuesta correcta en cada caso.

a) La razón de 5 y 15 es: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

b) La razón de 24 y 36 es: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$.

a) La razón de 5 y 15 es: $\frac{1}{3}$

b) La razón de 24 y 36 es: $\frac{2}{3}$

2 Escribe en tu cuaderno tres parejas de números cuya razón sea 2/5.

Por ejemplo: 4 y 10; 12 y 30; 18 y 45.

3 Calcula el término desconocido en cada proporción.

a) $\frac{1}{3} = \frac{5}{x}$ **b)** $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$ **c)** $\frac{x}{3} = \frac{35}{7}$

d) $\frac{15}{6} = \frac{x}{14}$ **e)** $\frac{14}{x} = \frac{21}{33}$ **f)** $\frac{91}{42} = \frac{x}{9}$

a) $\frac{1}{3} = \frac{5}{x} \rightarrow x = 5 \cdot 3 = 15$

b) $\frac{6}{9} = \frac{10}{x} \rightarrow 6 \cdot x = 9 \cdot 10 \rightarrow x = 15$

c) $\frac{x}{3} = \frac{35}{7} \rightarrow 7 \cdot x = 3 \cdot 35 \rightarrow x = 15$

d) $\frac{15}{6} = \frac{x}{14} \rightarrow 15 \cdot 14 = 6 \cdot x \rightarrow x = 35$

e) $\frac{14}{x} = \frac{21}{33} \rightarrow 14 \cdot 33 = 21 \cdot x \rightarrow x = 22$

f) $\frac{91}{42} = \frac{x}{9} \rightarrow 91 \cdot 9 = 42 \cdot x \rightarrow x = \frac{39}{2}$

4 La razón de los pesos de Marcos y su padre es de 3/5. Si Marcos pesa 45 kilos, ¿cuánto pesa su padre?

$$\frac{\text{Peso de Marcos}}{\text{Peso de su padre}} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{45}{x} = \frac{3}{5} \rightarrow x = \frac{45 \cdot 5}{3} = 75 \text{ kilos}$$

2 MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Página 79

Para fijar ideas

1 Copia, resuelve mentalmente y completa.

a) Un grifo arroja 12 litros de agua en 3 minutos.

— En un minuto arroja … litros.

— En 5 minutos arroja … litros.

b) Tres cajas de chinchetas pesan 150 gramos.

— Una caja pesa … gramos.

— 10 cajas pesan … gramos.

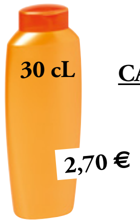
a) – En un minuto arroja 4 litros.

– En 5 minutos arroja 20 litros.

b) – Una caja pesa 50 gramos.

– 10 cajas pesan 500 gramos.

2 ¿A cómo sale el litro de champú?



1 litro = 100 cL

CAPACIDAD (cL)		**PRECIO (€)**
30	→	**2,70**
10	→	**2,70 : 3 = 0,90**
100	→	**0,90 · 10 = 9**

El litro (100 cL) de champú cuesta 9 €.

Página 81

3 Copia y completa cada uno de los esquemas.

a) En un taller de confección se han necesitado siete metros y medio de tela para confeccionar 6 camisas. ¿Cuántos metros de tela se necesitarán para cubrir un pedido de 80 camisas?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{TELA (m)}} & & \underline{\text{N.º DE CAMISAS}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 7{,}5 & \longrightarrow & 6 \\ x & \longrightarrow & 80 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7{,}5}{x} = \frac{\square}{\square} \rightarrow x = \frac{\square}{\square} = \square$$

Solución: Para cubrir un pedido de 80 camisas, se necesitan … metros de tela.

b) Un granjero ha gastado 260 € en 325 dosis de vacuna para su ganado. ¿Cuánto debe gastar aún si necesita adquirir 180 dosis más?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{N.º DE DOSIS}} & & \underline{\text{GASTO (€)}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 325 & \longrightarrow & \dots \\ 180 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\square}{180} = \frac{\square}{x} \rightarrow x = \frac{\square}{\square} = \square$$

c) Una máquina embotelladora llena 750 botellas en un cuarto de hora. ¿Cuánto tardará en llenar 1 800 botellas?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{N.º DE BOTELLAS}} & & \underline{\text{TIEMPO (min)}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{x} \rightarrow x = \frac{\square}{\square} = \square$$

a)
$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{TELA (m)}} & & \underline{\text{N.º DE CAMISAS}} \\ 7,5 & \longrightarrow & 6 \\ x & \longrightarrow & 80 \end{array}\right\} \to \frac{7,5}{x} = \frac{6}{80} \to x = \frac{7,5 \cdot 80}{6} = 100$$

Para cubrir un pedido de 80 camisas, se necesitan 100 metros de tela.

b)
$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{N.º DE DOSIS}} & & \underline{\text{GASTO (€)}} \\ 325 & \longrightarrow & 260 \\ 180 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \to \frac{325}{180} = \frac{260}{x} \to x = \frac{260 \cdot 180}{325} = 144$$

Para adquirir 180 dosis más, debe gastar aún 144 €.

c)
$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{N.º DE BOTELLAS}} & & \underline{\text{TIEMPO (min)}} \\ 750 & \longrightarrow & 15 \\ 1\,800 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \to \frac{750}{1\,800} = \frac{15}{x} \to x = \frac{1\,800 \cdot 15}{750} = 36$$

En llenar 1 800 botellas tardará 36 minutos.

Para practicar

1 Resuelve por reducción a la unidad.

a) Tres cajas de galletas pesan 1200 gramos. ¿Cuánto pesan dos cajas?

b) Un grifo tarda 40 segundos en llenar una garrafa de 5 litros. ¿Cuánto tardará en llenar un bidón de 12 litros?

c) Una máquina excavadora ha movido 25 toneladas de tierra en 5 horas. ¿Cuántas toneladas mueve en 3 horas?

a) Tres cajas → 1 200 gramos
Una caja → 1 200 : 3 = 400 gramos
Dos cajas → 400 · 2 = 800 gramos
Dos cajas pesan 800 gramos.

b) 5 litros → 40 segundos
1 litro → 40 : 5 = 8 segundos
12 litros → 8 · 12 = 96 segundos
Tardará 96 segundos.

c) 5 horas → 25 toneladas
1 hora → 25 : 5 = 5 toneladas
3 horas → 3 · 5 = 15 toneladas
En 3 horas mueve 15 toneladas.

2 Resuelve, primero por reducción a la unidad y, después, mediante la regla de tres.

Un camión avanza por una carretera a 90 km/h. ¿Qué distancia recorrerá en los próximos 5 minutos?

a) Reducción a la unidad:

En una hora (60 min) recorre → 90 km
En un minuto recorre → … km
En 5 minutos recorre → … km

b) Regla de tres:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{TIEMPO (min)}} & & \underline{\textbf{DISTANCIA (km)}} \\ \mathbf{60} & \longrightarrow & \mathbf{90} \\ \mathbf{5} & \longrightarrow & \boldsymbol{x} \end{array}$$

a)
- En una hora (60 min) recorre → 90 km
- En un minuto recorre → 1,5 km
- En 5 minutos recorre → 7,5 km

b) $x = \dfrac{(90 \cdot 5)}{60} = 7{,}5 \ \text{km}$

3 **En una viña, de la vendimia de las 10 primeras parras se han obtenido 125 kilos de uva. ¿Qué cosecha cabe esperar de toda la viña, que tiene 362 parras?**

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ parras} \ \rightarrow \ 125 \text{ kilos de uva} \\ 362 \text{ parras} \ \rightarrow \ x \text{ kilos} \end{array}\right\} \ x = \frac{362 \cdot 125}{10} = 4\,525 \text{ kilos}$$

Cabe esperar una cosecha de 4 525 kilos de uva.

4 **¿Cuánto costará un trozo de queso de 465 gramos si el queso se vende a 13,50 euros el kilo?**

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ kilo} = 1\,000 \text{ g} \ \rightarrow \ 13{,}50 \text{ €} \\ 465 \text{ g} \ \rightarrow \ x \text{ €} \end{array}\right\} \ x = \frac{465 \cdot 13{,}50}{1\,000} = 6{,}2775 \text{ €} \ \rightarrow \ 6{,}28 \text{ €}$$

Costará 6,28 €.

5 **Por 260 gramos de queso hemos pagado 3,51 €. ¿Cuánto cuesta el kilo de queso?**

$$\left.\begin{array}{l} 260 \text{ g} \ \rightarrow \ 3{,}51 \text{ €} \\ 1 \text{ kilo} = 1\,000 \text{ g} \ \rightarrow \ x \text{ €} \end{array}\right\} \ x = \frac{3{,}51 \cdot 1\,000}{260} = 13{,}50 \text{ €}$$

El kilo de queso cuesta 13,50 €.

6 **Una botella de 75 centilitros de aceite cuesta 3,80 €. ¿A cómo sale el litro?**

$$\left.\begin{array}{l} 75 \text{ cL} \ \rightarrow \ 3{,}80 \text{ €} \\ 1 \text{ L} = 100 \text{ cL} \ \rightarrow \ x \text{ €} \end{array}\right\} \ x = \frac{3{,}8 \cdot 100}{75} = 5{,}07 \text{ €}$$

El litro sale a 5,07 €.

7 **En un comedor escolar con 45 comensales, se consumieron ayer 2,7 kilos de pan. ¿Cuántos kilos se consumirán hoy con 60 comensales?**

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}7 \text{ kilos} \ \rightarrow \ 45 \text{ comensales} \\ x \text{ kilos} \ \rightarrow \ 60 \text{ comensales} \end{array}\right\} \ x = \frac{2{,}7 \cdot 60}{45} = 3{,}6 \text{ kilos}$$

Hoy se consumirán 3,6 kilos.

8 **En un colegio que tiene 480 estudiantes, tres de cada diez han tenido gripe. ¿Cuántos estudiantes han padecido esa enfermedad?**

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ estudiantes} \ \rightarrow \ 3 \text{ enfermos} \\ 480 \text{ estudiantes} \ \rightarrow \ x \text{ enfermos} \end{array}\right\} \ x = \frac{480 \cdot 3}{10} = 144 \text{ enfermos}$$

Han tenido gripe 144 estudiantes.

9 **Obtén la constante de proporcionalidad y los valores de *a*, *b* y *c* en esta tabla de proporcionalidad directa:**

3	**4**	**5**	**6**
a	**1,6**	***b***	***c***

Constante de proporcionalidad → 1,6 : 4 = 0,4

$a \rightarrow 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$ $b \rightarrow 5 \cdot 0{,}4 = 2$ $c \rightarrow 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$

3 ▶ MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Página 83

Para fijar ideas

1 Copia y completa, resolviendo primero por reducción a la unidad y, después, mediante la regla de tres.

Tres trabajadores descargan un camión en 4 horas. ¿Cuánto tardarían si solo fueran dos?

a) Reducción a la unidad:

Tres trabajadores tardan → 4 horas

Un solo trabajador tardaría → 4 h · … = …. h

Dos trabajadores tardarían → … h

b) Regla de tres (inversa):

$$\begin{array}{ccc} \text{N.º DE TRABAJADORES} & \xleftrightarrow{\text{PROP. INVERSA}} & \text{TIEMPO (h)} \\ 3 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{4} \rightarrow x = \frac{\square \cdot \square}{\square} = \square$$

a) Reducción a la unidad:

- Tres trabajadores tardan → 4 horas
- Un solo trabajador tardaría → 4 h · 3 = 12 h
- Dos trabajadores tardarían → 6 h

b) Regla de tres (inversa):

$$\begin{array}{ccc} \text{N.º DE TRABAJADORES} & \xleftrightarrow{\text{PROP. INVERSA}} & \text{TIEMPO (h)} \\ 3 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{4} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ h}$$

Para practicar

1 Construye tres proporciones diferentes con los valores de esta tabla de proporcionalidad inversa:

MAGNITUD A	**1**	**2**	**4**	**5**
MAGNITUD B	**40**	**20**	**10**	**8**

Por ejemplo: $\frac{2}{40} = \frac{1}{20}$, $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, $\frac{20}{4} = \frac{10}{2}$ o cualquiera que resulte de las relaciones:

$$40 \cdot 1 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$$

2 Un tractor ara un campo en 15 horas.

a) ¿Cuánto tardarían dos tractores?

b) ¿Y tres tractores?

c) ¿Y cuatro tractores?

TRACTORES	1	2	3	4
HORAS	15	7,5	5	3,75

→ Proporcionalidad inversa:

$1 \cdot 15 = 2 \cdot 7{,}5 = 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3{,}75$

a) 7 h 30 min b) 5 h c) 3 h 45 min

3 **Tres operarios limpian un parque en 7 horas. ¿Cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 7 operarios?**

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ operarios } \rightarrow 7 \text{ h} \\ 7 \text{ operarios } \rightarrow x \text{ h} \end{array}\right\} \text{Prop. inversa } \rightarrow 3 \cdot 7 = 7 \cdot x \rightarrow x = \frac{3 \cdot 7}{7} = 3 \text{ h}$$

Tardarán 3 horas.

4 **Un conducto de agua, con un caudal de 3 litros por segundo, tarda 20 minutos en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría con un caudal de 2 litros por segundo?**

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ L/s } \rightarrow 20 \text{ min} \\ 2 \text{ L/s } \rightarrow x \text{ min} \end{array}\right\} \text{Prop. inversa } \rightarrow 3 \cdot 20 = 2 \cdot x \rightarrow x = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30 \text{ min}$$

Tardarían 30 minutos.

5 **Un coche, a 80 km/h, tarda 2 h en llegar a Barcelona.**

a) ¿Cuánto tardaría un camión, a 40 km/h?

b) ¿Y un tren de alta velocidad, a 160 km/h?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Coche: } 80 \text{ km/h } \rightarrow 2 \text{ h} \\ \text{Camión: } 40 \text{ km/h } \rightarrow x \text{ h} \\ \text{Tren: } 160 \text{ km/h } \rightarrow y \text{ h} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 80 \cdot 2 = 40 \cdot x \rightarrow x = 4 \text{ h} \\ 80 \cdot 2 = 160 \cdot y \rightarrow y = 1 \text{ h} \end{array}$$

a) Un camión tardaría 4 horas.

b) Un tren de alta velocidad tardaría 1 hora.

6 **Un autobús, a 90 km/h, tarda 2 h en cierto recorrido. ¿A qué velocidad lo haría en hora y media?**

$$\left.\begin{array}{l} 90 \text{ km/h } \rightarrow 2 \text{ h} \\ x \text{ km/h } \rightarrow 1{,}5 \text{ h} \end{array}\right\} \text{Prop. inversa } \rightarrow x = \frac{90 \cdot 2}{1{,}5} = 120 \text{ km/h}$$

Lo haría a una velocidad de 120 km/h.

7 **Una bomba, que aporta un caudal de 3 litros por segundo, llena un depósito en 20 segundos. ¿Cuál debería de ser el caudal para llenarlo en 15 segundos?**

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ L/s } \rightarrow 20 \text{ s} \\ x \text{ L/s } \rightarrow 15 \text{ s} \end{array}\right\} \text{Prop. inversa } \rightarrow x = \frac{20 \cdot 3}{15} = 4 \text{ L/s}$$

El caudal debería ser de 4 litros por segundo.

8 **Copia y completa estas tablas de proporcionalidad inversa.**

MAGNITUD A	**1**	**2**	**3**	**4**			**10**
MAGNITUD B	**30**	**15**			**6**	**5**	
MAGNITUD H	**1**	**2**		**4**	**6**	**8**	
MAGNITUD N			**16**	**12**			**4**

MAGNITUD A	1	2	3	4	5	6	10
MAGNITUD B	30	15	10	7,5	6	5	3
MAGNITUD H	1	2	3	4	6	8	12
MAGNITUD N	48	24	16	12	8	6	4

4 ▶ PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Página 85

Para fijar ideas

1 **Revisa el proceso que se propone en el siguiente problema. Después, copia y completa.**

Un ranchero ha necesitado 400 kilos de cebada para alimentar a sus 15 caballos durante 8 días. ¿Durante cuántos días podría alimentar a 25 caballos con 500 kilos de cebada?

a) Identifica las magnitudes y las relaciones de proporcionalidad. Después, ordena los datos.

- **Las magnitudes que intervienen son**
  - **– Los kilos de…**
  - **– El número de…**
  - **– Los días que dura la cebada (lleva la incógnita)**
- **Las relaciones de proporcionalidad con respecto a la magnitud que lleva la incógnita son:**

– Cuantos más kilos de cebada haya, más días dura (proporcionalidad directa).

– Cuantos más caballos haya, menos días dura la cebada (proporcionalidad inversa).

PROPORCIONALIDAD …

PROP. …

KILOS DE CEBADA		**N.º DE CABALLOS**		**DÍAS**
400	⟶	**…**	⟶	**8**
…	⟶	**…**	⟶	**x**

b) Resuelve razonadamente:

KILOS DE CEBADA		**N.º DE CABALLOS**		**DÍAS**
Con 400 kilos	→	**comen 15 caballos**	→	**durante 8 días**
Con 400 kilos	→	**come 1 caballo**	→	**durante 8 · 15 = 120 días**
Con 100 kilos	→	**come 1 caballo**	→	**durante 120 : 4 = 30 días**
Con 500 kilos	→	**come 1 caballo**	→	**durante 30 · 5 = 150 días**
Con 500 kilos	→	**comen 25 caballos**	→	**durante 150 : 25 = 6 días**

c) Automatiza el proceso:

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROP. INVERSA

KILOS DE CEBADA		**N.º DE CABALLOS**		**DÍAS**	**PROPORCIÓN**
400	⟶	**15**	⟶	**8**	
500	⟶	**25**	⟶	**x**	

Recuerda que el número de caballos es inversamente proporcional a los días que dura la cebada. Por eso, al formar la proporción, en lugar de la razón $\frac{15}{25}$ tomamos su inversa, $\frac{25}{15}$.

- Las magnitudes que intervienen son
  - – Los kilos de cebada.
  - – El número de caballos.
  - – Los días que dura la cebada (lleva la incógnita).
- PROPORCIONALIDAD DIRECTA

  PROP. INVERSA

KILOS DE CEBADA		N.º DE CABALLOS		DÍAS
400	⟶	15	⟶	8
500	⟶	25	⟶	x

Para practicar

1 **Una excavadora, trabajando 10 horas al día, abre una zanja de 1 000 metros en 8 días. ¿Cuánto tardaría en abrir una zanja de 600 metros, trabajando 12 horas al día?**

Ten en cuenta que:

- ***Para abrir más metros de zanja, se necesitan más días.***
- ***Trabajando más horas al día se tarda menos días.***

PROP. DIRECTA

PROP. INV.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{metros}} & & \underline{\text{h/día}} & & \underline{\text{días}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1\,000 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 8 \\ 600 & \longrightarrow & 12 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \to \frac{1\,000}{600}\cdot\frac{12}{10}=\frac{8}{x} \to x=\frac{600\cdot 10\cdot 8}{1\,000\cdot 12}=4\text{ días}$$

Tardaría 4 días.

2 **Una cuadrilla de albañiles, trabajando 10 horas al día, ha construido 600 m^2 de pared en 18 días. ¿Cuántos metros cuadrados construirá en 15 días, trabajando 8 horas diarias?**

Ten en cuenta que:

- ***Trabajando más días se construyen más metros de pared.***
- ***Trabajando más horas al día se construyen más metros.***

PROP. DIRECTA

PROP. DIR.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{h/día}} & & \underline{\text{días}} & & \underline{\text{m}^2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} 10 & \longrightarrow & 18 & \longrightarrow & 600 \\ 8 & \longrightarrow & 15 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \to \frac{10}{8}\cdot\frac{18}{15}=\frac{600}{x} \to x=\frac{8\cdot 15\cdot 600}{10\cdot 18}=400\text{ m}^2$$

Construirá 400 m^2.

5 ▸ PROBLEMAS DE REPARTOS PROPORCIONALES

Página 87

Para fijar ideas

1 Copia y completa.

a) Reparte 180 en partes directamente proporcionales a 2, 5 y 8.

$2 + 5 + 8 = 15$	1	2	5	8
180	p	x	y	z

$$\rightarrow p = 180 : 15 = \dots \rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot \dots = \dots \\ y = \dots \cdot \dots = 60 \\ z = 8 \cdot \dots = \dots \end{cases}$$

Las partes de 180 directamente proporcionales a 2, 5 y 8 son, respectivamente, … , 60 y…

b) Reparte 325 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
325	p	x	y	z

$$\rightarrow p = 325 : \frac{13}{12} = \dots \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot \dots = 150 \\ y = \dots \cdot \dots = \dots \\ z = \frac{1}{4} \cdot \dots = \dots \end{cases}$$

Las partes de 325 inversamente proporcionales a 2, 3 y 4 son, respectivamente, 150, … y…

a)

$2 + 5 + 8 = 15$	1	2	5	8
180	p	x	y	z

$$\rightarrow p = 180 : 15 = 12 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 12 = 24 \\ y = 5 \cdot 12 = 60 \\ z = 8 \cdot 12 = 96 \end{cases}$$

Las partes de 180 directamente proporcionales a 2, 5 y 8 son, respectivamente, 24, 60 y 96.

b)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
325	p	x	y	z

$$\rightarrow p = 325 : \frac{13}{12} = 300 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot 300 = 150 \\ y = \frac{1}{3} \cdot 300 = 100 \\ z = \frac{1}{4} \cdot 300 = 75 \end{cases}$$

Las partes de 325 inversamente proporcionales a 2, 3 y 4 son, respectivamente, 150, 100 y 75.

2 Tres amigas han trabajado esta tarde buzoneando propaganda. Ana ha distribuido cuatro paquetes, Begoña, seis, y Carmen, ocho. ¿Cómo repartirán los 90 € recibidos por el trabajo?

– En total han repartido → 4 + 6 + 8 = … paquetes

– Por cada paquete les han pagado → 90 : … =… €

$$\begin{cases} \text{Ana recibirá} \rightarrow 4 \cdot \dots = \dots \text{ €} \\ \text{Carmen recibirá} \rightarrow 6 \cdot \dots = \dots \text{ €} \\ \text{Begoña recibirá} \rightarrow 8 \cdot \dots = \dots \text{ €} \end{cases}$$

– En total han repartido → 4 + 6 + 8 = 18 paquetes

– Por cada paquete les han pagado → 90 : 18 = 5 €

$$\begin{cases} \text{Ana recibirá} \rightarrow 4 \cdot 5 = 20 \text{ €} \\ \text{Carmen recibirá} \rightarrow 6 \cdot 5 = 30 \text{ €} \\ \text{Begoña recibirá} \rightarrow 8 \cdot 5 = 40 \text{ €} \end{cases}$$

3 **Una madre decide repartir entre sus tres hijos una paga extra de 70 € como premio por las buenas notas obtenidas. Pero les dice que cada uno recibirá una cantidad inversamente proporcional al número de días que olvidó hacer su cama:**

David → 1 día Isabel → 2 días Óscar → 4 días

¿Cuánto le tocará a cada uno?

Debemos repartir 70 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 4.

Resolveremos el problema repartiendo 70 en partes directamente proporcionales a los inversos de esos números: 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
70	x	y	z

$$\rightarrow p = \dots : \frac{7}{4} = \dots \quad \begin{cases} \text{David} \rightarrow x = 1 \cdot \dots = \dots \\ \text{Isabel} \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \dots = \dots \\ \text{Óscar} \rightarrow z = \frac{1}{4} \cdot \dots = \dots \end{cases}$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
70	x	y	z

$$\rightarrow p = 70 : \frac{7}{4} = 40 \quad \begin{cases} \text{David} \rightarrow x = 1 \cdot 40 = 40 \\ \text{Isabel} \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20 \\ \text{Óscar} \rightarrow z = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10 \end{cases}$$

Para practicar

1 **Tres familias alquilan conjuntamente un apartamento en la costa por 1 200 euros para 20 días. Los Rodríguez lo disfrutan durante la primera semana; los Riveiro, los 6 días siguientes y, el resto del tiempo, los Ochoa. ¿Cuánto debe pagar cada familia por la estancia?**

$C = 1\,200 \qquad S = 20 \qquad p = \frac{1\,200}{20} = 60$

Rodríguez → $60 \cdot 7 = 420$ €

Riveiro → $60 \cdot 6 = 360$ €

Ochoa → $60 \cdot 7 = 420$ €

2 **Un concurso de televisión está dotado con un premio de 22 000 € que se repartirá entre los tres primeros clasificados de forma que la cantidad asignada a cada uno sea inversamente proporcional al puesto en el que se ha clasificado: primero, segundo y tercero. ¿Cuánto se lleva cada concursante?**

$C = 22\,000 \qquad S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \qquad p = 22\,000 : \frac{11}{6} = 12\,000$

El primero se lleva $12\,000 \cdot \mathbf{1} = 12\,000$ €.

El segundo, $12\,000 \cdot \mathbf{1/2} = 6\,000$ €.

El tercero, $12\,000 \cdot \mathbf{1/3} = 4\,000$ €.

Página 88

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Razones y proporciones

1 **Escribe:**

a) Tres pares de números cuya razón sea $\frac{2}{3}$.

b) Tres parejas de números que estén en relación de cinco a uno.

c) Tres parejas de números que estén en razón de tres a cuatro.

a) Por ejemplo: 4 y 6; 10 y 15; 18 y 27

b) Por ejemplo: 15 y 3; 20 y 4; 35 y 7

c) Por ejemplo: 15 y 20; 21 y 28; 33 y 44

2 **Calcula x en las siguientes proporciones:**

a) $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$ **b)** $\frac{6}{4} = \frac{x}{6}$ **c)** $\frac{8}{x} = \frac{12}{15}$

d) $\frac{x}{21} = \frac{4}{28}$ **e)** $\frac{x}{39} = \frac{30}{65}$ **f)** $\frac{14}{x} = \frac{49}{42}$

g) $\frac{15}{24} = \frac{55}{x}$ **h)** $\frac{42}{54} = \frac{x}{63}$ **i)** $\frac{16}{x} = \frac{32}{16}$

a) $x = 15$ b) $x = 9$ c) $x = 10$

d) $x = 3$ e) $x = 18$ f) $x = 12$

g) $x = 88$ h) $x = 49$ i) $x = 8$

3 **¿Verdadero o falso?**

a) La razón de dos números no puede ser un número entero.

b) Si la razón de a y b es la unidad, entonces $a = b$.

c) La razón de a y b es igual a la razón de b y a.

d) Una proporción es la igualdad de dos fracciones equivalentes.

e) La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ da la misma información que la proporción $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

f) En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si $a = d$, entonces $b = c$.

g) En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si $a = b$, entonces $c = d$.

a) Falso b) Verdadero c) Falso d) Verdadero

e) Verdadero f) Falso g) Verdadero

Relaciones de proporcionalidad

4 **Completa en tu cuaderno estas tablas de proporcionalidad directa:**

a)

1	**2**	**3**	**7**	
5	**10**			**60**

b)

1	**2**	**3**	**4**	
	5		**10**	**25**

a)

1	2	3	7	12
5	10	15	35	60

b)

1	2	3	4	10
2,5	5	7,5	10	25

5 **Completa en tu cuaderno estas tablas de proporcionalidad inversa:**

a)

1	**2**	**4**	**5**	
20	**10**			**2**

b)

1	**2**	**3**	**4**	
	18		**9**	**6**

a)

1	2	4	5	10
20	10	5	4	2

b)

1	2	3	4	6
36	18	12	9	6

6 **Observa las siguientes tablas de proporcionalidad directa y calcula la constante de proporcionalidad relativa a cada una.**

A	**1**	**2**
B	**0,8**	**1,6**

C	**3**	**5**
D	**4,5**	**7,5**

M	**200**	**350**
N	**2**	**3,5**

K	**28**	**17**
H	**420**	**255**

0,8

A	1	2
B	0,8	1,6

1,5

C	3	5
D	4,5	7,5

0,01

M	200	350
N	2	3,5

15

K	28	17
H	420	255

7 **Completa en tu cuaderno esta tabla de proporcionalidad directa, sabiendo que la constante de proporcionalidad es 0,35.**

A	**1**	**2**	**3**	**5**	**10**	**15**
B						

A	1	2	3	5	10	15
B	0,35	0,70	1,05	1,75	3,5	5,25

8 **Indica, entre los siguientes pares de magnitudes, los que guardan relación de proporcionalidad directa, los que guardan relación de proporcionalidad inversa y los que no guardan relación de proporcionalidad.**

a) El número de kilos vendidos y el dinero recaudado.

b) El número de operarios que hacen un trabajo y el tiempo invertido.

c) La edad de una persona y su altura.

d) La velocidad de un vehículo y la distancia que ha recorrido en media hora.

e) El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja.

f) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un depósito.

g) El número de páginas de un libro y su precio.

a) Proporcionalidad directa.
b) Proporcionalidad inversa.
c) Sin relación de proporcionalidad.
d) Proporcionalidad directa.
e) Proporcionalidad directa.
f) Proporcionalidad inversa.
g) Sin relación de proporcionalidad.

9 **Escribe tres proporciones diferentes con los valores de esta tabla de proporcionalidad directa:**

MAGNITUD A	2	3	5	6
MAGNITUD B	10	15	25	30

Por ejemplo: $\frac{10}{2} = \frac{15}{3}$; $\frac{5}{3} = \frac{25}{15}$; $\frac{30}{6} = \frac{25}{5}$

10 **Escribe tres proporciones diferentes con los valores de esta tabla de proporcionalidad inversa:**

MAGNITUD A	2	3	4	6
MAGNITUD B	36	24	18	12

Por ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$; $\frac{3}{18} = \frac{4}{24}$; $\frac{18}{12} = \frac{6}{4}$

Página 89

Problemas de proporcionalidad directa e inversa

11 **Calcula mentalmente y contesta.**

a) Un tren recorre 240 km en 3 horas. ¿Qué distancia recorre en 2 horas?

b) Dos kilos de manzanas cuestan 1,80 €. ¿Cuánto cuestan tres kilos?

c) Cuatro obreros hacen un trabajo en 3 horas. ¿Cuánto tardarían seis obreros?

d) Cinco entradas para un concierto han costado 40 euros. ¿Cuánto cuestan cuatro entradas?

e) Un ciclista, a 20 km/h, recorre cierta distancia en 3 horas. ¿Cuánto tardará una moto a 60 km/h?

f) Dos kilos y medio de tomates cuestan 1,50 €. ¿Cuánto cuestan cinco kilos?

a) Recorre 160 km.
b) Cuestan 2,70 €.
c) Tardarían 2 horas.
d) Cuestan 32 euros.
e) Tardará 1 hora.
f) Cuestan 3 euros.

12 **Copia los esquemas, decide en cada caso si la proporcionalidad es directa o inversa y completa.**

a) Dos poblaciones separadas 5 cm en un mapa están a 35 km de distancia en la realidad. ¿Cuál es la distancia real entre dos poblaciones que en el mapa distan 13 cm?

PROPORC. …

MAPA (cm)		REALIDAD (km)
5	→	35
1	→	35 : …
13	→	13 · …

b) Tres bueyes consumen un saco de pienso en 10 días. ¿Cuánto duraría el saco si fueran cinco bueyes?

PROPORC. …

N.º DE BUEYES		TIEMPO (días)
A 3 les dura el saco	→	10
A 1 le dudaría (más)	→	… · 3
A 5 les dudaría (menos)	→	… : 5

a) PROPORC. DIRECTA

MAPA (cm)		REALIDAD (km)
5	⟶	35
1	⟶	$35 : 5 = 7$
13	⟶	$13 \cdot 7 = 91$

La distancia real es de 91 km.

b) PROPORC. INVERSA

N.º DE BUEYES		TIEMPO (días)
A 3 les dura el saco	⟶	10
A 1 le dudaría (más)	⟶	$10 \cdot 3 = 30$
A 5 les dudaría (menos)	⟶	$30 : 5 = 6$

El saco duraría 6 días.

13 **Resuelve como en los ejercicios anteriores.**

a) Una piscina tiene tres desagües iguales. Si se abren dos, la piscina se vacía en 45 minutos. ¿Cuánto tardará en vaciarse si se abren los tres?

b) Un senderista camina 3 km en tres cuartos de hora. Si sigue al mismo ritmo, ¿cuánto avanzará en una hora y cuarto?

c) Cuatro operarios tardan 10 horas en limpiar un solar. ¿Cuánto tardarían cinco operarios?

a) $\left.\begin{array}{l} 2 \text{ desagües} \to 45 \text{ min} \\ 3 \text{ desagües} \to x \text{ min} \end{array}\right\}$ Prop. inversa $\to \dfrac{2}{3} = \dfrac{x}{45} \to x = \dfrac{2 \cdot 45}{3} = 30$ min

Tardará 30 minutos en vaciarse.

b) $\left.\begin{array}{l} 3 \text{ km} \to 45 \text{ min} \\ x \text{ km} \to 75 \text{ min} \end{array}\right\}$ Prop. directa $\to x = \dfrac{3 \cdot 75}{45} = 5$ km

Avanzará 5 kilómetros.

c) $\left.\begin{array}{l} 4 \text{ operarios} \to 10 \text{ h} \\ 5 \text{ operarios} \to x \text{ h} \end{array}\right\}$ Prop. inversa $\to \dfrac{4}{5} = \dfrac{x}{10} \to x = \dfrac{4 \cdot 10}{5} = 8$ h

Tardarían 8 horas.

14 **Copia cada esquema, complétalo decidiendo si la proporcionalidad es directa o inversa y, después, resuelve.**

a) Una bomba, que aporta un caudal de 2,4 litros por minuto, tarda 12 horas en llenar un pilón. ¿Cuánto tardaría en llenarse si se sustituyera por otra bomba con un caudal de 3,2 L/min?

PROPORC. …

CAUDAL (L/min)		**TIEMPO (h)**
2,4	⟶	**12**
3,2	⟶	x

b) Dos kilos y medio de patatas cuestan 1,75 €. ¿Cuánto cuestan tres kilos y medio?

PROPORC. …

PESO (kg)		**COSTE (€)**
2,5	⟶	**1,75**
3,5	⟶	x

a) PROPORC. INVERSA

CAUDAL (L/min)		TIEMPO (h)
2,4	→	12
3,2	→	x

$$x = \frac{12 \cdot 2,4}{3,2} = 9 \text{ h}$$

Tardaría en llenarse 9 horas.

b) PROPORC. DIRECTA

PESO (kg)		COSTE (€)
2,5	→	1,75
3,5	→	x

$$\left.\begin{array}{l} 2,5 \text{ kg} \to 1,75 \text{ €} \\ 3,5 \text{ kg} \to x \text{ €} \end{array}\right\} x = \frac{3,5 \cdot 1,75}{2,5} = 2,45 \text{ €}$$

Cuestan 2,45 €.

15 **Un paquete de 500 folios pesa 1,8 kg. ¿Cuánto pesará una pila de 850 folios?**

$$\left.\begin{array}{l} 500 \text{ folios} \to 1,8 \text{ kg} \\ 850 \text{ folios} \to x \text{ kg} \end{array}\right\} x = \frac{850 \cdot 1,8}{500} = 3,06 \text{ kg.}$$

Pesará 3,06 kg.

16 **Un tractor, trabajando 8 horas al día, labra un campo en 9 días. ¿Cuántas horas diarias debe trabajar para realizar el trabajo en solo 6 días?**

$$\left.\begin{array}{l} 8 \text{ h/día} \to 9 \text{ días} \\ x \text{ h/día} \to 6 \text{ días} \end{array}\right\} \text{Proporcionalidad inversa} \to \frac{8}{x} = \frac{6}{9} \to x = \frac{8 \cdot 9}{6} = 12 \text{ h/día}$$

Debe trabajar 12 horas al día.

17 **Observa y calcula x e y.**

Por 700 gramos de café molido he pagado 5,60 €.

a) ¿Cuánto costaría un paquete de 450 gramos?

b) ¿Cuánto pesa un paquete que ha costado 8 €?

PROPORC. …

PESO (g)		**COSTE (€)**
700	→	**5,6**
450	→	x
y	→	**8**

Proporcionalidad directa:

a) $x = \dfrac{450 \cdot 5,6}{700} = 3,6$ €

Un paquete de 450 gramos costaría 3,60 €.

b) $y = \dfrac{700 \cdot 8}{5,6} = 1\,000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$

Pesa 1 kg.

18 **Una máquina embotelladora llena 450 botellas en 10 minutos.**

a) ¿Cuántas botellas llena en hora y cuarto?

b) ¿Cuánto tardará en llenar 2 700 botellas?

PROPORC. DIRECTA

N.º BOTELLAS		TIEMPO (min)
450	⟶	10
x	⟶	75
2 700	⟶	y

a) $x = \dfrac{450 \cdot 75}{10} = 3\,375$ botellas

En hora y cuarto llena 3 375 botellas.

b) $y = \dfrac{2\,700 \cdot 10}{450} = 60$ minutos

Tardará 1 hora en llenar 2 700 botellas.

19 **Un ganadero tiene forraje para alimentar a sus 65 vacas durante 32 días.**

a) ¿Cuánto le durarán las provisiones si compra 15 vacas más?

b) ¿Cuántas vacas debería tener para que durara 40 días?

a) $\left.\begin{array}{r} 65 \text{ vacas} \rightarrow 32 \text{ días} \\ 65 + 15 = 80 \text{ vacas} \rightarrow x \text{ días} \end{array}\right\}$ P. inversa $\rightarrow \dfrac{65}{80} = \dfrac{x}{32} \rightarrow x = \dfrac{65 \cdot 32}{80} = 26$ días

Durarán 26 días.

b) $\left.\begin{array}{r} 65 \text{ vacas} \rightarrow 32 \text{ días} \\ x \text{ vacas} \rightarrow 40 \text{ días} \end{array}\right\}$ P. inversa $\rightarrow \dfrac{x}{65} = \dfrac{32}{40} \rightarrow x = 32 \cdot \dfrac{65}{40} = 52$ vacas

Debería tener 52 vacas.

Página 90

20 **Una merluza de dos kilos y trescientos gramos ha costado 28,75 €.**

a) ¿Cuánto pagaré por otra más pequeña de kilo y medio?

b) ¿Cuánto pesaba una merluza que se ha vendido por 22,50 €?

a) $\left.\begin{array}{r} 2 \text{ kg y } 300 \text{ g} = 2\,300 \text{ g} \rightarrow 28{,}75\ € \\ 1{,}5 = 1500 \text{ g} \rightarrow x\ € \end{array}\right\}\ x = \dfrac{1500 \cdot 28{,}75}{2\,300} = 18{,}75\ €$

Pagaré 18,75 €.

b) $\left.\begin{array}{r} 22{,}5\ € \rightarrow x \text{ kg} \\ 28{,}75\ € \rightarrow 2{,}3 \text{ kg} \end{array}\right\}\ x = \dfrac{22{,}5 \cdot 2{,}3}{28{,}75} = 1{,}8 \text{ kg}$

Pesaba 1 kg 800 g.

21 **Un ciclista ha recorrido 6,3 km en 18 minutos. Expresa su velocidad media en kilómetros por hora.**

$$\left.\begin{array}{r} 18 \text{ min} \rightarrow 6{,}3 \text{ km} \\ 1 \text{ h} = 60 \text{ min} \rightarrow x \text{ km} \end{array}\right\}\ x = \dfrac{60 \cdot 6{,}3}{18} = 21 \text{ km en } 1 \text{ h} \rightarrow v_m = 21 \text{ km/h}$$

22 **Un coche a 90 km/h tarda 20 minutos en ir de la población A a la población B. ¿Cuánto tardaría un camión a 60 km/h? ¿Y una furgoneta a 80 km/h?**

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Coche } 90 \text{ km/h} & \rightarrow & 20 \text{ min}\\ \text{Camión } 60 \text{ km/h} & \rightarrow & x \text{ min}\\ \text{Furgoneta } 80 \text{ km/h} & \rightarrow & y \text{ min}\end{array}\right\} \text{ Proporcionalidad inversa } \rightarrow 90 \cdot 20 = 60 \cdot x = 80 \cdot y$$

$$x = \frac{90 \cdot 20}{60} = 30 \text{ min}; \quad y = \frac{90 \cdot 20}{80} = 22{,}5 \text{ min}$$

Un camión tardará 30 minutos y una furgoneta 22,5 minutos.

23 Problema resuelto.

24 **Un tren, a 90 km/h, cubre un recorrido en 6 horas. ¿Cuánto tardaría a 100 km/h?**

$$\left.\begin{array}{lll}25 \text{ km} & \rightarrow & 1{,}25 \text{ h}\\ 64 \text{ km} & \rightarrow & x \text{ h}\end{array}\right\} \; x = \frac{64 \cdot 1{,}25}{25} = \frac{80}{25} \text{ h}$$

$$\begin{array}{rl|l}80 & \text{h} & 25\\ \cline{3-3} 5 & & 3 \text{ h } 12 \text{ min}\\ \times\ 60 & & \\ \hline 300 & \text{min} & \end{array}$$

Tardaría 3 horas y 12 minutos.

25 **Un manantial que aporta un caudal de 3,5 litros por minuto llena un depósito en una hora y media.**

a) ¿Cuánto tardaría si el caudal aumentara a 4,5 litros por minuto?

b) ¿Cuál debería ser el caudal para llenar el depósito en una hora y quince minutos?

a) $$\left.\begin{array}{lll}3{,}5 \text{ L/min} & \rightarrow & 1{,}5 \text{ h}\\ 4{,}5 \text{ L/min} & \rightarrow & x \text{ h}\end{array}\right\} \text{ Proporcionalidad inversa } \rightarrow \frac{3{,}5}{4{,}5} = \frac{x}{1{,}5} \rightarrow x = \frac{5{,}25}{4{,}5} = \frac{525}{450} \text{ h}$$

$$\begin{array}{rl|l}525 & \text{h} & 450\\ \cline{3-3} 75 & & 1 \text{ h } 10 \text{ min}\\ \times\ 60 & & \\ \hline 4500 & \text{min} & \end{array}$$

Tardaría 1 hora y 10 minutos.

b) $$\left.\begin{array}{lll}3{,}5 \text{ L/min} & \rightarrow & 1{,}5 \text{ h}\\ \text{y L/min} & \rightarrow & 1{,}25 \text{ h}\end{array}\right\} \; \frac{3{,}5}{y} = \frac{1{,}25}{1{,}5} \rightarrow y = \frac{1{,}5 \cdot 3{,}5}{1{,}25} = 4{,}2 \text{ L/min}$$

El caudal debería ser de 4,2 L/min.

26 **Un tren de mercancías, a una velocidad media de 72 km/h, realiza el trayecto entre la ciudad A y la ciudad B en 7 horas.**

a) ¿Cuál debería ser la velocidad media para hacer el mismo viaje en solo 6 horas?

b) ¿Cuánto tardaría a una velocidad media de 90 km/h?

a) $$\left.\begin{array}{lll}72 \text{ km/h} & \rightarrow & 7 \text{ h}\\ x \text{ km/h} & \rightarrow & 6 \text{ h}\end{array}\right\} \text{ Prop. inversa } \rightarrow \frac{72}{x} = \frac{6}{7} \rightarrow x = \frac{72 \cdot 7}{6} = 84 \text{ km/h}$$

La velocidad media debe ser de 84 km/h.

b) $$\left.\begin{array}{lll}72 \text{ km/h} & \rightarrow & 7 \text{ h}\\ 90 \text{ km/h} & \rightarrow & y \text{ h}\end{array}\right\} \; \frac{72}{90} = \frac{y}{7} \rightarrow y = \frac{72 \cdot 7}{90} = 5{,}6 \text{ h}$$

Tardaría 5 horas y 36 minutos.

27 **En 2019, la keniana Brigid Kosgei consiguió el record de maratón femenino, recorriendo los 42 km 195 m de la prueba en 2 h 14 min 04 s.**

a) ¿Qué tiempo invirtió por término medio en cada kilómetro? (Redondea a los segundos.)

b) ¿Qué distancia recorrió, de media, por minuto? (Redondea a los centímetros.)

a) 2 h 14 min 4 s = 2 h + 14 min + (4 : 60) min = 2 h + 14 min + 0,067 min =
= 2 h + 14,067 min = 2 h + (14,67 : 60) h = 2,2445 h

42 km 195 m = 42,195 km

Proporcionalidad directa.

$$\left.\begin{array}{rcl} 42,195\,\text{km} & \rightarrow & 2,2445\,\text{h} \\ 1\,\text{km} & \rightarrow & x\,\text{h} \end{array}\right\} \; x = \frac{2,2445 \cdot 1}{42,195} = 0,053197\,\text{h}$$

0,053197 h = 3,19182 min = 3 min 11,51 s = 3 min 12 s

En cada kilómetro invirtió, por término medio, 3 minutos 12 segundos.

b) 2,2445 h = 134,67 min

$$\left.\begin{array}{rcl} 42,195\,\text{km} & \rightarrow & 134,67\,\text{min} \\ y\,\text{km} & \rightarrow & 1\,\text{min} \end{array}\right\} \; y = \frac{42,195}{134,67} = 0,3133214\,\text{km} = 313,32\,\text{m}$$

Recorrió, de media, por minuto 313,32 metros.

Problemas de proporcionalidad compuesta

28 **Resuelve mentalmente.**

Dos tractores aran un campo de 5 hectáreas en 6 horas.

a) ¿Cuánto tardarían dos tractores en arar un campo de 15 hectáreas?

b) ¿Cuánto tardaría un solo tractor en arar un campo de 15 hectáreas?

c) ¿Cuánto tardarían cuatro tractores en arar 15 hectáreas?

d) ¿Cuántos tractores se necesitarían para arar un campo de 15 hectáreas en 9 horas?

a) Tardarían 18 horas. b) Tardaría 36 horas.

c) Tardarían 9 horas. d) Se necesitarían 4 tractores.

29 **Cincuenta terneros consumen 4 200 kilos de alfalfa a la semana.**

a) ¿Cuál es el consumo de alfalfa por ternero y día?

b) ¿Cuántos kilos de alfalfa se necesitan para alimentar a 20 terneros durante 15 días?

c) ¿Durante cuántos días podemos alimentar a 10 terneros si disponemos de 600 kilos de alfalfa?

PROP. DIRECTA

PROP. DIR.

TERNEROS	DÍAS	PIENSO (kg)
50	7	4 200
1	1	x
20	15	y
10	z	600

a) $\frac{50}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{4\,200}{x} \rightarrow x = \frac{4\,200}{50 \cdot 7} = 12$ kg

b) $\frac{50}{20} \cdot \frac{7}{15} = \frac{4\,200}{y} \rightarrow y = \frac{4\,200 \cdot 20 \cdot 15}{50 \cdot 7} = 3\,600$ kg

c) $\frac{50}{10} \cdot \frac{7}{z} = \frac{4\,200}{600} \rightarrow z = \frac{50 \cdot 7 \cdot 600}{10 \cdot 4\,200} = 5$ días

30 **En un taller de confección, con 6 máquinas tejedoras, se han fabricado 600 chaquetas en 10 días.**

a) ¿Cuántas prendas se fabricarían con 5 máquinas en 15 días?

b) ¿Cuántas máquinas habría que poner en producción para fabricar 750 prendas en 15 días?

c) Si se trabajara solamente con 5 máquinas, ¿cuántos días se tardaría en fabricar 750 prendas?

PROP. DIRECTA

PROP. DIR.

MÁQUINAS	DÍAS	CHAQUETAS
6	10	600
5	15	x
y	15	750
5	z	750

a) $\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{15} = \frac{600}{x} \rightarrow x = \frac{600 \cdot 5 \cdot 15}{6 \cdot 10} = 750$ chaquetas

b) $\frac{6}{y} \cdot \frac{10}{15} = \frac{600}{750} \rightarrow y = \frac{6 \cdot 10 \cdot 750}{15 \cdot 600} = 5$ máquinas

c) $\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{z} = \frac{600}{750} \rightarrow z = \frac{6 \cdot 10 \cdot 750}{5 \cdot 600} = 15$ días

31 **Cinco encuestadores, trabajando 8 horas diarias, completan los datos para un estudio de mercado en 27 días. ¿Cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 9 encuestadores trabajando 10 horas cada día?**

PROP. INVERSA

P. INV.

ENCUESTADORES	H/DÍA	DÍAS
5	8	27
9	10	x

$$\rightarrow \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{10} = \frac{x}{27} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 8 \cdot 27}{9 \cdot 10} = 12 \text{ días}$$

Página 91

Repartos proporcionales

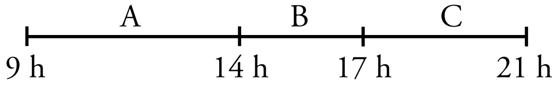
32 **Durante el fin de semana el parque de atracciones ha registrado 2 460 visitas, de las cuales por cada cinco del sábado hubo siete el domingo. ¿Cuántas entradas se vendieron cada uno de esos días?**

Sabemos que de cada 12 visitas, 5 fueron el sábado y 7 el domingo.

$$\frac{2\,460}{12} = 205$$

En sábado se vendieron 205 · 5 = 1 025 entradas y el domingo 205 · 7 = 1 435 entradas.

33 **Tres socios, A, B y C, abren una tienda de bricolaje con horario ininterrumpido de 9 h a 21 h. El primero atenderá el negocio desde su apertura hasta las dos de la tarde, el segundo, de dos a cinco, y el tercero, desde las cinco hasta el cierre. Y acuerdan repartir gastos y beneficios de forma proporcional a las horas que trabaja cada uno. Si durante el primer trimestre, a C le han correspondido 2 400 € de beneficios, ¿cuánto recibirán A y B por ese mismo periodo?**



Es un problema de proporcionalidad directa.

La tienda estará abierta durante 12 horas, de las cuales A trabajará 5 horas, B, 3 horas y C, 4 horas.

$\frac{4}{12}$ de los beneficios totales = 2 400 € → Beneficios totales = $2\,400 \cdot \frac{12}{4} = 7\,200$ €

$\frac{5}{12}$ de 7 200 € = 3 000 €

$\frac{3}{12}$ de 7 200 € = 1 800 €

A recibirá 3 000 € y B, 1 800 €.

34 **Una emprendedora crea una empresa de paquetería que logra distribuir 2 800 paquetes en el primer trimestre de actividad. Durante el primer mes entregó unos pocos envíos, en el segundo triplicó la actividad y en el tercero multiplicó por cuatro la del mes anterior. ¿Cuántas entregas hizo en cada uno de esos meses?**

Si en el primer mes entrega 1 parte, el segundo mes entrega el triple, que son 3 partes, y el tercer mes entrega cuatro veces 3, que son 12 partes. En total tenemos 16 partes, por lo que:

$$C = 2\,800 \qquad S = 16 \qquad p = \frac{2\,800}{16} = 175$$

El primer mes entregó 175; el segundo, $175 \cdot 3 = 525$ y el tercero, $4 \cdot 525 = 2\,100$ paquetes.

35 **¿Cómo repartirán tres socios 50 000 € de beneficios, generados por su negocio, si en su constitución el primero invirtió el doble de capital que el segundo y este el triple que el tercero?**

Si el tercero invirtió 1, el segundo invirtió el triple, que son 3, y el primero el doble de éste, que son 6, por lo que se repartirá de manera directamente proporcional a lo invertido, que son 1, 3 y 6:

$$C = 50\,000 \qquad S = 1 + 3 + 6 = 10 \qquad p = \frac{50\,000}{10} = 5\,000$$

Le corresponderá al tercero que es el que menos puso, $1 \cdot 5\,000 = 5\,000$ €; al segundo que puso el triple que este, $3 \cdot 5\,000 = 15\,000$ €, y al primero que puso el doble del segundo, $2 \cdot 15\,000 = 30\,000$ €.

36 **En un concurso de televisión se reparte el premio entre los tres finalistas que recibirán cantidades inversamente proporcionales al número de preguntas falladas. El tercer clasificado, que falló 4 preguntas, recibió 3 000 euros. ¿Cuánto recibieron el primero y el segundo que tuvieron uno y tres fallos, respectivamente?**

El tercer clasificado recibió: $\text{P} \cdot \frac{1}{4} = 3\,000$ € → P = 12 000 €

El primero recibió 12 000 € y el segundo, $12\,000 \cdot 1/3 = 4\,000$ €.

37 **La dueña de una empresa decide repartir entre sus tres empleados un plus de beneficios de 1 300 €. Cada uno recibirá una cantidad inversamente proporcional a los días que haya faltado al trabajo. El dependiente ha faltado 4 días; la contable, 3, y el repartidor, 2. ¿Qué cantidad asignará a cada uno?**

Debemos repartir 1 300 € en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4, por lo que repartiremos 1 300 € en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}$$

$$p = 1300 \rightarrow \frac{13}{12} = 1200$$

$\frac{1}{2}$ de 1 200 = 600 €

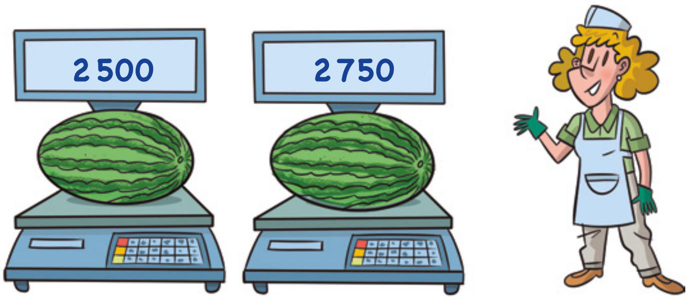
$\frac{1}{3}$ de 1 200 = 400 €

$\frac{1}{4}$ de 1 200 = 300 €

El repartidor cobrará 600 €, el contable 400 € y el dependiente, 300 €.

Interpreta, describe, exprésate

38 **Analiza los datos y los procesos que aparecen en la ilustración siguiente y encuentra errores. Después, corrige los cálculos.**



$$\begin{array}{r} 1{,}80\\ 1{,}80\\ \underline{0{,}90}\\ 3{,}50 \end{array}$$

PESO (kg)		PRECIO (€)
2,5	⟶	3,50
0,25	⟶	3,5 : 10 = 0,35
2,75	⟶	3,85

La sandía se vende a 1,80 €/kg.

El vendedor de la izquierda calcula mal el coste de una sandía de dos kilos y medio:

1,80 + 1,80 + 0,90 = 4,50 € (y no 3,50 €)

Apoyándose en el dato erróneo, el vendedor de la derecha también se equivoca. Sus cálculos deberían ser:

Dos kilos y medio cuestan 4,50 € y un cuarto de kilo, 4,50 : 10 = 0,45 €. Por tanto, una sandía de 2,750 kg costará 4,50 + 0,45 = 4,95 €.

39 **Analiza y explica las distintas soluciones del siguiente problema. Encuentra un error y corrígelo.**

Un ciclista ha recorrido 25 kilómetros en una hora y cuarto. A la misma velocidad, ¿cuánto tardaría en recorrer una etapa de 64 kilómetros?

Resolución 1

P. D.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{DISTANCIA (km)}} & & \underline{\text{TIEMPO (min)}} \\ 25 & \longrightarrow & 75 \\ 64 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \, x = \frac{64 \cdot 75}{25} = 192$$

$$\begin{array}{r|l} 192 & 60 \\ \cline{2-2} 12 & 3 \end{array}$$

Solución: **3 h 12 min**

Resolución 2

$$\begin{array}{lcl} 25 \text{ km} & \rightarrow & 1{,}25 \text{ h} \\ 64 \text{ km} & \rightarrow & x \end{array} \Bigg\} \; x = \frac{64 \cdot 1{,}25}{25} = 3{,}20$$

Solución: **3 h 20 min**

Resolución 3

$$25 \text{ km} \rightarrow \left(1 + \frac{1}{4}\right) \text{h} = 75 \text{ min}$$

$$1 \text{ km} \rightarrow 75 : 25 = 3 \text{ min}$$

$$64 \text{ km} \rightarrow 64 \cdot 3 = 192 \text{ min}$$

Solución: **El ciclista tarda 192 minutos en recorrer 64 km.**

En la resolución 1 utiliza una regla de tres directa para resolverlo, pasando el tiempo a minutos y, después, calculando horas y minutos.

En la resolución 2 también hace una regla de tres, pero no pasa el tiempo a minutos y hace mal la conversión a horas y minutos. La resolución correcta sería:

$$\begin{array}{lcl} 25 \text{ km} & \rightarrow & 1{,}25 \text{ h} \\ 64 \text{ km} & \rightarrow & x \text{ h} \end{array} \Bigg\} \; x = \frac{64 \cdot 1{,}25}{25} = \frac{80}{25} \text{ h}$$

$$\begin{array}{r|l} 80 \text{ h} & 25 \\ \cline{2-2} 5 & 3 \text{ h } 12 \text{ min} \\ \times \; 60 & \\ \hline 300 \text{ min} & \end{array}$$

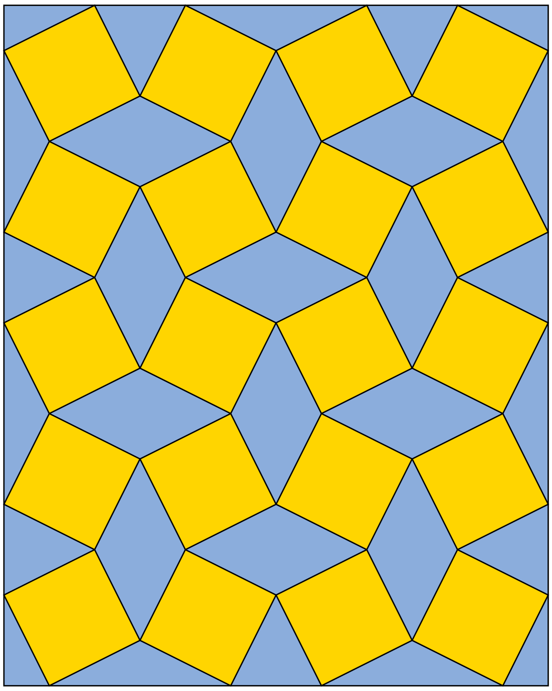
Tardaría 3 horas y 12 minutos.

En la resolución 3, utiliza la reducción a la unidad y da el resultado en minutos.

Página 92

LEE E INFÓRMATE

Proporciones en el mosaico

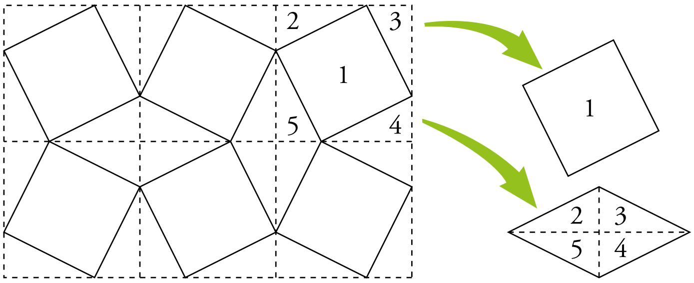


Para construir este mosaico, necesitas el mismo número de piezas azules que amarillas.

O lo que es lo mismo, la razón entre el número de rombos y cuadrados es 1:

$$\frac{\text{N.º DE ROMBOS}}{\text{N.º DE CUADRADOS}} = \frac{a}{a} = 1$$

La afirmación anterior se justifica con facilidad observando la siguiente partición del mosaico:

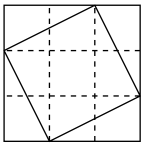


Sin embargo, si quisieras dibujarlo y, después, pintarlo, necesitarías más pintura amarilla que azul.

- **Calcula la razón entre los botes de pintura azul y amarilla que necesitarías comprar, teniendo en cuenta los datos del gráfico de la derecha.**

$$\frac{\text{N.º BOTES AZULES}}{\text{N.º BOTES AMARILLOS}} = \frac{\text{ÁREA PARTE AZUL}}{\text{ÁREA PARTE AMARILLA}} = \frac{\text{ÁREA ROMBO}}{\text{ÁREA CUADRADO}}$$

- **Completa en tu cuaderno: por cada … botes de pintura azul, gastaremos … botes de amarilla.**



ÁREA ROMBO ⟶ 4

ÁREA CUADRADO ⟶ 5

- $\frac{\text{N.º BOTES AZULES}}{\text{N.º BOTES AMARILLOS}} = \frac{\text{ÁREA PARTE AZUL}}{\text{ÁREA PARTE AMARILLA}} = \frac{\text{ÁREA ROMBO}}{\text{ÁREA CUADRADO}} = \frac{4}{5}$
- Por cada 4 botes de pintura azul, gastaremos 5 botes de amarilla.

INVESTIGA

Observa los dos cuadrados que ha cortado Ernesto de una plancha de madera. Uno es el doble de alto que el otro.

Sabiendo que el pequeño pesa 100 g, podríamos pensar que el grande pesa 200 g (a doble lado, doble peso). Sin embargo, el peso del grande es de 400 g, porque al multiplicar el lado por dos, la superficie se multiplica por cuatro.

Teniendo eso en cuenta, si de los dos dados de Paula, el pequeño pesa 100 g, ¿cuánto pesará el grande, cuya arista es el doble?

El dado grande contiene 8 dados pequeños ($2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$).

El dado grande pesa 800 gramos.

Página 93

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Utiliza la lógica

- **Por término medio, cinco policías municipales tardan 5 minutos en poner cinco multas. ¿Cuánto tiempo emplearán diez policías municipales en poner diez multas?**
- **Un arriero tiene en su cuadra una mula, un burro y un caballo. Cuando lleva a trabajar la mula y el caballo, pone $\frac{3}{5}$ de la carga en la mula y $\frac{2}{5}$ en el caballo. Sin embargo, cuando lleva el caballo y el burro, pone $\frac{3}{5}$ de la carga en el caballo y $\frac{2}{5}$ en el burro. ¿Cómo distribuirá la carga hoy si lleva los tres animales y tiene que transportar una carga de 190 kg?**

Observa que el problema se reduce a un reparto en partes proporcionales a 9, 6 y 4.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{M}{C}=\frac{3}{2}\\[4pt] \frac{C}{B}=\frac{3}{2}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{M}{C}=\frac{9}{6}\rightarrow\frac{M}{9}=\frac{C}{6}\\[4pt] \frac{C}{B}=\frac{6}{4}\rightarrow\frac{C}{6}=\frac{B}{4}\end{array}\right\}$$

- Diez policías municipales tardarán en poner 10 multas lo mismo que cinco policías en poner 5 multas: 5 minutos.
- Tal y como marca la observación, haremos un reparto proporcional a 9, 6 y 4 que corresponden a la mula, al caballo y al burro.

$$9 + 6 + 4 = 19$$
$$p = 190 : 19 = 10$$

Por tanto, la mula cargará 90 kg, el caballo cargará 60 kg, y el burro, 40 kg.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Escribe tres parejas de números cuya razón sea $\frac{3}{4}$.**

Por ejemplo: 1 y 0,75, 4 y 3, 16 y 12

2 **Calcula el término desconocido en cada proporción.**

a) $\frac{6}{8} = \frac{15}{x}$ **b)** $\frac{28}{8} = \frac{x}{6}$ **c)** $\frac{x}{18} = \frac{20}{24}$

a) $\frac{6}{8} = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 15}{6} = 20$

b) $\frac{28}{8} = \frac{x}{6} \rightarrow x = \frac{28 \cdot 6}{8} = 21$

c) $\frac{x}{18} = \frac{20}{24} \rightarrow x = \frac{18 \cdot 20}{24} = 15$

3 **Completa esta tabla en tu cuaderno.**

MAGNITUD M	**1**	**2**	**4**	**5**
MAGNITUD N	**20**			

a) **Suponiendo que las magnitudes M y N son directamente proporcionales.**

b) **Suponiendo que las magnitudes M y N son inversamente proporcionales.**

a)

MAGNITUD M	1	2	4	5
MAGNITUD N	20	40	80	100

b)

MAGNITUD M	1	2	4	5
MAGNITUD N	20	10	5	4

4 **Identifica si la siguiente tabla es de proporcionalidad directa o inversa.**

MAGNITUD M	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**
MAGNITUD N	**48**	**24**	**16**	**12**	**8**

Se trata de una tabla de proporcionalidad inversa porque cuanto más aumenta la magnitud M, más disminuye la magnitud N.

5 **Copia y completa esta tabla de proporcionalidad teniendo en cuenta que la constante de proporcionalidad es 0,75.**

1			**10**		**28**
	2,25	**3,75**		**10,50**	

1	3	5	10	14	28
0,75	2,25	3,75	7,5	10,50	21

6 Resuelve mentalmente.

a) Caminando a razón de 4 km/h, una persona tarda 15 minutos en recorrer el circuito de entrenamiento. ¿Cuánto tarda en el mismo recorrido un corredor a 6 km/h?

b) Por tres cuartos de kilo de cerezas he pagado 2,40 €. ¿Cuánto pagaré por un kilo y un cuarto?

a) Tarda 10 minutos.

b) Pagaré 4 €.

7 Resuelve por reducción a la unidad.

a) Un manantial arroja 180 L de agua en 6 min. ¿Cuántos litros arrojará en un cuarto de hora?

b) Abriendo 6 grifos, un depósito se vacía en 50 minutos. ¿Cuánto tardará en vaciarse abriendo solo 4?

a) En 1 min arroja 180 : 6 = 30 litros.

En 15 min arroja 30 · 15 = 450 litros.

b) Abriendo un grifo, el depósito se vacía en 50 · 6 = 300 minutos.

Abriendo cuatro grifos, se vaciará en 300 : 4 = 75 minutos = 1 h 15 min.

8 Resuelve utilizando la regla de tres.

a) Un coche, a una media de 70 km/h, hace un viaje en 6 horas. ¿Cuánto tiempo invertirá en el viaje de vuelta si circula a una media de 100 km/h?

b) Por un besugo de 875 g Eva ha pagado 10,85 €. ¿Cuánto pagará Miguel por otro besugo de 1,2 kg?

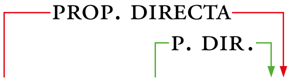
a) Es una relación de proporcionalidad inversa.

$$\left.\begin{array}{rcr} 70\text{ km/h} & \rightarrow & 6\text{ h} \\ 100\text{ km/h} & \rightarrow & x \end{array}\right\} \; x = \frac{6 \cdot 70}{100} = 4{,}2\text{ h} = 4\text{ h }12\text{ min}$$

b) Es una relación de proporcionalidad directa.

$$\left.\begin{array}{rcr} 875\text{ g} & \rightarrow & 10{,}85\text{ €} \\ 1\,200\text{ g} & \rightarrow & x \end{array}\right\} \; x = \frac{1\,200 \cdot 10{,}85}{875} = 14{,}88\text{ €}$$

9 Si 50 terneros de engorde consumen 1 400 kg de alfalfa en una semana, ¿cuántos kilos de alfalfa se necesitan para alimentar a 30 terneros durante 20 días?



TERNEROS	DÍAS	KG
50	7	1 400
30	20	x

$$\rightarrow \frac{50}{30} \cdot \frac{7}{20} = \frac{1400}{x} \rightarrow x = \frac{1400 \cdot 30 \cdot 20}{50 \cdot 7} = 2\,400\text{ kg}$$

Se necesitan 2 400 kg.

10 Reparte 585 en:

a) Partes directamente proporcionales a 3, 4 y 6.

b) Partes inversamente proporcionales a 3, 4 y 6.

a) $C = 585$ $p = 585 : (3 + 4 + 6) = 585 : 13 = 45$

Las partes son 3 · 45 = 135; 4 · 45 = 180 y 6 · 45 = 270.

b) $C = 585$ $p = 585 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 585 : \frac{9}{12} = 780$

Las partes son 1/3 · 780 = 260; 1/4 · 780 = 195 y 1/6 · 780 = 130.

5 PORCENTAJES

Página 94

Resuelve con lo que sabes

1 **En cierta población de la antigua Persia, por cada 12 cestos de cereal obtenidos en su cosecha, un agricultor debía pagar uno al templo y dos al Estado.**

a) ¿Qué fracción de la cosecha había que entregar en total?

b) El que cosechó 30 sacos de trigo, ¿cuántos sacos entregó al templo? ¿Y al Estado?

a) Había que entregar $\frac{3}{12}$ del total.

b) Templo: $\frac{1}{12}$ de $30 = \frac{5}{2}$ → Entregó dos cestos y medio al templo.

Estado: $\frac{2}{12}$ de $30 = 5$ → Entregó cinco cestos al Estado.

2 **En otra población, de cada 10 cestos cosechados, se pagaba uno al templo y dos al Estado.**

a) ¿Cuánto se pagarían por una cosecha de 30 cestos de mijo? ¿Y por otra cosecha de 100 cestos de centeno?

b) Seguramente te habrá resultado más fácil resolver este ejercicio que el anterior. ¿Sabrías decir por qué?

a) Por 30 cestos pagarían tres al templo y seis al Estado. Por 100 cestos pagarían diez al templo y 20 al Estado.

b) Porque es más fácil contar en base 10 que en base 12. Los resultados aquí han sido exactos.

Precedentes en la antigua Roma

3 **Atendiendo al impuesto del emperador Augusto, ¿cuánto tributaría en una subasta una puja ganadora de 200 monedas?**

Tributaría dos monedas.

4 **¿Cuánto tributaría una compra en subasta por un importe de 50 monedas? ¿Y por una compra de 250 monedas?**

Por 50 monedas no tributaría y por 250 monedas tributaría dos monedas.

Página 95

Empieza a manejar porcentajes

5 **Joanna tenía ahorrados 300 € y ha gastado 60 € en unas zapatillas de deporte. ¿Qué tanto por ciento de sus ahorros ha gastado?**

$$\frac{60}{300} = \frac{20}{100}$$

Ha gastado el 20 por ciento de sus ahorros.

6 Paloma ha comprado un robot aspirador de 450 € rebajado un 20 %.

a) ¿Cuánto le han rebajado?

b) ¿Cuánto le han cobrado?

a) Si de cada 100 euros la rebaja es 20 euros, de 450 la rebaja es cuatro veces y media 20, que son $20 \cdot 4{,}5 = 90$ euros.

b) Le han cobrado $450 - 90 = 360$ euros.

7 En un rebaño de 50 cabezas, hay 15 ovejas negras, y el resto, blancas. ¿Cuál es el porcentaje de ovejas negras? ¿Y el de ovejas blancas?

$\frac{15}{50}$ son negras → $\frac{30}{100}$ son negras → El 30 % son negras.

Por tanto, el 70 % son blancas.

8 En un cine hay 20 filas de 10 butacas. He llegado un poco pronto y, mientras esperaba que comenzara la película, he contado 79 butacas ocupadas. ¿Qué tanto por ciento del cine estaba ocupado, aproximadamente, en ese momento?

En el cine hay 200 butacas, de las que casi 80 están ocupadas. De cada 100, 40 están ocupadas. Se ha ocupado, aproximadamente, un 40 % de las butacas.

9 Un camión inicia un viaje de 450 km y para a repostar cuando lleva recorrido un 10 % del trayecto. ¿Cuánto lleva recorrido?

10 % de $450 = 45$

Lleva recorridos 45 km.

10 Según la factura del agua, este mes, en casa de Juanma, han gastado 5,5 metros cúbicos de agua, que es un 10 % más que el mes pasado. ¿Cuánto gastaron el mes pasado?

10 % de $5{,}5 = 0{,}55$

$5{,}5 - 0{,}55 = 4{,}95$

El mes pasado gastaron, aproximadamente, 5 metros cúbicos.

1 ▶ PORCENTAJES. CONCEPTO

Página 97

Para fijar ideas

1 Copia y completa las tablas.

6 %	**100**	**200**	**300**	**400**	**50**	**450**
	6					

40 %	**100**	**200**	**300**	**10**	**5**	**15**
	40					

6 %	100	200	300	400	50	450
	6	12	18	24	3	27

40 %	100	200	300	10	5	15
	40	80	120	4	2	6

2 Copia y completa cada uno de los esquemas en los que se calculan porcentajes recurriendo a una regla de tres.

a) Calcula el 15 % de 400.

$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 100 & \longrightarrow & 15 \\ 400 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \frac{100}{400}=\frac{15}{x}$$

$$x=\frac{400\cdot\ldots}{\ldots} \to 15\,\%\text{ de }400=\ldots$$

b) Calcula el 24 % de 675.

$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 100 & \longrightarrow & 24 \\ 675 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \frac{100}{\ldots}=\frac{\ldots}{x}$$

$$x=\frac{\ldots\cdot\ldots}{100} \to 24\,\%\text{ de }675=\ldots$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 100 & \longrightarrow & 15 \\ 400 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \frac{100}{400}=\frac{15}{x}$$

$$x=\frac{400\cdot 15}{100} \to 15\,\%\text{ de }400=60$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 100 & \longrightarrow & 24 \\ 675 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \frac{100}{675}=\frac{24}{x}$$

$$x=\frac{675\cdot 24}{100} \to 24\,\%\text{ de }675=162$$

3 Copia y completa tomando cada porcentaje como la fracción de una cantidad.

a) $65\,\%\text{ de }340 \to \frac{\ldots}{100}\text{ de }340=\frac{\ldots\cdot 340}{100}=\ldots$

65 % de 340 = …

b) $5\,\%\text{ de }720 \to \frac{\ldots}{\ldots}\text{ de }720=\frac{\ldots\cdot\ldots}{\ldots}=\ldots$

5 % de 720 = …

a) $65\,\%\text{ de }340 \to \frac{65}{100}\text{ de }340=\frac{65\cdot 340}{100}=221$

65 % de 340 = 221

b) $5\,\%\text{ de }720 \to \frac{5}{100}\text{ de }720=\frac{5\cdot 720}{100}=36$

5 % de 720 = 36

4 Copia y completa asociando cada porcentaje a un número decimal.

a) 45 % de 980 → 0,45 · … = …

b) 8 % de 90 → 0,08 · … = …

c) 110 % de 250 → 1,10 · … = …

d) 18 % de 75 → 0,… · 75 = …

e) 6 % de 25 → … · 25 = …

f) 125 % de 40 → … · 40 = …

a) 45 % de 980 → 0,45 · 980 = 441

b) 8 % de 90 → 0,08 · 90 = 7,2

c) 110 % de 250 → 1,10 · 250 = 275

d) 18 % de 75 → 0,18 · 75 = 13,5

e) 6 % de 25 → 0,06 · 25 = 1,5

f) 125 % de 40 → 1,25 · 40 = 50

Para practicar

1 **Calcula mentalmente.**

a) 20 % de 200	**b) 15 % de 200**	**c) 10 % de 200**
d) 8 % de 200	**e) 60 % de 50**	**f) 30 % de 50**
g) 12 % de 50	**h) 8 % de 50**	**i) 2 % de 50**
a) 40	b) 30	c) 20
d) 16	e) 30	f) 15
g) 6	h) 4	i) 1

2 **Calcula.**

a) 12 % de 750	**b) 35 % de 240**	**c) 85 % de 360**
d) 14 % de 650	**e) 2,5 % de 20**	**f) 95 % de 20**
g) 150 % de 40	**h) 115 % de 200**	**i) 200 % de 10**
a) 90	b) 84	c) 306
d) 91	e) 0,5	f) 19
g) 60	h) 230	i) 20

3 **Copia y completa en tu cuaderno, asociando cada porcentaje con un número decimal.**

PORCENTAJE	35 %	24 %		8 %		95 %	120 %	
EXPRESIÓN DECIMAL	0,35		0,52		0,03			1,50

PORCENTAJE	35 %	24 %	52 %	8 %	3 %	95 %	120 %	150 %
EXPRESIÓN DECIMAL	0,35	0,24	0,52	0,08	0,03	0,95	1,20	1,50

4 **El 62 % de los cargos directivos de una empresa metalúrgica son varones. ¿Qué porcentaje son mujeres?**

El 38 % son mujeres.

5 **Unos grandes almacenes anuncian rebajas del 15 %. Al comprar un producto rebajado, ¿qué porcentaje se paga?**

Se paga el 85 % del precio.

6 **Una biblioteca pública adquiere 260 nuevos libros de los que el 25 % son novelas. ¿Cuántas novelas se han adquirido?**

$$25\,\% \text{ de } 260 = \frac{1}{4} \text{ de } 260 = \frac{260}{4} = 65$$

Se han adquirido 65 novelas.

7 ODS Meta 11.c. **En una aldea de 875 habitantes solo queda un 12 % de jóvenes. ¿Cuántos jóvenes viven en la aldea?**

$$12\,\% \text{ de } 875 = \frac{12 \cdot 875}{100} = 105$$

Viven 105 jóvenes.

8 **En clase somos treinta y el 90 % hemos aprobado el examen de Matemáticas. ¿Cuántos hemos aprobado?**

90 % de 30 = $\frac{90 \cdot 30}{100}$ = 27

Hemos aprobado 27.

9 **En un país de quince millones de habitantes el 8 % son inmigrantes extranjeros. ¿Cuántos inmigrantes alberga?**

8 % de 15 = $\frac{8 \cdot 15}{100}$ = 1,2

Alberga 1,2 millones de inmigrantes.

10 **Un avión transporta 425 viajeros. El 52 % son europeos; el 28 %, americanos; el 12 %, africanos, y el resto, asiáticos. ¿Cuál es el porcentaje de asiáticos? ¿Cuántos asiáticos viajan en el avión?**

100 – 52 – 28 – 12 = 8 → 8 % asiáticos

8 % de 425 = $\frac{8 \cdot 425}{100}$ = 34

El 8 % de los viajeros son asiáticos. Viajan 34 asiáticos.

Página 98

Para practicar

11 **Calcula en el orden en que aparecen siguiendo estrategias similares a la del ejemplo.**

- $\left.\begin{array}{r}\mathbf{10\ \%\ de\ 160 = 16}\\ \mathbf{5\ \%\ de\ 160 = 8}\end{array}\right\} \rightarrow$ **15 % de 160 = 16 + 8 = 24**

a) 10 % de 60
5 % de 60
15 % de 60

b) 10 % de 140
5 % de 140
15 % de 140

c) 10 % de 400
5 % de 400
15 % de 400

d) 10 % de 40
20 % de 40
30 % de 40

e) 50 % de 60
5 % de 60
45 % de 60

f) 10 % de 80
25 % de 80
35 % de 80

a) 10 % de 60 = 6
5 % de 60 = 3
15 % de 60 = 6 + 3 = 9

b) 10 % de 140 = 14
5 % de 140 = 7
15 % de 140 = 14 + 7 = 21

c) 10 % de 400 = 40
5 % de 400 = 20
15 % de 400 = 40 + 20 = 60

d) 10 % de 40 = 4
20 % de 40 = 8
30 % de 40 = 4 + 8 = 12

e) 50 % de 60 = 30
5 % de 60 = 3
45 % de 60 = 30 – 3 = 27

f) 10 % de 80 = 8
25 % de 80 = 20
35 % de 80 = 8 + 20 = 28

12 Calcula mentalmente.

a) 50 % de 46
b) 50 % de 120
c) 25 % de 40
d) 75 % de 40
e) 25 % de 24
f) 75 % de 24
g) 10 % de 460
h) 5 % de 460
i) 10 % de 70

a) 23
b) 60
c) 10
d) 30
e) 6
f) 18
g) 46
h) 23
i) 7

13 Resuelve mentalmente.

a) Paula tenía ahorrados 280 € y ha gastado el 50 % en un monopatín. ¿Cuánto costaba el monopatín?

b) En un colegio con 280 alumnos y alumnas, el 75 % se queda al comedor. ¿Cuántos comen en el colegio?

c) De un depósito lleno, con una capacidad de 600 litros, se ha extraído el 15 %. ¿Cuántos litros se han extraído?

a) El monopatín costaba 140 €.

b) En el colegio comen 210 alumnos y alumnas.

c) Se han extraído 90 litros.

2 ▶ PROBLEMAS CON PORCENTAJES

Página 99

Para fijar ideas

1 **Copia y completa resolviendo de dos formas.**

En la última sesión de un cine se han ocupado 81 butacas, lo que supone el 45 % del total de la sala. ¿De cuántas butacas dispone la sala?

a)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 100 & \longrightarrow & 45 \\ x & \longrightarrow & 81 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \frac{100}{x} = \frac{\dots}{\dots} \to x = \frac{100\cdot\dots}{\dots} = \dots$$

Solución: **La sala dispone de ... butacas.**

b) El 45 % del total de las butacas (x) es 81.

45 % de x = 81 → 0,45 · x = 81 → x = 81 : ... = ... → ***Solución:*** **La sala dispone de ... butacas.**

a)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 100 & \longrightarrow & 45 \\ x & \longrightarrow & 81 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \frac{100}{x} = \frac{45}{81} \to x = \frac{100\cdot 81}{45} = 180$$

Solución: La sala dispone de 180 butacas.

b) 45 % de $x = 81 \to 0{,}45 \cdot x = 81 \to x = 81 : 0{,}45 = 180$

Solución: La sala dispone de 180 butacas.

Página 100

Para fijar ideas

2 **Copia y completa resolviendo de dos formas.**

En la última sesión de un cine se han ocupado 81 de las 180 butacas que tiene la sala. ¿Cuál ha sido el porcentaje de ocupación?

a)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 180 & \longrightarrow & 81 \\ \dots & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \frac{180}{\dots} = \frac{81}{x} \to x = \frac{\dots\cdot\dots}{180} = \dots$$

Solución: **Se ha ocupado el ... % de la sala.**

b) El porcentaje de ocupación, en forma decimal (a : 100), coincide con el cociente entre las butacas ocupadas y el total de butacas.

81 : 180 = 0,... → ***Solución:*** **Se ha ocupado el ... % de la sala.**

a)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 180 & \longrightarrow & 81 \\ 100 & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \frac{180}{100} = \frac{81}{x} \to x = \frac{81\cdot 100}{180} = 45$$

b) 81 : 180 = 0,45

Solución: Se ha ocupado el 45 % de la sala.

Para practicar

1 **Resuelve mentalmente.**

a) ¿Cuál es la cantidad cuyo 50 % vale 15?

b) El 10 % de un número es 28. ¿Qué número es?

c) ¿Qué total tiene el 75 % igual a 12?

d) De 40 tomo 10. ¿Qué porcentaje tomo?

e) A 80 le quito 16. ¿Qué porcentaje he quitado?

f) ¿Qué tanto por ciento de 160 es igual a 8?

a) 30 b) 280 c) 16 d) 25 % e) 20 % f) 5 %

2 **De un carrete de cinta se han gastado 6 m, que son el 75 % del total. ¿Cuántos metros de cinta tenía el carrete originalmente?**

75 % del total = 6 → 6 : 0,75 = 8

El carrete original tenía 8 metros.

3 **Este año, en el mes de abril, ha llovido en 12 días. ¿Qué tanto por ciento de los días ha llovido?**

x % de 30 = 12 → x = 12 : 30 = 0,4 → 40 %

Supone el 40 % de los días.

4 **Rafael ha gastado el 90 % del dinero que llevaba en la compra de un jersey que le ha costado 45 €. ¿Cuánto dinero llevaba?**

90 % del total = 45 → 45 : 0,9 = 50

Llevaba 50 €.

5 **Dos de cada cinco de las ovejas de un rebaño han tenido esta primavera un corderito. ¿Qué porcentaje supone eso?**

x % de 5 = 2 → x = 2 : 5 = 0,4 → 40 %

Supone el 40 %.

6 **En un bidón vacío se han vertido 18 litros de aceite, ocupando el 60 % de su capacidad. ¿Cuántos litros caben en el bidón?**

60 % del total = 18 → 18 : 0,6 = 30

Caben 30 litros.

7 **En una aldea con un censo de 380 personas se contaron 266 votos en la última consulta electoral. ¿Qué tanto por ciento votó?**

x % de 380 = 266 → x = 266 : 380 = 0,7 → 70 %

Votó el 70 %.

8 **Un arquero deportivo, entrenando, ha acertado 24 veces en el blanco, lo que supone el 96 % del total de flechas lanzadas ¿Cuántos disparos ha hecho en total?**

96 % del total = 24 → 24 : 0,96 = 25

Ha hecho 25 disparos.

9 **Una agricultora, debido a la sequía, ha recogido este año 14 t de cebada, lo que supone, solo, un 28 % de lo que estima como una cosecha normal. ¿Cuántas toneladas recoge en un año normal?**

28 % del total = 14 → 14 : 0,28 = 50

En un año normal recoge 50 toneladas.

Página 101

Para fijar ideas

3 Copia y completa en tu cuaderno.

a) Un viticultor ha recogido 216 toneladas de uva, lo que representa un 20 % más que el año pasado. ¿Cuántas toneladas recogió el año pasado?

$$\begin{array}{ccc} \text{COSECHA} & & \text{COSECHA} \\ \text{PASADA} & & \text{ACTUAL} \\ \hline 100 & \longrightarrow & 120 \\ x & \longrightarrow & 216 \end{array} \Bigg\} \ \frac{\dots}{x} = \frac{120}{\dots} \to x = \frac{\dots \cdot \dots}{120} = \dots$$

***Solución:* El año pasado recogió … toneladas.**

b) Un viticultor recogió, el año pasado, 180 toneladas de uva, y este año, 216 toneladas. ¿En qué porcentaje ha aumentado su producción?

$$\begin{array}{ccc} \text{COSECHA} & & \text{COSECHA} \\ \text{PASADA} & & \text{ACTUAL} \\ \hline 180 & \longrightarrow & 216 \\ 100 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \ \frac{180}{\dots} = \frac{\dots}{x} \to x = \frac{\dots \cdot \dots}{180} = 120$$

Cada 100 toneladas del año pasado se han convertido en 120 toneladas.

***Solución:* La producción ha aumentado en un … %.**

a)

$$\begin{array}{ccc} \text{COSECHA} & & \text{COSECHA} \\ \text{PASADA} & & \text{ACTUAL} \\ \hline 100 & \longrightarrow & 120 \\ x & \longrightarrow & 216 \end{array} \Bigg\} \ \frac{100}{x} = \frac{120}{216} \to x = \frac{100 \cdot 216}{120} = 180$$

Solución: El año pasado recogió 180 toneladas.

b)

$$\begin{array}{ccc} \text{COSECHA} & & \text{COSECHA} \\ \text{PASADA} & & \text{ACTUAL} \\ \hline 180 & \longrightarrow & 216 \\ 100 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \ \frac{180}{100} = \frac{216}{x} \to x = \frac{100 \cdot 216}{180} = 120$$

Cada 100 toneladas del año pasado se han convertido en 120 toneladas.

Solución: La producción ha aumentado en un 120 %.

Página 102

Para fijar ideas

4 Copia y completa en tu cuaderno.

a) Hemos pagado 527 € por una bicicleta rebajada un 15 %. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

$$\begin{array}{ccc} \text{PRECIO} & & \text{PRECIO} \\ \text{INICIAL} & & \text{FINAL} \\ \hline 100 & \longrightarrow & 85 \\ x & \longrightarrow & 527 \end{array} \Bigg\} \ \frac{100}{x} = \frac{\dots}{\dots} \to x = \frac{\dots \cdot \dots}{\dots} = \dots$$

***Solución:* La bicicleta costaba … €.**

b) Una bicicleta que costaba 620 € se ha vendido en las rebajas por 527 €. ¿Qué porcentaje se ha rebajado?

$$\left.\begin{array}{ccc} \textbf{PRECIO INICIAL} & & \textbf{PRECIO FINAL} \\ \mathbf{620} & \longrightarrow & \mathbf{527} \\ \mathbf{100} & \longrightarrow & \boldsymbol{x} \end{array}\right\} \frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{x} \rightarrow x = \frac{\dots \cdot 100}{\dots} = \dots$$

De cada 100 €, hemos pagado 85 €, luego nos han rebajado 15 €.

***Solución:* Se ha aplicado un descuento del ... %.**

a)

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{PRECIO INICIAL} & & \text{PRECIO FINAL} \\ 100 & \longrightarrow & 85 \\ x & \longrightarrow & 527 \end{array}\right\} \frac{100}{x} = \frac{85}{527} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 527}{85} = 620$$

Solución: La bicicleta costaba 620 €.

b)

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{PRECIO INICIAL} & & \text{PRECIO FINAL} \\ 620 & \longrightarrow & 527 \\ 100 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \frac{620}{100} = \frac{527}{x} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 527}{620} = 85$$

Solución: Se ha aplicado un descuento del 15 %.

3 ▶ INTERÉS BANCARIO

Página 103

Para fijar ideas

1 Copia y completa en tu cuaderno.

a) ¿Qué interés debo pagar por un préstamo de 3 000 € al 8 % que devuelvo al cabo de 2 años?

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{Capital} & \to C = 3\,000\ € \\ \textbf{Rédito} & \to r = 8\,\% \\ \textbf{Tiempo} & \to t = 2 \text{ años}\end{array}\right\} \textbf{Interés} \to I = \frac{\ldots \cdot 8 \cdot \ldots}{100} = \ldots\ €$$

b) ¿Qué interés producirá un depósito de 1 500 € colocado al 3 % durante 2 años y 3 meses?

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{Capital} & \to C = \ldots\ € \\ \textbf{Rédito} & \to r = \ldots\,\% \\ \textbf{Tiempo} & \to t = 2 + \frac{3}{12} = 2{,}25 \text{ años}\end{array}\right\} \textbf{Interés} \to I = \frac{\ldots \cdot \ldots \cdot \ldots}{100} = \ldots\ €$$

a) $$\left.\begin{array}{ll}\text{Capital} & \to C = 3\,000\ € \\ \text{Rédito} & \to r = 8\,\% \\ \text{Tiempo} & \to t = 2 \text{ años}\end{array}\right\} \text{Interés} \to I = \frac{3\,000 \cdot 8 \cdot 2}{100} = 480\ €$$

Debo pagar 480 €.

b) $$\left.\begin{array}{ll}\text{Capital} & \to C = 1\,500\ € \\ \text{Rédito} & \to r = 3\,\% \\ \text{Tiempo} & \to t = 2 + \frac{3}{12} = 2{,}25 \text{ años}\end{array}\right\} \text{Interés} \to I = \frac{1\,500 \cdot 3 \cdot 2{,}25}{100} = 101{,}25\ €$$

Producirá un interés de 101,25 €.

4 OTROS PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Página 104

Para fijar ideas

1 Copia, completa y resuelve.

a) Un almacenista mezcla 80 kilos de café, clase A, a 15 €/kg, con 120 kilos de otro café inferior, clase B, a 9 €/kg. ¿A cómo sale el kilo de la mezcla?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	VALOR (€)
CAFÉ A	**80**		
CAFÉ B	**120**		
MEZCLA	**200**		

b) ¿Cuántos kilos de café de clase B, a 9 €/kg, se han de mezclar con 80 kilos de otro café de clase A, a 15 €/kg, para que el kilo de la mezcla resulte a 11,40 €?

- **Valor que pierden en la mezcla 80 kilos de café A:**

$$(15 - \ldots) \cdot 80 = \ldots$$

- **Valor que ganan en la mezcla x kilos de café B:**

$$(11{,}40 - \ldots) \cdot x = \ldots$$

a)

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	VALOR (€)
CAFÉ A	80	15	$80 \cdot 15 = 1\,200$
CAFÉ B	120	9	$120 \cdot 9 = 1\,080$
MEZCLA	200	x	$1\,200 + 1\,080 = 2\,280$

Coste de 200 kg → 2 280 €

Coste de un kilo → 2 280 : 200 = 11,4 €/kg

La mezcla sale a 11,40 €/kg.

b)
- $(15 - 11{,}40) \cdot 80 = 288$
- $(11{,}40 - 9) \cdot x = 2{,}4x$

$$288 = 2{,}4x \rightarrow x = \frac{288}{2{,}4} = 120 \text{ kg}$$

Se han de mezclar 120 kilos de clase B.

Página 105

Para practicar

1 La población M dista 96 km de la población N. Un tren de mercancías sale de M hacia N a 50 km/h. A la vez, sale de N hacia M, por una vía paralela, uno de viajeros a 110 km/h. ¿Cuánto tardan en cruzarse?

Velocidad de acercamiento → 110 + 50 = 160 km/h

$$t = \frac{e}{v} \rightarrow t = \frac{96}{160} = 0{,}6 \text{ h} = 36 \text{ min}$$

Tardan 36 minutos en cruzarse.

2 **Un señor sale a dar un paseo en bicicleta avanzando a 8 km/h. Veinte minutos después, sale a entrenar su nieta, también en bicicleta y siguiendo el mismo camino, a 18 km/h. ¿Cuánto tarda la nieta en alcanzarle?**

Velocidad de acercamiento → 18 – 8 = 10 km/h

Ventaja del abuelo → $e = v \cdot t \rightarrow 8 \text{ km/h} \cdot \frac{1}{3} \text{ h} = \frac{8}{3} = 2,\overset{\frown}{6} \text{ km}$

En recorrer $2,\overset{\frown}{6}$ km a 10 km/h se tarda:

$$\frac{2,\overset{\frown}{6} \text{ km}}{10 \text{ km/h}} = 0{,}26 \text{ h} = 15{,}6 \text{ min} = 15 \text{ min } 36 \text{ s}$$

La nieta tardará 15 minutos y 36 segundos en alcanzar a su abuelo.

Página 106

3 **Una bomba, que saca agua de un pozo, llena un pilón de riego en 5 horas. Una segunda bomba llena el mismo pilón en 7 horas. ¿Cuánto tardarían en llenar el mismo pilón trabajando juntas?**

Una bomba llena $\frac{1}{5}$ del pilón en una hora; y una segunda bomba llena $\frac{1}{7}$ del pilón en una hora. Por tanto, juntas llenan en una hora:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35} \text{ del pilón}$$

Llenan $\frac{1}{35}$ del pilón en $\frac{1}{12}$ de hora, o lo que es lo mismo, en 5 minutos.

Llenan $\frac{35}{35}$ del pilón en $35 \cdot 5 = 175$ min = 2 h 55 min.

Trabajando juntas tardarían 2 horas y 55 minutos.

4 **Una piscina tiene dos desagües. Si abrimos el primero, la piscina se vacía en 2 horas, y si abrimos el segundo, se vacía en 4 horas. ¿Cuánto tardará en vaciarse si abrimos simultáneamente ambos desagües?**

El primer desagüe vacía $\frac{1}{2}$ piscina en una hora.

El segundo desagüe vacía $\frac{1}{4}$ de la piscina en una hora.

Los dos juntos vacían $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de la piscina en una hora.

Por tanto, vacían $\frac{1}{4}$ de la piscina en $\frac{1}{3}$ de hora = 20 minutos.

Es decir, vacían $\frac{4}{4}$ de la piscina en $4 \cdot 20$ minutos = 80 minutos.

Tardará 1 hora y 20 minutos en vaciarse.

5 **Una cuadrilla de segadores corta un campo de heno en 3 horas. Una segunda cuadrilla tardaría 6 horas en segar el mismo campo. ¿Cuánto tardarían en segar el campo las dos cuadrillas a la vez?**

La primera cuadrilla corta $\frac{1}{3}$ del campo en una hora; y la segunda cuadrilla corta $\frac{1}{6}$ del campo en una hora.

Juntas cortan $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ del campo en una hora.

Tardarían 2 horas.

6 **El ciclista que sale de A tarda 50 minutos en llegar a B, y el que sale de B tarda 30 minutos en llegar a A. Si salen a la vez, ¿cuánto tardarán en encontrarse?**

Si d es la distancia que separa A y B, el ciclista A recorre $\frac{1}{50}$ parte de d al minuto, y el ciclista B recorre $\frac{1}{30}$ de d al minuto.

Por tanto, en un minuto recorren $\frac{1}{50} + \frac{1}{30} = \frac{3+5}{150} = \frac{8}{150}$ de la distancia entre A y B.

Así, recorren $\frac{1}{150}$ de d en $\frac{1}{8}$ minutos.

Recorrerán $\frac{150}{150}$ de d en $\frac{150}{8}$ minutos = 18,75 min = 18 min 45 s.

Tardarán en encontrarse 18 minutos y 45 segundos.

Página 107

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Cálculo con porcentajes

1 Calcula mentalmente.

a) 50 % de 220   **b) 50 % de 82**
c) 50 % de 12   **d) 25 % de 800**
e) 75 % de 800   **f) 25 % de 280**

a) 110   b) 41
c) 6   d) 200
e) 600   f) 70

2 Calcula mentalmente.

a) 50 % de 30 → 150 % de 30
b) 10 % de 40 → 110 % de 40
c) 25 % de 600 → 125 % de 600

a) 15 → 45   b) 4 → 44   c) 150 → 750

3 Obtén mentalmente el valor de x en cada caso.

a) 50 % de $x = 150$ **b) 50 % de $x = 7$**
c) 25 % de $x = 120$ **d) 25 % de $x = 6$**
e) 75 % de $x = 150$ **f) 75 % de $x = 9$**

a) $x = 300$ b) $x = 14$
c) $x = 480$ d) $x = 24$
e) $x = 200$ f) $x = 12$

4 Obtén, mentalmente, el valor de x en cada caso.

a) 10 % de $x = 31$ **b) 10 % de $x = 4$**
c) 20 % de $x = 18$ **d) 20 % de $x = 86$**
e) 5 % de $x = 35$ **f) 5 % de $x = 2$**

a) $x = 310$ b) $x = 40$
c) $x = 90$ d) $x = 430$
e) $x = 700$ f) $x = 40$

5 Calcula.

a) 15 % de 160   **b) 13 % de 700**
c) 12 % de 3 625   **d) 4 % de 75**
e) 76 % de 1 200   **f) 5 % de 182**
g) 2,4 % de 350   **h) 1,7 % de 2 500**

a) 24   b) 91
c) 435   d) 3
e) 912   f) 9,1
g) 8,4   h) 42,5

6 **Copia y completa en tu cuaderno.**

a) Para calcular el 30 % se divide entre 10 y se multiplica por…

b) Para calcular el 70 %, se divide entre … y se multiplica por 7.

c) Para calcular el 75 %, se divide entre 4 y se multiplica por…

d) Para calcular el 40 %, se divide entre 10 y se multiplica por…

e) Para calcular el 5 %, de divide primero entre 10 y luego entre…

a) Para calcular el 30 %, se divide entre 10 y se multiplica por 3.

b) Para calcular el 70 %, se divide entre 10 y se multiplica por 7.

c) Para calcular el 75 %, se divide entre 4 y se multiplica por 3.

d) Para calcular el 40 %, se divide entre 10 y se multiplica por 4.

e) Para calcular el 5 %, se divide primero entre 10 y luego entre 2.

Relaciones porcentajes-fracciones-decimales

7 **Completa en tu cuaderno.**

PORCENTAJE	**20 %**	**85 %**	**5 %**	**2 %**	**115 %**
FRACCIÓN	**1/5**				
N.° DECIMAL	**0,20**				

PORCENTAJE	20 %	85 %	5 %	2 %	115 %
FRACCIÓN	1/5	17/20	1/20	1/50	23/20
N.° DECIMAL	0,20	0,85	0,05	0,02	1,15

8 **Calcula como se hace en el ejemplo.**

- **15 % de 280 = 280 · 0,15 = 42**

a) 18 % de 1 350 **b) 57 % de 2 400**

c) 8 % de 125 **d) 6 % de 40**

a) 1 350 · 0,18 = 243 b) 2 400 · 0,57 = 1 368

c) 125 · 0,08 = 10 d) 40 · 0,06 = 2,4

9 **Calcula x como en el ejemplo.**

- **15 % de x = 42 → x · 0,15 = 42 →**
  → x = 42 : 0,15 = 280

a) 20 % de x = 27

b) 17 % de x = 595

c) 5 % de x = 3,2

d) 7 % de x = 17,5

a) $x \cdot 0{,}20 = 27 \rightarrow x = 27 : 0{,}20 = 135$

b) $x \cdot 0{,}17 = 595 \rightarrow x = 595 : 0{,}17 = 3\,500$

c) $x \cdot 0{,}05 = 3{,}2 \rightarrow x = 3{,}2 : 0{,}05 = 64$

d) $x \cdot 0{,}07 = 17{,}5 \rightarrow x = 17{,}5 : 0{,}07 = 250$

10 **Calcula el valor de n en cada caso.**

a) 40 % de $n = 66$ | **b) 15 % de $n = 69$**

c) 85 % de $n = 40,8$ | **d) 16 % de $n = 14,40$**

e) 8 % de $n = 4,4$ | **f) 6 % de $n = 28,5$**

a) 66 : 0,4 = 165 | b) 69 : 0,15 = 460

c) 40,8 : 0,85 = 48 | d) 14,40 : 0,16 = 90

e) 4,4 : 0,08 = 55 | f) 28,5 : 0,06 = 475

11 **Observa el ejemplo y calcula el tanto por ciento que corresponde en cada caso.**

- t**% de 180 = 63** $\rightarrow 180 \cdot \dfrac{t}{100} = 63$

$$\frac{t}{100} = 63 : 180 = 0,35 \rightarrow t\% = 35\,\%$$

a) t**% de 165 = 66** | **b)** t**% de 460 = 69**

c) t**% de 48 = 40,8** | **d)** t**% de 90 = 14,40**

a) $165 \cdot \dfrac{t}{100} = 66 \rightarrow t = 40\,\%$ | b) $460 \cdot \dfrac{t}{100} = 69 \rightarrow t = 15\,\%$

c) $48 \cdot \dfrac{t}{100} = 40,8 \rightarrow t = 85\,\%$ | d) $90 \cdot \dfrac{t}{100} = 14,40 \rightarrow t = 16\,\%$

12 **El gráfico representa la relación entre la población autóctona y la inmigrante en un pueblo agrícola del sur de España.**

a) ¿Qué fracción de la población es inmigrante?

b) ¿Cuántas de cada 1 000 personas son inmigrantes?

c) ¿Cuántas de cada 100 personas son inmigrantes?

d) ¿Cuál es el porcentaje de inmigrantes?

a) $\dfrac{1}{8}$ | b) $\dfrac{1}{8} = \dfrac{x}{1000} \rightarrow x = 125$

c) 12,5 | d) 12,5 %

Problemas con porcentajes

13 **Un empleado gana 1 700 euros al mes y gasta el 40 % en pagar la hipoteca de su vivienda. ¿Cuánto le queda para afrontar el resto de sus gastos?**

Queda el 60 % de 1 700 € = 1 700 · 0,6 = 1 020. Le quedan 1 020 €.

14 **Un colegio tiene una matrícula de 425 alumnos y alumnas. El 8 % se ha apuntado al taller de ajedrez. ¿Cuántos y cuántas hay en el taller de ajedrez?**

$$8\,\%\text{ de }425 = \frac{80 \cdot 425}{100} = 34$$

En el taller de ajedrez hay 34 alumnos y alumnas.

Página 108

15 **De una clase de 35 alumnos y alumnas, han ido de excursión 28. ¿Qué tanto por ciento de la clase ha faltado a la excursión?**

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{35 alumnos y alumnas} & \rightarrow & 35-28=7 \text{ han faltado} \\ \text{100 alumnos y alumnas} & \rightarrow & x \end{array}\right\} \; x=\frac{7\cdot 100}{35}=20$$

De cada 100 alumnos y alumnas, 20 han faltado. Ha faltado un 20 % de la clase.

16 **Un embalse tenía, a principios de verano, 775 decámetros cúbicos de agua. Durante el estío, sus reservas han disminuido en un 68 %. ¿Cuáles son las reservas actuales ahora, al final del verano?**

100 % – 68 % = 32 % de 775 dam^3 = 0,32 · 775 = 248 dam^3

Quedan 248 dam^3.

17 **Una familia con unos ingresos mensuales de 2 450 € ha gastado este mes 343 € en ocio. ¿Qué tanto por ciento de los ingresos ha dedicado al ocio?**

$$\frac{343}{1\,450}=0,14$$

Ha dedicado un 14 % de los ingresos al ocio.

18 **En el último partido de baloncesto de mi equipo, los cinco titulares que salieron de entrada consiguieron los siguientes resultados:**

	INTENTOS	CANASTAS
ROGER	14	7
LUISMA	3	3
GORKA	10	7
MILLER	18	15
O'BRIAN	11	10

Averigua los porcentajes de acierto de cada jugador.

Roger $\rightarrow \frac{7}{14}=\frac{1}{2}=0,5 \rightarrow 50\,\%$

Luisma $\rightarrow \frac{3}{3}=1 \rightarrow 100\,\%$

Gorka $\rightarrow \frac{7}{10}=0,7 \rightarrow 70\,\%$

Miller $\rightarrow \frac{15}{18}=\frac{5}{6}=0,8\widehat{3} \rightarrow 83,3\,\%$

O'Brian $\rightarrow \frac{10}{11}=0,\widehat{90} \rightarrow 91\,\%$

19 **Un hotel tiene 187 habitaciones ocupadas, lo que supone el 85 % del total. ¿De cuántas habitaciones dispone el hotel?**

85 % de x = 187 → 0,85 · x = 187 → x = 187 : 0,85 = 220 habitaciones

Dispone de 220 habitaciones.

20 **Un embalse está al final del verano al 23 % de su capacidad. Si en ese momento contiene 92 dam^3 de agua, ¿cuál es la capacidad total del embalse?**

23 % de $x = 35$ dam^3 → $0{,}23 \cdot x = 35$ → $x = 35 : 0{,}23 = 152{,}2$ dam^3

La capacidad del embalse es de 152,2 dam^3.

21 **Luisa tiene de tarea resolver 18 problemas de matemáticas de los que ya ha solucionado más del 65 %, pero menos del 70 %. ¿Cuántos problemas le quedan por resolver?**

$$\left.\begin{array}{l} 65\,\% \text{ de } 18 = 0{,}65 \cdot 18 = 11{,}7 \\ 70\,\% \text{ de } 18 = 0{,}7 \cdot 18 = 12{,}6 \end{array}\right\} \text{ Ha terminado 12 problemas } \rightarrow \text{ Le quedan } 18 - 12 = 6$$

Le quedan por resolver 6 problemas.

22 **Un depósito de agua está al 93 % de su capacidad. Si se añaden 1 400 litros, quedará completo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?**

100 % – 93 % = 7 % → 7 % de $x = 14\,000$ → $x = 14\,000 : 0{,}07 = 200\,000$ L

La capacidad es de 200 000 L.

23 **Olga ha comprado una blusa que costaba 45 € pero le han hecho una rebaja del 15 %. ¿Cuánto ha pagado?**

$$15\,\% \text{ de } 45\ € = \frac{15 \cdot 45}{100} = 6{,}75\ €$$

45 – 6,75 = 38,25 €

Ha pagado 38,25 €.

24 **Un jersey que costaba 45 € se vende en las rebajas por 36 €. ¿Qué tanto por ciento se ha rebajado?**

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{PR. INICIAL} & & \text{REBAJADO} \\ 45\ € & \longrightarrow & 36\ € \\ 100\ € & \longrightarrow & x \end{array}\right\} x = \frac{36 \cdot 100}{45} = 80\ €$$

De cada 100 € se pagan 80 €, es decir, se rebajan 20 €, un 20 %.

25 **Hace cinco años compré un piso por 240 000 €. En este tiempo, la vivienda ha subido un 37 %. ¿Cuánto vale ahora mi piso?**

137 % de 240 000 € = 1,37 · 240 000 = 328 800 €

El piso cuesta ahora 328 800 €.

26 **El billete de autobús ha subido un 8 % y ahora cuesta 2,70 €. ¿Cuánto costaba antes de la subida?**

$$\frac{270}{1{,}08} = 2{,}50$$

El billete costaba 2,50 € antes de la subida.

27 **Un hortelano tiene un campo de 3 500 m^2 y desea plantar un 45 % de ellos con tomates. ¿Cuántas plantas debe comprar si coloca 9 por metro cuadrado y siempre compra un 10 % más?**

- 45 % de 3 500 m^2 = 1 575 m^2 para tomates
- 9 · 1 575 = 14 175 plantas
- 10 % de 14 175 = 1 417,5 → 1 418 plantas extra

Total = 14 175 + 1 418 = 15 593 plantas

Debe comprar 15 593 plantas.

28 **Calcula el interés producido por un capital de 3 500 euros, colocado al 5 % anual durante 3 años.**

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{3\,500 \cdot 5 \cdot 3}{100} = 525 \text{ €}$$

29 **Si pido un préstamo de 4 500 euros, al 6,5 %, y lo devuelvo en 4 años, ¿qué intereses debo pagar?**

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{4\,500 \cdot 6{,}5 \cdot 4}{100} = 1\,170 \text{ €}$$

30 Problema resuelto.

31 **¿Qué interés producen 800 euros al 6 % durante un año? ¿Y durante un mes? ¿Y durante 7 meses?**

- 1 año: $I_{\text{AÑO}} = \frac{800 \cdot 6 \cdot 1}{100} = 48$ €
- 1 mes: $I_{\text{MES}} = I_{\text{AÑO}} : 12 = 48 : 12 = 4$ €
- 7 meses: $I_{7\text{ MESES}} = 4 \cdot 7 = 28$ €

32 **Calcula el interés que produce en 5 meses un capital de 9 000 € colocado al 4 % anual.**

Interés en un año → $I_{\text{AÑO}} = \frac{9\,000 \cdot 4 \cdot 1}{100} = 360$ €

Interés en un mes → $I_{\text{MES}} = 360 : 12 = 30$ €

Interés en 5 meses → $I_{5\text{ MESES}} = 30 \cdot 5 = 150$ €

33 **Calcula los intereses que genera un préstamo de 6 000 euros al 4,5 % durante 2 meses y 13 días.**

1 año → $I = \frac{6\,000 \cdot 4{,}5 \cdot 1}{100} = 270$ €

1 mes → 270 : 12 = 22,50 €

1 día → 22,5 : 30 = 0,75 €

El interés generado en dos meses y trece días es de 2 · 22,50 + 13 · 0,75 = 54,75 €.

34 **Tres compañeros de oficina gastan 20 € en una quiniela. Adrián pone 9 €, Patricia, 6 €, y Esteban, el resto. La quiniela resulta premiada con 740 €. ¿Cómo repartirán el premio?**

Adrián pone $\frac{9}{20} = 0{,}45 = 45\,\% \rightarrow 45\,\%$ de 740 € $= \frac{45 \cdot 740}{100} = 333$ €

Patricia pone $\frac{6}{20} = 0{,}3 = 30\,\% \rightarrow 30\,\%$ de 740 € $= \frac{30 \cdot 740}{100} = 222$ €

Esteban el resto: 740 – 333 – 222 = 185 €

Adrián gana 333 €, Patricia, 222 € y Esteban, 185 €.

35 **Un mayorista ha pagado 1 275 € a tres hortelanos a los que ha comprado, respectivamente, 400 kg, 300 kg y 800 kg de nectarinas. ¿Cuánto ha cobrado cada hortelano?**

400 + 300 + 800 = 1 500 kg en total

$$\frac{400}{1\,500} \cdot 100 = 26{,}7\,\% \rightarrow 26{,}7\,\% \text{ de } 1\,275\text{ €} = 340\text{ €}$$

$$\frac{300}{1\,500} \cdot 100 = 20\,\% \rightarrow 20\,\% \text{ de } 1\,275\text{ €} = 255\text{ €}$$

$$\frac{800}{1\,500} \cdot 100 = 53{,}3\,\% \rightarrow 53{,}4\,\% \text{ de } 1\,275\text{ €} = 680\text{ €}$$

Los hortelanos han cobrado 340 €, 255 € y 680 €, respectivamente.

36 **Un comerciante mezcla 80 kg de café de 10,50 €/kg con 60 kg de otro café de calidad superior, que cuesta a 14 €/kg. ¿A cuánto sale el kilo de mezcla?**

En total tendrá 80 kg + 60 kg = 140 kg

80 kg · 10,50 €/kg + 60 kg · 14 €/kg = 840 € + 840 € = 1 680 €

En total tiene 140 kg por 1 680 € → $\frac{1\,680}{140} = 12$ €/kg

El kilo de mezcla sale a 12 €.

37 **Un coche, que avanza por una carretera a 85 km/h, se cruza con una furgoneta que circula en sentido contrario a 65 km/h. ¿Qué distancia los separará pasados 4 minutos?**

Veamos cuánto avanza cada uno en un minuto:

El coche avanza a 85 km/h = $\frac{85}{60}$ km/min = $1{,}41\overset{\frown}{6}$ km/min

La furgoneta avanza a 65 km/h = $\frac{65}{60}$ km/min = $1{,}08\overset{\frown}{3}$ km/min

Veamos cuanto avanza cada uno en 4 minutos:

El coche avanza $4 \cdot 1{,}41\overset{\frown}{6} = 5{,}7$ km

La furgoneta avanza $4 \cdot 1{,}08\overset{\frown}{3} = 4{,}3$ km

5,7 + 4,3 = 10 km

Los separará una distancia de 10 km.

Página 109

38 **Un tren sale de A hacia B a 70 km/h. Simultáneamente, por una vía paralela, sale de B hacia A otro tren a 80 km/h. Si la distancia de A a B es de 230 km, ¿cuánto tardarán en cruzarse?**

Velocidad de acercamiento → 70 + 80 = 150 km/h

$$t = \frac{e}{v} \rightarrow t = \frac{230}{150} = 1{,}5\overset{\frown}{3}\text{ h} = 1\text{ h } 32\text{ min}$$

Tardarán 1 hora y 32 minutos en cruzarse.

39 **Un ciclista sale de cierta población a una velocidad de 15 km/h. Veinte minutos después sale en su persecución una moto a 45 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo?**

Velocidad de acercamiento → 45 – 15 = 30 km/h

Ventaja del ciclista en 20 min = $\frac{1}{3}$ de hora → $e = v \cdot t \rightarrow e = 15 \cdot \frac{1}{3} = 5$ km

En recorrer 5 km a 30 km/h se tarda $\frac{5}{30} = 0{,}17$ h = 10 min.

La moto tardará 10 minutos en alcanzar al ciclista.

40 **Una fuente tiene dos caños, A y B. El primero llena cierto cántaro en 6 minutos y el segundo hace lo mismo en 10 minutos. ¿Cuánto tardará en llenarse el cántaro si se conectan ambos caños simultáneamente?**

El primer caño llena $\frac{1}{6}$ del cántaro por minuto, y el segundo $\frac{1}{10}$ del cántaro por minuto.

Juntos, en un minuto, llenarán $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ del cántaro.

Para llenar $\frac{15}{15}$ del cántaro tardarán $\frac{15}{4} = 3{,}75$ min = 3 min 45 s.

Tardará en llenarse 3 minutos y 45 segundos.

41 **Un grifo llena un depósito en 3 horas y un desagüe lo vacía en 4 h. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si se abre el grifo y, por descuido, no se cierra el desagüe?**

El grifo en una hora llena $\frac{1}{3}$ del depósito, y el desagüe vacía $\frac{1}{4}$ del depósito en el mismo tiempo, así en una hora se llena $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ del depósito.

Para llenar el depósito entero $\frac{12}{12}$ se tardará $\frac{12}{7}$ horas = 1,71 h = 1 h 42,6 min = 1 h 42 min 36 s.

Tardará una hora, 42 minutos y 36 segundos.

42 **Un camión hace el trayecto de A hacia B en 5 horas. Un coche cubre el trayecto inverso, de B hacia A en 3 horas. Si salen simultáneamente, ¿cuánto tardarán en cruzarse?**

El camión hace $\frac{1}{5}$ del trayecto en una hora.

El coche hace $\frac{1}{3}$ del trayecto en una hora.

Por tanto, cubren $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ del trayecto en una hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ horas en cruzarse.

$\frac{15}{8} = 1{,}875 = 1$ h 52 min 30 s

Tardarán una hora, 52 minutos y 30 segundos en cruzarse.

Interpreta, describe, exprésate

43 **Eva, Juan y Sara han resuelto este problema de diferentes formas. Explica lo que ha hecho cada uno.**

Una oficina tiene 45 empleados y en agosto se va de vacaciones el 80 %. ¿Cuántos empleados trabajan en agosto?

Resolución de Eva

$100\,\% - 80\,\% = 20\,\% \rightarrow 20\,\%$ de $45 = 45 \cdot \dfrac{20}{100} = 9$

***Solución:* En agosto trabajan 9 empleados.**

Resolución de Juan

$80\,\%$ de $45 = \dfrac{45 \cdot 80}{100} = 36 \rightarrow 45 - 36 = 9$

***Solución:* En agosto trabajan 9 empleados.**

Resolución de Sara

TOTAL	→	DE VACACIONES	+	TRABAJANDO
100	→	80	+	20
10	→	8	+	2
5	→	4	+	1
40	→	32	+	8
45	→	36	+	9

***Solución:* En agosto trabajan 9 empleados.**

Resolución de Eva

Calcula primero el porcentaje de empleados que trabajan (100 % – 80 % = 20 %) y, después, el número de empleados que trabajan (20 % de 45 = 9).

Resolución de Juan

Calcula el número de empleados que se va de vacaciones (80 % de 45 = 36) y se lo resta al total para obtener el número de los que trabajan (45 – 36 = 9).

Reolución de Sara

Sigue un proceso de elaboración personal:

— De cada 100, hay 80 de vacaciones y 20 trabajando.

— De cada 10, hay la décima parte de las cantidades anteriores; es decir, 8 de vacaciones y 2 trabajando.

— De cada cinco (la mitad), hay 4 en vacaciones y uno en el trabajo.

— De cada 40 (el cuádruplo de 10), están $8 \cdot 4 = 32$ de vacaciones y $2 \cdot 4 = 8$ en el trabajo.

— De cada 45 (40 + 5) hay $32 + 4 = 36$ de vacaciones y $8 + 1 = 9$ en el trabajo.

44 **Bea y Alberto han resuelto el siguiente problema, pero una de las dos soluciones es errónea. Di cuál y explica por qué.**

Unas zapatillas deportivas, rebajadas un 20 %, cuestan ahora 80 €. ¿Cuánto costaban sin la rebaja?

Resolución de Bea

Rebaja → 20 % de 80 = $80 \cdot 0{,}20 = 16$

Precio sin rebaja → 80 + 16 = 96 €

***Solución:* Las deportivas, sin rebaja, costaban 96 €.**

Resolución de Alberto

100 % – 20 % = 80 %

0,80 % de $x = 80 \rightarrow x = 80 : 0{,}80 = 100$

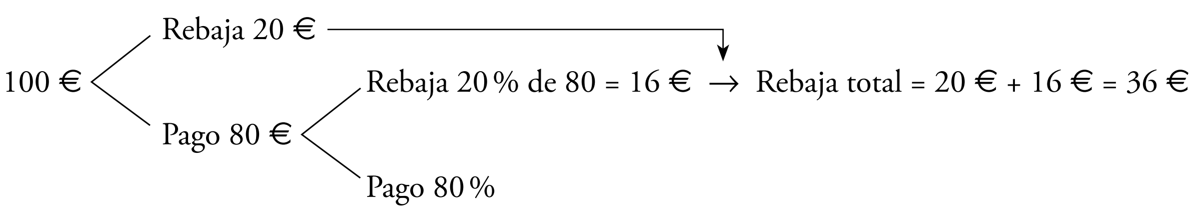
***Solución:* Las deportivas, sin rebaja, costaban 100 €.**

La resolución errónea es la de Bea, ya que ha aplicado el 20 % de descuento al precio que ha pagado, en lugar de encontrar el precio inicial al que aplicarle el 20 % de descuento.

Problemas «+»

45 **En unos grandes almacenes, rebajan un abrigo un 20 % en las primeras rebajas y, sobre ese precio, vuelven a hacer otro 20 % de descuento en las segundas rebajas. ¿Qué porcentaje del precio original se ha rebajado el abrigo?**

Supón que el abrigo costaba inicialmente 100 euros.



Se ha rebajado un 36 % sobre el precio original.

46 **Un pantano perdió durante el mes de agosto el 20 % del agua que tenía embalsada y en septiembre recuperó el nivel anterior. ¿En qué porcentaje aumentó durante septiembre?**

	AGOSTO	SEPTIEMBRE
SI FUESEN 100 LITROS	80 litros	100 litros
	100 litros	x

$$x = \frac{100 \cdot 100}{80} = 125$$

Durante septiembre el nivel aumentó un 25 %.

47 **Un tren de carga sale de A hacia B a las ocho de la mañana a 90 km/h. A las ocho y veinte sale de B hacia A, por una vía paralela, un tren rápido a 150 km/h. Sabiendo que la distancia entre A y B es de 102 km, ¿a qué distancia de A se cruzan y a qué hora ocurre?**

El tren de carga en 20 minutos (1/3 de hora) recorre 90 km/h · 1/3 h = 30 km.

Así, cuando sale el tren rápido, la distancia que les separa es de 102 – 30 = 72 km.

Velocidad conjunta → 90 + 150 = 240 km/h

$$t = \frac{e}{v} = \frac{72 \text{ km}}{240 \text{ km/h}} = 0{,}3 \text{ h} = 20 \text{ min}$$

Se encontrarán al cabo de 20 minutos de haber salido el tren rápido, es decir, a las ocho y cuarenta de la mañana.

Cuando se encuentren, el tren de carga habrá avanzado 30 km en solitario y 30 km cuando avanzan los dos, y se cruzarán a 60 km de A.

48 **Un comerciante pacta con su banco un préstamo de 18 000 €, a recibir el uno de junio y devolver el veinte de septiembre, a un interés anual del 7,3 %. ¿Cuánto le costará el préstamo si todo se desarrolla según las condiciones pactadas?**

El préstamo de 18 000 € al 7,3 % durante un año tendría unos intereses:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{18\,000 \cdot 7{,}3 \cdot 1}{100} = 1\,314\ €$$

Los intereses de un día serían los de un año divididos por 365:

$$1\,314 : 365 = 3{,}60\ €$$

El préstamo dura:

$$30 \text{ (junio)} + 31 \text{ (julio)} + 31 \text{ (agosto)} + 20 \text{ (septiembre)} = 112 \text{ días}$$

En esos 112 días los intereses serán:

$$3{,}6 \cdot 112 = 403{,}20\ €$$

El préstamo, en las condiciones pactadas, le costará 403,20 €.

49 **Alejandra ingresa en su banco un capital de 400 € en una cuenta retribuida con un interés del 5 % anual. Los beneficios se ingresan en la cuenta al final de cada año. ¿Cuál será el saldo al final del tercer año?**

1.^{er} año → $I = \frac{400 \cdot 5 \cdot 1}{100} = 20$ € → Al final del primer año tendrá 420 €.

2.^{o} año → $I = \frac{420 \cdot 5 \cdot 1}{100} = 21$ € → Al final del segundo año tendrá 441 €.

3.^{er} año → $I = \frac{441 \cdot 5 \cdot 1}{100} = 22{,}05$ € → Al final del tercer año tendrá 463,05 €.

Página 110

INVESTIGA

¡Tres por dos!

Habrás visto ofertas como esta en supermercados. ¿Podrías decir qué porcentaje de rebaja implica?

Observa estas dos opiniones y piensa cuál es la correcta.

Pablo

Si pago dos y me regalan uno, es como si me regalaran medio artículo por cada uno que pago. → La rebaja es del 50 %.

Laura

Supón que compras un artículo que cuesta 1 €.

Dos unidades cuestan 2 € y tres unidades, 3 €.

Por tanto, si pagas dos y te llevas tres, ¿cuánto pagas si te llevas 100?

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{100} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 100}{3} = 66{,}666\ldots$$

Pagas el 66,66 %. → La rebaja es del 33,33 %.

La respuesta correcta es la de Laura.

Supongamos que el objeto que se compra vale 100.

Si te llevas 3 objetos, pagas 200 → Cada objeto cuesta 200 : 3 = 66,67

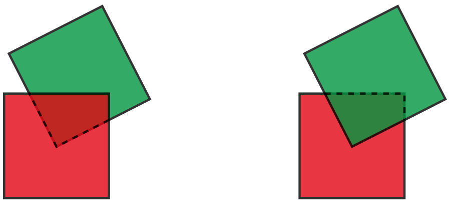
Puesto que lo que valía 100 cuesta 6,67, la rebaja es 33,33.

Es decir, la oferta supone una rebaja del 33,33 %.

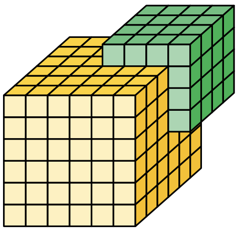
ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Imagina el espacio

- **¿Qué tanto por ciento del cuadrado verde está tapado por el rojo? ¿Qué tanto por ciento del rojo está tapado por el verde?**



- **¿Qué tanto por ciento del cubo amarillo coincide con el verde? ¿Qué tanto por ciento del cubo verde coincide con el amarillo?**



- Ambos cuadrados son iguales.

  Dos rectas perpendiculares, por el centro de un cuadrado, lo dividen en cuatro partes iguales.

  Cada cuadrado tapa la cuarta parte, es decir, el 25 % del otro.

- Ambos cubos tienen en común un cubo de $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubitos.

  El volumen de cubo amarillo es $6 \times 6 \times 6 = 216$ u^3, y el del verde, $4 \times 4 \times 4 = 64$ u^3.

  Parte del cubo amarillo que coincide con el verde $\rightarrow \dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125 \rightarrow 12{,}5\,\%$

  Parte del cubo verde que coincide con el amarillo $\rightarrow \dfrac{27}{64} = 0{,}422 \rightarrow 42{,}2\,\%$

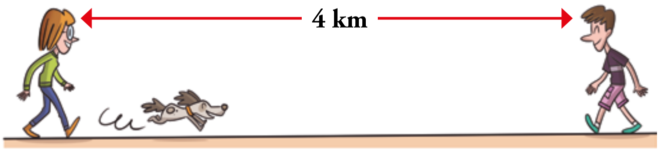
Utiliza la lógica

- **Tres hermanos, Ana, Bego y Ciro, van a la misma clase y comparten las tareas escolares. También comparten las tareas domésticas. Ayer debían hacer 12 problemas de matemáticas. Ana hizo 4 y Bego 8.**

  Ciro los copió, pero en compensación se comprometió a hacer 6 veces la cama para sus hermanas.

  ¿Cuántas veces debe hacerle la cama a Ana y cuántas a Bego?

- **Rosa y Pablo caminan a 4 km/h. El perro escapa y corre a 10 km/h hasta encontrar a Pablo. Entonces vuelve hacia ella y repite la operación hasta que los tres se encuentran juntos. ¿Qué distancia habrá recorrido el perro en total?**



- Eran 12 problemas y cada uno debía hacer 4.

  Ana hizo los 4 suyos y Bego hizo los 4 suyos y los 4 de Ciro.

  Por tanto, Ciro debe hacerle la cama a Bego 6 veces.

- Caminando a 4 km/h, Rosa y Pablo tardan media hora en recorrer los 4 km que los separan.

  El perro, a 10 km/h, recorre en 5 km en esa media hora.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Calcula mentalmente.**

a) 50 % de 220	**b) 25 % de 60**
c) 75 % de 40	**d) 10 % de 370**
e) 20 % de 500	**f) 5 % de 40**
a) 110	b) 15
c) 30	d) 37
e) 100	f) 2

2 **Completa la tabla en tu cuaderno.**

PORCENTAJE	**25 %**				**140 %**
FRACCIÓN			**3/20**		
N.º DECIMAL		**0,80**		**0,07**	

PORCENTAJE	25 %	80 %	15 %	7 %	140 %
FRACCIÓN	1/25	4/5	3/20	7/100	7/5
N.º DECIMAL	0,25	0,80	0,15	0,07	1,40

3 **Calcula.**

a) 65 % de 80	**b) 4 % de 3 200**
c) 16 % de 160	**d) 150 % de 38**

a) 65 % de 80 $= \dfrac{65 \cdot 80}{100} = 52$

b) 4 % de 3 200 $= \dfrac{4 \cdot 3\,200}{100} = 128$

c) 16 % de 160 $= \dfrac{16 \cdot 160}{100} = 25{,}6$

d) 150 % de 38 $= \dfrac{150 \cdot 38}{100} = 57$

4 **De un pilón de agua que contenía 36 000 litros, se ha gastado un 15 %. ¿Cuántos litros quedan?**

Queda un 85 % de lo que contenía, 36 000 · 0,85 = 30 600 litros.

5 **En una clase de 30 alumnos y alumnas, hoy han faltado 6. ¿Qué porcentaje ha faltado?**

Ha faltado $\dfrac{6}{30} = 0{,}2 \rightarrow$ 20 % de alumnos y alumnas.

6 **¿Cuánto pagaremos por una camisa que costaba 40 € si se ha rebajado un 15 %?**

85% de 40 $= \dfrac{85 \cdot 40}{100} = 34$

Pagaremos 34 €.

7 **Un hospital tiene 210 camas ocupadas, lo que supone el 84 % de las camas disponibles. ¿De cuántas camas dispone el hospital?**

84 % de $x = 210 \rightarrow 0{,}84 \cdot x = 210 \rightarrow x = 210 : 0{,}84 = 250$ camas

8 **La hogaza de pan ha subido hoy un 4 % y ahora cuesta 2,60 €. ¿Cuánto costaba ayer?**

96 % de 2,60 = $\dfrac{96 \cdot 260}{100} = 2,49$

Ayer costaba 2,49 €.

9 **Calcula el interés producido por un capital de 5 500 €, colocado al 3,6 % durante 4 años.**

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{5500 \cdot 3,6 \cdot 4}{100} = 792 \text{ €}$$

10 **¿Cuántos litros de aceite de oliva a 3,20 €/L hay que mezclar con 150 litros de aceite de girasol, a 1,60 €/L, para que la mezcla salga a 2,60 €/L?**

Aceite de oliva: 3,20 €/L · x litros = 3,2x €

Aceite de girasol: 1,60 €/L · 150 litros = 240 €

Mezcla: 2,60 €/L · (150 + x) litros = (240 + 3,2x) €

$$2,60 \cdot 150 + 2,60x = 240 + 3,2x \rightarrow 390 - 240 = 3,2x - 2,60x \rightarrow 0,6x = 150 \rightarrow x = \frac{150}{0,6} = 250$$

Hay que mezclar 250 litros de aceite de oliva.

11 **Una furgoneta sale de cierta población a 60 km/h. Diez minutos después sale en su persecución una moto a 90 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?**

En diez minutos la furgoneta avanza:

$$60 \text{ km/h} = \frac{60}{60} \text{ km/min} = 1 \text{ km/min} \rightarrow \text{En diez minutos avanza 10 km.}$$

Velocidad de acercamiento → 90 – 60 = 30 km/h

En recorrer 10 km a 30 km/h se tarda:

$$\frac{10}{30} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ min}$$

Tardará 20 minutos en darle alcance.

12 **Un grifo llena un depósito en 5 horas. Otro grifo llena el mismo depósito en 3 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse si se abren ambos simultáneamente?**

El primer grifo en una hora llena $\dfrac{1}{5}$ del depósito.

El segundo grifo en una hora llena $\dfrac{1}{3}$ del depósito.

Los dos juntos en una hora llenan $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{15}$ del depósito.

Y tardarán $\dfrac{15}{8}$ h en llenarlo: $\dfrac{15}{8} = 1,875$ h = 1 h 52 min 30 s

Tardará en llenarse una hora, 52 minutos y 30 segundos.

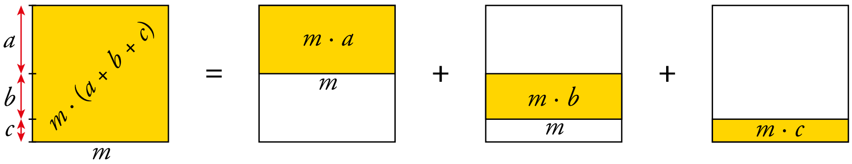
6 ÁLGEBRA

Página 111

Álgebra y geometría

1 **¿Qué propiedad, relacionada con la suma y la multiplicación, se justifica en el siguiente gráfico?**

$$m \cdot (a + b + c) = m \cdot a + m \cdot b + m \cdot c$$



La propiedad distributiva.

El lenguaje algebraico

2 **Para el problema egipcio de la página anterior:**

- **N.º de sacos** $\rightarrow x$
- **Vendidos** $\rightarrow \frac{2}{3}$ **de** $x \rightarrow \frac{2x}{3}$
- **No vendidos** $\rightarrow \frac{x}{3}$
- **Consumidos** $\rightarrow \frac{1}{2}$ **de** $\frac{x}{3} \rightarrow \frac{x}{6}$
- **Quedan** $\rightarrow \frac{x}{6} = 5$

¿Cuál es el valor de x**?**

$x = 30$

3 **Si yo construyera un castillo de naipes de, por ejemplo 15 pisos, ¿tú me dirías el número de huecos (triángulos) formados? ¿Y me dirías también el número de naipes empleados?**

NOTA: Encontrarás las respuestas en algunas de las expresiones que ves a la derecha.

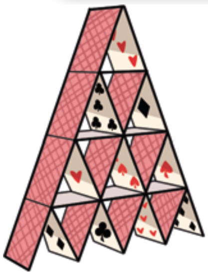
N.º DE PISOS	1	2	3	4	…	n
N.º DE TRIÁNGULOS	1	4			…	?
N.º DE CARTAS	2	7			…	?

n^2

$n^2 - 2$

$\frac{n^2 + n}{2}$

$\frac{3n^2 + n}{2}$



N.º DE PISOS	1	2	3	4	…	n
N.º DE TRIÁNGULOS	1	4	9	16	…	n^2
N.º DE CARTAS	2	7	15	26	…	$\frac{3n^2 + n}{2}$

Un castillo de 15 pisos ($n = 15$) tendría 225 triángulos y se emplearían 345 cartas.

1 ▶ EL ÁLGEBRA: ¿PARA QUÉ SIRVE?

Página 115

Para practicar

1 **¿Cuál de estas identidades de la derecha corresponde al enunciado de la izquierda?**

Propiedad asociativa de la multiplicación:

Al multiplicar tres o más números, si se agrupan de diferentes formas, el resultado no varía.

$$\boxed{a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b}$$

$$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

$$\boxed{a \cdot (c + 1) = a \cdot c + a}$$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2 **Copia y completa las casillas vacías.**

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	n
▨	▨	▨	**10**	▨	**…**	$3n - 2$

1	2	3	4	5	…	n
1	4	7	10	13	…	$3n - 2$

3 **Escribe los cinco primeros elementos de la serie cuyo término general es** $a_n = \frac{3n+1}{2}$**.**

n	1	2	3	4	5
$\frac{3n+1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$	5	$\frac{13}{2}$	8

4 **Escribe el término general de estas series:**

a) 1 - 4 - 9 - 16 - 25 - … → $a_n = ?$

b) 0 - 3 - 8 - 15 - 24 - … → $b_n = ?$

a) $a_n = n^2$ b) $b_n = n^2 - 1$

5 **El sueldo mensual bruto, el IRPF y el sueldo neto de los empleados de una empresa se calculan con las siguientes fórmulas:**

$$\boxed{S_b = 900 + 3a + 10b}$$

$$\boxed{\text{IRPF} = 0{,}21 \cdot S_b}$$

$$\boxed{S_n = 0{,}79 \cdot S_b}$$

a = **Antigüedad (años)**

b = **Horas extras**

a) ¿Cuánto cobrará este mes un empleado con 8 años de antigüedad y 21 horas extras acumuladas?

b) ¿Cuánto le retendrán por el IRPF?

$S_B = 900 + 3 \cdot 8 + 10 \cdot 21 = 1\,134$ €

IRPF $= 0{,}21 \cdot 1\,134 = 238{,}14$ €

$S_N = 0{,}79 \cdot 1\,134 = 895{,}86$ €

a) El empleado cobrará 895,86 €.

b) Le retendrán 238,14 €.

6 **La suma de los n primeros números naturales es:**

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Calcula la suma 1 + 2 + 3 + … + 50.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = \frac{50^2 + 50}{2} = 1\,275$$

7 **Un comerciante adquiere, para su posterior venta, una partida de 100 camisetas. Y para planificar sus cuentas, maneja las siguientes variables:**

C → Coste total de la compra

v → Precio de venta (por unidad)

G → Gastos

B → Beneficios

Escribe una igualdad que relacione estas cuatro variables.

$B - G = 100 \cdot v - C$

8 **Traduce en tu cuaderno a lenguaje algebraico las edades de los miembros de esta familia:**

	EDAD
Javi **Tiene x años.**	x
Pepa (hermana) **Es un año menor que Javi.**	$x - 1$
Carol (madre) **Tuvo a Javi a los 22 años.**	$x + 22$
Álex (padre) **Triplica la edad de Pepa.**	$3(x - 1)$

9 **Teniendo en cuenta a la familia del ejercicio anterior, escribe una igualdad en la que se refleje este nuevo dato: *El padre de Javi tiene 3 años menos que la madre.***

Calcula por tanteo la edad de Javi.

$3(x - 1) + 3 = x + 22$

La edad de Javi es 11 años.

2 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Página 117

Para fijar ideas

1 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $\mathbf{2x + 3x = 5x}$
$\mathbf{3x + x = \ldots}$
$\mathbf{5x + 4x = \ldots}$
$\mathbf{3x + 4x + x = \ldots}$

b) $\mathbf{5x - 2x = 3x}$
$\mathbf{3x - x = \ldots}$
$\mathbf{7x - 3x = \ldots}$
$\mathbf{2x - 3x = \ldots}$

c) $\mathbf{3x^2 + 4x^2 = 7x^2}$
$\mathbf{6x^2 + x^2 = \ldots}$
$\mathbf{2x^2 + 6x^2 = \ldots}$
$\mathbf{5x^2 + x^2 + 2x^2 = \ldots}$

d) $\mathbf{7x^2 - 4x^2 = 3x^2}$
$\mathbf{5x^2 - 2x^2 = \ldots}$
$\mathbf{5x^2 - 4x^2 = \ldots}$
$\mathbf{3x^2 - 7x^2 = \ldots}$

a) $2x + 3x = 5x$
$3x + x = 4x$
$5x + 4x = 9x$
$3x + 4x + x = 8x$

b) $5x - 2x = 3x$
$3x - x = 2x$
$7x - 3x = 4x$
$2x - 3x = -x$

c) $3x^2 + 4x^2 = 7x^2$
$6x^2 + x^2 = 7x^2$
$2x^2 + 6x^2 = 8x^2$
$5x^2 + x^2 + 2x^2 = 8x^2$

d) $7x^2 - 4x^2 = 3x^2$
$5x^2 - 2x^2 = 3x^2$
$5x^2 - 4x^2 = x^2$
$3x^2 - 7x^2 = -4x^2$

2 Copia en tu cuaderno y reduce.

a) $\mathbf{4x + x - 6 + 2 = 5x - 4}$
$\mathbf{x + x - 3 + 5 = 2x + \ldots}$
$\mathbf{3x - 2x + 2 + 2 = \ldots + 4}$
$\mathbf{8x - 5x - 3 - 2 = \ldots}$

b) $\mathbf{4x^2 - 2x^2 + 7 + 1 = 2x^2 + 8}$
$\mathbf{6x^2 - 5x^2 + 3 + 4 = x^2 + \ldots}$
$\mathbf{5x^2 - 3x^2 - 2 - 2 = \ldots - 4}$
$\mathbf{6x^2 + 2x^2 + 3 - 6 = \ldots}$

c) $\mathbf{x^2 + 2x^2 + 7x - 2x + 1 = 3x^2 + 5x + 1}$
$\mathbf{x^2 + 3x^2 + x - 5x + 6 = 4x^2 - \ldots + 6}$
$\mathbf{9x^2 - 2x + 3x - 3 + 1 = \ldots + x - \ldots}$
$\mathbf{7x^2 + 3x^2 + 7x - 2 - 4 = \ldots + \ldots - \ldots}$

a) $4x + x - 6 + 2 = 5x - 4$
$x + x - 3 + 5 = 2x + 2$
$3x - 2x + 2 + 2 = x + 4$
$8x - 5x - 3 - 2 = 3x - 5$

b) $4x^2 - 2x^2 + 7 + 1 = 2x^2 + 8$
$6x^2 - 5x^2 + 3 + 4 = x^2 + 7$
$5x^2 - 3x^2 - 2 - 2 = 2x^2 - 4$
$6x^2 + 2x^2 + 3 - 6 = 8x^2 - 3$

c) $x^2 + 2x^2 + 7x - 2x + 1 = 3x^2 + 5x + 1$
$x^2 + 3x^2 + x - 5x + 6 = 4x^2 - 4x + 6$
$9x^2 - 2x + 3x - 3 + 1 = 9x^2 + x - 2$
$7x^2 + 3x^2 + 7x - 2 - 4 = 10x^2 + 7x - 6$

Para practicar

1 Copia en tu cuaderno y completa.

MONOMIO	$\mathbf{8a}$	$\mathbf{-3x}$	$\mathbf{a^2b}$	$\mathbf{\frac{2}{3}xy^4}$	
COEFICIENTE			**1**		$\mathbf{\frac{1}{4}}$
PARTE LITERAL					$\mathbf{ab}$
GRADO					

MONOMIO	$8a$	$-3x$	a^2b	$\frac{2}{3}xy^4$	$\frac{1}{4}ab$
COEFICIENTE	8	–3	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
PARTE LITERAL	a	x	a^2b	xy^4	ab
GRADO	1	1	3	5	2

2 **Suma los siguientes monomios:**

a) $a + a$ **b)** $m + m + m$ **c)** $x + x + x$

d) $n + n + n + n$ **e)** $x^2 + x^2$ **f)** $a^3 + a^3 + a^3 + a^3$

a) $2a$ b) $3m$ c) $3x$

d) $4n$ e) $2x^2$ f) $4a^3$

3 **Suma las siguientes expresiones:**

a) $4a + 2a$ **b)** $4m + 4m$ **c)** $3x^2 + 6x^2$

d) $5a^2 + a^2 + 2a^2$ **e)** $m^3 + 2m^3 + 4m^3$ **f)** $3x^4 + 6x^4 + 2x^4$

e) $6a$ f) $8m$ g) $9x^2$

h) $8a^2$ i) $7m^3$ j) $11x^4$

4 Ejercicio resuelto.

5 **Reduce sumando.**

a) $x + \frac{1}{2}x$ **b)** $\frac{3m}{7} + \frac{2m}{7}$ **c)** $\frac{n^2}{4} + \frac{2n^2}{3}$

a) $\frac{3}{2}x$ b) $\frac{5}{7}m$ c) $\frac{11n^2}{12}$

6 **Resta estos monomios:**

a) $8x - 3x$ **b)** $8a - 7a$ **c)** $11x^2 - 6x^2$

d) $5a^2 - 9a^2$ **e)** $m^3 - 5m^3$ **f)** $4n^4 - n^4$

g) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}x$ **h)** $\frac{3a^2}{4} - \frac{1}{2}a^2$ **i)** $\frac{a^3}{2} - \frac{2a^3}{5}$

a) $5x$ b) a c) $5x^2$

d) $-4a^2$ e) $-4m^3$ f) $3n^4$

g) $\frac{4}{6}x = \frac{2}{3}x$ h) $\frac{1}{4}a^2$ i) $\frac{a^3}{10}$

7 **Ordena como en el ejemplo y reduce.**

- **$3x + 6 + x + 2 = 3x + x + 6 + 2 = 4x + 8$**

a) $3a + 3 - 2a + 1$ **b)** $5x + 2 - 3x + x$

c) $7 - 4a - 7 + 5a$ **d)** $4x - 3 - 4x + 2$

e) $x^2 + 4 + x^2 + 1$ **f)** $5x^2 - 3 - 4x^2 + 1$

g) $x^2 + 4x + 1 + 2x + 3$ **h)** $5x^2 + 3x - 4x^2 - 2x + 1$

i) $3x^2 + \frac{4}{5} - x^2 + 2x - \frac{1}{5}$ **j)** $10 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - 7 - x$

a) $3a + 3 - 2a + 1 = 3a - 2a + 3 + 1 = a + 4$

b) $5x + 2 - 3x + x = 5x - 3x + x + 2 = 3x + 2$

c) $7 - 4a - 7 + 5a = -4a + 5a + 7 - 7 = a$

d) $4x - 3 - 4x + 2 = 4x - 4x - 3 + 2 = -1$

e) $x^2 + 4 + x^2 + 1 = x^2 + x^2 + 4 + 1 = 2x^2 + 5$

f) $5x^2 - 3 - 4x^2 + 1 = 5x^2 - 4x^2 - 3 + 1 = x^2 - 2$

g) $x^2 + 4x + 1 + 2x + 3 = x^2 + 4x + 2x + 1 + 3 = x^2 + 6x + 4$

h) $5x^2 + 3x - 4x^2 - 2x + 1 = 5x^2 - 4x^2 + 3x - 2x + 1 = x^2 + x + 1$

i) $3x^2 + \frac{4}{5} - x^2 + 2x - \frac{1}{5} = 3x^2 - x^2 + 2x + \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = 2x^2 + 2x + \frac{3}{5}$

j) $10 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - 7 - x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - x + 10 - 7 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$

8 Ejercicio resuelto.

9 **Quita paréntesis y reduce.**

a) $3x + (2x - 1)$

b) $7x - (5x - 4)$

c) $6x - (4x + 2)$

d) $3x - (x + 5)$

e) $(x - 5) + (x - 3)$

f) $(4x + 2) - (3x + 2)$

g) $(3x^2 - 5x + 2) + (x^2 - 2x + 1)$

h) $(5x^2 - 2x - 3) - (4x^2 + 3x - 1)$

i) $(x - 3) + (x^2 + 2x + 1)$

j) $(6x^2 - x) - (3x^2 - 5x + 6)$

a) $5x - 1$

b) $2x + 4$

c) $2x - 2$

d) $2x - 5$

e) $2x - 8$

f) x

g) $4x^2 - 7x + 3$

b) $x^2 - 5x - 2$

i) $x^2 + 3x - 2$

j) $3x^2 + 4x - 6$

10 **Calcula.**

a) El valor numérico de $5x^2$ para $x = 1$.

b) El valor numérico de $-4x^2$ para $x = -3$.

c) El valor numérico de $-2xy$ para $x = 3$ e $y = -5$.

a) $5x^2$ para $x = 1 \rightarrow 5 \cdot 1^2 = 5$

b) $-4x^2$ para $x = -3 \rightarrow -4 \cdot (-3)^2 = -4 \cdot 9 = -36$

c) $-2xy$ para $x = 3,\ y = -5 \rightarrow -2 \cdot 3 \cdot (-5) = 30$

Página 118

Para fijar ideas

3 **Copia en tu cuaderno y completa.**

a) $(ab) \cdot (ab^2) = a^{\square}\square^3$

b) $(-2ab) \cdot (ab^2) = -\square\, a^{\square}\, b^{\square}$

c) $(-2ab) \cdot \left(\frac{3}{4}ab^2\right) = -\frac{\square}{2}\, a^{\square}\, b^{\square}$

d) $x : x^2 = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{\square}$

e) $2x : 6x^2 = \frac{2x}{6x^2} = \frac{\square}{3x}$

f) $2xy^2 : 6x^2y = \frac{2xy^2}{6x^2y} = \frac{y}{3\square}$

a) a^2b^3

b) $-2a^2b^3$

c) $-\frac{3}{2}a^2b^3$

d) $\frac{1}{x}$

e) $\frac{1}{3x}$

f) $\frac{y}{3x}$

Para practicar

11 **Haz las multiplicaciones siguientes:**

a) $(3x) \cdot (5x)$ **b)** $(-a) \cdot (4a)$

c) $(4a) \cdot (-5a^2)$ **d)** $\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot (6x)$

e) $\left(\frac{x^2}{3}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)$ **f)** $(5a) \cdot \left(-\frac{1}{5}a^2\right)$

a) $15x^2$ b) $-4a^2$

c) $-20a^3$ d) $3x^3$

e) $\frac{1}{6}x^4$ f) $-a^3$

12 **Multiplica estos monomios:**

a) $(3x) \cdot (5xy)$ **b)** $(-2ab) \cdot (4b)$

c) $(4x^3y) \cdot (xy)$ **d)** $\left(-\frac{2}{3}ab\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}ab\right)$

a) $15x^2y$ b) $-8ab^2$

c) $4x^4y^2$ d) a^2b^2

13 **Simplifica.**

a) $\frac{4x}{2}$ **b)** $\frac{3}{3a}$ **c)** $\frac{5x}{10x}$

d) $\frac{12a^2}{4a}$ **e)** $\frac{15x}{3x^2}$ **f)** $\frac{8a^2}{8a^3}$

a) $2x$ b) $\frac{1}{a}$ c) $\frac{1}{2}$

d) $3a$ e) $\frac{5}{x}$ f) $\frac{1}{a}$

14 **Divide.**

a) $(10x) : (2x)$ **b)** $(5a^2) : (15a^2)$

c) $(14a^2) : (-7a)$ **d)** $(6x^3) : (9x^2)$

e) $(10x^2) : (5x^3)$ **f)** $(-5a) : (-5a^3)$

g) $(-16a^4) : (8a^6)$ **h)** $(27x^3) : (-9x)$

a) 5 b) $\frac{1}{3}$

c) $-2a$ d) $\frac{2}{3}x$

e) $\frac{2}{x}$ f) $\frac{1}{a^2}$

g) $\frac{-2}{a^2}$ h) $-3x^2$

3 POLINOMIOS

Página 119

Para practicar

1 **Indica el grado de cada polinomio.**

a) $x^2 - 3x + 7$ **b)** $x^4 - 2$ **c)** $5x^3 - 3x^2$

d) $9x^6 + 2x$ **e)** $x^5 - 2x^2$ **f)** $6x^4 - 3x^4$

a) Grado 2. b) Grado 4. c) Grado 3.

d) Grado 6. e) Grado 5. f) Grado 4.

2 **Calcula el valor numérico de $x^3 - 5x^2 - 11$.**

a) **Para $x = 1$.**

b) **Para $x = -1$.**

a) $1^3 - 5 \cdot 1^2 - 11 = 1 - 5 - 11 = -15$

b) $(-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 11 = -1 - 5 - 11 = -17$

3 **Calcula, por tanteo, los valores de x que anulan cada polinomio.**

a) $x^2 - 2x + 1$ **b)** $x^3 - 8$ **c)** $x^4 - x^3$

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 1$ y $x = 0$

4 **Escribe el opuesto en cada caso.**

a) $x^3 - 5x + 1$

b) $2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3x - 1$

a) $-x^3 + 5x - 1$

b) $-2x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 1$

Página 120

Para fijar ideas

1 **Copia en tu cuaderno y completa.**

a)
$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 7 \\ +\ x^2 - 8x + 5 \\ \hline \square - \square - 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 3x^3 - 6x^2 + 8x + 2 \\ +\ 2x^3 + 2x^2 - 6x - 9 \\ \hline \square - 4x^2 + \square - \square \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} -x^2 + 3x - 9 \\ +\ \square - x + \square \\ \hline 3x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 - \square - 1 \\ +\ \square - \square + x + \square \\ \hline 3x^3 - 6x^2 - 5x + 3 \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 7 \\ +\ x^2 - 8x + 5 \\ \hline 2x^2 - 3x - 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 3x^3 - 6x^2 + 8x + 2 \\ +\ 2x^3 + 2x^2 - 6x - 9 \\ \hline 5x^3 - 4x^2 + 2x - 7 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} -x^2 + 3x - 9 \\ +\ 4x^2 - x + 4 \\ \hline 3x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 - 6x - 1 \\ +\ 2x^3 - 2x^2 + x + 4 \\ \hline 3x^3 - 6x^2 - 5x + 3 \end{array}$$

2 **Dados el polinomio $P = x^4 + 5x^3 - 7x - 6$ y el polinomio $H = x^3 - 4x^2 - x + 8$, copia y completa.**

$$\begin{array}{rl}
P \rightarrow & x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 7x - 6 \\
H \rightarrow + & \phantom{x^4 + {}} x^3 - 4x^2 - x + 8 \\ \hline
P + H \rightarrow & x^4 + \square - \square - \square + 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
P \rightarrow & x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 7x - 6 \\
-H \rightarrow + & \phantom{x^4 + {}} -x^3 + 4x^2 + x - 8 \\ \hline
P - H \rightarrow & x^4 + \square + \square - \square - 14
\end{array}$$

Reflexiona: ¿Por qué en el polinomio P hemos añadido el sumando $0x^2$?

$$\begin{array}{rl}
P \rightarrow & x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 7x - 6 \\
H \rightarrow + & \phantom{x^4 + {}} x^3 - 4x^2 - x + 8 \\ \hline
P + H \rightarrow & x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 8x + 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
P \rightarrow & x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 7x - 6 \\
-H \rightarrow + & \phantom{x^4 + {}} -x^3 + 4x^2 + x - 8 \\ \hline
P - H \rightarrow & x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 6x - 14
\end{array}$$

Hemos añadido el sumando $0x^2$ para que sea evidente que no tenemos término en x^2 y realizar correctamente la suma y resta de polinomios.

Para practicar

5 **Calcula las siguientes operaciones con estos polinomios:**

$$A = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \qquad B = 2x^3 - x^2 - 7x - 1$$

a) $A + B$ **b)** $A - B$

a)
$$\begin{array}{rl}
A \rightarrow & 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \\
+ \quad B \rightarrow & 2x^3 - x^2 - 7x - 1 \\ \hline
A + B \rightarrow & 5x^3 - 6x^2 - 11x + 3
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl}
A \rightarrow & 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \\
- \quad B \rightarrow & -2x^3 + x^2 + 7x + 1 \\ \hline
A - B \rightarrow & x^3 - 4x^2 + 3x + 5
\end{array}$$

6 **Calcula las siguientes operaciones con estos polinomios:**

$$M = 7x^3 - 6x^2 + 2 \qquad N = 5x^2 - 3x - 5$$

a) $M + N$

b) $M - N$

c) $N - M$

a)
$$\begin{array}{rl}
M \rightarrow & 7x^3 - 6x^2 + 0x + 2 \\
+ \quad N \rightarrow & \phantom{7x^3 - {}} 5x^2 - 3x - 5 \\ \hline
M + N \rightarrow & 7x^3 - x^2 - 3x - 3
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl}
M \rightarrow & 7x^3 - 6x^2 + 0x + 2 \\
- \quad N \rightarrow & - 5x^2 + 3x + 5 \\ \hline
M - N \rightarrow & 7x^3 - 11x^2 + 3x + 7
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rl}
N \rightarrow & \phantom{-7x^3 + {}} 5x^2 - 3x - 5 \\
- \quad M \rightarrow & -7x^3 + 6x^2 + 0x - 2 \\ \hline
N - M \rightarrow & -7x^3 + 11x^2 - 3x - 7
\end{array}$$

Página 121

Para fijar ideas

3 Copia y completa las siguientes multiplicaciones:

a) $(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6) \cdot (x - 2)$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^3 & -\ 3x^2 & +\ 5x & +\ 6 \\
\times & & & x & -\ 2 \\
\hline
 & -\ 4x^3 & +\ \square & -\ \square & -\ 12 \\
+\ \square & -\ 3x^3 & +\ \square & +\ 6x & \\
\hline
\square & -\ \square & +\ \square & -\ \square & -\ 12
\end{array}$$

b) $(4x^3 + 5x^2 + 3) \cdot (x^3 - 3x + 1)$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 4x^3 & +\ 5x^2 & +\ 0x & +\ 3 \\
 & & \times & x^3 & +\ 0x^2 & -\ 3x & +\ 1 \\
\hline
 & & & 4x^3 & +\ 5x^2 & +\ 0x & +\ 3 \\
 & & -\ \square & -\ \square & -\ \square & -\ 9x & \\
+\ 4x^6 & +\ \square & +\ \square & +\ 3x^3 & & & \\
\hline
\square & +\ \square & -\ \square & -\ \square & +\ \square & -\ \square & +\ 3
\end{array}$$

a) $(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6) \cdot (x - 2)$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^3 & -\ 3x^2 & +\ 5x & +\ 6 \\
\times & & & x & -\ 2 \\
\hline
 & -\ 4x^3 & +\ 6x^2 & -\ 10x & -\ 12 \\
+\ 2x^4 & -\ 3x^3 & +\ 5x^2 & +\ 6x & \\
\hline
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 11x^2 & -\ 4x & -\ 12
\end{array}$$

b) $(4x^3 + 5x^2 + 3) \cdot (x^3 - 3x + 1)$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 4x^3 & +\ 5x^2 & +\ 0x & +\ 3 \\
 & & \times & x^3 & +\ 0x^2 & -\ 3x & +\ 1 \\
\hline
 & & & 4x^3 & +\ 5x^2 & +\ 0x & +\ 3 \\
 & & -\ 12x^4 & -\ 15x^3 & -\ 0x^2 & -\ 9x & \\
+\ 4x^6 & +\ 5x^5 & +\ 0x^4 & +\ 3x^3 & & & \\
\hline
4x^6 & +\ 5x^5 & -\ 12x^4 & -\ 8x^3 & +\ 5x^2 & -\ 9x & +\ 3
\end{array}$$

Para practicar

7 Calcula.

a) $3 \cdot (2x + 5)$ **b)** $5 \cdot (x^2 - x)$ **c)** $7 \cdot (x^3 - 1)$ **d)** $(-2) \cdot (5x - 3)$

e) $x \cdot (x + 1)$ **f)** $2x \cdot (3x - 5)$ **g)** $x^2 \cdot (5x - 2)$ **h)** $3x^2 \cdot (x + 2)$

i) $3x \cdot (x^2 - 2)$ **j)** $5x \cdot (x^2 + x + 1)$ **k)** $(-2x) \cdot (x^2 + 3)$ **l)** $-x \cdot (x^3 + x + 3)$

a) $6x + 15$ b) $5x^2 - 5x$ c) $7x^3 - 7$ d) $-10x + 6$

e) $x^2 + x$ f) $6x^2 - 10x$ g) $5x^3 - 2x^2$ h) $3x^3 + 6x^2$

i) $3x^3 - 6x$ j) $5x^3 + 5x^2 + 5x$ k) $-2x^3 - 6x$ l) $-x^4 - x^2 - 3x$

8 Multiplica.

a) $(x + 1) \cdot (x - 2)$ **b)** $(2x - 1) \cdot (x - 1)$

c) $(2x - 3) \cdot (3x - 2)$ **d)** $(4 + x) \cdot (2x + 1)$

a) $x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$ b) $2x^2 - 2x - x + 1 = 2x^2 - 3x + 1$

c) $6x^2 - 4x - 9x + 6 = 6x^2 - 13x + 6$ d) $8x + 4 + 2x^2 + x = 2x^2 + 9x + 4$

9 Realiza los siguientes productos:

a) $(2x + 1) \cdot (x^2 - x - 1)$

b) $(3x^2 - 2) \cdot (2x^2 + 4x - 3)$

c) $(x^3 + 2x^2 - 3) \cdot (3x^2 + 5x - 4)$

a) $2x \cdot (x^2 - x - 1) + 1 \cdot (x^2 - x - 1) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 - x - 1 = 2x^3 - x^2 - 3x - 1$

b) $3x^2 \cdot (2x^2 + 4x - 3) - 2 \cdot (2x^2 + 4x - 3) = 6x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 4x^2 - 8x + 6 = 6x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 8x + 6$

c)

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & +\ 2x^2 & + & -\ 3 \\
 & \times & & 3x^2 & +\ 5x & -\ 4 \\
\hline
 & & -\ 4x^3 & -\ 8x^2 & -\ 0x & +\ 12 \\
 & 5x^4 & +\ 10x^3 & +\ 0x^2 & -\ 15x & \\
+\ 3x^5 & +\ 6x^4 & +\ 0x^3 & -\ 9x^2 & & \\
\hline
3x^5 & +\ 11x^4 & +\ 6x^3 & -\ 17x^2 & -\ 15x & +\ 12
\end{array}$$

4 PRODUCTOS NOTABLES

Página 123

Para fijar ideas

1 **Copia y completa en tu cuaderno. Multiplica aplicando las fórmulas de la página anterior y, después, comprueba haciendo la operación.**

a) $(2x + 7)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 7 + 7^2 = \square + \square + \square$

$$\begin{array}{rrcrcr} & & & 2x & + & 7 \\ \times & & & 2x & + & 7 \\ \hline & & & \square & + & \square \\ + & \square & + & \square & & \\ \hline & \square & + & \square & + & \square \end{array}$$

b) $(2x - 7)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 7 + 7^2 = \square - \square + \square$

$$\begin{array}{rrcrcr} & & & 2x & - & 7 \\ \times & & & 2x & - & 7 \\ \hline & & - & \square & + & \square \\ + & \square & - & \square & & \\ \hline & \square & - & \square & + & \square \end{array}$$

c) $(2x + 7) \cdot (2x - 7) = (2x)^2 - 7^2 = \square - \square$

$$\begin{array}{rrcrcr} & & & 2x & + & 7 \\ \times & & & 2x & - & 7 \\ \hline & & - & \square & - & \square \\ + & \square & + & \square & & \\ \hline & \square & + & \square & - & \square \end{array}$$

a) $(2x + 7)^2 = 4x^2 + 28x + 49$

$$\begin{array}{rrcrcr} & & & 2x & + & 7 \\ \times & & & 2x & + & 7 \\ \hline & & & 14x & + & 49 \\ + & 4x^2 & + & 14x & & \\ \hline & 4x^2 & + & 28x & + & 49 \end{array}$$

b) $(2x - 7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$

$$\begin{array}{rrcrcr} & & & 2x & - & 7 \\ \times & & & 2x & - & 7 \\ \hline & & - & 14x & + & 49 \\ + & 4x^2 & - & 14x & & \\ \hline & 4x^2 & - & 28x & + & 49 \end{array}$$

c) $(2x + 7) \cdot (2x - 7) = 4x^2 - 49$

$$\begin{array}{rrcrcr} & & & 2x & + & 7 \\ \times & & & 2x & - & 7 \\ \hline & & - & 14x & - & 49 \\ + & 4x^2 & + & 14x & & \\ \hline & 4x^2 & + & 0 & - & 49 \end{array}$$

Para practicar

1 Copia y completa.

a) $(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot \square \cdot \square + \square^2 = x^2 + 2\square + \square$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot \square \cdot \square + 5^2 = x^2 - \square x + \square$

c) $(x+5) \cdot (x-5) = \square^2 - 5^2 = x^2 - \square$

Comprueba los resultados efectuando cada producto.

a) $(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

e) $(x+5) \cdot (x-5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

2 Calcula.

a) $(x+4)^2$	**b)** $(x-1)^2$	**c)** $(x-6) \cdot (x+6)$
d) $(a+2)^2$	**e)** $(a-1)^2$	**f)** $(a+4) \cdot (a+4)$
g) $(2x-y)^2$	**h)** $(5-3x)^2$	**i)** $(2x+1) \cdot (2x-1)$
a) $x^2 + 8x + 16$	b) $x^2 - 2x + 1$	c) $x^2 - 36$
d) $a^2 + 4a + 4$	e) $a^2 - 2a + 1$	f) $a^2 + 8a + 16$
g) $4x^2 - 4xy + y^2$	h) $25 - 30x + 9x^2$	i) $4x^2 - 1$

3 Copia y completa.

a) $a^2 - 1 = (a+1) \cdot (\square - \square)$	**b)** $a^2 - 2a + 1 = (\square - \square)^2$
c) $a^2 - 16 = (\square + \square) \cdot (\square - \square)$	**d)** $x^2 + 2xy + y^2 = (\square + \square)^2$
a) $(a+1) \cdot (a-1)$	b) $(a-1)^2$
c) $(a+4) \cdot (a-4)$	d) $(x+y)^2$

4 Simplifica las fracciones siguientes:

a) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ **b)** $\dfrac{a^2-9}{a^2-6a+9}$

c) $\dfrac{a^2-1}{a^2-2a+1}$ **d)** $\dfrac{a^2-16}{a+4}$

a) $\dfrac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{x+y}{x-y}$ b) $\dfrac{(a+3)(a-3)}{(a-3)^2} = \dfrac{a+3}{a-3}$

c) $\dfrac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2} = \dfrac{a+1}{a-1}$ d) $\dfrac{(a+4)(a-4)}{a+4} = a-4$

Página 124

Para fijar ideas

2 Copia y completa.

a) $7x + 7y = 7 \cdot (x + \square)$	**b)** $ax - ax = x \cdot (\square - y)$
c) $6a - 9b = \square \cdot (2a - 3b)$	**d)** $x^2y - xy^2 = xy \cdot (\square - \square)$
a) $7 \cdot (x+y)$	b) $a \cdot (x-y)$
c) $3 \cdot (2a-3b)$	d) $xy \cdot (x-y)$

3 **Copia y completa como en el ejemplo.**

- $\mathbf{2a \cdot (a + 3) = 2a^2 + 6a \leftrightarrow 2a^2 + 6a = 2a \cdot (a + 3)}$

a) $\mathbf{5a \cdot (2 + a) = \square + \square \leftrightarrow 10a + 5a^2 = 5a \cdot (\square + \square)}$

b) $\mathbf{3x \cdot (1 - 4x) = \square - \square \leftrightarrow 3x - 12x^2 = \square \cdot (\square - \square)}$

c) $\mathbf{x^2 \cdot (x - 5) = \square - \square \leftrightarrow x^3 - 5x^2 = \square \cdot (\square - \square)}$

a) $5a \cdot (2 + a) = 10a + 5a^2 \leftrightarrow 10a + 5a^2 = 5a \cdot (2 + a)$

b) $3x \cdot (1 - 4x) = 3x - 12x^2 \leftrightarrow 3x - 12x^2 = 3x \cdot (1 - 4x)$

c) $x^2 \cdot (x - 5) = x^3 - 5x^2 \leftrightarrow x^3 - 5x^2 = x^2 \cdot (x - 5)$

4 **Observa el recuadro *Ten en cuenta.* Después, copia y completa en tu cuaderno.**

a) $\mathbf{\dfrac{x}{x^2 + 3x} = \dfrac{x \cdot 1}{x(\square + \square)} = \ldots}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{3a}{a^2 + a} = \dfrac{3a}{\square\,(a + 1)} = \ldots}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{2x^2}{6x^2 + 2x} = \dfrac{2 \cdot x^2}{2x(\square + \square)} = \ldots}$

a) $\dfrac{x \cdot 1}{x(x + 3)} = \dfrac{1}{x + 3}$

b) $\dfrac{3 \cdot a}{a(a + 1)} = \dfrac{3}{a + 1}$

c) $\dfrac{2 \cdot x^2}{2x(3x + 1)} = \dfrac{x}{3x + 1}$

Para practicar

5 **Extrae factor común.**

a) $\mathbf{8x + 8y}$	**b)** $\mathbf{8 + 4a}$
c) $\mathbf{x^2 + xy}$	**d)** $\mathbf{2a^2 + 6a}$
e) $\mathbf{6a + 2a^3}$	**f)** $\mathbf{x^3 + x^2 - x}$
a) $8 \cdot (x + y)$	b) $4 \cdot (2 + a)$
c) $x \cdot (x + y)$	d) $2a \cdot (a + 3)$
e) $2a \cdot (3 + a^2)$	f) $x \cdot (x^2 + x - 1)$

6 **Simplifica.**

a) $\mathbf{\dfrac{3x}{2x + xy}}$	**b)** $\mathbf{\dfrac{4a}{4a + 8b}}$	**c)** $\mathbf{\dfrac{x^2}{x^2 + x^3}}$
a) $\dfrac{3x}{x \cdot (2 + y)} = \dfrac{3}{2 + y}$	b) $\dfrac{4a}{4 \cdot (a + 2b)} = \dfrac{a}{a + 2b}$	c) $\dfrac{x^2}{x^2 \cdot (1 + x)} = \dfrac{1}{1 + x}$

Página 125

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Utiliza el lenguaje algebraico

1 **Si llamamos x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada enunciado.**

a) **El triple de x.**

b) **La mitad de su anterior.**

c) **El resultado de sumarle 3 unidades.**

d) **La mitad de un número 3 unidades mayor que x.**

e) **El triple del número que resulta de sumar 5 unidades a x.**

f) **Un número 5 unidades mayor que el triple de x.**

a) $3x$

b) $\frac{x-1}{2}$

c) $x + 3$

d) $\frac{x+3}{2}$

e) $3 \cdot (x + 5)$

f) $3x + 5$

2 **En una granja hay C caballos, V vacas y G gallinas. Asocia estas expresiones al número de:**

a) Patas.	**b) Cabezas.**	**c) Orejas.**
A $\boxed{2C + 2V}$	**B** $\boxed{C + V + G}$	**C** $\boxed{4(C + V) + 2G}$
a) Patas → C	b) Cabezas → B	c) Orejas → A

3 **Si llamamos x al sueldo mensual de un trabajador, expresa algebraicamente:**

a) **El valor de una paga extraordinaria, sabiendo que equivale al 80 % del sueldo.**

b) **Su nómina de diciembre, mes en el que percibe una paga extraordinaria.**

c) **Sus ingresos anuales, sabiendo que cobra dos pagas extras: en verano y en Navidad.**

a) $0{,}8x$

b) $x + 0{,}8x \rightarrow 1{,}8x$

c) $12x + 2 \cdot 0{,}8x \rightarrow 13{,}6x$

4 **Traduce a una igualdad algebraica cada uno de estos enunciados:**

a) **Si aumentas un número, x, en 15 unidades y divides entre 2 el resultado, obtienes el triple de dicho número.**

b) **Si triplicas la edad de Jorge, x, y al resultado le sumas 5 años, obtienes la edad de su padre, que tenía 33 años cuando nació Jorge.**

Edad de Jorge → x Edad del padre → $x + 33$

a) $\frac{x+15}{2} = 3x$

b) $3x + 5 = x + 33$

5 **Di cuál de las siguientes expresiones representa:**

a) Un número de tres cifras $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$.

b) Su siguiente.

c) Su doble.

d) El doble de su anterior.

A $\boxed{100a + 10b + (c + 1)}$ **B** $\boxed{200a + 20b + 2c}$

C $\boxed{200a + 20b + 2c - 2}$ **D** $\boxed{100a + 10b + c}$

a) D b) A

c) B d) C

6 **Copia en tu cuaderno y completa.**

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	n
		22			**…**	$3n^2 - 5$

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	n
			10		**…**	$\frac{n(n+1)}{2}$

1	2	3	4	5	…	n
–2	7	22	43	70	…	$3n^2 - 5$

1	2	3	4	5	…	n
1	3	6	10	15	…	$\frac{n(n+1)}{2}$

7 **Siguiendo la lógica de la tabla, completa en tu cuaderno las casillas vacías.**

1	**2**	**3**	**5**	**10**	**15**	**20**	n
0	**3**	**8**	**24**			**399**	

1	**2**	**3**	**5**	**10**	**20**	**25**	n
1	**4**	**7**	**13**			**73**	

1	2	3	5	10	15	20	n
0	3	8	24	99	224	399	$n^2 - 1$

1	2	3	5	10	20	25	n
1	4	7	13	28	58	73	$3n - 2$

8 **Escribe la expresión del término enésimo en cada una de estas series:**

a) 2 - 4 - 6 - 8 - 10 - … → $a_n = ?$

b) 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - … → $b_n = ?$

c) 5 - 10 - 15 - 20 - 25 - … → $c_n = ?$

d) 4 - 9 - 14 - 19 - 24 - … → $d_n = ?$

a) $a_n = 2n$

b) $b_n = 2n + 1$

c) $c_n = 5n$

d) $d_n = 5n - 1$

9 **El término enésimo de una serie viene dado por la expresión:**

$$a_n = 5n - 4$$

a) Escribe sus cinco primeros términos.

b) ¿Cuál es el valor de a_{100}?

a) $a_1 = 1$; $a_2 = 6$; $a_3 = 11$; $a_4 = 16$; $a_5 = 21$

b) $a_{100} = 5 \cdot 100 - 4 = 496$

10 **El término enésimo de una serie viene dado por esta expresión:**

$$a_n = \frac{3n - 1}{2}$$

Calcula los términos a_5, a_9 y a_{15}.

$$a_5 = \frac{3 \cdot 5 - 1}{2} = 7;\ a_9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13;\ a_{15} = \frac{3 \cdot 15 - 1}{2} = 22$$

11 **Copia y completa la tabla en tu cuaderno sabiendo que los valores a, b y c se relacionan mediante la fórmula:**

$$a = \frac{3b + 2c}{5}$$

b	**0**	**0**	**2**	**3**	**4**
c	**0**	**5**	**7**	**3**	**9**
a					

b	0	0	2	3	4
c	0	5	7	3	9
a	0	2	4	3	6

Página 126

12 **En cada una de estas tablas se sigue la misma lógica. Es decir, la relación entre los números de cada casilla es la misma. Complétalas en tu cuaderno.**

A	**A · B**	**2A – B**	**$A^2 - B^2$**
B			
7	**21**		
3	**13**	**8**	**16**
10			
1	**12**	**16**	**81**
2	**10**		
5	**12**	**–6**	**9**

A	A · B	2A – B	$A^2 - B^2$
B	A + 2B	2(A – B)	$(A - B)^2$
7	21	11	40
3	13	8	16
10	10	19	99
1	12	18	81
2	10	–1	–21
5	12	–6	9

Monomios

13 **Copia y completa.**

MONOMIO	$8a$	$\frac{2}{3}xy$	
COEFICIENTE			1
PARTE LITERAL			a^3b
GRADO			

MONOMIO	$8a$	$\frac{2}{3}xy$	a^3b
COEFICIENTE	8	$\frac{2}{3}$	1
PARTE LITERAL	a	xy	a^3b
GRADO	1	2	4

14 **Opera.**

a) $2x + 8x$
b) $7a - 5a$
c) $2x - 5x$
d) $3a - 10a$
e) $8x - 6 - 3x - 1$
f) $6a - 2 - 5a - 1$
g) $2x + 3 - 9x + 1$
h) $a - 6 - 2a + 7$

a) $10x$
b) $2a$
c) $-3x$
d) $-7a$
e) $5x - 7$
f) $a - 3$
g) $-7x + 4$
h) $-a + 1$

15 **Quita paréntesis y reduce.**

a) $x - (x - 2)$
b) $3x + (2x + 3)$
c) $(5x - 1) - (2x + 1)$
d) $(7x - 4) + (1 - 6x)$
e) $(1 - 3x) - (1 - 5x)$
f) $2x - (x - 3) - (2x - 1)$

a) 2
b) $5x + 3$
c) $3x - 2$
d) $x - 3$
e) $2x$
f) $-x + 4$

16 **Opera y reduce.**

a) $3x \cdot 4x$
b) $12x : 3x$
c) $x^2 \cdot x^3$
d) $15x^6 : 5x^4$
e) $3x \cdot 5x^3$
f) $(-20x^8) : 5x^7$
g) $(-2x^2) \cdot (3x^4)$
h) $\frac{3x^2}{4} : \frac{x}{4}$
i) $\frac{2x}{3} \cdot 6x$
j) $x^2 : x^5$
k) $\frac{3x^3}{4} \cdot (-3x^3)$
l) $\frac{2x^2}{5} : (-2x^3)$
m) $\frac{x}{2} \cdot \frac{2x^2}{3}$
n) $\frac{2x}{3} : \frac{x^3}{6}$

a) $12x^2$
b) 4
c) x^5
d) $3x^2$
e) $15x^4$
f) $-4x$
g) $-6x^6$
h) $3x$
i) $4x^2$
j) $\frac{1}{x^3}$
k) $-\frac{9}{4}x^6$
l) $-\frac{1}{5x}$
m) $\frac{2x^3}{6}$
n) $\frac{4}{x^2}$

Polinomios

17 **Indica el grado de cada uno de los siguientes polinomios:**

a) $x^3 + 3x^2 + 2x - 6$

b) $4 - 3x^2$

c) $2x^5 - 4x^2 + 1$

d) $7x^4 - x^3 + x^2 + 1$

a) Grado 3.

b) Grado 2.

c) Grado 5.

d) Grado 4.

18 **Reduce.**

a) $x^2 - 6x + 1 + x^2 + 3x - 5$

b) $3x - x^2 + 5x + 2x^2 - x - 1$

c) $2x^2 + 4 + x^3 - 6x + 2x^2 - 4$

d) $5x^3 - 1 - x + x^3 - 6x^2 - x^2 + 4$

a) $2x^2 - 3x - 4$

b) $x^2 + 7x - 1$

c) $x^3 + 4x^2 - 6x$

d) $6x^3 - 7x^2 - x + 3$

19 **Quita paréntesis y reduce.**

a) $(3x^2 - 5x + 6) + (2x - 8)$

b) $(6 - 3x + 5x^2) - (x^2 - x + 3)$

c) $(9x^2 - 5x + 2) - (7x^2 - 3x - 7)$

d) $(3x^2 - 1) - (5x + 2) + (x^2 - 3x)$

a) $3x^2 - 3x - 2$

b) $4x^2 - 2x + 3$

c) $2x^2 - 2x + 9$

d) $4x^2 - 8x - 3$

20 **Copia y completa.**

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2 - & 5x - & 5\\ + & \square x^2 + & \square x - & \square \\ \hline & 5x^2 - & x - & 6\end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & \square x^3 - & 3x^2 + & \square x - & 8\\ + & 4x^3 + & \square x^2 - & 5x - & \square\\ \hline & 6x^3 + & 2x^2 - & x - & 10\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2 - & 5x - & 5\\ + & 2x^2 + & 4x - & 1 \\ \hline & 5x^2 - & x - & 6\end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 2x^3 - & 3x^2 + & 4x - & 8\\ + & 4x^3 + & 5x^2 - & 5x - & 2\\ \hline & 6x^3 + & 2x^2 - & x - & 10\end{array}$$

21 **Considera los siguientes polinomios y calcula.**

$A = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 2 \qquad B = x^3 - 3x + 1 \qquad C = 2x^2 + 4x - 5$

a) $A + B$

b) $A + B + C$

c) $A - B$

d) $B - C$

e) $A + B - C$

f) $A - B - C$

a) $A + B = 4x^3 - 6x^2 + x - 1$

b) $A + B + C = 4x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

c) $A - B = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 3$

d) $B - C = x^3 - 2x^2 - 7x + 6$

e) $A + B - C = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 4$

f) $A - B - C = 2x^3 - 8x^2 + 3x + 2$

22 **Opera.**

a) $2 \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$

b) $(-4) \cdot (2x^2 - 5x - 1)$

c) $x \cdot (3x^3 - 4x^2 - 6x - 1)$

d) $x^2 \cdot (5x^2 + 3x + 4)$

e) $(-2x) \cdot (x^3 - 2x^2 + 3x + 2)$

a) $2x^3 - 6x^2 + 4x + 4$

b) $-8x^2 + 20x + 4$

c) $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 - x$

d) $5x^4 + 3x^3 + 4x^2$

e) $-2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x$

23 **Reduce.**

a) $2(3x - 1) + 3(x + 2)$
b) $3(x^2 - 2x - 1) - 2(x + 5)$
c) $4(2x^2 - 5x + 3) - 3(x^2 + x + 1)$
d) $6(3x^2 - 4x + 4) - 5(3x^2 - 2x + 3)$

a) $9x + 4$
b) $3x^2 - 8x - 13$
c) $5x^2 - 23x + 9$
d) $3x^2 - 14x + 9$

Página 127

24 **Multiplica.**

a) $(x - 1) \cdot (2x - 3)$
b) $(3x - 2) \cdot (x - 5)$
c) $(2x + 3) \cdot (3x - 4)$
d) $(x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$
e) $(3x + 2) \cdot (x^3 - 2x^2 + 5x + 1)$
f) $(x^2 - 2x - 3) \cdot (2x^3 - 5x^2 - 4x + 3)$

a) $2x^2 - 5x + 3$
b) $3x^2 - 17x + 10$
c) $6x^2 + x - 12$
d) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
e) $3x^4 - 4x^3 + 11x^2 + 13x + 2$
f) $2x^5 - 9x^4 + 26x^2 + 6x - 9$

25 Ejercicio resuelto.

26 **Calcula.**

a) $(x^2 + 1) \cdot (x - 2)$
b) $(2x^2 - 1) \cdot (x^2 + 3)$
c) $(2x - 3) \cdot (3x^3 - 2x + 2)$
d) $(x^2 + 2) \cdot (x^3 - 3x + 1)$

a) $x^3 - 2x^2 + x - 2$
b) $2x^4 + 5x^2 - 3$
c) $6x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 10x - 6$
d) $x^5 - x^3 + x^2 - 6x + 2$

27 **Opera como en el ejemplo.**

- $(x^2 + 3) \cdot (x^2 - 1) = x^2 \cdot (x^2 - 1) + 3 \cdot (x^2 - 1) = x^4 - x^2 + 3x^2 - 3 = x^4 + 2x^2 - 3$

a) $(x + 1) \cdot (x^2 + 4)$
b) $(x^3 + 1) \cdot (x^2 + 5)$
c) $(x^2 - 2) \cdot (x + 7)$
d) $(x^3 - 3x + 5) \cdot (2x - 1)$

a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$
b) $x^5 + 5x^3 + x^2 + 5$
c) $x^3 + 7x^2 - 2x - 14$
d) $2x^4 - x^3 - 6x^2 + 13x - 5$

28 **Reduce.**

a) $(x + 1) \cdot (2x + 3) - 2 \cdot (x^2 + 1)$
b) $(2x - 5) \cdot (x + 2) + 3x \cdot (x + 2)$
c) $(x^2 - 3) \cdot (x + 1) - (x^2 + 5) \cdot (x - 2)$
d) $(4x + 3) \cdot (2x - 5) - (6x^2 - 10x - 12)$

a) $5x + 1$
b) $5x^2 + 5x - 10$
c) $3x^2 - 8x + 7$
d) $2x^2 - 4x - 3$

29 Ejercicio resuelto.

30 **Realiza las divisiones siguientes:**

a) $(8x - 6) : 2$
b) $(20x - 5) : 5$
c) $(3x^2 - x) : x$
d) $(4x^3 - 8x^2) : 2x$
e) $(4x^3 - 2x^2 + 6x) : 2x$
f) $(12x^3 + 9x^2) : 3x^2$

a) $4x - 3$
b) $4x - 1$
c) $3x - 1$
d) $2x^2 - 4x$
e) $2x^2 - x + 3$
f) $4x + 3$

Productos notables y extracción de factor común

31 **Extrae factor común.**

a) $3x + 3y + 3z$

b) $2x - 5xy + 3xz$

c) $a^2 + 3a$

d) $3a - 6b$

e) $2x + 4y + 6z$

f) $4x - 8x^2 + 12x^3$

g) $9a + 6a^2 + 3a^3$

h) $2a^2 - 5a^3 + a^4$

a) $3(x + y + z)$

b) $x(2 - 5y + 3z)$

c) $a(a + 3)$

d) $3(a - 2b)$

e) $2(x + 2y + 3z)$

f) $4x(1 - 2x + 3x^2)$

g) $3a(3 + 2a + a^2)$

h) $a^2(2 - 5a + a^2)$

32 **Calcula sin hacer la multiplicación, utilizando las fórmulas de los productos notables.**

a) $(x + 3)^2$

b) $(3 + a)^2$

c) $(2 - x)^2$

d) $(a - 6)^2$

e) $(2x + 1)^2$

f) $(5 - 3a)^2$

g) $(x - 5) \cdot (x + 5)$

h) $(3x - 5) \cdot (3x + 5)$

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $9 + 6a + a^2$

c) $4 - 4x + x^2$

d) $a^2 - 12a + 36$

e) $4x^2 + 4x + 1$

f) $25 - 30a + 9a^2$

g) $x^2 - 25$

h) $9x^2 - 25$

33 Ejercicio resuelto.

34 **Descompón en factores.**

a) $x^2 - 6x + 9$

b) $x^3 - 9x$

c) $3x^2 + 6x + 3$

d) $2x^3 - 12x^2 + 18x$

e) $x^4 - x^2$

f) $4x^2 + 4x + 1$

a) $(x - 3)^2 = (x - 3) \cdot (x - 3)$

b) $x \cdot (x^2 - 9) = x \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

c) $3 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 3 \cdot (x + 1)^2 = 3 \cdot (x + 1) \cdot (x + 1)$

d) $2x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 2x \cdot (x - 3)^2 = 2x \cdot (x - 3) \cdot (x - 3)$

e) $x^2 \cdot (x^2 - 1) = x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

f) $(2x + 1)^2 = (2x + 1) \cdot (2x + 1)$

35 **Saca factor común en el numerador y en el denominador y, después, simplifica.**

a) $\dfrac{x}{x^2 + 2x}$

b) $\dfrac{2x^2 + 10x}{3x^3 + 15x^2}$

c) $\dfrac{2x^2 - 2x}{2x^3}$

a) $\dfrac{x}{x(x + 2)} = \dfrac{1}{x + 2}$

b) $\dfrac{2x(x + 5)}{3x^2(x + 5)} = \dfrac{2}{3x}$

c) $\dfrac{2x(x - 1)}{2x^3} = \dfrac{x - 1}{x^2}$

36 **Descompón en factores el numerador y el denominador y, después, simplifica.**

a) $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$

b) $\dfrac{5x+15}{x^2+6x+9}$

c) $\dfrac{3x+3}{3x^2-3}$

d) $\dfrac{x^2+2x+1}{5x^2+5x}$

e) $\dfrac{2x^2-6x}{2x^3-12x^2+18x}$

f) $\dfrac{3x^3+6x^2+3x}{6x^3+6x^2}$

a) $\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2}=\dfrac{x+3}{x-3}$

b) $\dfrac{5(x+3)}{(x+3)^2}=\dfrac{5}{x+3}$

c) $\dfrac{3(x+1)}{3(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$

d) $\dfrac{(x+1)^2}{5x(x+1)}=\dfrac{x+1}{5x}$

e) $\dfrac{2x(x-3)}{2x(x^2-6x+9)}=\dfrac{2x(x-3)}{2x(x-3)^2}=\dfrac{1}{x-3}$

f) $\dfrac{3x(x^2+2x+1)}{6x^2(x+1)}=\dfrac{3x(x+1)^2}{6x^2(x+1)}=\dfrac{x+1}{2x}$

Página 128

Interpreta, describe, exprésate

37 **En un campo de cultivo hay cuatro estanques. Llamando C a la cantidad de agua que tendrá un estanque dentro de m minutos, asocia cada estanque con la expresión que le corresponde.**

ESTANQUE M: Contiene 4 500 litros de agua y se abre un grifo que le aporta 4 litros por minuto.

ESTANQUE N: Contiene 4 500 litros de agua y se le conecta una bomba que extrae 4 litros por minuto.

ESTANQUE P: Contiene 4 metros cúbicos de agua y se conecta a una tubería que aporta 4,5 metros cúbicos a la hora.

ESTANQUE Q: Contiene 4 metros cúbicos de agua y se abre una boca de riego que extrae 4,5 metros cúbicos a la hora.

$$\boxed{C=4000+\frac{4500\cdot m}{60}}\qquad\boxed{C=4500-4\cdot m}$$

$$\boxed{C=4000-\frac{4500\cdot m}{60}}\qquad\boxed{C=4500+4\cdot m}$$

Estanque M: $C=4500+4\cdot m$

Estanque N: $C=4500-4\cdot m$

Estanque P: $C=4000+\dfrac{4500\cdot m}{60}$

Estanque Q: $C=4000-\dfrac{4500\cdot m}{60}$

38 **En la clase de Marta, la nota de Matemáticas se calcula atendiendo a tres conceptos con diferente peso: la media de los controles (3/4), el cuaderno (20 %) y los trabajos especiales (resto).**

a) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas sirven para calcular la nota?

Controles (*a*); Cuaderno (*b*); Trabajos esp. (*c*).

$N = \frac{3a}{4} + \frac{b}{5} + \frac{c}{20}$	$N = 0{,}75a + 0{,}2b + 0{,}05c$
$N = \frac{15a + 4b + c}{20}$	$N = \frac{75a + 20b + 5c}{100}$

b) Calcula la nota de Marta y de Javier, con dos cifras decimales.

	M. CONTROLES	CUADERNO	T. ESPECIALES
MARTA	7,25	8	6
JAVIER	6,80	7	5

c) Si el sistema informático de secretaría solo admite notas con números enteros, ¿cuáles serán las calificaciones definitivas de ambos en Matemáticas?

a) Todas las fórmulas son equivalentes y sirven para calcular la nota.

b) Marta → 7,34; Javier → 6,75

c) Marta → 7; Javier → 7

39 **El importe bruto, *I*, sin IVA, del recibo de la luz de cierta compañía eléctrica se calcula según la siguiente fórmula:**

$I = F + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot P$

F → **Gastos fijos y alquiler de equipos de medida (€)**

L_{AC} → **Lectura actual (kWh)**

L_{ANT} → **Lectura anterior (kWh)**

P → **Precio del kWh (€/kWh)**

a) Escribe la fórmula en su versión actualizada, si los gastos fijos son de 8,50 € y el kilovatio hora cuesta 0,80 €.

b) ¿Cuál de las siguientes sería la fórmula actualizada de la factura, en su formato final, incluyendo el 21 % de IVA?

$$I = \frac{8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80 + 21}{100}$$

$$I = [8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80] \cdot 1{,}21$$

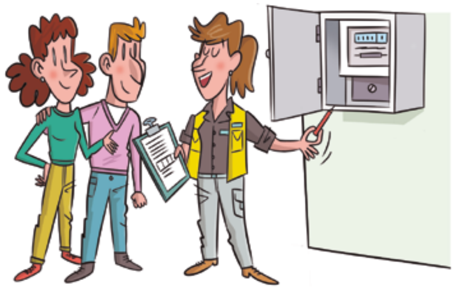
$$I = 8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80 + 1{,}21$$

a) $I = 8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80$

b) $I = [8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80] \cdot 1{,}21$

40 **Una empleada de la compañía eléctrica del ejercicio anterior leyó el mes pasado, en el contador de la vivienda de la familia Gutiérrez, 2 457 kWh, y la lectura de este mes ha sido de 2 516 kWh. ¿A cuánto asciende la factura de este mes?**

$I = [8{,}50 + (2\,516 - 2\,457) \cdot 0{,}80] \cdot 1{,}21 = 67{,}40$ € será el importe de la factura con IVA incluido.



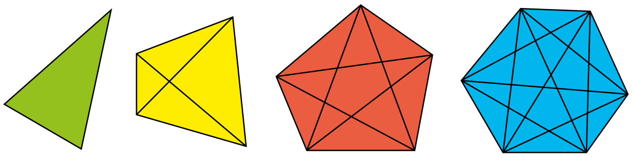
41 **Un fontanero que presta servicio a domicilio cobra, por acudir a una llamada, un fijo de 25 €, más el importe del material utilizado, más 15 € por hora de trabajo. Y a todo ello se le añade el 21 % de IVA.**

Escribe la fórmula para obtener el importe de la factura (I), en función de las horas invertidas (h) y del coste del material (M).

$I = (25 + M + 15 \cdot \text{h}) \cdot 1{,}21$

Página 129

42 **Cuenta el número de diagonales de los siguientes polígonos:**



Comprueba que:

- **El número de diagonales que salen de un vértice es igual al número de lados menos tres.**
- **Cada diagonal toca a dos vértices.**

Teniendo eso en cuenta:

a)

N.º LADOS	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**10**	**20**
N.º DIAGONALES	**0**	**2**	**5**	**9**				

b) Escribe la fórmula que te permite calcular el número de diagonales (D), sabiendo el número de lados (n).

a)

N.º LADOS	3	4	5	6	7	8	10	20
N.º DIAGONALES	0	2	5	9	14	20	35	170

b) $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Problemas «+»

43 Problema resuelto.

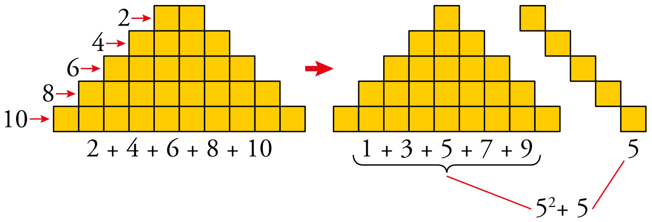
I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_{10}	I_{15}	…	I_n
1	4	9	16	16	100	225	…	n^2

44 **Busca ahora, como en la actividad anterior, una expresión para calcular la suma, P_n, de los n primeros números pares.**

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots}_{n \text{ sumandos}} \rightarrow P_n = ?$$

AYUDA

- **Observa estas figuras.**



- **Tantea los primeros casos, compara los resultados con el problema anterior y saca conclusiones.**

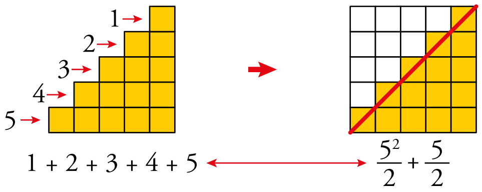
$\mathbf{P_1 = 2 \rightarrow 1 + 1}$
$\mathbf{P_2 = 2 + 4 = 6 \rightarrow 4 + 2}$
$\mathbf{P_3 = 2 + 4 + 6 = 12 \rightarrow 9 + 3}$
$\mathbf{P_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20 \rightarrow 16 + 4}$

$P_n = n^2 + n$

45 Obtén una fórmula para calcular la suma de los *n* primeros números naturales.

AYUDA

Observa la torre de cinco pisos y generalízala para una torre cualquiera de *n* pisos. Después, comprueba con ejemplos.



$N_1 = 1$

$N_2 = 1 + 2 = 3 = \frac{2^2}{2} + \frac{2}{2}$

$N_3 = 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{12}{2}$

$N_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4^2}{2} + \frac{4}{2}$

$N_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5^2}{2} + \frac{5}{2}$

…

$N_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

46 Cuenta el número de naipes que se han necesitado para levantar este castillo de tres pisos.

a) ¿Cuántas cartas se necesitarían para levantar un castillo de 5 pisos?

b) ¿Y para uno de 10 pisos?

c) ¿Y para un castillo de *n* pisos?

$\text{Piso}_1 \rightarrow 2 \cdot 1 + 0 = 2$ cartas
$\text{Piso}_2 \rightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$ cartas
$\text{Piso}_3 \rightarrow 2 \cdot 3 + 2 = 6 + 2 = 8$ cartas
$\text{Castillo}_{3\ \text{pisos}} \rightarrow 2 + 5 + 8 = 15$ cartas
En un castillo de tres pisos hay 15 cartas.

a) Para un castillo de 5 pisos:

$\text{Piso}_4 \rightarrow 2 \cdot 4 + 3 = 8 + 3 = 11$ cartas
$\text{Piso}_5 \rightarrow 2 \cdot 5 + 4 = 10 + 4 = 14$ cartas
Total $\rightarrow 15 + 11 + 14 = 40$ cartas

b) Para un castillo de 10 pisos:

$\text{Piso}_6 \rightarrow 2 \cdot 6 + 5 = 12 + 5 = 17$ cartas

$\text{Piso}_7 \rightarrow 2 \cdot 7 + 6 = 14 + 6 = 20$ cartas

$\text{Piso}_8 \rightarrow 2 \cdot 8 + 7 = 16 + 7 = 23$ cartas

$\text{Piso}_9 \rightarrow 2 \cdot 9 + 8 = 18 + 8 = 26$ cartas

$\text{Piso}_{10} \rightarrow 2 \cdot 10 + 9 = 20 + 9 = 29$ cartas

Total $\rightarrow 40 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 = 155$ cartas

c) Generalizamos a partir de los casos anteriores.

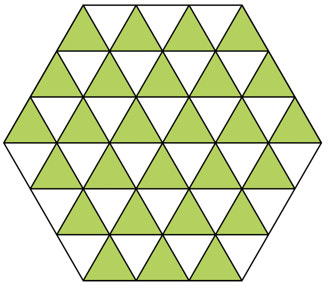
El número de cartas de un piso: $\text{Piso}_n = 2 \cdot n + (n - 1)$

El número de cartas de un castillo de n pisos: $\text{Castillo}_{n \text{ pisos}} = \text{Castillo}_{n-1} + 2 \cdot n + (n - 1)$

Página 130

LEE E INFÓRMATE

Hazlo tú

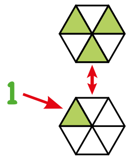


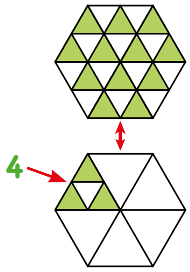
En una exposición se ha presentado este mosaico en forma de hexágono de lado 3 unidades, construido con 54 piezas triangulares.

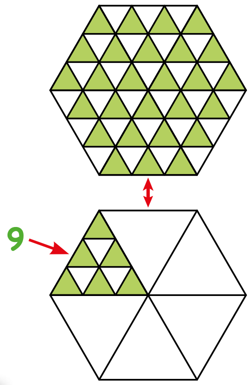
a) ¿Cuántas piezas se necesitarían para construir un mosaico con la misma forma, pero de lado 20 unidades?

b) En general, ¿cuántas piezas se necesitarían para construir un hexágono de lado n unidades?

AYUDA: Recuerda el ejemplo anterior y observa las figuras.







LADO	1	2	3	4	…	n
PIEZAS	6 $6 \cdot 1$	24 $6 \cdot 4$	54 $6 \cdot 9$	?	…	?

El mosaico hexagonal con lado de n unidades está formado por 6 triángulos de lado n unidades, por lo que utilizando el resultado anterior y, recurriendo a la ayuda, completamos la tabla:

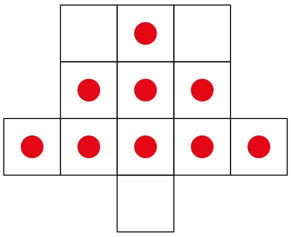
LADO	1	2	3	4	…	n
PIEZAS	6 $6 \cdot 1$	24 $6 \cdot 4$	54 $6 \cdot 9$	96 $6 \cdot 16$	…	$6 \cdot n^2$

a) Mosaico hexagonal de lado 20 unidades $\rightarrow$ $6 \cdot 20^2 = 2\,400$ piezas

b) Mosaico hexagonal de lado n unidades $\rightarrow$ $6 \cdot n^2$ piezas

INVESTIGA

Salto y captura



Objetivo: Eliminar todas las fichas del tablero, excepto una.

Reglas: En cada movimiento, una ficha salta sobre otra y cae en la casilla siguiente, que debe estar vacía. La ficha sobre la que se ha saltado queda eliminada; es decir, sale del tablero.

- **Busca un código que te permita expresar con facilidad los movimientos.**

Nombrando las casillas como se muestra en el siguiente gráfico, representamos cada movimiento con un par *(m, n)* que significa: la ficha de la casilla *m* salta sobre su vecina y cae en *n*.

	1	2	3	
	4	5	6	
7	8	9	10	11
		12		

Una posible solución es la siguiente:

(8, 1); (1, 3); (5, 12); (11, 9); (3, 10); (10, 8); (7, 9); (12, 5)

Página 131

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Cristian pone varias canicas en una caja y realiza la siguiente experiencia:

Lanza la moneda apostando la mitad de las canicas que hay en la caja.

- **Si sale *cara,* añade la apuesta a la caja.**
- **Si sale *cruz,* retira la apuesta de la caja.**

Teniendo en cuenta que, estadísticamente, al lanzar la moneda, sale cara la mitad de las veces y cruz la otra mitad, responde:

a) Supón que en la caja hay 16 canicas. ¿Qué resultados se pueden esperar después de lanzar la moneda cuatro veces? ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno?

b) Supón que en la caja hay x canicas. ¿Cuáles serían los resultados después de dos tiradas?

c) ¿Crees que el juego es rentable para la caja? ¿Por qué?

Se sugiere desplegar todos los posibles resultados en un diagrama en árbol.

a) Los resultados posibles son:

81 → Probabilidad $\frac{1}{16}$

27 → Probabilidad $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

9 → Probabilidad $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

3 → Probabilidad $\frac{4}{16}$

1 → Probabilidad $\frac{1}{16}$

b) Después de dos tiradas, los resultados posibles serían:

$$\frac{9x}{4};\ \frac{3x}{4};\ \frac{3x}{4};\ \frac{x}{4}$$

c) La respuesta suscitará discusiones teniendo en cuenta que:

- Depende del número de tiradas. Si solo se hace una, es rentable, pues la posible ganancia es mayor que la posible pérdida.
- Si se hacen dos tiradas, la probabilidad de ganar es la misma que la de perder.
- Si se hacen tres tiradas, la probabilidad de ganar es la misma que la de perder, pero las posibles ganancias superan a las posibles pérdidas.
- Si se hacen más de tres tiradas, se pierde más veces de las que se gana, pero las posibles ganancias superan a las posibles pérdidas.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Completa en tu cuaderno las casillas vacías, siguiendo la lógica de la tabla.**

1	3	5	8	10	▨	15	n
2	12	22	37	▨	57	▨	▨

1	3	5	8	10	12	15	n
2	12	22	37	47	57	72	$5n-3$

2 **Si llamamos x a un número, expresa en lenguaje algebraico:**

a) Su doble.

b) El siguiente de su doble.

c) El doble de su siguiente.

d) El triple de su mitad.

a) $2x$

b) $2x+1$

c) $2(x+1)$

d) $3\frac{x}{2}$

3 **¿Cuáles son el coeficiente y el grado de cada uno de estos monomios?**

a) $5x$　　**b)** a^2b^2　　**c)** $-\frac{2}{3}xy^2$

a) El coeficiente es 5, y el grado, 1.

b) El coeficiente es 1, y el grado, 4.

c) El coeficiente es $-\frac{2}{3}$, y el grado, 3.

4 **Reduce estas expresiones:**

a) $2x+4+x-6$

b) $5x^2+2+6x-x-3x^2+1$

c) $3x-(x^2+3-4x)+4x^2$

a) $3x-2$

b) $2x^2+5x+3$

c) $3x^2+7x-3$

5 **Opera y reduce.**

a) $-\frac{1}{5}x^2(-5x)$　　**b)** $6x^4:2x^3$　　**c)** $\left(a+\frac{ab}{9}\right):\frac{2a}{9}$

a) x^3　　b) $3x$　　c) $\frac{9+b}{2}$

6 **Reduce estas expresiones:**

a) $2(x^2-5)-3(2x-1)$　　**b)** $x(x-1)+x^2(3x-2)$

a) $2x^2-6x-7$　　b) $3x^3-x^2-x$

7 **Considera los siguientes polinomios y calcula:**

$A = 3x^3 + 5x^2 - 6x + 8 \qquad B = x^3 - 5x^2 + 1$

a) $A + B$

b) $A - B$

a) $A + B = 4x^3 - 6x + 9$

b) $A - B = 2x^3 + 10x^2 - 6x + 7$

8 **Calcula el producto** $(2x - 1) \cdot (x^3 + 3x - 6)$**.**

$2x^4 + 6x^2 - 12x - x^3 - 3x + 6 = 2x^4 - x^3 + 6x^2 - 15x + 6$

9 **Calcula.**

a) $(x - 3)^2$	**b)** $(1 + 2x)^2$	**c)** $(x - 3) \cdot (x + 3)$
a) $x^2 - 6x + 9$	b) $1 + 4x + 4x^2$	c) $x^2 - 9$

10 **Saca factor común.**

a) $3a^2 + 6a$	**b)** $4x^3 + 6x^2 - 2x$
a) $3a \cdot (a + 2)$	b) $2x \cdot (2x^2 + 3x - 1)$

11 **Simplifica.**

a) $\dfrac{3a}{3a^2 + 6a}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

a) $\dfrac{3a}{3a(a + 2)} = \dfrac{1}{a + 2}$ b) $\dfrac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{(x - 3)^2} = \dfrac{x + 3}{x - 3}$

12 **¿Cuál de las siguientes fórmulas sirve para calcular la suma,** S**, de los primeros** n **múltiplos de 5?**

a) $\dfrac{4n + n^2}{5}$ **b)** $\dfrac{5n^2 + n}{2}$ **c)** $\dfrac{5(n^2 + n)}{2}$

La fórmula c) $\dfrac{5(n^2 + n)}{2}$.

7 ECUACIONES

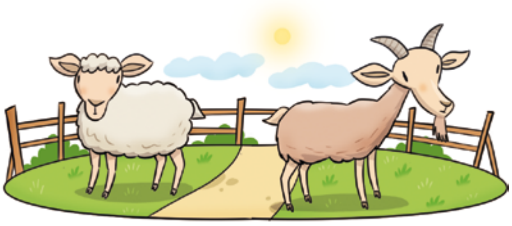
Página 132

Álgebra retórica y álgebra simbólica

1 **Observa y resuelve.**

LENGUAJE CORRIENTE

Entre ovejas y cabras son 36, y cuento tantos cuernos como ovejas.



LENGUAJE ALGEBRAICO

Ovejas → x

Cuernos → x

Cabras → $\frac{x}{2}$

Ovejas + Cabras = 36

$$x + \frac{x}{2} = 36$$

$2x + x = 72 \rightarrow 3x = 72 \rightarrow x = 24$

2 **Resuelve la ecuación por tanteo.**

Vamos probando valores para la x hasta llegar a la solución.

3 **¿Cuántas ovejas y cuántas cabras hay en el rebaño?**

Hay 24 ovejas y 12 cabras.

1 ECUACIONES: SIGNIFICADO Y UTILIDAD

Página 135

Para practicar

1 **¿Qué enunciado asocias a cada ecuación?**

a) **La tercera parte de un número es igual a su cuarta parte más 20 unidades. (Número → x)**

b) **La edad de Andrés es el triple que la de su hermana, y entre los dos suman 20 años. (Andrés → x años)**

c) **Un rectángulo es 3 metros más largo que ancho, y su perímetro mide 30 metros. (Ancho → x metros)**

d) **He pagado 30 € por 3 blocs de dibujo y una caja de acuarelas. Pero la caja costaba el doble que un bloc. (Bloc → x euros)**

e) **Un ciclista ha recorrido la distancia desde A hasta B a la velocidad de 15 km/h y un peatón, a 5 km/h, ha tardado una hora más. (Ciclista → x horas)**

f) **Un grillo avanza, en cada salto, un metro menos que un saltamontes. Pero el grillo, en 15 saltos, llega igual de lejos que el saltamontes en 5. (Saltamontes → x metros)**

$x + \frac{x}{3} = 20$ $\quad$ $2x + 2(x + 3) = 30$ $\quad$ $15(x - 1) = 5x$

$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 20$ $\quad$ $3x + 2x = 30$ $\quad$ $15x = 5(x + 1)$

a) $\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 20$ $\quad$ b) $x + \frac{x}{3} = 20$ $\quad$ c) $2x + 2(x + 3) = 30$

d) $3x + 2x = 30$ $\quad$ e) $15x = 5(x + 1)$ $\quad$ f) $15(x - 1) = 5x$

2 **Resuelve en el orden en que aparecen.**

a) $3x = 21$ $\quad$ **b)** $3x - 1 = 20$

c) $\frac{3x - 1}{5} = 4$ $\quad$ **d)** $\sqrt{\frac{3x - 1}{5}} = 2$

a) $x = 7$ $\quad$ b) $3x = 21 \rightarrow x = 7$

c) $3x - 1 = 20 \rightarrow x = 7$ $\quad$ d) $\frac{3x - 1}{5} = 4 \rightarrow x = 7$

3 **Resuelve con lo que sabes.**

a) $6x = 24$ $\quad$ **b)** $x + 3 = 10$

c) $2x - 4 = 6$ $\quad$ **d)** $2(x + 1) = 12$

e) $\frac{x}{3} = 9$ $\quad$ **f)** $\frac{x - 2}{2} = 5$

g) $\frac{x + 1}{3} = 2$ $\quad$ **h)** $\frac{7}{x + 1} = 1$

i) $x^2 + 1 = 26$ $\quad$ **j)** $\sqrt{3x + 1} = 5$

a) $x = 4$ $\quad$ b) $x = 7$

c) $2x = 10 \rightarrow x = 5$ $\quad$ d) $2x + 2 = 12 \rightarrow x = 5$

e) $x = 27$ $\quad$ f) $x - 2 = 10 \rightarrow x = 12$

g) $x + 1 = 6 \rightarrow x = 5$ $\quad$ h) $x + 1 = 7 \rightarrow x = 6$

i) $x^2 = 25 \rightarrow x = 5;\ x = -5$ $\quad$ j) $3x + 1 = 25 \rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 8$

4 **Encuentra alguna solución por tanteo.**

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$ **b)** $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $\frac{x}{4} + \frac{8}{x} = 3$ **d)** $x^3 - \sqrt{x} = 0$

a) $x = 1$; $x = -3$ b) $x = 2$; $x = 3$

c) $x = 8$; $x = 4$ d) $x = 0$; $x = 1$

5 **Comprueba que cada ecuación tiene como soluciones los valores de x que la acompañan.**

a) $\boxed{\begin{array}{c} x^2 - 4x - 5 = 0 \\ x = -1 \quad x = 5 \end{array}}$ **b)** $\boxed{\begin{array}{c} x^3 = 2x^2 + 3x \\ x = 0 \quad x = -1 \quad x = 3 \end{array}}$

a) $x = -1 \to (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$

$x = 5 \to 5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$

b) $x = 0 \to 0 = 0 + 0 = 0$

$x = -1 \to (-1)^3 = 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \to -1 = 2 - 3 = -1$

$x = 3 \to 3^3 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \to 27 = 18 + 9 = 27$

2 ▶ ECUACIONES: ELEMENTOS Y NOMENCLATURA

Página 136

Para practicar

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La ecuación $x^2 + 6x - x^2 = 7x - 1$ es de segundo grado.

b) La ecuación $2x + x \cdot y = 6$ es de segundo grado.

c) Los términos de una ecuación son los sumandos que forman los miembros.

d) Una ecuación puede tener más de dos miembros.

e) Todas las ecuaciones de primer grado son equivalentes.

f) La ecuación $x + 1 = 5$ es equivalente a la ecuación $x + 2 = 6$.

a) Falso.

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Falso.

e) Falso.

f) Verdadero.

2 **Copia en tu cuaderno y asocia cada ecuación con su solución.**

a) $4x + 4 = 5$ **b) $4x - 3 = x + 3$**

c) $x^2 - 3 = 2x$ **d) $3x = x + 1$**

$\boxed{3}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{2}$

a) $4x + 4 = 5 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

b) $4x - 3 = x + 3 \rightarrow x = 2$

c) $x^2 - 3 = 2x \rightarrow x = 3;\ x = -1$

d) $3x = x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

3 **Agrupa las ecuaciones equivalentes.**

a) $4x = 20$ **b) $3x - 1 = 8$**

c) $5x - 4 = x$ **d) $3x = 9$**

e) $4x - 5 = 15$ **f) $4x - 4 = 0$**

Son equivalentes a) y e) (solución $x = 5$), b) y d) (solución $x = 3$) y c) y f) (solución $x = 1$).

3 TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

Página 137

Para practicar

1 Despeja la incógnita con la consigna que se adjunta en cada caso y calcula la solución.

a) $x + 7 = 10 \to$ **Resta 7 en cada miembro.**

b) $x + 8 = 5 \to$ **Resta 8 en cada miembro.**

c) $x - 4 = 6 \to$ **Suma 4 en cada miembro.**

d) $x - 1 = 4 \to$ **Suma 1 en cada miembro.**

e) $6x = 12 \to$ **Divide entre 6 cada miembro.**

f) $-2x = 8 \to$ **Divide entre –2 cada miembro.**

g) $\frac{x}{3} = 5 \to$ **Multiplica por 3 cada miembro.**

h) $\frac{x}{-7} = 1 \to$ **Multiplica por –7 cada miembro.**

a) $x = 10 - 7 \to x = 3$

b) $x = 5 - 8 \to x = -3$

c) $x = 6 + 4 \to x = 10$

d) $x = 4 + 1 \to x = 5$

e) $x = \frac{12}{6} \to x = 2$

f) $x = \frac{8}{-2} \to x = -4$

g) $x = 5 \cdot 3 \to x = 15$

h) $x = 1 \cdot (-7) \to x = -7$

2 Despeja la incógnita y calcula la solución.

a) $x + 2 = 5$	**b)** $x + 3 = 2$
c) $x + 8 = 0$	**d)** $x - 1 = 5$
e) $x - 5 = 1$	**f)** $3x = 6$
g) $5x = 15$	**h)** $-5x = 10$
i) $\frac{x}{4} = -1$	**j)** $\frac{5x}{-2} = -10$

a) $x = 3$	b) $x = -1$
c) $x = -8$	d) $x = 6$
e) $x = 6$	f) $x = 2$
g) $x = 3$	h) $x = -2$
i) $x = -4$	j) $x = 4$

5 ▸ ECUACIONES CON DENOMINADORES

Página 140

Para fijar ideas

1 **Copia, multiplica para eliminar denominadores y resuelve.**

a) $4 - \frac{2x}{3} = x + \frac{2}{3}$ ← **Multiplica ambos lados por 3.**

$12 - \frac{6x}{3} = \square x + \frac{\square}{3}$

$12 - \square x = \square x + \square$

b) $\frac{5x}{6} - 1 = \frac{x}{3} - \frac{3}{4}$ ← **Multiplica ambos lados por 12.**

$\frac{60x}{6} - \square = \frac{\square}{3} - \frac{\square}{4}$

$\square x - \square = 4x - \square$

a) $12 - \frac{6x}{3} = 3x + \frac{6}{3}$

$12 - 2x = 3x + 2 \rightarrow x = 2$

b) $\frac{60x}{6} - 12 = \frac{12x}{3} - \frac{36}{4}$

$10x - 12 = 4x - 8 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

7 ▸ RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES

Página 142

Para fijar ideas

Reflexiona sobre las ayudas que se ofrecen en los siguientes problemas y, después, resuélvelos.

1 **Si a la mitad de un número le sumas su quinta parte, obtienes la misma cantidad que si a dicho número le quitas tres unidades. ¿Qué número es?**

- **El número → x**
- **Su mitad → $\frac{x}{2}$**
- **Su quinta parte → $\frac{x}{5}$**
- **El n.º menos tres → $x - 3$**

$$\boxed{\text{LA MITAD DEL N.º}} + \boxed{\text{LA QUINTA PARTE DEL N.º}} = \boxed{\text{EL N.º MENOS TRES}}$$

$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = x - 3$

Multiplicamos por 10 ambos lados:

$$5x + 2x = 10x - 0 \rightarrow 3x = 30 \rightarrow x = 10$$

Es el número 10.

2 **En mi clase, si hacemos equipos de tres, salen dos equipos más que si los hacemos de cuatro. ¿Cuántos somos en clase?**

- **En clase somos → x**
- **N.º equipos de tres → $\frac{x}{3}$**
- **N.º equipos de cuatro → $\frac{x}{4}$**

$$\boxed{\text{N.º DE EQUIPOS DE TRES}} - 2 = \boxed{\text{N.º DE EQUIPOS DE CUATRO}}$$

$\frac{x}{3} - 2 = \frac{x}{4}$

Multiplicamos por 12 ambos lados:

$$4x - 24 = 3x \rightarrow x = 24$$

En clase somos 24.

Página 143

Para fijar ideas

Reflexiona sobre las ayudas que se ofrecen en los siguientes problemas y, después, resuélvelos.

3 ODS Meta 2.3. **Una hortelana ha cargado en su furgoneta 35 cajas, unas de patatas, de 15 kilos, y otras de nabos, de 10 kilos. En total pesan 455 kilos. ¿Cuántas cajas eran de cada clase?**

	N.º DE CAJAS	PESO (kg)
PATATAS	x	$15 \cdot x$
NABOS	$35 - x$	$10 \cdot (35 - x)$

$$\boxed{\text{PESO DE } x \text{ CAJAS DE PATATAS}} + \boxed{\text{PESO DE } (35 - x) \text{ CAJAS DE NABOS}} = 455 \text{ kg}$$

$15x + 10 \cdot (35 - x) = 455 \rightarrow 15x + 350 - 10x = 455 \rightarrow 5x = 105 \rightarrow x = 21$

$35 - 21 = 14$

Eran 21 cajas de patatas y 14 de nabos.

4 **Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. Entre los tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?**

- **Edad de Rosa → x**
- **Edad de Juan → $x + 25$**
- **Edad de Alberto → $x - 26$**

$$\boxed{\text{EDAD DE ROSA}} + \boxed{\text{EDAD DE JUAN}} + \boxed{\text{EDAD DE ALBERTO}} = 98 \text{ años}$$

$x + (x + 25) + (x - 26) = 98 \ \rightarrow \ x = 33$

Rosa tiene 33 años; Juan, 58 años, y Alberto, 7 años.

5 **Un kilo de manzanas cuesta 0,50 € más que uno de naranjas. Marta ha comprado tres kilos de naranjas y uno de manzanas por 5,30 €. ¿A cómo están las naranjas? ¿Y las manzanas?**

- **Un kilo de naranjas → x**
- **Tres kilos de naranjas → $3x$**
- **Un kilo de manzanas → $x + 0,50$**

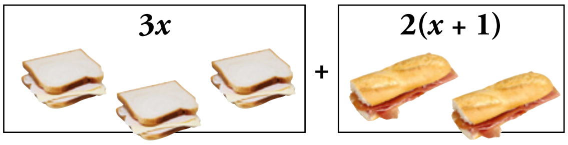
$$\boxed{\text{COSTE DE 3 KG DE NARANJAS}} + \boxed{\text{COSTE DE 1 KG DE MANZANAS}} = 5,30 \text{ €}$$

$3x + (x + 0,5) = 5,30 \ \rightarrow \ x = 1,20$

Un kilo de naranjas cuesta 1,20 €.

Un kilo de manzanas cuesta 1,70 €.

6 **La pandilla ha entrado a merendar en una bocadillería. Un bocadillo cuesta un euro más que un sándwich. Por tres sándwiches y dos bocadillos pagan 11 euros. ¿Cuánto cuesta un sándwich? ¿Y un bocadillo?**



= 11 €

Sándwich → x

Bocadillo → $x + 1$

$3x + 2 \cdot (x + 1) = 11 \ \rightarrow \ x = 1,80$

El sándwich cuesta 1,80 €, y el bocadillo, 2,80 €.

Página 144

Para practicar

1 **Reparte 99 € entre tres personas, de forma que la primera reciba la mitad que la segunda, y esta, el triple que la tercera.**

- **La tercera persona → x**
- **La segunda persona → $3x$**
- **La primera persona → $\frac{3x}{2}$**

$x + 3x + \frac{3x}{2} = 99 \rightarrow 2x + 6x + 3x = 198 \rightarrow x = \frac{198}{11} = 18$

La primera persona recibirá 27 €; la segunda, 54 € y la tercera, 18 €.

2 **En un taller se distribuye una paga de 5 000 € por beneficios. La encargada recibirá el doble que un oficial, y un oficial 200 € más que un peón. ¿Cuánto se llevará cada uno sabiendo que el taller tiene, además de la encargada, tres oficiales y cinco peones?**

- **Un peón → x**
- **Un oficial → $x + 200$**
- **La encargada → $2 \cdot (x + 200)$**

Antes de empezar, piensa: cinco peones recibirán $5x$ y tres oficiales…

$5x + 3 \cdot (x + 200) + 2 \cdot (x + 200) = 5\,000$

$5x + 5 \cdot (x + 200) = 5\,000 \to 10x = 4\,000 \to x = 400$

Cada peón recibirá 400 €; cada oficial, 600 €, y la encargada, 1 200 €.

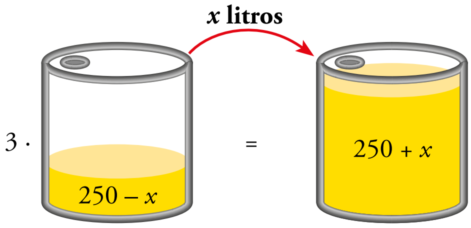
3 **Sara y Jorge se reparten a partes iguales la paga que les ha dado su abuela. Después, Jorge le dice a Sara: si te devuelvo los 10 € que te debo, solo tendré la mitad que tú. ¿Cuánto les dio su abuela?**

- **Paga de la abuela (€) → x**
- **Si Jorge devuelve 10 €, tendrá → $\frac{x}{2} - 10$**
- **Si Sara recibe 10 €, tendrá → $\frac{x}{2} + 10$**

$\frac{x}{2} - 10 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} + 10\right) \to \frac{x}{2} - 10 = \frac{x}{4} + 5 \to 2x - 40 = x + 20 \to x = 60$

La abuela les dio 60 €.

4 **Se han repartido 500 litros de gasóleo, a partes iguales, en dos barriles. ¿Cuántos litros se han de pasar de uno al otro para que el segundo quede con el triple de cantidad que el primero?**



$3 \cdot (250 - x) = 250 + x \to 750 - 3x = 250 + x \to 4x = 500 \to x = 125$

Se han de pasar 125 litros.

Página 145

Para practicar

5 **Un almacenista dispone de dos tipos de café, uno de calidad superior, a 12,70 €/kg, y otro, de inferior calidad, a 7,80 €/kg.**

¿Cuántos kilos del café superior debe mezclar con 100 kilos del inferior para conseguir una mezcla de calidad intermedia que salga a 9,90 €/kg?

	KILOS	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
SUPERIOR	x	12,70	$12{,}70 \cdot x$
INFERIOR	100	7,80	$7{,}80 \cdot 100$
MEZCLA	$x + 100$	9,90	$9{,}90\,(x + 100)$

$9{,}90 \cdot (x + 100) = 7{,}80 \cdot 100 + 12{,}70 \cdot x$

$9{,}9\,x + 990 = 780 + 12{,}7x \to x = 75$

Debe mezclar 75 kilos del café superior.

6 **Un orfebre dispone de dos aleaciones de oro, una con un 96 % de metal noble y la otra con solo el 75 %. ¿Cuántos gramos de la primera hay que fundir con 100 gramos de la segunda para subir su riqueza al 82 %?**

Si llamamos x a los gramos de la primera aleación que necesitamos al 96 %:

$$0{,}96x + 100 \cdot 0{,}75 = (100 + x) \cdot 0{,}82 \to 0{,}96x + 75 = 82 + 0{,}82x$$

$$0{,}14x = 7 \to x = 50$$

Hay que fundir 50 gramos de la primera aleación.

7 **Martina ha mezclado pinturas roja y amarilla para obtener 40 litros de pintura naranja. El litro de pintura roja cuesta 3,40 €, y el de amarilla, 2,60 €. ¿Cuántos litros de cada tipo ha utilizado si la pintura naranja ha salido a 2,95 €/L?**

	LITROS	PRECIO (€/L)	COSTE (€)
ROJA	x		
AMARILLA	$40 - x$		
MEZCLA	40	2,95	

$$3{,}40x + 2{,}60 \cdot (40 - x) = 2{,}95 \cdot 40 \to x = \frac{14}{0{,}80} = 17{,}5$$

Martina ha utilizado 17,5 litros de pintura roja y 22,5 litros de pintura amarilla.

8 **Una empresaria compra 100 camisas a 24 € la unidad y las pone a la venta aumentando el precio en un 30 %. Sin embargo, cuando ha vendido una parte, llegan las rebajas y las pone solo un 10 % más caras que lo que le costaron. Así, cuando se le terminan, ha recibido un beneficio global de un 25 %. ¿Cuántas vendió antes de las rebajas?**

Precio de la camisa que vende aumentando el 30 %: $24 \cdot 1{,}30 = 31{,}20$ €

Precio de la camisa vendida en rebajas, aumentando un 10 %: $24 \cdot 1{,}10 = 26{,}40$ €

Precio final por cada camisa: $24 \cdot 1{,}25 = 30$ €

Si x es el número de camisas vendidas antes de las rebajas:

$31{,}2x + 26{,}4 \cdot (100 - x) = 30 \cdot 100$

$31{,}2x + 2\,640 - 26{,}4x = 3\,000$

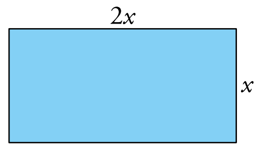
$4{,}8x = 360 \to x = 75$

Antes de las rebajas vendió 75 camisas.

Página 146

Para practicar

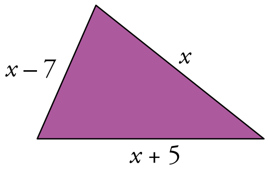
9 **Se han necesitado 150 metros de alambrada para cercar una finca rectangular que es el doble de larga que de ancha. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?**



$x + 2x + x + 2x = 150 \to x = 25$

La parcela mide 25 m de ancho y 50 m de largo.

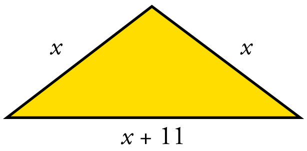
10 **En un triángulo escaleno, el lado mediano mide 7 cm más que el lado menor y 5 cm menos que el lado mayor. Si el perímetro mide 52 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?**



$(x - 7) + x + (x + 5) = 52 \rightarrow x = 18$

Los lados del triángulo miden 11 m, 18 m y 23 m.

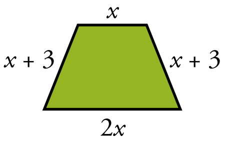
11 **En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 11 cm más que uno de los lados iguales y el perímetro mide 65 cm. Calcula la longitud de cada lado.**



$x + x + x + 11 = 65 \rightarrow 3x = 54 \rightarrow x = 18$

El lado desigual mide 29 cm, y cada uno de los lados iguales, 18 cm.

12 **En un trapecio cuyo perímetro mide 51 cm, la base mayor mide el doble que la menor, y esta, 3 cm menos que cada uno de los lados no paralelos. Calcula la medida de cada lado.**



$x + 2 \cdot (x + 3) + 2x = 51 \rightarrow 5x = 45 \rightarrow x = 9$

La base menor mide 9 cm; la mayor, 18 cm, y los lados no paralelos, 12 cm cada uno.

8 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Página 147

Para practicar

1 Indica cuáles de estas ecuaciones son de segundo grado y exprésalas en la forma general.

a) $x^2 = 5$ **b)** $x^2 + 3 = x^2 + x$

c) $2x(x - 1) = 4$ **d)** $x(x - 3) = x^2 - 1$

e) $7x^2 - 4x = x^2 + 2$ **f)** $5x + 6 - x^2 = 7x^3 + 4$

g) $3x^2 + 9 - 3x^2 = x$ **h)** $x^3 + 2x = x(x + 3)$

a) $x^2 + 0x - 5 = 0$

c) $2x^2 - 2x - 4 = 0$

e) $6x^2 - 4x - 2 = 0$

2 Asocia cada ecuación con su pareja de soluciones.

a) $x^2 = 25$ **b)** $x^2 = 9$

c) $x^2 + x - 6 = 0$ **d)** $x^2 - 7x + 10 = 0$

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ **f)** $x^2 - 5x + 6 = 0$

3	–5	2	5	–3

a) 5 y –5 b) 3 y –3

c) 2 y –3 d) 2 y 5

e) 2 y –5 f) 2 y 3

9 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Página 149

Para fijar ideas

1 **Copia, completa los coeficientes y calcula las soluciones.**

a) $\mathbf{x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}}$ **b)** $\mathbf{5x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}}$

$$x = \frac{-\square \pm \sqrt{\square^2 - 4 \cdot \square \cdot (-3)}}{2 \cdot \square} = \dots \qquad x = \frac{-(-\square) \pm \sqrt{(-\square)^2 - 4 \cdot \square \cdot (-2)}}{2 \cdot \square} = \dots$$

a) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \rightarrow x = 1;\ x = -3$

b) $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{10} \rightarrow x = 1;\ x = -\dfrac{2}{5}$

Para practicar

1 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 = 81$ **b)** $x^2 = 25$ **c)** $5x^2 = 20$

d) $x^2 - 9 = 0$ **e)** $x^2 + 6 = 10$ **f)** $4x^2 + 1 = 2$

g) $\dfrac{x^2}{7} = 7$ **h)** $\dfrac{5x^2}{8} = \dfrac{2}{5}$ **i)** $\dfrac{2x^2}{9} - \dfrac{1}{50} = 0$

a) $x = \pm 9$ b) $x = \pm 5$ c) $x = \pm 2$

d) $x = \pm 3$ e) $x = \pm 2$ f) $x = \pm\dfrac{1}{2}$

g) $x = \pm 7$ h) $x = \pm\dfrac{4}{5}$ i) $x = \pm\dfrac{3}{10}$

2 **Reduce, saca factor común y resuelve.**

a) $x^2 - 4x = 0$ **b)** $x^2 + 2x = 0$ **c)** $x^2 - x = 0$

d) $x^2 + x = 0$ **e)** $3x^2 - 2x = 0$ **f)** $5x^2 + x = 0$

g) $\dfrac{x^2}{3} = x$ **h)** $\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x}{3}$ **i)** $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{5x}{6}$

a) $x(x - 4) = 0$
$x = 0;\ x = 4$

b) $x(x + 2) = 0$
$x = 0;\ x = -2$

c) $x(x - 1) = 0$
$x = 0;\ x = 1$

d) $x(x + 1) = 0$
$x = 0;\ x = -1$

e) $x(3x - 2) = 0$
$x = 0;\ x = \dfrac{2}{3}$

f) $x(5x + 1) = 0$
$x = 0;\ x = -\dfrac{1}{5}$

g) $\dfrac{x^2}{x} = 3$
$x = 3$

h) $x(2x + 1) = 0$
$x = 0;\ x = -\dfrac{1}{2}$

i) $x(x - 5) = 0$
$x = 0;\ x = 5$

3 **Calcula la solución aplicando la fórmula.**

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 5 = 0$

c) $x^2 + x - 12 = 0$ **d)** $x^2 + 7x + 10 = 0$

e) $2x^2 - 7x + 6 = 0$ **f)** $x^2 - 2x + 1 = 0$

g) $x^2 + 6x + 9 = 0$ **h)** $x^2 - 3x + 3 = 0$

a) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \to x = 4;\ x = 2$

b) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \to x = 5;\ x = 1$

c) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \to x = 3;\ x = -4$

d) $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} \to x = -2;\ x = -5$

e) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \dfrac{7 \pm \sqrt{1}}{4} \to x = 2;\ x = \dfrac{3}{2}$

f) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \dfrac{2 \pm 0}{2} \to x = 1;\ x = 1$

g) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \dfrac{-6 \pm 0}{2} \to x = -3;\ x = -3$

h) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \to$ Sin solución

4 **Reduce y resuelve.**

a) $x^2 - 3x - 5 = 2x + 9$

b) $6x^2 - 5(x - 1) = x(x + 1) + 4$

c) $x\,(x + 1) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x - 4}{6}$

a) $x^2 - 5x - 14 = 0 \to x = 7;\ x = -2$

b) $5x^2 - 6x + 1 = 0 \to x = 1;\ x = \dfrac{1}{5}$

c) $6x^2 + 5x + 1 = 0 \to x = -\dfrac{1}{2};\ x = -\dfrac{1}{3}$

Página 150

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones sencillas

1 **Resuelve mentalmente.**

a) $x + 4 = 5$ **b)** $x - 3 = 6$ **c)** $7 + x = 10$

d) $7 - x = 5$ **e)** $9 = 15 - x$ **f)** $2 - x = 9$

a) $x = 1$ b) $x = 9$ c) $x = 3$

d) $x = 2$ e) $x = 6$ f) $x = -7$

2 **Resuelve.**

a) $2x - 5 + 3x + 1 = 3x - 2$

b) $x + 7 = 12x - 3 - 8x + 1$

c) $6x - 1 + x = 4 - 5x + 3$

d) $x + 2x + 3x - 5 = 4x - 9$

e) $5x + 4 - 6x = 7 - x - 3$

f) $4x + 2 + 7x = 10x + 3 + x$

a) $x = 1$

b) $x = 3$

c) $x = \frac{2}{3}$

d) $x = -2$

e) Es una identidad. Tiene infinitas soluciones.

f) Incompatible. Sin solución.

3 **Quita paréntesis y resuelve.**

a) $6(x + 1) - 4x = 5x - 9$

b) $18x - 13 = 8 - 4(3x - 1)$

c) $3x + 5(2x - 1) = 8 - 3(4 - 5x)$

d) $5 - (4x + 6) = 3x + (7 - 4x)$

e) $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$

f) $11 - 5(3x + 2) + 7x = 1 - 8x$

g) $13x - 5(x + 2) = 4(2x - 1) + 7$

a) $6x + 6 - 4x = 5x - 9 \rightarrow 15 = 3x \rightarrow x = 5$

b) $18x - 13 = 8 - 12x + 4 \rightarrow 30x = 25 \rightarrow x = \frac{5}{6}$

c) $3x + 10x - 5 = 8 - 12 + 15x \rightarrow -1 = 2x \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

d) $5 - 4x - 6 = 3x + 7 - 4x \rightarrow -8 = 3x \rightarrow x = -\frac{8}{3}$

e) $x - 14x - 7 = 12 - 10x - 13 \rightarrow -6 = 3x \rightarrow x = -2$

f) $11 - 15x - 10 + 7x = 1 - 8x \rightarrow 1 - 8x = 1 - 8x \rightarrow$ Identidad. Infinitas soluciones.

g) $13x - 5x - 10 = 8x - 4 + 7 \rightarrow 8x - 10 = 8x + 3 \rightarrow$ Incompatible. No tiene solución.

Ecuaciones de primer grado con denominadores

4 **Quita denominadores y resuelve.**

a) $\frac{5x}{3} + 1 = \frac{5}{6} + x$

b) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{4} = x - \frac{7x}{10} - \frac{1}{5}$

c) $\frac{x}{3} + \frac{4}{15} - x = \frac{1}{6} - \frac{7x}{10}$

d) $\frac{7x}{4} - 1 - \frac{x}{8} = x + \frac{5x}{8} + 1$

e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5}{6} + \frac{x}{6} - \frac{2}{3}$

a) $10x + 6 = 5 + 6x \rightarrow x = -\frac{1}{4}$

b) $12x - 5 = 20x - 14x - 4 \rightarrow x = \frac{1}{6}$

c) $10x + 8 - 30x = 5 - 21x \rightarrow x = -3$

d) $14x - 8 - x = 8x + 5x + 8 \rightarrow 0x = 16 \rightarrow$ Sin solución.

e) $3x + 1 - 2x = x - 4 + 5 \rightarrow x + 1 = x + 1 \rightarrow$ Identidad. Tiene infinitas soluciones.

5 **Elimina los paréntesis y los denominadores, y resuelve.**

a) $2x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)$

b) $\frac{5}{6}(2x - 1) - x = \frac{x}{6}$

c) $\frac{x}{5} - 1 = 2\left(x - \frac{4}{5}\right)$

d) $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(2x - 5)$

a) $4x - 5 = x - 3 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $5(2x - 1) - 6x = x \rightarrow 10x - 5 - 6x = x \rightarrow x = \frac{5}{3}$

c) $\frac{x}{5} - 1 = 2x - \frac{8}{5} \rightarrow x - 5 = 10x - 8 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

d) $x - \frac{1}{3} = \frac{x}{3} - \frac{5}{6} \rightarrow 6x - 2 = 2x - 5 \rightarrow x = -\frac{3}{4}$

6 Ejercicio resuelto.

7 **Elimina denominadores y resuelve.**

a) $1 - \frac{x+1}{3} = 2x - \frac{1}{3}$

b) $1 - \frac{1-x}{3} = x + \frac{1}{2}$

c) $\frac{3x-1}{2} - 1 = 2x - 2$

d) $x + \frac{2-3x}{5} = \frac{x}{2} + 1$

e) $2x + \frac{x-3}{2} = \frac{x-3}{4}$

f) $\frac{3x}{5} - 1 = x - \frac{x+1}{2}$

g) $\frac{x+3}{5} - \frac{x-6}{7} = 1$

h) $\frac{1-x}{3} - \frac{x-1}{12} = \frac{3x-1}{4}$

a) $3 - (x + 1) = 6x - 1 \;\rightarrow\; 3 - x - 1 = 6x - 1 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{7}$

b) $6 - 2(1 - x) = 6x + 3 \;\rightarrow\; 6 - 2 + 2x = 6x + 3 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{4}$

c) $3x - 1 - 2 = 4x - 4 \;\rightarrow\; x = 1$

d) $10x + 2(2 - 3x) = 5x + 10 \;\rightarrow\; 10x + 4 - 6x = 5x + 10 \;\rightarrow\; x = -6$

e) $8x + 2(x - 3) = x - 3 \;\rightarrow\; 8x + 2x - 6 = x - 3 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{3}$

f) $6x - 10 = 10x - 5(x + 1) \;\rightarrow\; 6x - 10 = 10x - 5x - 5 \;\rightarrow\; x = 5$

g) $7(x + 3) - 5(x - 6) = 35 \;\rightarrow\; 7x + 21 - 5x + 30 = 35 \;\rightarrow\; x = -8$

h) $4(1 - x) - (x - 1) = 3(3x - 1) \;\rightarrow\; 4 - 4x - x + 1 = 9x - 3 \;\rightarrow\; x = \frac{4}{7}$

8 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\frac{3x-1}{4} - \frac{2x+1}{5} = \frac{7x-13}{20}$

b) $2 + \frac{2}{5}(x+1) = x - \frac{2x+3}{5}$

c) $\frac{2}{3}(1-3x) + \frac{3(x-1)}{4} = \frac{5}{12}(1-x)$

d) $\frac{3}{5}\left(\frac{x-1}{3}+1\right) + x = \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)$

a) $5(3x - 1) - 4(2x + 1) = 7x - 13 \;\rightarrow\; 15x - 5 - 8x - 4 = 7x - 13 \;\rightarrow$ Incompatible. No tiene solución.

b) $10 + 2(x + 1) = 5x - (2x + 3) \;\rightarrow\; 10 + 2x + 2 = 5x - 2x - 3 \;\rightarrow\; x = 15$

c) $8(1 - 3x) + 9(x - 1) = 5(1 - x) \;\rightarrow\; 8 - 24x + 9x - 9 = 5 - 5x \;\rightarrow\; x = \frac{-3}{5}$

d) $\frac{x-1}{5} + \frac{3}{5} + x = \frac{3x}{4} - \frac{1}{2} \;\rightarrow\; 4x - 4 + 12 + 20x = 15x - 10 \;\rightarrow\; x = -2$

9 Ejercicio resuelto.

10 **Resuelve, como en el ejercicio anterior.**

a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3x} + 1$ **b)** $\frac{1}{2x} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5x} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2x} - \frac{2}{9x} = 1 + \frac{1}{3x}$ **d)** $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2(x-1)}$

Multiplica por 6x, 10x, 18x y 2(x – 1), respectivamente.

a) $6x \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\right) = 6x \cdot \left(\frac{5}{3x} + 1\right) \rightarrow 12 + 3x = 10 + 6x \rightarrow 12 - 10 = 6x - 3x \;\rightarrow\; 2 = 3x \rightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $10x \cdot \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{5}\right) = 10x \cdot \left(\frac{1}{5x} + \frac{1}{2}\right) \rightarrow 5 + 2x = 2 + 5x \rightarrow 5 - 2 = 5x - 2x \;\rightarrow\; 3 = 3x \rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$

c) $18x \cdot \left(\frac{1}{2x} - \frac{2}{9x}\right) = 18x \cdot \left(1 + \frac{1}{3x}\right) \rightarrow 9 - 4 = 18x + 6 \;\rightarrow\; 5 - 6 = 18x \rightarrow -1 = 18x \rightarrow x = -\frac{1}{18}$

d) $2(x - 1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}\right) = 2(x-1) \cdot \left(\frac{3}{2(x-1)}\right) \rightarrow 2 + 3(x - 1) = 3 \rightarrow 2 + 3x - 3 = 3 \rightarrow 3x = 4 \;\rightarrow\; x = \frac{4}{3}$

Página 151

Ecuaciones de segundo grado

11 **Observa, razona y resuelve.**

a) $5x^2 = 45$ **b)** $12x^2 = 3$

c) $x(x - 3) = 0$ **d)** $(x + 5)x = 0$

e) $x(3x - 1) = 0$ **f)** $3x(5x + 2) = 0$

g) $x^2 - 7x = 0$ **h)** $x^2 + 4x = 0$

i) $3x^2 = 2x$ **j)** $5x^2 = x^2 - 2x$

a) $x = \pm 3$ b) $x = \pm\frac{1}{2}$

c) $x = 0;\ x = 3$ d) $x = 0;\ x = -5$

e) $x = 0;\ x = \frac{1}{3}$ f) $x = 0;\ x = -\frac{2}{5}$

g) $x = 0;\ x = 7$ h) $x = 0;\ x = -4$

i) $x = 0;\ x = \frac{2}{3}$ j) $x = 0;\ x = -\frac{1}{2}$

12 **Resuelve aplicando la fórmula.**

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 9x + 40 = 0$ **d)** $5x^2 + 14x - 3 = 0$

e) $15x^2 - 16x + 4 = 0$ **f)** $14x^2 + 5x - 1 = 0$

g) $x^2 - 10x + 25 = 0$ **h)** $9x^2 + 6x + 1 = 0$

i) $6x^2 - 5x + 2 = 0$ **j)** $6x^2 - x - 5 = 0$

a) $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} \to x = 7;\ x = 3$

b) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \to x = 1;\ x = -3$

c) $x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 160}}{2} \to$ Sin solución.

d) $x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 60}}{10} \to x = \frac{1}{5};\ x = -3$

e) $x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{30} \to x = \frac{2}{3};\ x = \frac{2}{5}$

f) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{28} \to x = \frac{1}{7};\ x = -\frac{1}{2}$

g) $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} \to x = 5;\ x = 5$

h) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} \to x = -\frac{1}{3};\ x = -\frac{1}{3}$

i) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 48}}{12} \to$ Sin solución.

j) $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} \to x = 6;\ x = -5$

13 **Reduce a la forma general y aplica la fórmula.**

a) $x^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{4} - 1\right)$

b) $\frac{x}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{6}\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{3}\right)$

c) $\frac{x}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right) = 2 - \frac{x}{2}\left(x - \frac{5}{3}\right)$

d) $\frac{x^2}{2} + x = \frac{2x^2 - 5}{3} - 1$

a) $20x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4};\ x = -\frac{1}{5}$

b) $15x^2 - 19x = 0 \rightarrow x = 0;\ x = \frac{19}{15}$

c) $x^2 - 4x - 12 = 0 \rightarrow x = 6;\ x = -2$

d) $x^2 - 6x - 16 = 0 \rightarrow x = 8;\ x = -2$

Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado

14 **Calcula, primero, mentalmente y, después, con la ayuda de una ecuación.**

a) Si a un número le sumas 12, obtienes 25. ¿De qué número se trata?

b) Si a un número le restas 10, obtienes 20. ¿Qué número es?

c) Un número, x, y su siguiente, $x + 1$, suman 13. ¿Cuáles son esos números?

d) En mi clase somos 29 en total, pero hay tres chicos más que chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?

a) $x + 12 = 25 \rightarrow x = 13$

El número es 13.

b) $x - 10 = 20 \rightarrow x = 30$

El número es 30.

c) $x + (x + 1) = 13 \rightarrow x = 6$

Los números son 6 y 7.

d) $\left.\begin{array}{l}\text{Chicas} \rightarrow x \\ \text{Chicos} \rightarrow x + 3\end{array}\right\} \ x + (x + 3) = 29 \rightarrow x = 13$

En la clase hay 13 chicas y 16 chicos.

15 **Busca un número cuyo doble más tres unidades sea igual a su triple menos cinco unidades.**

$2x + 3 = 3x - 5 \rightarrow x = 8$. El número es 8.

16 **Multiplicando un número por 5, se obtiene el mismo que sumándole 12. ¿Cuál es ese número?**

$5x = x + 12 \rightarrow x = 3$. El número es 3.

17 **La suma de dos números es 167, y su diferencia, 19. ¿Cuáles son esos números?**

Un número $\rightarrow x$ Otro número $\rightarrow x + 19$

$x + (x + 19) = 167 \rightarrow x = 74;\ x + 19 = 93$

Los números son 74 y 93.

18 **Calcula el número natural que sumado a su siguiente da 157.**

- **El número** → x
- **Su siguiente** → $x + 1$

$x + (x + 1) = 157 \rightarrow x = 78$

El número es 78.

19 **La suma de tres números consecutivos es 135. ¿Cuáles son esos números?**

$(x - 1) + x + (x + 1) = 135 \rightarrow x = 45$

Los números son 44, 45 y 46.

20 **Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y dos años menor que su hermana Blanca. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 34 años.**

Antonio → $x - 7$; **Teresa** → x; **Blanca** → $x + 2$

$(x - 7) + x + (x + 2) = 34 \rightarrow x = 13$

Antonio tiene $x - 7 = 13 - 7 = 6$ años.

Teresa tiene 13 años.

Blanca tiene $x + 2 = 13 + 2 = 15$ años.

21 **Una ensaimada cuesta 10 céntimos más que un cruasán. Tres cruasanes y cuatro ensaimadas han costado 6 euros. ¿Cuál es el coste de cada pieza?**

Cruasán → x

Ensaimada → $x + 10$

$3x + 4(x + 10) = 600 \rightarrow x = 80$

Un cruasán cuesta 80 céntimos, y una ensaimada, 90 céntimos.

22 **Nicolás ha comprado en las rebajas dos pantalones y tres camisetas por 161 €. ¿Cuál era el precio de cada artículo, sabiendo que un pantalón costaba el doble que una camiseta?**

Camiseta → x

Pantalón → $2x$

$2 \cdot 2x + 3x = 161 \rightarrow x = 23$

Una camiseta cuesta 23 €, y un pantalón, 46 €.

23 **Un depósito de agua se abastece de dos grifos. Abriendo solo el primero, el depósito se llena en 40 minutos. Pero si se abre también el segundo, que aporta 5 litros por minuto, entonces el depósito se llena en 30 minutos. ¿Qué caudal aporta el primer grifo? ¿Cuál es la capacidad del depósito?**

Litros por minuto del primer grifo → x

$$40x = 30 \cdot (x + 5) \rightarrow 10x = 150 \rightarrow x = 15$$

El primer grifo aporta 15 litros por minuto.

$$40 \cdot 15 = 600$$

La capacidad del depósito es de 600 litros.

24 **En la caja de un supermercado hay 1140 euros repartidos en billetes de 5, 10, 20 y 50 euros.**

Sabiendo que:

— Hay el doble de billetes de 5 € que de 10 €.

— De 10 € hay la misma cantidad que de 20 €.

— De 20 € hay seis billetes más que de 50 €.

¿Cuántos billetes de cada clase hay en la caja?

Billetes de 50 € → x

Billetes de 20 € → $x + 6$

Billetes de 10 € → $x + 6$

Billetes de 5 € → $2(x + 6)$

$50x + 20(x + 6) + 10(x + 6) + 5 \cdot 2 \cdot (x + 6) = 1\,140 \rightarrow x = 10$

En la caja hay 10 billetes de 50 €, 16 billetes de 20 €, 16 billetes de 10 € y 32 billetes de 5 €.

25 **Un hortelano siembra la mitad de su huerta de melones, la tercera parte de tomates, y el resto, que son 200 m^2, de patatas. ¿Qué superficie tiene la huerta?**

- **Superficie huerta → x**
- **Tomates → $x/3$**
- **Melones → $x/2$**
- **Patatas → 200 m^2**

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 200 = x \rightarrow x = 1\,200$

La huerta tiene una superficie de 1 200 m^2.

Página 152

26 **Adrián, andando, avanza 0,80 m en cada paso y corriendo, 1,25 m. Para dar una vuelta en la pista del polideportivo, necesita 180 zancadas más, si va andando, que si lo hace corriendo. ¿Cuántas zancadas da, en cada caso, en una vuelta? ¿Cuál es la longitud de la pista?**

Pasos que da Adrián corriendo → x

Pasos que da Adrián andando → $180 + x$

$$1{,}25 \cdot x = 0{,}80 \cdot (180 + x) \rightarrow 0{,}45x = 144 \rightarrow x = 320$$

$$180 + 320 = 500$$

En una vuelta, si va corriendo da 320 pasos, y andando, 500 pasos.

$$1{,}25 \cdot 320 = 400$$

La longitud de la pista es 400 metros.

27 **Del horno de un obrador han salido dos tandas con el mismo número de magdalenas. La primera se ha envasado en bolsas de 10 unidades y la segunda en bolsas de 12. ¿Cuántas magdalenas salen en cada tanda si se han llenado 5 bolsas más en la primera tanda que en la segunda?**

- **N.º de magdalenas por hornada → x**
- **N.º de bolsas de 10 unidades → $\frac{x}{10}$**
- **N.º de bolsas de 12 unidades → $\frac{x}{12}$**

$\frac{x}{10} = \frac{x}{12} + 5 \rightarrow 6x = 5x + 300 \rightarrow x = 300$

En cada tanda salen 300 magdalenas.

28 **Un grifo llena un depósito en 30 minutos. Otro grifo, con un caudal inferior al anterior en 2 litros por minuto, llena un segundo depósito en 20 minutos.**

Sabiendo que en el primer depósito caben 200 litros más que en el segundo, ¿cuál es el caudal de cada grifo?

Caudal del primer grifo $\rightarrow x$

Caudal del segundo grifo $\rightarrow x - 2$

$30 \cdot x = 20 \cdot (x - 2) + 200$

$30x - 20x = 200 - 40$

$10x = 160$

$x = 16$

El primer grifo tiene un caudal de 16 litros por minuto, y el segundo, 14 litros por minuto.

29 Problema resuelto.

30 **Un padre tiene 38 años, y su hijo, 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que el padre tenga solo el doble de edad que el hijo?**

	HOY	DENTRO DE *X* AÑOS
PADRE	38	$38 + x$
HIJO	11	$11 + x$

$38 + x = 2(11 + x) \rightarrow x = 16$

Han de transcurrir 16 años.

31 **La edad de doña Adela es seis veces la de su nieto Juan, pero dentro de 8 años solo será el cuádruple. ¿Qué edad tiene cada uno?**

	EDAD HOY	EDAD DENTRO DE 8 AÑOS
NIETO	x	$x + 8$
DOÑA ADELA	$6x$	$6x + 8$

EDAD DE DOÑA ADELA DENTRO DE 8 AÑOS = 4 · EDAD DEL NIETO DENTRO DE 8 AÑOS

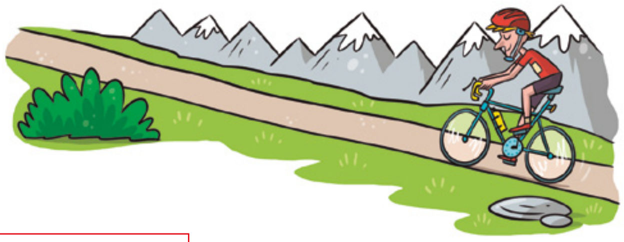
	HOY	DENTRO DE 8 AÑOS
ABUELA	$6x$	$6x + 8$
JUAN	x	$x + 8$

$4(x + 8) = 6x + 8 \rightarrow x = 12$

Juan tiene 12 años, y Adela, 72 años.

32 **Un ciclista sube un puerto a 15 km/h y, después, desciende por el mismo camino a 35 km/h. Si la ruta ha durado 30 minutos, ¿cuánto tiempo ha invertido en la subida?**

- **Tiempo de subida** $\rightarrow x$ **(horas)**
- **Tiempo de bajada** $\rightarrow 1/2 - x$ **(horas)**
- **Distancia recorrida subiendo** $\rightarrow 15x$
- **Distancia recorrida bajando** $\rightarrow 35\left(\frac{1}{2} - x\right)$



DISTANCIA RECORRIDA SUBIENDO = DISTANCIA RECORRIDA BAJANDO

$15x = 35\left(\frac{1}{2} - x\right) \rightarrow x = \frac{7}{20}$

En la subida ha invertido $\frac{7}{20}$ horas. Es decir, $\frac{7}{20}$ h = $\frac{21}{60}$ h = 21 minutos.

33 **Dos ciclistas parten simultáneamente; uno, de A hacia B, a la velocidad de 24 km/h, y el otro, de B hacia A, a 16 km/h. Si la distancia entre A y B es de 30 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?**

- **Tiempo hasta el encuentro → x (horas)**
- **Distancia recorrida por el primero → $24x$**
- **Distancia recorrida por el segundo → $16x$**

$$\boxed{\begin{matrix}\text{DISTANCIA RECORRIDA}\\ \text{POR EL PRIMERO}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{DISTANCIA RECORRIDA}\\ \text{POR EL SEGUNDO}\end{matrix}} = 30$$

$24x + 16x = 30 \rightarrow x = \frac{3}{4}$

Tardan en encontrarse tres cuartos de hora.

34 **Dos trenes se encuentran, respectivamente, en las estaciones de dos ciudades separadas entre sí 132 km. Ambos parten a la misma hora, por vías paralelas, hacia la ciudad contraria. Si el primero va a 70 km/h, y el segundo, a 95 km/h, ¿cuánto tardarán en cruzarse?**

$70x + 95x = 132 \rightarrow x = \frac{4}{5}$

Tardan en encontrarse $\frac{4}{5}$ h. Es decir, $\frac{4}{5}$ h $= \frac{48}{60}$ h $= 48$ minutos.

35 **Un ciclista sale de cierta población, por carretera, a la velocidad de 22 km/h. Hora y media después, sale en su búsqueda un motorista a 55 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?**

Tiempo hasta el alcance → x

Distancia recorrida por el motorista → $55x$

Distancia recorrida por el ciclista → $22 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)$

$55x = 22 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) \rightarrow x = 1$

La moto tarda una hora en alcanzar al ciclista.

Página 153

36 **Una ciclista circula por una carretera a 18 km/h durante 20 minutos. ¿A qué velocidad debería ir durante los 10 minutos siguientes para que la media de esos treinta minutos resulte de 20 km/h?**

$18 \cdot 20 + v \cdot 10 = 20 \cdot 30 \rightarrow v = 24$

Debería ir a 24 km/h.

37 **Se han pagado 66 € por una prenda que estaba rebajada un 12 %. ¿Cuál era el precio sin rebaja?**

- **Precio original → x**
- **Rebaja → $\frac{12x}{100}$**
- **Ecuación → $x - \frac{12x}{100} = 66$**

$x - \frac{12x}{100} = 66 \rightarrow x = 75$. El precio sin rebaja era de 75 €.

38 **Laura ha estado en las rebajas y ha comprado una falda y una blusa por 59 €. La falda costaba 16 € más que la blusa, pero le han hecho un 20 % de rebaja, y en la blusa, solo un 15 %. ¿Cuánto costaba cada prenda sin rebajar?**

	COSTE SIN REBAJA	COSTE CON REBAJA
FALDA	x	$0,80 \cdot x$
BLUSA	$x - 16$	$0,85 \cdot (x - 16)$

$\boxed{\text{COSTE FALDA REBAJADA}} + \boxed{\text{COSTE BLUSA REBAJADA}} = 59$ €

$0,80x + 0,85 \cdot (x - 16) = 59 \rightarrow x = 44$

$44 - 16 = 28$

La falda costaba 44 €, y la blusa, 28 €.

39 **Un fabricante de queso ha mezclado cierta cantidad de leche de vaca, a 0,50 €/L, con otra cantidad de leche de oveja, a 0,80 €/L, obteniendo 300 litros de mezcla a un precio medio de 0,70 €/L. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche empleó?**

	CANTIDAD (L)	PRECIO (€/L)	COSTE (€)
VACA	x	0,50	$0,5 \cdot x$
OVEJA	$300 - x$	0,80	$0,8 \cdot (300 - x)$
MEZCLA	300	0,70	$0,7 \cdot 300$

$\boxed{\text{COSTE LECHE VACA}} + \boxed{\text{COSTE LECHE OVEJA}} = \boxed{\text{COSTE MEZCLA}}$

$0,5x + 0,8(300 - x) = 0,7 \cdot 300 \rightarrow x = 100$

Se han mezclado 100 litros de leche de vaca con 200 litros de leche de oveja.

40 **Una empresa compra un depósito de zumo concentrado al precio de 0,35 €/L. Para rebajarlo, añade 35 litros de agua. Así, el litro sale 7 céntimos más barato. ¿Cuánto zumo había en el depósito antes de aguarlo?**

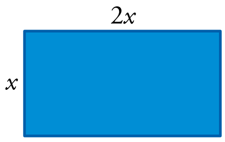
$$0,35x = (x + 35) \cdot (0,35 - 0,07) \rightarrow x = \frac{9,8}{0,07} = 140$$

En un principio había 140 litros en el depósito.

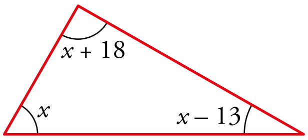
41 **Para delimitar una zona rectangular, el doble de larga que de ancha, se han necesitado 84 m de cinta. ¿Cuáles son las dimensiones del sector delimitado?**

$x + 2x + x + 2x = 84 \rightarrow x = 14$

La zona medirá 14 m × 28 m.



42 **La amplitud de uno de los ángulos de un triángulo es 13 grados mayor y 18 grados menor, respectivamente, que las amplitudes de los otros dos ángulos. Calcula la medida de cada ángulo.**



$$x + (x + 18) + (x - 13) = 180 \rightarrow x = \frac{175}{3} \rightarrow 58° \ 20'$$

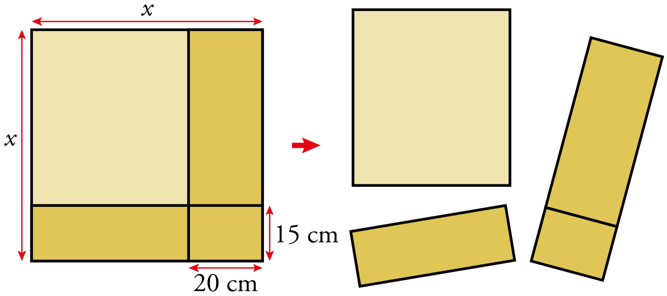
Los ángulos miden: $x = \frac{175}{3} = 58° \ 20'$

$x + 18 = 76° \ 20'$

$x - 13 = 45° \ 20'$

43 Problema resuelto.

44 **En una plancha cuadrada de madera, se dan dos cortes perpendiculares entre sí y paralelos a los lados. Así se separan dos tablas, de 20 cm y 15 cm de achura, respectivamente. ¿Cuáles eran las dimensiones de la plancha, si las tablas cortadas tienen una superficie de 0,32 m^2?**



$0{,}32\ \text{m}^2 = 3\,200\ \text{cm}^2$

Primera plancha $\longrightarrow 20x\ \text{cm}^2$

Segunda plancha $\longrightarrow 15 \cdot (x - 20)\ \text{cm}^2$

$20x + 15x - 300 = 3\,200$

$35x = 3\,500 \longrightarrow x = 100$

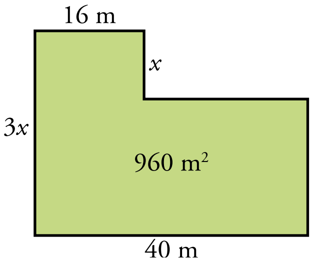
La plancha era un cuadrado de 100 cm de lado.

Página 154

Analiza y exprésate

45 **Analiza las soluciones que siguen al problema y explica cómo se ha construido la ecuación en cada caso.**

Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que tiene una superficie de 960 metros cuadrados.



Resolución A

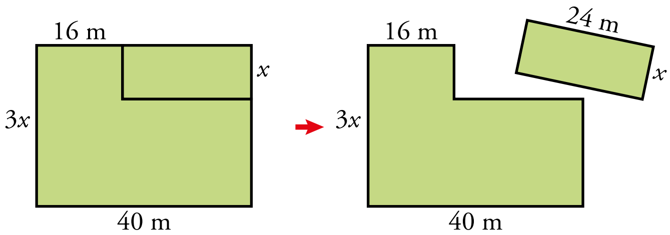
$$16 \cdot 3x + (40 - 16) \cdot (3x - x) = 960$$

$$48x + 24 \cdot 2x = 960 \longrightarrow 48x + 48x = 960$$

$$96x = 960 \longrightarrow x = \frac{960}{96} \longrightarrow x = 10\ \text{m}$$

Perímetro = 40 + 20 + 24 + 10 + 16 + 30 = 140 m

Resolución B



$$40 \cdot 3x - 24 \cdot x = 960$$

$$120x - 24x = 960 \longrightarrow 96x = 960 \longrightarrow x = 10\ \text{m}$$

Perímetro = 140 m

Resolución C

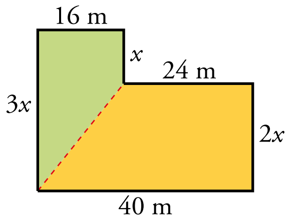
$$\mathbf{960 - 16 \cdot x = 40 \cdot (3x - x)}$$

$$\mathbf{960 - 16x = 40 \cdot 2x \rightarrow 960 = 80x + 16x}$$

$$\mathbf{960 = 96x \rightarrow x = 10\ m}$$

Perímetro = 140 m

Resolución D



$$\mathbf{\frac{3x + x}{2} \cdot 16 + \frac{24 + 40}{2} \cdot 2x = 960}$$

$$\mathbf{2x \cdot 16 + 32 \cdot 2x = 960 \rightarrow 96x = 960 \rightarrow x = 10\ m}$$

Perímetro = 140 m

En la resolución A, se ha calculado la suma de las áreas de dos rectángulos verticales y se ha igualado a la superficie dada, para calcular x.

En la resolución B, para calcular la superficie de la figura, se ha restado al rectángulo grande el pequeño de la esquina superior izquierda y, así, se ha obtenido la incógnita x necesaria para calcular el perímetro.

En la resolución C, se ha calculado le medida del recuadro superior pequeño y esta se ha restado a la superficie total, para igualarlo a la superficie del rectángulo grande inferior.

En la resolución D, se divide la superficie en dos paralelogramos y sumamos sus áreas para obtener la superficie total indicada.

Resuelve problemas con ecuaciones de segundo grado

46 Ejercicio resuelto.

47 **Calcula, primero, mentalmente y, después, con una ecuación.**

a) ¿Qué número multiplicado por su siguiente da 12?

$$\mathbf{x \cdot (x + 1) = 12}$$

b) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 5. ¿De qué números se trata?

$$\mathbf{x^2 + (x + 1)^2 = 5}$$

a) $x = 3$; $x = -4$. Se trata de 3 y 4 o –4 y –3.

b) $x = 1$; $x = -2$. Se trata de 1 y 2 o –2 y –1.

48 **Si un número aumentado en tres unidades se multiplica por el mismo número disminuido en otras tres, se obtiene 55. ¿Qué número es?**

$$\mathbf{(x + 3) \cdot (x - 3) = 55}$$

$x = +8$; $x = -8$

El número puede ser 8 o –8.

49 **Si multiplico mi edad por la de mi hermana, a la que le saco 5 años, obtengo el triple de la edad de mi madre, que me tuvo a los 28. ¿Cuántos años tengo?**

- **Mi edad → x**
- **La de mi hermana → $x - 5$**
- **La edad de mi madre → $x + 28$**

$x \cdot (x - 5) = 3(x + 28) \rightarrow x^2 - 8x - 84 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 336}}{2} = \frac{8 \pm 20}{2} \rightarrow x = 14;\ x = -6$$

La solución –6 la descartamos porque no puedo tener una edad negativa.

Tengo 14 años.

50 **Esta mañana han salido del aparcamiento de mi bloque seis coches más de los que han entrado. Si el producto de los unos por los otros es igual al número de ruedas de todos ellos, ¿cuántos coches han salido y cuántos han entrado?**

Coches que han entrado → x

Coches que han salido → $x + 6$

$x \cdot (x + 6) = 4 \cdot (x + x + 6) \rightarrow \mathrm{x}^2 - 2x - 24 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2} \rightarrow x = -4;\ x = 6$$

Descartamos la solución negativa.

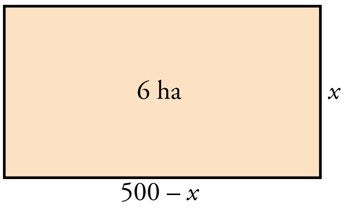
Han entrado 6 coches y han salido 12.

Página 155

51 Ejercicio resuelto.

52 **Una finca rectangular ocupa una superficie de 6 hectáreas y tiene un perímetro de 1 000 metros. Calcula las dimensiones de la finca.**

Recuerda: 1 ha = 10 000 m²



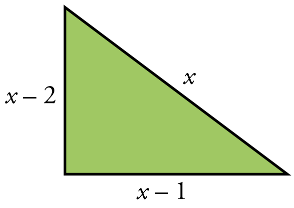
$(500 - x) \cdot x = 60\,000$

$500x - x^2 = 60\,000 \rightarrow x^2 - 500\mathrm{x} + 60\,000 = 0$

$$x = \frac{500 \pm \sqrt{250\,000 - 240\,000}}{2} = \frac{500 \pm 100}{2} \rightarrow x = 300;\ x = 200$$

Las dimensiones de la finca son 200 metros × 300 metros.

53 **En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide un metro más que el cateto mayor, y este, un metro más que el cateto menor. Calcula la medida de los lados.**



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

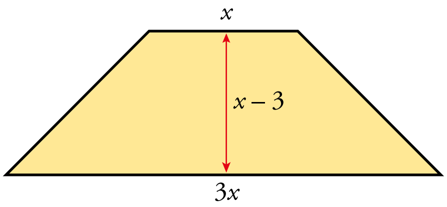
$x^2 = (x-1)^2 + (x-2)^2 \rightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \rightarrow x = 5;\ x = 1$

Descartamos la solución $x = 1$ porque no podemos restarle 2 y quedarnos con números negativos.

Los lados miden 5, 4 y 3.

54 **En un trapecio con eje de simetría, la base mayor es el triple de la menor, y esta, supera en 3 cm a la altura. Sabiendo que ocupa una superficie de 216 cm^2, calcula el perímetro.**



$216 = \dfrac{x+3x}{2} \cdot (x-3) \rightarrow 432 = x^2 - 3x + 3x^2 - 9x \rightarrow 4x^2 - 12x - 432 = 0$

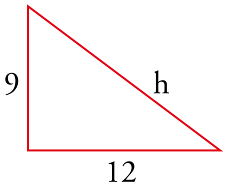
$x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 + 16 \cdot 432}}{8} = \dfrac{12 \pm 84}{8} \rightarrow x = 12;\ x = -9$

Base menor: 12 cm

Base mayor: 36 cm

Altura: 9 cm

Nos falta encontrar la medida de los lados no paralelos, y para ello usaremos el teorema de Pitágoras en el siguiente triángulo:



$h^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \rightarrow h = 15$

Perímetro → 15 + 36 + 15 + 12 = 78 cm

El perímetro es 78 cm.

Problemas «+»

55 Problema resuelto.

56 **Una fuente dispone de dos grifos. Abriendo solamente el primero, se llena en 8 horas, y abriendo ambos, en 3 horas. ¿Cuánto tarda en llenarse si se abre solamente el segundo grifo?**

$\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3} \rightarrow x = \dfrac{24}{5}$

Si se abre solamente el segundo grifo, la fuente tarda en llenarse $\dfrac{24}{5}$ h = 4 h y 48 minutos.

57 **Los miembros del equipo vamos a hacer un regalo al entrenador que cuesta 80 €. Nos sale un poco caro, pero si fuéramos dos más, tocaríamos a dos euros menos cada uno. ¿Cuántos somos en el equipo?**

- **N.º de componentes del equipo → x**
- **Cada uno debe pagar → $\frac{80}{x}$**
- **Si fueran dos más, cada uno pagaría → $\frac{80}{x+2}$**

$$\boxed{\text{LO QUE PAGA CADA UNO}} - 2 = \boxed{\text{LO QUE PAGARÍA CADA UNO SI FUERAN DOS MÁS}}$$

$$\frac{80}{x} - 2 = \frac{80}{x+2} \to x^2 + 2x - 80 = 0 \to x = 8;\ x = -10$$

En el equipo somos 8 jugadores.

58 **Un automóvil parte de A hacia B a la misma hora que un camión lo hace desde B hacia A y tardan en cruzarse 2 horas en un punto intermedio del camino. ¿Cuánto tiempo ha invertido el coche en el viaje completo si el camión lo ha hecho en 5 horas?**

	TODO EL CAMINO	EN UNA HORA
CAMIÓN	5 h	$\frac{1}{5}$
COCHE	x h	$\frac{1}{x}$
COCHE + CAMIÓN	2 h	$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \to \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

El coche recorre 3/10 del camino en una hora, por tanto, tardará 10 : 3 = 3 h y 20 min en recorrer todo el camino.

Página 156

INVESTIGA

Pero tú puedes

Sin embargo, tú puedes resolver algunas ecuaciones de grado tres o superior.

Por ejemplo, observa las ecuaciones:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) = 0$$

Para resolver la primera, con lo que has estudiado hasta ahora, solo tienes el recurso del tanteo, que es poco seguro.

Sin embargo, puedes ver que las soluciones de la segunda son:

$$x = 1 \qquad x = -2 \qquad x = 3$$

Y esas son también las soluciones de la primera. Compruébalo y constata también, multiplicando los paréntesis, que se trata de la misma ecuación.

- **¿Te atreves ahora a resolver estas otras tres?**

$$(x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (2x - 1) = 0 \qquad x^3 - 9x = 0 \qquad x^3 - 9x^2 = 0$$

Las soluciones de $(x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (2x - 1) = 0$ son $x = -1$; $x = -3$; $x = 1/2$.

$x^3 - 9x = 0 \rightarrow x \cdot (x^2 - 9) = 0 \rightarrow x \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) = 0$

Soluciones: $x = 0$; $x = -3$; $x = 3$

$x^3 - 9x^2 = 0 \rightarrow x^2 \cdot (x - 9) = 0$

Soluciones: $x = 0$; $x = 0$; $x = 9$

- **¿Sabrías construir una ecuación que tenga por soluciones $x = 5$, $x = \frac{1}{5}$ y $x = -2$?**

$$(x - 5) \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right) \cdot (x + 2) = 0$$

$$\left(x^2 - 5x - \frac{1}{5}x + 1\right) \cdot (x + 2) = 0$$

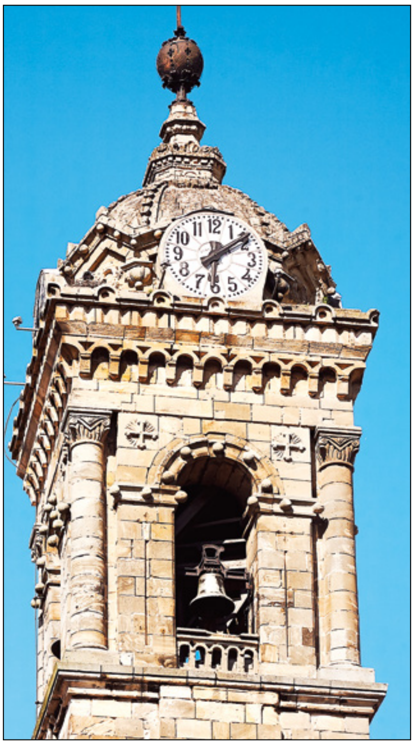
$$\left(x^2 - \frac{26}{5}x + 1\right) \cdot (x + 2) = 0$$

$$x^3 - \frac{16}{5}x^2 - \frac{47}{5}x + 2 = 0$$

Página 157

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Dibuja un esquema, echa cuentas, tantea



- **El reloj de la torre, al dar las horas, tarda segundo y medio entre campanada y campanada. ¿Cuánto tarda en dar las doce del mediodía?**

  Entre las 12 campanadas hay 11 espacios → 11 · 1,5 = 16,5 segundos.

- **Un aizkolari tarda un cuarto de hora en cortar un tronco en tres partes. ¿Cuánto tardará en cortar otro tronco igualmente grueso en seis partes?**

  Tres partes → Dos cortes

  En hacer dos cortes tarda 15 minutos → En un corte tarda 7 min 30 s.

  Seis partes → 5 cortes

  5 cortes los hace en 5 · (7 min 30 s) = 37 min 30 s

- **Una agricultora vende sus tomates a un mayorista. El mayorista los vende a un intermediario, ganando un 20 %. El intermediario los vende a un almacén, ganando un 20 %. El almacén los vende a un minorista, y este, al público, ganando cada uno de ellos, también, un 20 %. ¿En qué porcentaje ha aumentado lo que cobró la agricultora cuando el producto llega, finalmente, al público?**

  Supongamos que el hortelano vende los tomates a 100.

  — El mayorista los vende ganando un 20 %, es decir, a 120.

  — El intermediario también gana el 20 %: 20 % de 120 = $\frac{20 \cdot 120}{100} = 24$

  El intermediario vende a 120 + 24 = 144.

  — El almacén también gana el 20 %: 20 % de 144 = $\frac{20 \cdot 144}{100} = 28{,}80$

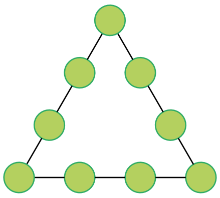
  El almacén vende a 144 + 28,80 = 172,80.

  — El minorista vuelve a ganar el 20 %: 20 % de 172,80 = 34,56

  El minorista vende a 172,80 + 34,56 = 207,36.

  Los tomates pasan de 100 a 207,36. El aumento es del 107,36 %.

- **Coloca los números del 1 al 9, uno en cada círculo, de modo que cada lado del triángulo sume 23. Hay dos soluciones.**



  La suma del 1 al 9 es: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45

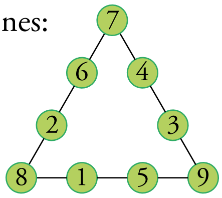
  Los números que están en las esquinas se suman dos veces.

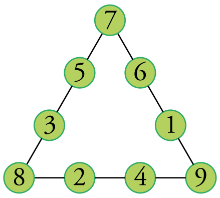
  Si cada lado suma 23, 23 · 3 = 69.

  69 – 45 = 24, que es la suma de los números que están en las esquinas.

  Estos números solo pueden ser 7, 8 y 9.

  Poniendo 7, 8 y 9 en las esquinas, hay dos soluciones:





AUTOEVALUACIÓN

1 **Indica cuál de los valores que ves abajo son solución de la ecuación:**

$$\frac{x^2-1}{5}=\sqrt{x}-1$$

$\boxed{x=1}$ $\boxed{x=2}$ $\boxed{x=4}$ $\boxed{x=9}$ $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

El valor $x = 1$ es solución de la ecuación: $\frac{1^2-1}{5}=\sqrt{1}-1$

2 **Resuelve.**

a) $7x-3-2x=6+3x+1$

b) $1-4x-6=x-3(2x-1)$

a) $2x=10 \rightarrow x=5$

b) $-4x-5=-5x+3 \rightarrow x=8$

3 **Resuelve.**

a) $\frac{3}{4}(2x+4)=x+19$

b) $x-\frac{x+1}{5}=\frac{x+3}{2}-2$

c) $x-\frac{1}{2}=\frac{5x}{8}-\frac{3}{4}$

d) $\frac{2x}{3}-4\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{15}$

a) $6x+12=4x+76 \rightarrow x=32$

b) $10x-2(x+1)=5(x+3)-20 \rightarrow x=-1$

c) $8x-4=5x-6 \rightarrow x=-\frac{2}{3}$

d) $20x-24x+20=4 \rightarrow -4x=-16 \rightarrow x=4$

4 **Resuelve.**

a) $3a^2-5=70$ **b)** $6x^2-3x=x$

c) $x^2-2x-3=0$ **d)** $8x^2-6x+1=0$

a) $3a^2=75 \rightarrow a^2=25 \rightarrow a=\pm5$

b) $6x^2-4x=0 \rightarrow x(6x-4)=0 \rightarrow x=0;\ x=\frac{2}{3}$

c) $x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm4}{2} \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$

d) $x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{16}=\frac{6\pm2}{16} \begin{cases} x=1/2 \\ x=1/4 \end{cases}$

5 **Pasa a la forma general y encuentra las soluciones de la ecuación:**

$$\frac{3x}{2}-\frac{8}{x}=x-3$$

Multiplicando todo por $2x$ queda:

$3x^2-16=2x^2-6x \rightarrow x^2+6x-16=0$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\frac{-6\pm10}{2} \rightarrow x=2;\ x=-8$

6 **Por tres kilos de peras y dos de manzanas, Ramón ha pagado 7,80 €. Averigua el precio de unas y otras, sabiendo que un kilo de peras cuesta lo que un kilo y medio de manzanas.**

Manzanas → x

Peras → $1{,}5x$

$3 \cdot 1{,}5x + 2x = 7{,}80 \rightarrow 6{,}5x = 7{,}80 \rightarrow x = 1{,}2$

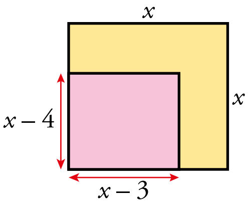
Un kilo de manzanas cuesta 1,20 €, y uno de peras, 1,80 €.

7 **Un hortelano ha plantado 1/3 de la superficie de su huerta de acelgas y 3/10 de zanahorias. Si aún le quedan 110 m² libres, ¿cuál es la superficie total de la huerta?**

$\frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{19}{30}$. Le quedan libres $\frac{11}{30}$ de la huerta.

$\frac{11}{30}x = 110 \rightarrow x = \frac{110 \cdot 30}{11} = 300$. La superficie total de la huerta es de 300 m².

8 **Acortando un cuadrado 4 cm en un lado y 3 cm en el otro, se reduce su superficie a la mitad. ¿Cuál era el lado del cuadrado?**



Área rectángulo pequeño → $(x - 4) \cdot (x - 3) = x^2 - 7x + 12$

Área cuadrado grande → $x \cdot x = x^2$

La superficie del rectángulo es la mitad que la del cuadrado:

$x^2 = 2 \cdot (x^2 - 7x + 12) \rightarrow x^2 - 14x + 24 = 0$

$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{2} = \frac{14 \pm 10}{2} \rightarrow x = 12; x = 2$

Descartamos $x = 2$ porque el rectángulo no puede tener lados con medidas negativas. El lado del cuadrado era 12 cm.

8 SISTEMAS DE ECUACIONES

Página 158

Con ayuda del ingenio

Resuelve, con lo que sabes, las siguientes propuestas.

1 **¿Cuánto ha puesto cada uno?**

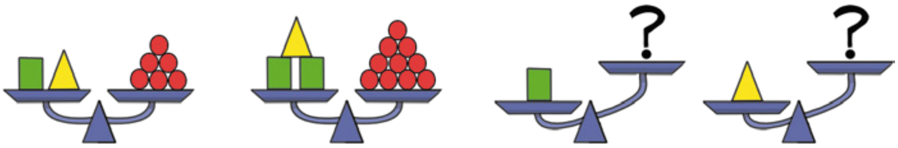
1 450 – 250 = 1 200

1 200 : 2 = 600

600 + 250 = 850

Ella ha puesto 850 € y él, 600 €.

2 **¿Cuántas bolas rojas se necesitan para equilibrar las balanzas?**



Para el cuadrado verde se necesitan 4 bolas rojas.

Para el triángulo amarillo se necesitan 2 bolas rojas.

3 **Busca un valor para *a* y otro para *b* que satisfagan, simultáneamente, estas dos igualdades:**

$$2a + b = 10 \qquad 3b + a = 15$$

¿Tienen que ver estas ecuaciones con el problema de los babilonios?

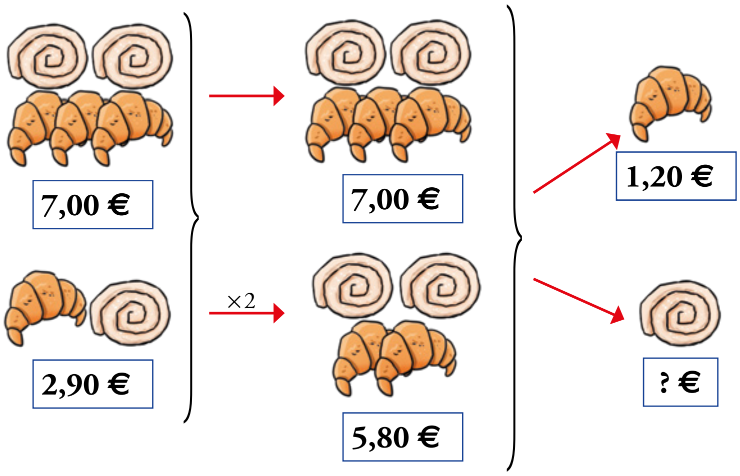
$a = 3$, $b = 4$

Las ecuaciones son la codificación algebraica del problema de los babilonios. La anchura se corresponde con *a,* y la longitud, con *b.*

Página 159

Interpreta y resuelve

4 **Observa la ilustración y explica el proceso que se expone debajo en lenguaje algebraico.**



$$\left\{\begin{array}{l} 3a + 2b = 7{,}00 \\ \;\;a + \;\; b = 2{,}90 \end{array}\right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\times 2} \end{array} \begin{array}{l} 3a + 2b = 7{,}00 \\ \underline{2a + 2b = 5{,}80} \end{array}$$

$$a + \;\; 0 = 1{,}20 \to \boxed{a = 1{,}20} \to \boxed{b = ¿?}$$

a) ¿Cuánto cuesta un cruasán?

b) ¿Y una ensaimada?

Se asigna la letra a al precio de un cruasán y la letra b al de una ensaimada.

Entonces:

— Tres cruasanes y dos ensaimadas cuestan 7 € → $3a + 2b = 7$

— Un cruasán y una ensaimada cuestan 2,90 € → $a + b = 2{,}90$

Se multiplica la segunda ecuación por 2 y se resta miembro a miembro las dos igualdades:

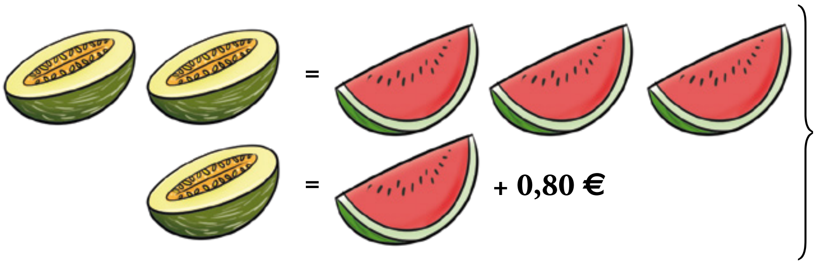
$$a + 0b = 1{,}20 \to a = 1{,}20$$

Sustituyendo a por 1,20 en la segunda ecuación → $1{,}20 + b = 2{,}90 \to b = 1{,}70$

a) Un cruasán cuesta 1,20 €.

b) Una ensaimada cuesta 1,70 €.

5 **Resuelve con un proceso similar al de la actividad anterior.**



¿Cuánto cuesta una sandía?

Se asigna la letra a al precio de un melón y la letra b al de una sandía.

$$\left.\begin{array}{l} 2a = 3b \\ a = b + 0{,}80 \end{array}\right\} \xrightarrow[\times 3]{} \left.\begin{array}{l} 2a = 3b \\ 3a = 3b + 2{,}40 \end{array}\right\} \xrightarrow{\substack{\textbf{A la segunda ecuación} \\ \textbf{le restamos la primera}}} a = 2{,}40 \to$$

$$b = a - 0{,}80 = 2{,}40 - 0{,}80 = 1{,}60$$

Una sandía cuesta 1,60 €.

1 ▸ ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Página 160

Para practicar

1 **Averigua cuáles de los siguientes pares de valores son soluciones de la ecuación $3x - 4y = 8$.**

a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Son soluciones de la ecuación:

a) $3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 8$

c) $3 \cdot 0 - 4 \cdot (-2) = 8$

2 **Busca tres soluciones diferentes para la siguiente ecuación:**

$$2x - y = 5$$

Por ejemplo:

x	0	1	2	3	–1	–2
y	–5	–3	–1	1	–7	–9

3 **Copia y completa en tu cuaderno la tabla con soluciones de la ecuación $3x + y = 12$.**

x	0		3		5	–1		–3
y		9		0			18	

x	0	1	3	4	5	–1	–2	–3
y	12	9	3	0	–3	15	18	21

4 **Reduce a la forma general estas ecuaciones:**

a) $2x - 5 = y$

b) $x - 3 = 2(x + y)$

c) $y = \dfrac{x + 1}{2}$

a) $2x - y = 5$

b) $x + 2y = -3$

c) $x - 2y = -1$

Página 161

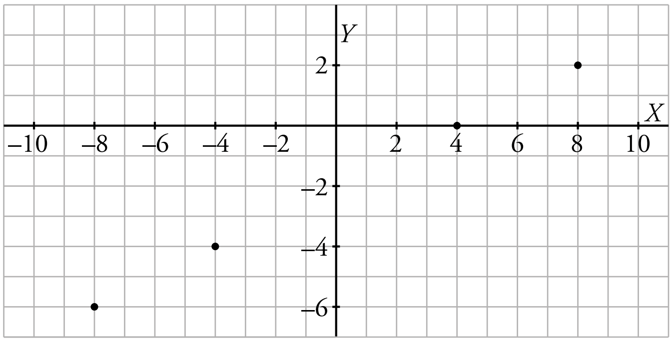
Para fijar ideas

1 **Copia y completa la tabla para la siguiente ecuación:**

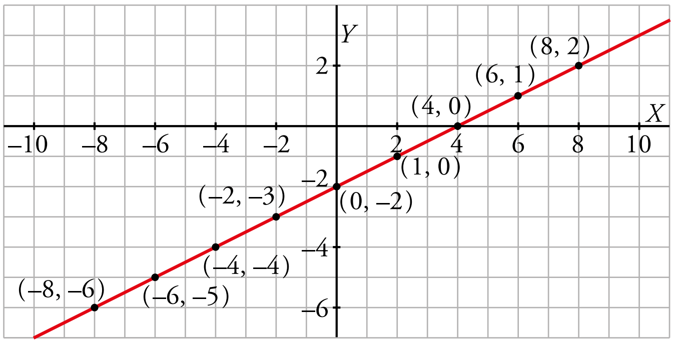
$$x - 2y - 4 = 0 \;\rightarrow\; x - 4 = 2y \;\rightarrow\; y = \frac{x-4}{2}$$

x	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	…
y	–6	▨	–4	▨	▨	▨	0	▨	2	…

Copia la gráfica en tu cuaderno y representa los pares de valores. Dibuja la recta y comprueba que quedan alineados.



x	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	…
y	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	…



Para practicar

5 **Copia y completa la tabla para cada ecuación y representa la recta correspondiente.**

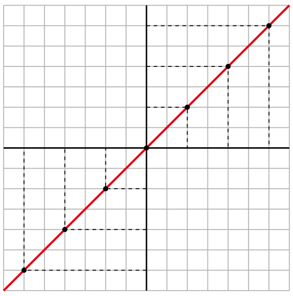
a) $x - y = 0 \;\rightarrow\; y = x$

b) $x - 2y = 2 \;\rightarrow\; y = \dfrac{x-2}{2}$

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
y	▨	▨	▨	▨	▨	▨	▨	…

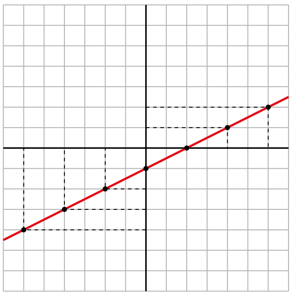
a)

x	–6	–4	–2	0	2	4	6
y	–6	–4	–2	0	2	4	6



b)

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2



6 Representa gráficamente.

a) $2x - y = 1$ **b)** $2x + y = 1$ **c)** $y = \frac{x}{2} + 3$

a)

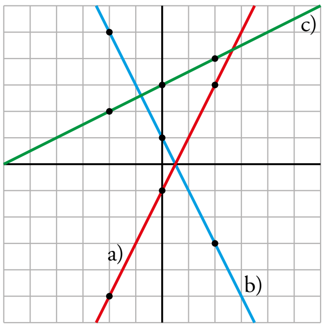
x	-2	0	2
y	-5	-1	3

b)

x	-2	0	2
y	5	1	-3

c)

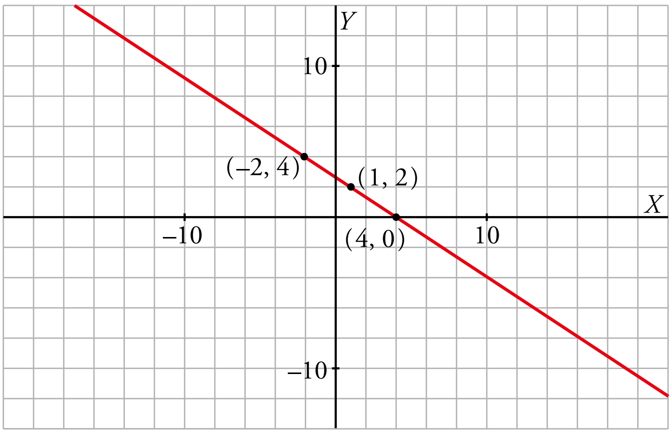
x	-2	0	2
y	2	3	4



7 Escribe la ecuación y representa su recta.

$2x + 3y = 8 \rightarrow y = \frac{8 - 2x}{3}$

x	1	-2	4
y	2	4	0



2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Página 162

Para practicar

1 **Representa gráficamente y escribe la solución.**

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2 + \dfrac{x}{2} \\ y = 4 - \dfrac{x}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ 2x + \ \ y + 2 = 0 \end{cases}$

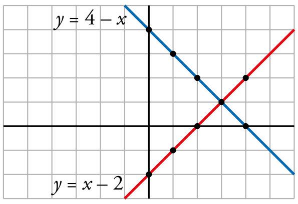
a) $y = 4 - x \rightarrow$

x	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0

$y = x - 2 \rightarrow$

x	0	1	2	3	4
y	–2	–1	0	1	2

Solución: $x = 3$; $y = 1$



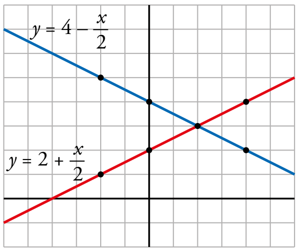
b) $y = 2 + \dfrac{x}{2} \rightarrow$

x	–2	0	2	4
y	1	2	3	4

$y = 4 - \dfrac{x}{2} \rightarrow$

x	–2	0	2	4
y	5	4	3	2

Solución: $x = 2$; $y = 3$



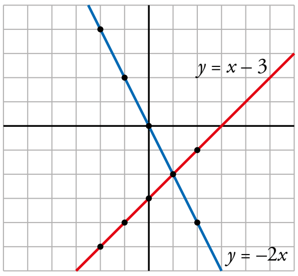
c) $y = x - 3 \rightarrow$

x	–2	–1	0	1	2
y	–5	–4	–3	–2	–1

$y = -2x \rightarrow$

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	0	–2	–4

Solución: $x = 1$; $y = -2$



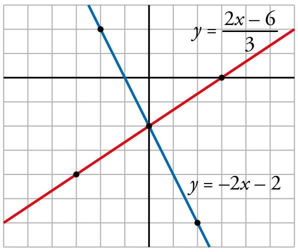
d) $y = \dfrac{2x - 6}{3} \rightarrow$

x	–3	0	3
y	–4	–2	0

$y = -2x - 2 \rightarrow$

x	–2	0	2
y	2	–2	–6

Solución: $x = 0$; $y = -2$



3 ▸ MÉTODOS PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

Página 163

Para fijar ideas

1 **Copia, completa y resuelve el sistema anterior, pero ahora despejando la incógnita *y* de la primera ecuación.**

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \rightarrow y = \ldots \\ x + 2y = 8 \longrightarrow x + 2\,(\ldots) = 8 \end{cases}$$

Resuelve la ecuación obtenida y obtendrás el valor de *x*: $\boxed{x = \ldots}$

Sabiendo el valor de *x*, calcula el valor de *y*, que ya tenías despejada: $\boxed{y = \ldots}$

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \rightarrow y = 3x - 3 \\ x + 2y = 8 \longrightarrow x + 2\,(3x - 3) = 8 \end{cases}$$

Resuelve la ecuación obtenida y obtendrás el valor de *x*: $\boxed{x = 2}$

Sabiendo el valor de *x*, calcula el valor de *y*, que ya tenías despejada: $\boxed{y = 3}$

Para practicar

1 **Resuelve por sustitución y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.**

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

Soluciones: **a)** $x = 4$, $y = 2$ **b)** $x = 9$, $y = 10$ **c)** $x = 3$, $y = 4$ **d)** $x = 3$, $y = 5$ **e)** $x = 5$, $y = -2$

a) $2y + 3y = 10 \rightarrow y = 2;\ x = 4$

b) $3x - 2(x + 1) = 7 \rightarrow x = 9 \rightarrow y = 9 + 1 = 10$

c) $x = 11 - 2y \rightarrow 3(11 - 2y) - y = 5 \rightarrow y = 4$
$x = 11 - 2 \cdot 4 \rightarrow x = 3$

d) $y = 2x - 1 \rightarrow 5x - 3(2x - 1) = 0 \rightarrow x = 3$
$y = 2 \cdot 3 - 1 \rightarrow y = 5$

e) $x = 1 - 2y \rightarrow 2(1 - 2y) + 3y = 4 \rightarrow y = -2$
$x = 1 - 2 \cdot (-2) \rightarrow x = 5$

Página 164

Para fijar ideas

2 **Copia y completa para resolver el siguiente sistema, por igualación, despejando la incógnita *y*.**

$$\begin{cases} 4x + y = 1 \rightarrow y = \square - 4x \\ 3x - y = -15 \rightarrow y = 3x + \square \end{cases} > \square - 4x = 3x + \square \rightarrow -7x = \square \rightarrow x = \frac{\square}{-7} \rightarrow \boxed{x = \ldots}$$

$$y = 1 - 4\square \rightarrow \boxed{y = \ldots}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 1 \rightarrow y = 1 - 4x \\ 3x - y = -15 \rightarrow y = 3x + 15 \end{cases} > 1 - 4x = 3x + 15 \rightarrow -7x = 14 \rightarrow$$

$$x = \frac{14}{-7} \rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$y = 1 - 4\,(-2) \rightarrow \boxed{y = 9}$$

Para practicar

2 **Resuelve por igualación y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.**

a) $\begin{cases} y = 3x \\ y = 5x - 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y + 6 = 0 \\ 5x - y + 1 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 7 \end{cases}$

Soluciones: **a)** $x = 2$, $y = 6$ **b)** $x = 5$, $y = -1$ **c)** $x = -1$, $y = -4$ **d)** $x = -2$, $y = 5$ **e)** **Sin solución.**

a) $3x = 5x - 4 \to x = 2;\ y = 3 \cdot 2 \to y = 6$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 8 + 3y \end{array}\right\} 3 - 2y = 8 + 3y \to y = -1 \to x = 3 - 2 \cdot (-1) = 5$

c) $\left.\begin{array}{l} y = -2x - 6 \\ y = \ \ 5x + 1 \end{array}\right\} -2x - 6 = 5x + 1 \to x = -1 \to y = 5 \cdot (-1) + 1 = -4$

d) $\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-5x}{2} \\ y = 1 - 2x \end{array}\right\} \dfrac{-5x}{2} = 1 - 2x \to x = -2 \to y = 1 - 2 \cdot (-2) = 5$

e) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{4x - 7}{2} \end{array}\right\} 2x - 3 = \dfrac{4x - 7}{2} \to$ Sin solución.

Página 165

Para fijar ideas

3 **Copia, completa y sigue las instrucciones para resolver los siguientes sistemas por reducción.**

a) Suma las ecuaciones para eliminar y**.**

$$\begin{cases} 7x + 2y = 6 \\ x - 2y = 10 \end{cases} \to \begin{array}{r} 7x + 2y = 6 \\ + \quad x - 2y = 10 \\ \hline 8x + 0y = \square \end{array} \to \boxed{x = \ldots}$$

$$7x + 2y = 6 \to 7 \cdot \square + 2y = 6 \to$$

$$2y = -\square \to y = \frac{-\square}{2} \to \boxed{y = \ldots}$$

b) Multiplica la primera ecuación por –2 y la segunda por 3 para eliminar x**.**

$$\begin{cases} 3x - 5y = 5 \xrightarrow{\times(-2)} \\ 2x - 3y = 4 \xrightarrow{\times 3} \end{cases} \begin{array}{r} -6x + \square y = -\square \\ + \quad 6x - \square y = \ \ \square \\ \hline 0x + \square y = \ \ \square \end{array} \to \boxed{y = \ldots}$$

$$2x - 3y = 4 \to 2x - 3 \cdot \square = 4 \to 2x = \square \to$$

$$\to x = \frac{\square}{2} \to \boxed{x = \ldots}$$

a) Suma las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{cases} 7x + 2y = 6 \\ x - 2y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} 7x + 2y = 6 \\ + \;\; x - 2y = 10 \\ \hline 8x + 0y = 16 \end{array} \rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$7x + 2y = 6 \rightarrow 7 \cdot 2 + 2y = 6 \rightarrow 2y = -8 \rightarrow y = \frac{-8}{2} \rightarrow \boxed{y = -4}$$

b) Multiplica la primera ecuación por –2 y la segunda por 3 para eliminar x.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 5 \xrightarrow{\times(-2)} \\ 2x - 3y = 4 \xrightarrow{\times 3} \end{cases} \begin{array}{r} -6x + 10y = -10 \\ + \;\; 6x - \;\; 9y = \;\; 12 \\ \hline 0x + \;\; 1y = \;\; 2 \end{array} \rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$2x - 3y = 4 \rightarrow 2x - 3 \cdot 2 = 4 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{2} \rightarrow \boxed{x = 5}$$

Para practicar

3 **Resuelve por reducción siguiendo las instrucciones.**

a) $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$ **(Multiplica la 1.ª ecuación por +3)**

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ **(Multiplica la 1.ª ecuación por +5 y la 2.ª por +3).**

a) $\left.\begin{array}{r} 12x + 3y = 3 \\ x - 3y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow 13x = 13 \rightarrow x = 1;\; 12 \cdot 1 + 3y = 3 \rightarrow y = -3$

b)

$\left.\begin{array}{r} 10x + 15y = 35 \\ 9x - 15y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 19x = 38 \rightarrow x = 2;\; 10 \cdot 2 + 15y = 35 \rightarrow y = 1$

4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON AYUDA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Página 166

Para fijar ideas

1 **Observa y resuelve: ¿Cuánto pesa cada caja?**

$$\begin{cases} x = y + 175 \\ \square y = x + \square \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x = y + 175 \\ 3y = x + 125 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 325 \\ y = 150 \end{array}$$

La caja grande pesa 325 kg, y la pequeña, 150 kg.

2 **Pepa tiene 5 años más que su hermano Enrique, y entre los dos suman 21 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?**

$$\begin{cases} \text{EDAD DE PEPA} = \text{EDAD DE ENRIQUE} + 5 \\ \text{EDAD DE PEPA} + \text{EDAD DE ENRIQUE} = 21 \end{cases}$$

EDAD DE PEPA → x EDAD DE ENRIQUE → y

$$\left.\begin{array}{r} x = y + 5 \\ x + y = 21 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 13 \\ y = 8 \end{array} \rightarrow \text{Pepa tiene 13 años, y Enrique, 8 años.}$$

3 **En una clase hay 29 alumnos y alumnas, pero el número de chicas supera en tres al de chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?**

$$\begin{cases} \text{CHICAS} = \text{CHICOS} + 3 \\ \text{CHICOS} + \text{CHICAS} = 29 \end{cases}$$

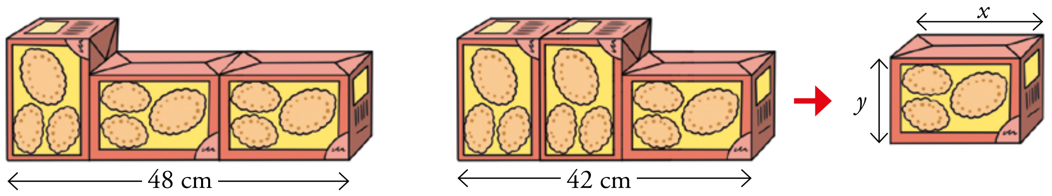
CHICOS → x CHICAS → y

$$\left.\begin{array}{r} y = x + 3 \\ x + y = 29 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 13 \\ y = 16 \end{array} \rightarrow \text{En la clase hay 13 chicos y 16 chicas.}$$

Página 167

Para fijar ideas

4 **Observa y resuelve: ¿Qué trozo de la estantería ocupa una de estas cajas cuando está tumbada? ¿Y de pie?**



$$\begin{cases} \square x + \quad y = \square \\ x + \square y = \square \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 48 \\ x + 2y = 42 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 18 \\ y = 12 \end{array}$$

Cuando está tumbada ocupa 18 cm, y cuando está de pie, 12 cm.

5 **He comprado tres bolígrafos y un rotulador por 6 €. Mi amiga Rosa ha pagado 9,25 € por dos bolígrafos y tres rotuladores. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Y un rotulador?**

→ x €

→ y €

$$\begin{cases} \square x + y = \square \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 6 \\ 2x + 3y &= 9{,}25 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 1{,}25 \\ y &= 2{,}25 \end{aligned}$$

→ Un bolígrafo cuesta 1,25 €, y un rotulador, 2,25 €.

6 **En la frutería, un cliente ha pagado 3,90 € por un kilo de naranjas y dos de manzanas. Otro cliente ha pedido tres kilos de naranjas y uno de manzanas, y ha pagado 5,70 €. ¿Cuánto cuesta un kilo de naranjas? ¿Y uno de manzanas?**

1 KG DE NARANJAS → x €   1 KG DE MANZANAS → y €

$$\begin{cases} x + \square y = \square \\ \square x + y = \square \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3{,}90 \\ 3x + y &= 5{,}70 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 1{,}50 \\ y &= 1{,}20 \end{aligned}$$

→ Un kilo de naranjas cuesta 1,50 €, y uno de manzanas, 1,20 €.

7 **La semana pasada, dos entradas para el cine y una caja de palomitas nos costaron 10 €. Hoy, por cuatro entradas y tres cajas de palomitas hemos pagado 22 €. ¿Cuánto cuesta una entrada? ¿Y una caja de palomitas?**

$$\begin{cases} \square x + y = \square \\ \square x + \square y = \square \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ 4x + 3y &= 22 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

→ Una entrada para el cine cuesta 4 €, y una caja de palomitas, 2 €.

Página 168

Para fijar ideas

8 **Completa y resuelve en tu cuaderno.**

a) Ahora, la edad de Cristina triplica la de su prima María, pero dentro de 10 años solo la doblará. ¿Cuál es la edad de cada una?

	EDAD AHORA	DENTRO DE 10 AÑOS
CRISTINA	x	$x + 10$
MARÍA	y	$y + 10$

La edad de Cristina es el triple que la de María. → $x = \square y$

Dentro de 10 años, la edad de Cristina será el doble que la de María. → $x + 10 = \square(y + 10)$

b) Rafael, en la actualidad, multiplica por seis la edad de su nieta Adela, pero hace 2 años, la multiplicaba por siete. ¿Cuántos años tiene Rafael? ¿Y Adela?

	EDAD AHORA	HACE 2 AÑOS
RAFAEL	x	$x - \square$
ADELA	y	$y - \square$

ECUACIONES

$x = \square y$

$x - \square = \square(y - \square)$

a) La edad de Cristina es el triple que la de María. → $x = 3y$

Dentro de 10 años, la edad de Cristina será el doble que la de María. → $x + 10 = 2(y + 10)$

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ x - 2y &= 10 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 30 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Cristina tiene 30 años, y María, 10.

b) Rafael, en la actualidad, multiplica por seis la edad de su nieta Adela, pero hace 2 años, la multiplicaba por siete. ¿Cuántos años tiene Rafael? ¿Y Adela?

	EDAD AHORA	HACE 2 AÑOS
RAFAEL	x	$x-2$
ADELA	y	$y-2$

ECUACIONES

$x = 6y$

$x - 2 = 7(y - 2)$

$$\left.\begin{array}{r} x-6y=0 \\ x-7y=-12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=72 \\ y=12 \end{array}$$

Rafael tiene 72 años, y Adela, 12.

Página 169

Para fijar ideas

9 Copia, completa y resuelve en tu cuaderno.

a) ¿Qué cantidades de café, uno de calidad superior, A, a 13 €/kg, y otro de calidad inferior, B, a 8 €/kg, hay que utilizar para conseguir 30 kg de mezcla que resulte a 10 €/kg?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
CAFÉ SUPERIOR (A)	x	13	$13x$
CAFÉ INFERIOR (B)	y	8	$\square y$
MEZCLA	$\square$	10	$30 \cdot 10$

Cantidad de café A + Cantidad de café B = Cantidad de la mezcla → $x + y = \square$

Coste de café A + Coste del café B = Coste de la mezcla ⟶ $13x + \square y = 300$

b) ¿Qué cantidades de oro, a 8 €/g, y de plata, a 1,70 €/g, se necesitan para obtener 1 kg de aleación que resulte a 4,22 €/g?

	CANTIDAD (g)	PRECIO (€/g)	COSTE (€)
ORO	x	8	$\square x$
PLATA	y	1,7	$\square y$
ALEACIÓN	1 000	4,22	…

ECUACIONES

$x + y = \square$

$\square x + \square y = \square$

a) ¿Qué cantidades de café, uno de calidad superior, A, a 13 €/kg, y otro de calidad inferior, B, a 8 €/kg, hay que utilizar para conseguir 30 kg de mezcla que resulte a 10 €/kg?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
CAFÉ SUPERIOR (A)	x	13	$13x$
CAFÉ INFERIOR (B)	y	8	$8y$
MEZCLA	30	10	300

$$\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ 13x+8y=300 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=12 \\ y=18 \end{array}$$

Se necesitan 12 kilos del café de calidad superior y 18 kilos del de calidad inferior.

b) ¿Qué cantidades de oro, a 8 €/g, y de plata, a 1,70 €/g, se necesitan para obtener 1 kg de aleación que resulte a 4,22 €/g?

	CANTIDAD (g)	PRECIO (€/g)	COSTE (€)
ORO	x	8	$8x$
PLATA	y	1,7	$1{,}7y$
ALEACIÓN	1 000	4,22	4 220

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1\,000 \\ 8x + 1{,}7y &= 4\,220 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 400 \\ y &= 600 \end{aligned}$$

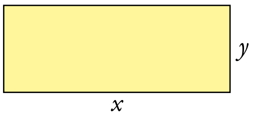
Se necesitan 400 gramos de oro y 600 gramos de plata.

Página 170

Para fijar ideas

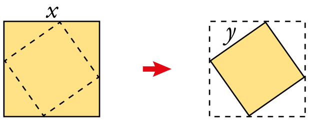
10 **Copia y resuelve en tu cuaderno.**

a) Un rectángulo es 7 cm más largo que ancho y ocupa una superficie de 98 m^2. Calcula la longitud de sus lados.



$$\rightarrow \begin{cases} x = y + \square \\ x \cdot y = \square \end{cases} \rightarrow (y + \square) \cdot y = \square \rightarrow \dots$$

b) Observa la figura. Cortando cuatro esquinas iguales de un cuadrado se obtiene otro cuadrado con 2 cm menos de lado y 24 cm^2 menos de superficie. ¿Cuál es el lado del cuadrado primitivo? ¿Y el lado del cuadrado resultante?



$$\rightarrow \begin{cases} x = y + \square \\ x^2 - y^2 = \square \end{cases} \rightarrow (y + \square)^2 - y^2 = \square \rightarrow \dots$$

a) $$\left.\begin{aligned} x &= y + 7 \\ x \cdot y &= 98 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 14 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

El largo del rectángulo es 14 cm, y su ancho, 7 cm.

b) $$\left.\begin{aligned} x &= y + 2 \\ x^2 - y^2 &= 24 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 12 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

El lado del cuadrado primitivo es 12 cm, y el del cuadrado resultante, 10 cm.

Página 171

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones lineales

1 **¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales? Justifica tu respuesta.**

- **a)** $3x + 5y = 1$
- **b)** $x^2 - y^2 = 6$
- **c)** $y = 5x - 1$
- **d)** $x = 4 - 3y$
- **e)** $xy - 4 = 8$
- **f)** $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5}$

a) Es lineal por ser x e y de primer grado.

b) No es lineal, ya que es una ecuación de segundo grado.

c) Es lineal por ser x e y de primer grado.

d) Es lineal por ser x e y de primer grado.

e) No es lineal, ya que es una ecuación de segundo grado.

f) Es lineal por ser x e y de primer grado.

2 **¿Cuáles de los siguientes pares de valores son soluciones de la ecuación?**

$x + 2y = 5 \rightarrow$

$\boxed{x = 5,\ y = 0}$ $\boxed{x = 2,\ y = 5}$ $\boxed{x = 1,\ y = 2}$

$\boxed{x = -1,\ y = 3}$ $\boxed{x = 0,\ y = -4}$ $\boxed{x = 7,\ y = -1}$

$x + 2y = 5 \rightarrow$

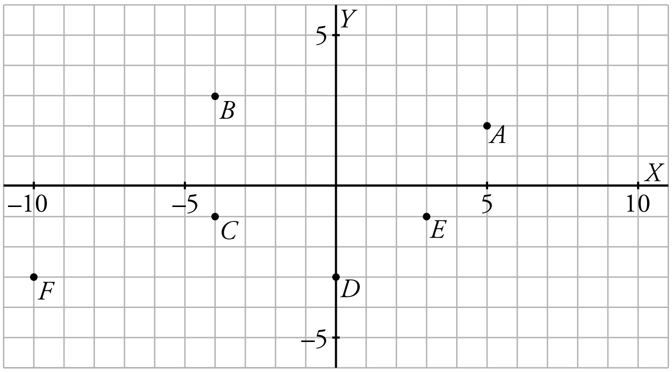
$\boxed{x = 5,\ y = 0}$ $\cancel{\boxed{x = 2,\ y = 5}}$ $\boxed{x = 1,\ y = 2}$

$\boxed{x = -1,\ y = 3}$ $\cancel{\boxed{x = 0,\ y = -4}}$ $\boxed{x = 7,\ y = -1}$

3 **Completa la tabla en tu cuaderno y representa la ecuación en el plano.**

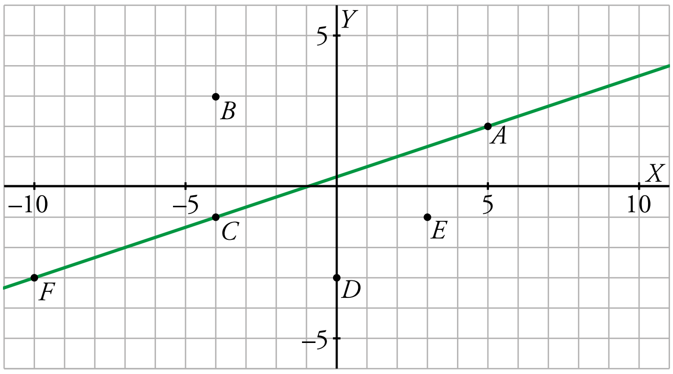
$y = \frac{x+1}{3} \rightarrow$

x	–7	–4	–1	2	5	8
y	–2					3



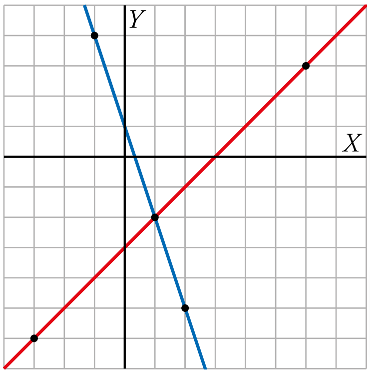
¿Cuáles de los puntos representados son soluciones de la ecuación?

x	–7	–4	–1	2	5	8
y	–2	–1	0	1	2	3



Son solución los puntos A, C y F.

4 **Completa en tu cuaderno y responde.**



Ⓐ $y = x - 3$

x	**–3**	**0**	**3**	**6**
y				

Ⓑ $y = 1 - 3x$

x	**–1**	0	1	2
y				

a) ¿Qué recta corresponde a cada ecuación?

b) ¿Qué punto pertenece a ambas rectas?

c) ¿Qué par de valores para (*x*, *y*) satisface a la vez a ambas ecuaciones?

x	–3	0	3	6
y	–6	–3	0	3

x	–1	0	1	2
y	4	1	–2	–5

a) La recta roja corresponde a la ecuación de A, y la azul, a la de B.

b) El punto de cruce de las dos rectas, (1, –2).

c) $x = 1$; $y = -2$

Sistemas de ecuaciones. Resolución gráfica

5 **Resuelve gráficamente.**

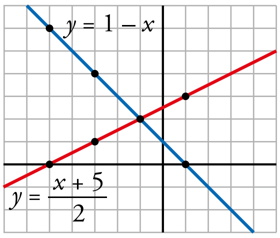
a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$

a) $y = 1 - x$

x	–5	–3	–1	1
y	6	4	2	0

$y = \dfrac{x + 5}{2}$

x	–5	–3	–1	1
y	0	1	2	3



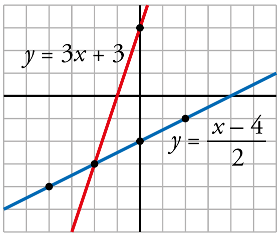
Solución del sistema: $x = -1$; $y = 2$

b) $y = \dfrac{x-4}{2}$

x	–4	–2	0	2
y	–4	–3	–2	–1

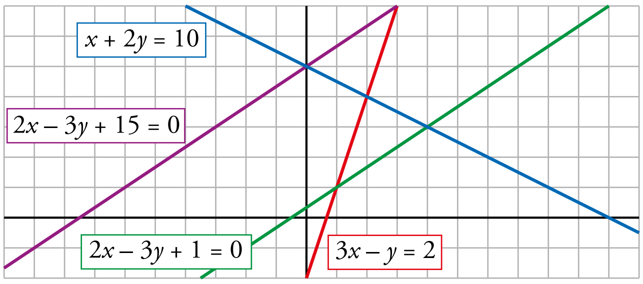
$y = 3x + 3$

x	–4	–2	0	2
y	–9	–3	3	9



Solución del sistema: $x = -2;\ y = -3$

6 Observa el gráfico y responde.



a) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 2,\ y = 4$.

b) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 0,\ y = 5$.

c) Escribe un sistema sin solución.

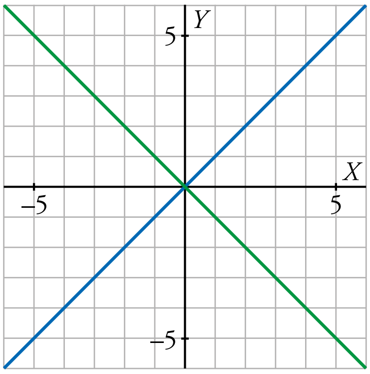
a) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - 3y + 15 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$

7 Representa gráficamente y escribe la solución.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$



Solución del sistema: $x = 0;\ y = 0$

Sistemas de ecuaciones. Resolución algebraica

8 **Resuelve por sustitución despejando la incógnita más adecuada.**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x - 2y = -5 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 5x - 3 \\ 2x + 3(5x - 3) = 8 \end{array}\right\} \to x = 1;\ y = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 7 + 2y \\ 2(7 + 2y) - 3y = 13 \end{array}\right\} \to y = -1;\ x = 5$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 1 - 4y \\ 2(1 - 4y) - y = -7 \end{array}\right\} \to y = 1;\ x = -3$

d) $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{2y - 5}{5} \\ 4 \cdot \dfrac{2y - 5}{5} - 3y = 3 \end{array}\right\} \to x = -3;\ y = -5$

9 **Resuelve por igualación.**

a) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 5x - 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 3x + 5y = 10 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 7x + 3y = 0 \end{cases}$

a) $3x - 5 = 5x - 1 \to x = -2;\ y = -11$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 7 - y \\ x = y - 3 \end{array}\right\} \to 7 - y = y - 3 \to y = 5;\ x = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 8 + 3y \\ x = \dfrac{10 - 5y}{3} \end{array}\right\} \to 8 + 3y = \dfrac{10 - 5y}{3} \to y = -1;\ x = 5$

d) $\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1 - 5x}{2} \\ y = \dfrac{-7x}{3} \end{array}\right\} \to \dfrac{1 - 5x}{2} = \dfrac{-7x}{3} \to x = 3;\ y = -7$

10 **Resuelve por reducción.**

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

a)
$$\begin{array}{l} \ 2x + y = 6 \\ +\ 5x - y = 1 \\ \hline \ 7x \phantom{{}+y} = 7 \to x = 1 \end{array}$$

$2 \cdot 1 + y = 6 \to y = 4$

b)
$$\begin{array}{l} \ 3x + 4y = 1 \\ +\ -3x + y = -11 \\ \hline \ 5y = -10 \to y = -2 \end{array}$$

$3x + 4 \cdot (-2) = 1 \to x = 3$

c)
$$\begin{array}{l} \ 2x + 3y = 8 \\ +\ 12x - 3y = 6 \\ \hline \ 14x \phantom{{}-3y} = 14 \to x = 1 \end{array}$$

$2 \cdot 1 + 3y = 8 \to y = 2$

d)
$$\begin{array}{l} \ 6x - 10y = 18 \\ +\ -6x + 9y = -15 \\ \hline \ -y = 3 \to y = -3 \end{array}$$

$6x - 10 \cdot (-3) = 18 \to x = -2$

Página 172

11 **Resuelve por el método que te parezca más adecuado.**

a) $\begin{cases} 2y = x + 8 \\ y = 2x + 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ 3x - 5y = 12 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$

a) Sustitución:

$2(2x + 10) = x + 8 \;\rightarrow\; x = -4$

$y = 2 \cdot (-4) + 10 \;\rightarrow\; y = 2$

b) Reducción:

$$\begin{array}{r} 2x + y = -1 \\ + \;\; -x - y = 4 \\ \hline x \quad = 3; \end{array} \quad 2 \cdot 3 + y = -1 \;\rightarrow\; y = -7$$

c) Sustitución:

$x = -5 - 2y$

$(-5 - 2y) - 3y = 5 \;\rightarrow\; y = -2$

$x = -5 - 2 \cdot (-2) \;\rightarrow\; x = -1$

d) Reducción:

$$\begin{array}{r} 6x - 2y = 2 \\ + \;\; 5x + 2y = 9 \\ \hline 11x \quad = 11 \end{array} \;\rightarrow\; x = 1$$

$5 + 2y = 9 \;\rightarrow\; y = 2$

e) Reducción:

$$\begin{array}{r} 6x - \;\; 2y = \;\; 0 \\ + \;\; -6x + 10y = -24 \\ \hline 8y = -24 \end{array} \;\rightarrow\; y = -3$$

$6x - 2 \cdot (-3) = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

f) Igualación:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{10 + 5y}{7} \\ x = \dfrac{3y - 5}{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dfrac{10 + 5y}{7} = \dfrac{3y - 5}{2} \;\rightarrow\; y = 5 \\ x = \dfrac{10 + 5 \cdot 5}{7} \;\rightarrow\; x = 5 \end{array}$$

12 Ejercicio resuelto.

13 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2(3x + y) + x = 4(x + 1) \\ 6(x - 2) + y = 2(y - 1) + 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5(2x + 1) = 4(x - y) - 1 \\ \dfrac{x - y}{2} = \dfrac{x + 5}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x - 4}{2} - \dfrac{y - 5}{3} = 0 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 2x - y \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 4 \\ 6x - y = 13 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = -3 \\ x - 3y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -3 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 2 \\ 4x - 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 8 \end{array}$

14 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 24 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 2 + y \\ (2+y)^2 - y^2 = 24 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 12 \\ y = 10 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 3 + y \\ (3+y)^2 + y^2 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 2;\; y = -1 \\ x = 1;\; y = -2 \end{array}$

Resuelve problemas con sistemas de ecuaciones

15 **La suma de dos números es 57, y su diferencia, 9. ¿Cuáles son esos números?**

$\left.\begin{array}{l} x + y = 57 \\ x - y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 33 \\ y = 24 \end{array}\right\}$ Los números son 33 y 24.

16 **Calcula dos números sabiendo que su diferencia es 16 y que el doble del menor sobrepasa en cinco unidades al mayor.**

$\left.\begin{array}{l} x - y = 16 \\ 2y = x + 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 37 \\ y = 21 \end{array}\right\}$ Los números son 37 y 21.

17 **Entre Alejandro y Palmira llevan 15 euros. Si él le diera a ella 1,50 €, ella tendría el doble. ¿Cuánto lleva cada uno?**

Alejandro → x

Palmira → y

$\left.\begin{array}{l} x + y = 15 \\ 2(x - 1{,}5) = y + 1{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 6{,}5 \\ y = 8{,}5 \end{array}\right\}$ Alejandro tiene 6,50 €, y Palmira, 8,50 €.

18 **Una caña de bambú, de 4,80 m de altura, se quiebra por la acción del viento, y el extremo superior, ahora apuntando hacia el suelo, queda a una altura de 60 cm. ¿A qué altura se ha quebrado la caña?**

Parte que se ha quebrado → x

Parte que se mantiene en pie → y

$\left.\begin{array}{l} x + y = 4{,}8 \\ x + 0{,}6 = y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2{,}1 \\ y = 2{,}7 \end{array}\right\}$ La caña se ha quebrado a 2,70 m del suelo.

19 **Un ciclista sube un puerto y, después, desciende por el mismo camino. Sabiendo que en la subida ha tardado 23 minutos más que en la bajada y que la duración total del paseo ha sido de 87 minutos, ¿cuánto ha tardado en subir? ¿Y en bajar?**

Tiempo de subida → x

Tiempo de bajada → y

$\left.\begin{array}{l} x + y = 87 \\ x = 23 + y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 55 \\ y = 32 \end{array}\right\}$ La subida ha durado 55 minutos, y la bajada, 32 minutos.

20 **En cierta cafetería, por dos cafés y un refresco nos cobraron el otro día 3,80 €. Hoy hemos tomado un café y tres refrescos, y nos han cobrado 5,90 €. ¿Cuánto cuesta un café? ¿Y un refresco?**

Coste del café → x

Coste del refresco → y

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3,80 \\ x + 3y = 5,90 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1,1 \\ y = 1,6 \end{array}\right\}$$

El café cuesta 1,10 €, y el refresco, 1,60 €.

21 **Un hotel lleno alberga a 62 clientes en 35 habitaciones, unas individuales y otras dobles. ¿Cuántas habitaciones simples y cuántas dobles tiene el hotel?**

Habitaciones dobles → x

Habitaciones individuales → y

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 35 \\ 2x + y = 62 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 27 \\ y = 8 \end{array}\right\}$$ Hay 27 habitaciones dobles y 8 individuales.

22 **Un puesto ambulante vende los melones y las sandías a un precio fijo la unidad. Carolina se lleva 5 melones y 2 sandías, que le cuestan 27 €. Julián paga 26 € por 3 melones y 4 sandías. ¿Cuánto cuesta un melón? ¿Y una sandía?**

Coste de un melón → x

Coste de una sandía → y

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 2y = 27 \\ 3x + 4y = 26 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 3,5 \end{array}\right\}$$

Un melón cuesta 4 €, y una sandía, 3,50 €.

23 **Un fabricante de jabones envasa 550 kg de detergente en 200 paquetes, unos de 2 kg y otros de 5 kg. ¿Cuántos envases de cada clase utiliza?**

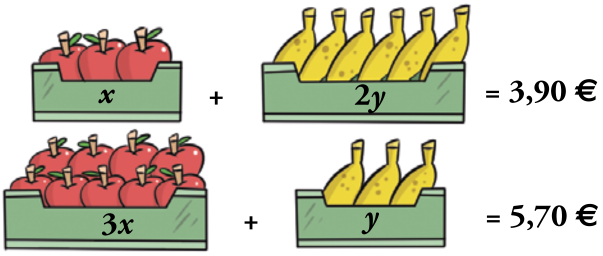
Envases de 2 kg → x

Envases de 5 kg → y

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 200 \\ 2x + 5y = 550 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 150 \\ y = 50 \end{array}\right\}$$ Utiliza 150 envases de 2 kg y 50 envases de 5 kg.

Página 173

24 **Escribe el enunciado de un problema para el sistema que muestra la ilustración y resuélvelo.**



Claudia compró la semana pasada un kilo de naranjas y 2 kilos de peras, por lo que pagó 3,90 €. Esta semana, Federico ha comprado 3 kilos de naranjas y uno de peras y ha pagado 5,70 €. ¿Cuánto cuesta el kilo de peras? ¿Y el de naranjas?

Precio del kilo de naranjas → x

Precio del kilo de peras → y

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3,90 \\ 3x + y = 5,70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1,50 \\ y = 1,20 \end{array}\right\}$$

El kilo de peras cuesta 1,20 €, y el de naranjas, 1,50 €.

25 **Una tienda de artículos para el hogar pone a la venta 100 juegos de cama a 70 € el juego. Cuando lleva vendida una buena parte, los rebaja a 50 €, continuando la venta hasta que se agotan. La recaudación total ha sido de 6 600 €. ¿Cuántos juegos ha vendido sin rebajar y cuántos rebajados?**

Juegos sin rebaja → x

Juegos con rebaja → y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 100 \\ 70x + 50y = 6\,600 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 80 \\ y = 20 \end{array}\right\}$$

Ha vendido 80 juegos de cama sin rebaja y 20 con rebaja.

26 **Un frutero pone a la venta 80 kg de cerezas. Al cabo de unos días ha vendido la mayor parte, pero considera que la mercancía restante no está en buenas condiciones y la retira. Sabiendo que por cada kilo vendido ha ganado 1 €, que por cada kilo retirado ha perdido 2 € y que la ganancia ha sido de 56 €, ¿cuántos kilos ha vendido y cuántos ha retirado?**

Kilos vendidos → x

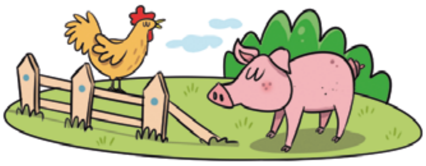
Kilos retirados → y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 80 \\ x - 2y = 56 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 72 \\ y = 8 \end{array}\right\}$$

Ha vendido 72 kilos y ha retirado 8.

27 **En la granja, entre cerdos y gallinas, hay 12 cabezas y 34 patas. ¿Cuántos cerdos son? ¿Y gallinas?**

Cerdos → x
Gallinas → y
Patas de cerdos → 4x
Patas de gallinas → 2y



$$\left.\begin{array}{r} x + y = 12 \\ 4x + 2y = 34 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \end{array}\right\}$$

Hay 5 cerdos y 7 gallinas.

28 **Rosendo tiene en el bolsillo 12 monedas, unas de 20 céntimos y otras de 50 céntimos. Si en total tiene 3,30 euros, ¿cuántas monedas de cada tipo lleva?**

Monedas de 20 céntimos → x

Monedas de 50 céntimos → y

$$\left.\begin{array}{r}x+y=12\\20x+50y=330\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=9\\y=3\end{array}\right\}$$ Tiene 9 monedas de 20 céntimos y 3 monedas de 50 céntimos.

29 **En siete saltos, la rana avanza tanto como el saltamontes en cinco salto. Si cada uno da seis saltos, el saltamontes habrá superado a la rana en 144 cm. ¿Cuánto avanza la rana en cada salto? ¿Y el saltamontes?**

Distancia que avanza la rana en cada salto → x

Distancia que avanza el saltamontes en cada salto → y

$$\left.\begin{array}{l}7x=5y\\6y=6x+144\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=60\\y=84\end{array}\right\}$$ La rana avanza 60 cm en cada salto, y el saltamontes, 84 cm.

30 **Si Gracia multiplica su edad por siete, obtiene la de Concha, su abuela. Pero dentro de 11 años solo tendrá que multiplicar por cuatro para conseguir lo mismo. ¿Qué edad tiene cada una?**

	EDAD HOY	DENTRO DE 11 AÑOS
GRACIA	x	$x + 11$
CONCHA	y	$y + 11$

$$\left.\begin{array}{l}7x=y\\4(x+11)=y+11\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=11\\y=77\end{array}\right\}$$

Gracia tiene 11 años, y su abuela Concha, 77.

31 **El doble de la edad de Javier coincide con la mitad de la edad de su padre. Dentro de cinco años, la edad del padre será tres veces la de Javier. ¿Cuántos años tiene hoy cada uno?**

$$\left.\begin{array}{l}2x=\dfrac{y}{2}\\3(x+5)=y+5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=10\\y=40\end{array}\right\}$$ Javier tiene 10 años, y su padre, 40.

32 **Tras la mejora de las vías, un tren de mercancías ha rebajado el tiempo de cierto trayecto en 30 minutos, mientras que uno de alta velocidad lo ha rebajado en 15 minutos. Así, la relación de los tiempos entre ambos es de uno a siete, mientras que antes era de uno a seis.**

	MERCANCÍAS	AVE	RELACIÓN TIEMPOS
AHORA	x	y	1/7
ANTES	$x + 30$	$y + 15$	1/6

¿Cuánto tarda el tren de mercancías y cuánto el AVE?

$$\left.\begin{array}{l}x=7y\\x+30=6(y+15)\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=420\\y=60\end{array}\right\}$$

El tren de mercancías tarda 420 minutos (7 horas), y el AVE, una hora.

33 **En un taller de confección se tardaba el triple de tiempo en hacer una chaqueta que en hacer un pantalón. Sin embargo, tras renovar la maquinaria, se invierten 10 minutos menos en cada prenda, pero hacer una chaqueta lleva cinco veces el tiempo que lleva hacer un pantalón.**

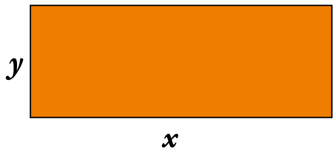
¿Cuánto se tardaba antes, y cuánto actualmente, en hacer una chaqueta? ¿Y en hacer un pantalón?

	CHAQUETA	PANTALÓN
AHORA	x	y
ANTES	$x + 10$	$y + 10$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5y \\ x + 10 = 3(y + 10) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 50 \\ y = 10 \end{array}\right\}$$

Ahora se tarda 50 minutos en hacer una chaqueta y 10 minutos en hacer un pantalón. Antes se tardaba 1 hora en hacer una chaqueta y 20 minutos en hacer un pantalón.

34 **El largo de un rectángulo es inferior en 7 centímetros al doble del ancho, y el perímetro mide 58 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?**



$$\begin{cases} x = 2y - 7 \\ 2x + 2y = 58 \end{cases}$$

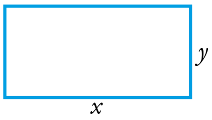
Resolvemos por sustitución:

$$2(2y - 7) + 2y = 58 \rightarrow y = 12 \rightarrow x = 17$$

El rectángulo mide 17 cm de largo × 12 cm de ancho.

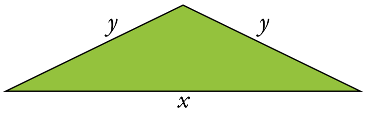
35 **Para cercar una parcela rectangular, 25 metros más larga que ancha, se han necesitado 210 metros de alambrada. Calcula las dimensiones de la parcela.**

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 25 \\ 2x + 2y = 210 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 65 \\ y = 40 \end{array}\right\}$$



La parcela tiene unas dimensiones de 65 m de largo × 40 m de ancho.

36 **En un triángulo isósceles, el perímetro mide 29 cm y la suma de los lados iguales supera en 3 cm al lado desigual. Calcula la longitud de cada lado.**



$$\begin{cases} x + 2y = 29 \\ 2y = x + 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2y + x = 29 \\ 2y = x + 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 13 \\ y = 8 \end{array}$$ → El lado desigual mide 13 cm y los dos lados iguales miden 8 cm.

Página 174

37 **El área de un triángulo mide 54 m^2 y su base supera en un centímetro a los dos tercios de la altura. Calcula la longitud de la base y la de la altura.**

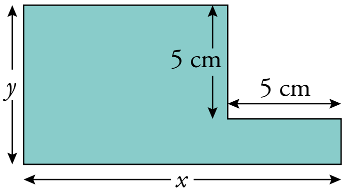
Base → x

Altura → y

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{xy}{2} = 54 \\[2ex] x = \dfrac{2}{3}y + 1\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x = 9 \\ y = 12\end{array}\right\}$$

La base mide 9 cm y la altura, 12 cm.

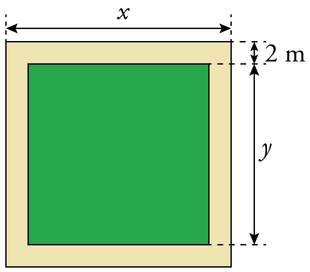
38 **Calcula la longitud de los lados del siguiente polígono, sabiendo que el perímetro mide 42 cm y el área 73 cm^2.**



$$\left.\begin{array}{l}2x + 2y = 42 \\ xy - 25 = 73\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x = 14 \\ y = 7\end{array}\right\}$$

Los lados del polígono son 14 cm, 7 cm, 9 cm, 5 cm, 5 cm y 2 cm, respectivamente.

39 **En un patio cuadrado se ha ajardinado una zona interior, dejando alrededor un paseo de 2 metros de anchura que tiene una superficie de 184 m^2.**



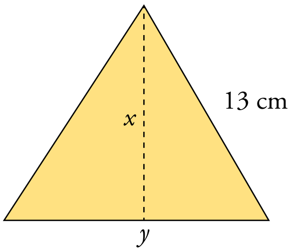
$$\begin{cases} x = y + \square \\ x^2 - y^2 = \square \end{cases}$$

¿Cuáles son las dimensiones del patio? ¿Y de la zona ajardinada?

$$\left.\begin{array}{l}x = y + 4 \\ x^2 - y^2 = 184\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x = 25 \\ y = 21\end{array}\right\}$$

El patio mide 25 metros de lado y la zona ajardinada, 21 metros de lado.

40 **En un triángulo isósceles, uno de los lados iguales mide 13 cm y la altura sobre el lado desigual es 2 cm mayor que dicho lado. Calcular el área.**



$$\begin{cases} x = y + 2 \\ x^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 13^2 \end{cases}$$

Recuerda el teorema de Pitágoras.

$$(y+2)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \to x = 12;\ y = 10$$

El lado desigual mide 10 cm y la altura, 12 cm. Calculamos su área:

$$A = \frac{y \cdot x}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

Su área es de 60 cm^2.

41 **Un concurso televisivo está dotado de un premio de 3 000 € para repartir entre dos concursantes, A y B.**

El reparto se hará en partes proporcionales al número de pruebas superadas. Tras la realización de estas, resulta que el concursante A ha superado cinco pruebas, y el B, siete. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

A se lleva → x *B se lleva → y*

El premio conseguido es proporcional al número de pruebas superadas → x/5 = y/7

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3\,000 \\ \frac{x}{5} &= \frac{y}{7} \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x &= 1\,250 \\ y &= 1\,750 \end{aligned}\right\}$$

El concursante A se lleva 1 250 €, y el B, 1 750 €.

42 **¿Qué cantidades de aceite, uno puro de oliva, a 3 €/litro, y otro de orujo, a 2 €/litro, hay que emplear para conseguir 600 litros de mezcla a 2,40 €/litro?**

Aceite de oliva → x litros

Aceite de orujo → y litros

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 600 \\ 3x + 2y &= 600 \cdot 2{,}40 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x &= 240 \\ y &= 360 \end{aligned}\right\}$$

Hay que emplear 240 litros de aceite de oliva y 360 litros de aceite de orujo.

43 **A continuación, tienes un problema resuelto de dos formas. Indica sus diferencias e incluye las explicaciones oportunas para aclarar su desarrollo.**

Un camión parte de cierta población a 90 km/h. Diez minutos después sale un coche a 110 km/h. Calcula el tiempo que tarda en alcanzarlo y la distancia recorrida desde el punto de partida.

Solución A

	VELOCIDAD (km/h)	TIEMPO (h)	DISTANCIA (km)
COCHE	110	x	y
CAMIÓN	90	$x + \frac{10}{60}$	y

$$\begin{cases} y = 110x \\ y = 90\left(x + \frac{1}{6}\right) \end{cases} \to 110x = 90\left(x + \frac{1}{6}\right) \to \begin{aligned} x &= \frac{3}{4}\ \text{h} \\ y &= 82{,}5\ \text{km} \end{aligned}$$

Solución: **Tarda 45 minutos y recorren 82,5 km.**

Solución B

Distancia coche = distancia camión → d

Tiempo coche → distancia/velocidad = $\frac{d}{110}$

Tiempo camión → distancia/velocidad = $\frac{d}{90}$

$$\frac{d}{90} = \frac{d}{110} + \frac{1}{6} \rightarrow d = 82{,}5 \text{ km}$$

Tiempo coche $\rightarrow \dfrac{d}{110} = \dfrac{82{,}5}{110} = \dfrac{3}{4}$ **h = 45 min**

Solución: **Tarda 45 minutos y recorren 82,5 km.**

En A, el problema se resuelve con dos incógnitas, mediante un sistema de dos ecuaciones. En B, se resuelve con una ecuación y una sola incógnita.

Solución A

- Se asigna la incógnita x al tiempo que tarda el coche, en horas.
- El camión tarda en su recorrido diez minutos más que el coche, que son 10/60 de hora.

  Así, el tiempo del camión, también en horas, es $x + \dfrac{10}{60}$.
- Se asigna la incógnita y a la distancia recorrida por el coche hasta el alcance, que es la misma que la recorrida por el camión.
- Aplicando a cada vehículo la relación *distancia* = *velocidad* · *tiempo*, se construyen las dos ecuaciones que forman el sistema.

Solución B

- Se asigna la incógnita d a la distancia recorrida tanto por el coche como por el camión.
- Se codifican algebraicamente, en función de la incógnita d, los tiempos del coche y del camión. Para ello se atiende a la relación *tiempo* = *distancia*/*velocidad*. Si la velocidad se expresa en km/h, la distancia va en kilómetros y el tiempo, en horas.
- Se construye la ecuación traduciendo a lenguaje algebraico la igualdad:

TIEMPO DEL CAMIÓN = TIEMPO DEL COCHE + DIEZ MINUTOS

Todos estos tiempos deben ir en horas. Por eso, 10 minutos se expresan como 10/60 de hora = 1/6 de hora.

44 **Dos ciudades, A y B, distan 270 km. En cierto momento, un coche parte de A hacia B a 110 km/h, y, a la vez, sale de B hacia A un camión a 70 km/h. ¿Qué distancia recorre cada uno hasta que se encuentran?**

La suma de las distancias es 270 → x + y = 270
Los tiempos invertidos por el coche y el camión, hasta el encuentro, son iguales → x/110 = y/70

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 270 \\ \frac{x}{110} &= \frac{y}{70} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 165 \\ y &= 105 \end{aligned}\right\}$$

El coche recorre 165 km, y el camión, 105 km.

45 **Un peatón sale de A hacia B caminando a una velocidad de 4 km/h. Simultáneamente, sale de B hacia A un ciclista a 17 km/h. Si la distancia entre A y B es de 14 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse y a qué distancia de A y de B lo hacen?**

Distancia desde A del peatón $\rightarrow x$

Distancia desde B del ciclista $\rightarrow 7 - x$

Tiempo $\rightarrow t$

$$\left.\begin{aligned} x &= t \cdot 4 \\ 14 - x &= t \cdot 17 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} t &= 2/3 \\ x &= 8/3 \end{aligned}\right\}$$

Tardan 2/3 h = 40 min en encontrarse.

El encuentro se produce a 8/3 km ≈ 2 km 666 m del punto de partida, A, del peatón.

Página 175

Problemas «+»

46 **Un coche y un camión salen simultáneamente de dos ciudades dirigiéndose, cada uno, hacia la otra, y se cruzan al cabo de dos horas. Cuando el camión llega a su destino, ya hace tres horas que el coche llegó al suyo. ¿En cuánto tiempo ha realizado cada vehículo su viaje?**

- ***Camión → x horas***
  En una hora cubre 1/x del trayecto.
- ***Coche → y horas***
  En una hora cubre 1/y del trayecto.
- ***Ambos → 2 horas***
  En una hora cubren 1/2 del trayecto.

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{y+3} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \ \rightarrow\ x = 6;\ y = 3 \text{ (la solución } x = 1;\ y = -2 \text{ no es válida)}$$

El camión ha necesitado 6 horas y el coche, 3 horas.

47 **Un depósito de agua se abastece de dos grifos que, abiertos simultáneamente, lo llenan en una hora y doce minutos. ¿Cuánto tarda en llenar el depósito cada grifo por separado, sabiendo que en esas condiciones uno invierte una hora más que el otro?**

Justifica el siguiente sistema y resuélvelo: $\begin{cases} x = y + 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$

Ayuda: 1 h 12 min son 72/60 de hora, es decir, 6/5 de hora.

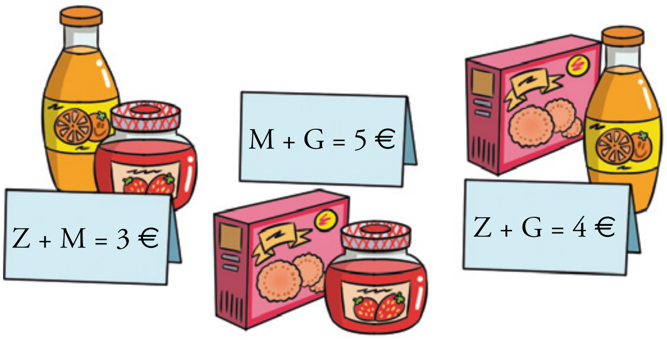
Si un grifo tarda un tiempo *x* en llenar el depósito, en una hora llenará 1/*x*. El otro grifo tarda *y* horas en llenar el depósito y por tanto en una hora llenará 1/*y*. Juntos tardan 6/5 de hora en llenarlo y, por tanto, en una hora llenan 5/6, de ahí la segunda ecuación.

$$\left.\begin{aligned} x &= y + 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{6} \end{aligned}\right\} \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \ \rightarrow\ 12y + 6 = 5y^2 + 5y$$

$$5y^2 - 7y - 6 = 0 \ \rightarrow\ y = 2 \ \text{ (la solución } y = -3/5 \text{ no es válida)} \ \rightarrow\ x = 3$$

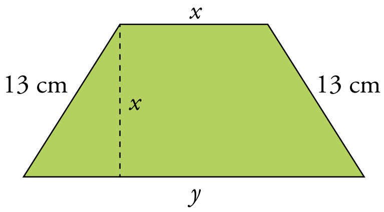
Actuando por separado, uno de los grifos tardaría dos horas en llenar el depósito, y el otro grifo, tres horas.

48 **¿Cuánto cuesta la botella de zumo? ¿Y el tarro de mermelada? ¿Y la caja de galletas?**



$$\left.\begin{aligned} Z + M &= 3 \\ Z + G &= 4 \\ M + G &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} Z &= 3 - M \\ (3 - M) + G &= 4 \\ M + G &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} G - M &= 1 \\ G + M &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} G &= 3 \\ M &= 2 \\ Z &= 1 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} &\text{Galletas: } 3 \text{ €} \\ &\text{Mermelada: } 2 \text{ €} \\ &\text{Zumo: } 1 \text{ €} \end{aligned}$$

49 **El área del trapecio mide 204 cm^2. La altura es igual a la base menor y supera en un centímetro a la mitad de su base mayor. Calcula el perímetro.**



$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2}\cdot x = 204 \\[2ex] \dfrac{y}{2}+1 = x \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2}\cdot x = 204 \\[2ex] \dfrac{y}{2}+1 = x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 22 \end{array}\right\}$$ El perímetro del trapecio es 12 + 13 + 22 + 13 = 60 cm.

50 Problema resuelto.

51 **Resuelve, por tanteo y con un sistema de ecuaciones, un problema igual que el anterior con otros datos:**

- **La suma de las cifras es 13.**
- **Al intercambiar las centenas con las decenas, el número disminuye en 180.**

Los capicúas cuyas tres cifras suman 13 son:

616 - 535 - 454 - 373 - 292

Les restamos 180:

$616 - 180 = 436$ → No vale.

$535 - 180 = 355$ → ¡Lo encontré!

$$\left.\begin{array}{l} x + y + x = 13 \\ 100x + 10y + x - 180 = 100y + 10x + x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 13 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 3 \end{array}$$

El número buscado es el 535.

52 **Catalina tuvo a su hija, Amaya, a los 27 años. Y hoy, sus edades se escriben con las mismas cifras. Sabiendo que Amaya tiene menos de 20 años, ¿qué edad tiene hoy cada una?**

$$\boxed{x}\boxed{y} - \boxed{y}\boxed{x} = 27$$
$$\Downarrow$$
$$(10x + y) - (10y + x) = 27$$

Reduciendo la ecuación queda $x - y = 3$. Probando números de una cifra y, teniendo en cuenta que Amaya tiene menos de 20 años, la solución es que Amaya tiene 14 años y Catalina, su madre, 41.

Página 176

INVESTIGA E INTERPRETA

Observa los enunciados y su relación con las ecuaciones y con el gráfico que los acompañan.

Un cicloturista sale de la población A, avanzando hacia la población B, a la velocidad de 12 km/h.

A la misma hora sale de B hacia A una corredora ciclista, entrenando, a 24 km/h.

En un punto, entre A y B, delante de su casa, un jubilado contempla el tránsito de la carretera.

$y = 12x \rightarrow$

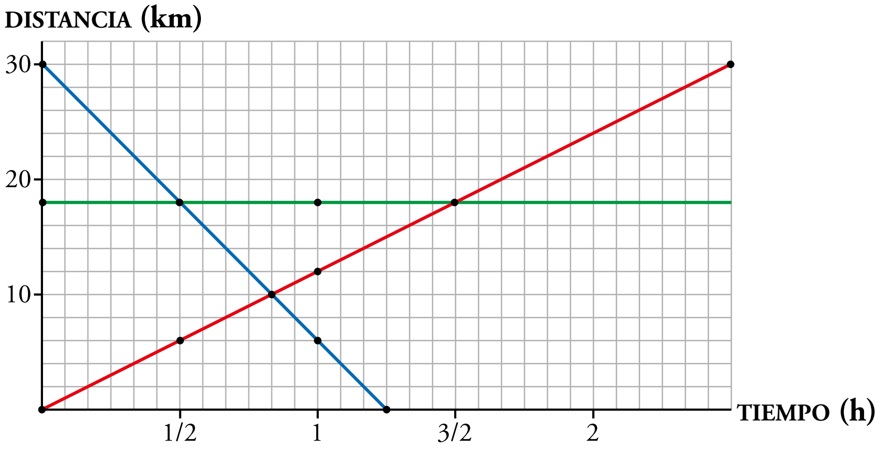
x	0	1/2	5/6	1
y	0	6	10	12

$y = 30 - 24x \rightarrow$

x	0	1/2	5/6	1
y	30	18	10	6

$y = 18 + 0x \rightarrow$

x	0	1/2	5/6	1
y	18	18	18	18



Responde a estas preguntas sabiendo que x indica el tiempo transcurrido desde la salida e y la distancia a la población A.

a) La recta roja corresponde al cicloturista y la azul a la corredora que entrena. ¿Y la verde?

b) ¿Cuánto tardan en cruzarse los ciclistas?

c) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que el jubilado ve pasar al cicloturista? ¿Y hasta que ve pasar a la corredora?

d) ¿Qué distancia hay entre A y B? ¿A qué distancia de A está el jubilado?

a) La línea verde corresponde al jubilado.

b) Los ciclistas tardan 50 minutos en cruzarse.

c) Pasa 1 hora y media hasta que el jubilado ve pasar al cicloturista, y media hora hasta que ve pasar a la corredora.

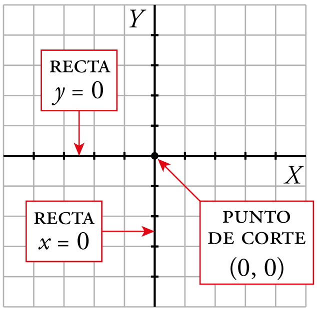
d) Hay 30 km entre A y B. El jubilado está a 18 km de A.

LEE E INFÓRMATE

Un sistema muy particular

¿Te has preguntado alguna vez cuáles son las ecuaciones de los ejes de coordenadas?

Observa que, en la ecuación $0x + 1y = 0$, la incógnita y toma el valor *cero* valga lo que valga x.



$$\mathbf{0}x + \mathbf{1}y = \mathbf{0} \rightarrow y = \mathbf{0} \rightarrow$$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	…
y	0	0	0	0	0	0	0	…

¡Es la ecuación del eje de abscisas!

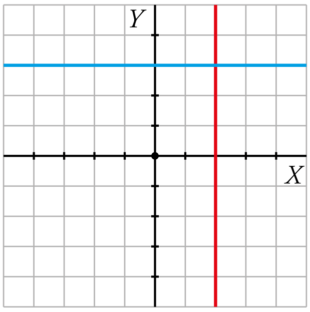
- **Según eso, ¿cuál es la ecuación del eje de ordenadas?**

  $1x + 0y = 0 \rightarrow x = 0$

- **Y, ¿cuál es la solución del sistema formado por las dos ecuaciones anteriores?**

  La solución del sistema formado por las ecuaciones de los ejes es el punto de corte de los mismos, esto es, el origen de coordenadas (0, 0).

Otros sistemas especiales



Comprueba que las rectas roja y azul coinciden con la representación gráfica de estas dos ecuaciones.

¿Cuál es la solución del sistema?

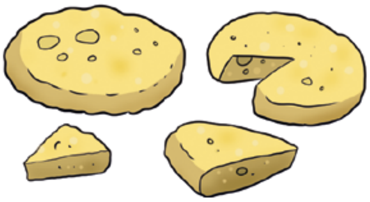
$$\begin{cases} x + 0y = 2 \\ 0x + \ \ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

La solución del sistema está en el punto (2, 3).

Página 177

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Tantea y reflexiona



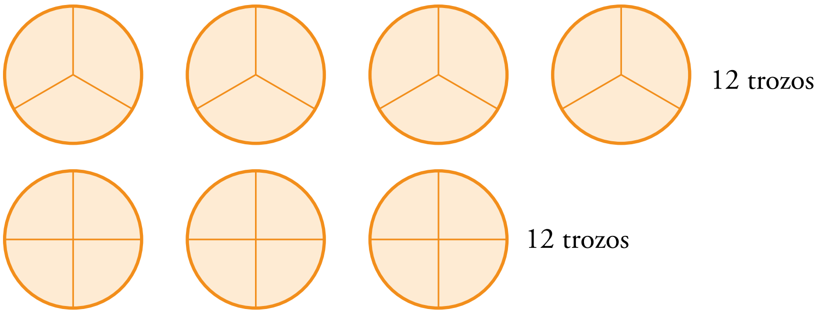
- **Todos los chicos y las chicas de la clase de Guille se van de excursión al campo. Entre otras cosas, encargan 14 tortillas. Al mediodía, reparten una tortilla para cada tres personas, y en la merienda, una para cada cuatro. ¿Cuántas personas fueron de excursión?**

  Cada excursionista come $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ de tortilla.

  14 tortillas: $\frac{7}{12} = \frac{14 \cdot 12}{7} = 24$ individuos

  Resolvámoslo esquemáticamente:

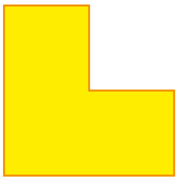
  Partimos tortillas en terceras partes y en cuartas partes hasta que el número de trozos coincida:

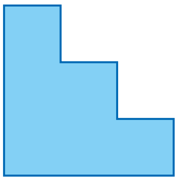


  Esto significaría que con 7 tortillas comerían y merendarían 12 personas.

  Como hay 14 tortillas, el número de excursionistas es 24.

- **El perímetro de la figura amarilla es 160 mm, y el área de la azul, 600 mm^2.**
  Calcula el área de la amarilla y el perímetro de la azul.





  lado = 160 : 8 = 20 mm = 2 cm

  Área = 3 lado^2 = 12 cm^2

  La figura está formada por 6 cuadrados.

  Cada cuadrado tiene una superficie de 100 m^2.

  El lado de cada cuadrado mide 10 m.

  El perímetro de la figura es de 12 · 10 = 120 m.

- **Busca al menos tres soluciones a esta suma, teniendo en cuenta que a letras distintas corresponden cifras diferentes:**

$$\begin{array}{r} \text{uno} \\ \text{uno} \\ \text{uno} \\ \text{uno} \\ \text{uno} \\ +\ \text{uno} \\ \hline \text{seis} \end{array}$$

  a) **uno** = 417, **seis** = 2502

  b) **uno** = 347, **seis** = 2082

  c) **uno** = 357, **seis** = 4134

  d) **uno** = 467, **seis** = 2802

  e) **uno** = 689, **seis** = 4434

AUTOEVALUACIÓN

1 **Representa gráficamente las siguientes ecuaciones:**

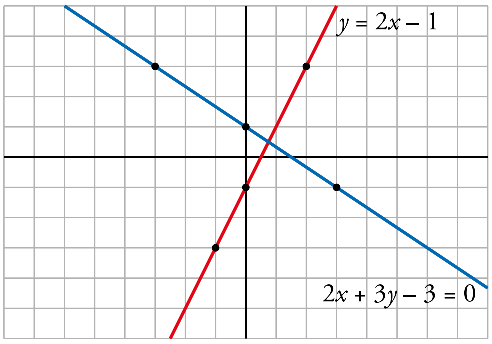
a) $\boldsymbol{y = 2x - 1}$ **b)** $\boldsymbol{2x + 3y - 3 = 0}$

a)

x	–1	0	2
y	–3	–1	3

b) $y = \dfrac{3 - 2x}{3} \to$

x	–3	0	3
y	3	1	–1



2 **Resuelve gráficamente este sistema:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 7} \\ \boldsymbol{3x - y = 9} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{2x + y = 4} \\ \boldsymbol{x - y = 2} \end{cases}$

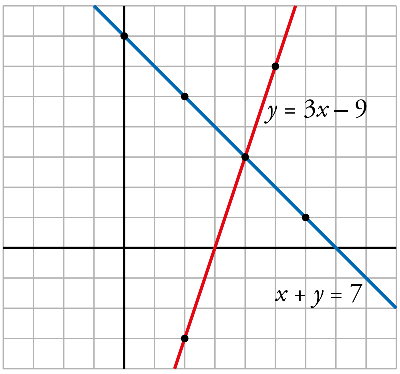
a) $y = 7 - x \to$

x	2	4	6
y	5	3	1

$y = 3x - 9 \to$

x	2	4	6
y	–3	3	9

Solución del sistema: $x = 4$; $y = 3$.



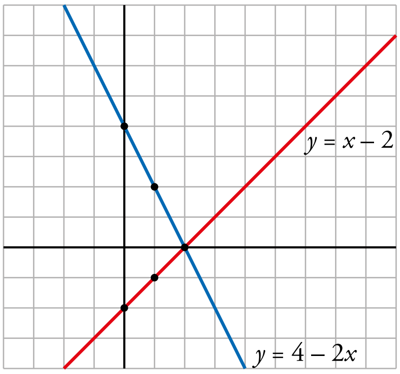
b) $y = 4 - 2x \to$

x	0	1	2
y	4	2	0

$y = x - 2 \to$

x	0	1	2
y	–2	–1	0

Solución del sistema: $x = 2$; $y = 0$.



3 **Resuelve por el método de sustitución.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 6} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 7} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 1} \\ \boldsymbol{3x - y = -9} \end{cases}$

a) $x = 6 + y \to 2(6 + y) + 3y = 7 \to y = -1;\ x = 6 + (-1) = 5$

b) $x = 1 - y \to 3(1 - y) - y = -9 \to -4y = -12 \to y = 3;\ x = -2$

4 **Resuelve por el método de igualación.**

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 2 - y \\ x = 10 + y \end{array}\right\} \rightarrow 2 - y = 10 + y \rightarrow y = -4;\ x = 2 - (-4) = 6$

b) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 7 \\ y = 2 - x \end{array}\right\} \rightarrow 2x - 7 = 2 - x \rightarrow x = 3;\ y = -1$

5 **Resuelve por el método de reducción.**

a) $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x + y = -8 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 5 y sumando, se obtiene:

a) $14x = 42 \rightarrow x = 3;\ 4 \cdot 3 + 5y = 2 \rightarrow y = -2$

b) $\left.\begin{array}{r} -3x + y = -8 \\ 3x - 6y = 18 \end{array}\right\} \rightarrow -5y = 10 \rightarrow y = -2;\ x = 2$

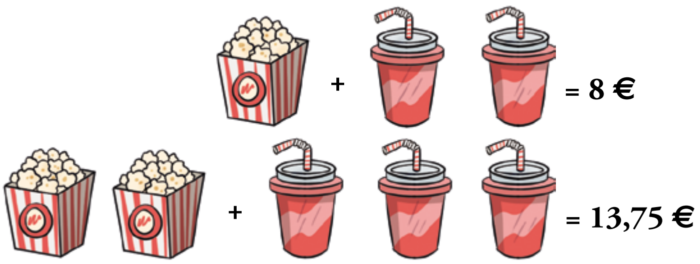
6 **Simplifica las ecuaciones y resuelve el sistema.**

a) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{3} \\ \dfrac{2x}{5} = 1 + \dfrac{y}{4} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{5x}{3} = 2y + 13 \\ \dfrac{3x}{5} - \dfrac{2y}{3} = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 7 \\ 8x - 5y = 20 \end{array}\right\} \rightarrow y = 4;\ x = 5$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x - 6y = 39 \\ 9x - 10y = 75 \end{array}\right\} \rightarrow y = 6;\ x = 15$

7 **Escribe un sistema de ecuaciones para la siguiente ilustración y resuélvelo.**



Palomitas → x

Refresco → y

$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ 2x + 3y = 13,75 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3,50 \\ y = 2,25 \end{array}\right\}$ Las palomitas cuestan 3,50 €, y el refresco, 2,25 €.

8 **Calcula dos números sabiendo que su suma es 119 y que el triple del menor sobrepasa en 17 unidades al doble del mayor.**

$\left.\begin{array}{l} x + y = 119 \\ 3x = 17 + 2y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 51 \\ y = 68 \end{array}\right\}$ Los números son 51 y 68.

9 **En la cafetería, ayer pagamos 3 € por dos cafés y una tostada. Sin embargo, hoy nos han cobrado 6,30 € por tres cafés y tres tostadas. ¿Cuánto cuesta un café, y cuánto, una tostada?**

Café → x

Tostada → y

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 3x + 3y = 6{,}30 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = 0{,}90 \\ y = 1{,}20 \end{array}\right\}$$ Un café cuesta 0,90 €, y una tostada, 1,20 €.

10 **La base de un rectángulo es 8 cm más larga que la altura y el perímetro mide 42 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo.**

Base → b

Altura → a

$$\left.\begin{array}{l} b = a + 8 \\ 2a + 2b = 42 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a = 6{,}5 \\ b = 14{,}5 \end{array}\right\}$$

Las dimensiones del rectángulo son 14,5 cm de base y 6,5 cm de altura.

11 **Un almacenista ha mezclado café de calidad superior, a 7,60 €/kg, con otro café de una calidad inferior, a 4,20 €/kg, obteniendo 100 kilos de mezcla que ha salido a un precio de 5,50 €/kg. ¿Qué cantidad de cada clase ha utilizado?**

Café calidad superior → x

Café calidad inferior → y

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 100 \\ 7{,}60x + 4{,}10y = 5{,}43 \cdot 100 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = 38 \\ y = 62 \end{array}\right\}$$

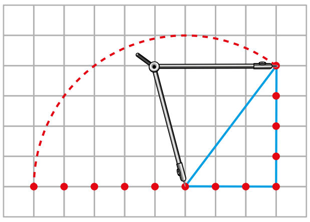
Ha utilizado 38 kilos de calidad superior y 62 kilos de calidad inferior.

9 RECTAS Y ÁNGULOS

Página 178

1 **¿Te animas a hacer sobre un corcho, con cuerda y alfileres, ángulos rectos como los hacían en Egipto e India?**

O dibuja sobre una cuadrícula dos segmentos de longitudes 3 y 4, en ángulo recto, y une los extremos libres completando un triángulo rectángulo. Después, comprueba que el tercer lado mide 5.



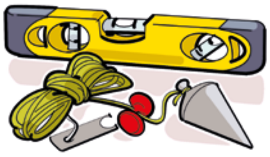
Respuesta abierta.

Página 179

2 **Según los babilonios, ¿qué ángulo giraba el Sol alrededor de la Tierra en medio año? ¿Cuánto tiempo tardaba en girar un cuarto de vuelta?**

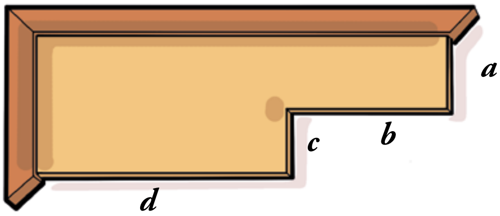
Giraba 180°. Tardaba 90 días.

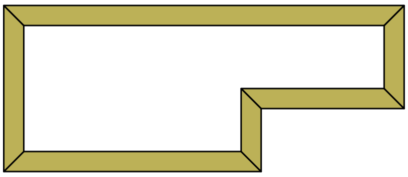
3 **¿Qué tipo de ángulos se consiguen con ellos en las paredes?**



Con el nivel y la plomada se consiguen ángulos rectos.

4 **Al marco de este tablero le faltan varios listones. Dibújalos en tu cuaderno. Puedes hacer uso de la escuadra.**





1 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

Página 181

Para fijar ideas

1 **¿Verdadero o falso?**

Ayúdate con dibujos. Considera todos los casos, todas las posibilidades.

a) Si dos puntos distintos A y B están en la recta r y también están en la recta s, entonces r y s son la misma recta.

b) Dos rectas del mismo plano, o son secantes o son paralelas.

c) Si dos rectas del mismo plano no tienen ningún punto común son paralelas.

d) Dos rectas, si son secantes, tienen al menos dos puntos comunes.

e) Dos rectas secantes tienen un punto en común y solo uno.

f) Por un punto exterior a una recta se puede trazar solo una paralela a ella.

g) Dos semirrectas del mismo plano tienen necesariamente un único punto común.

h) Si dos semirrectas tienen dos o más puntos comunes, coinciden.

i) Si los puntos P y Q están a la misma distancia de la recta r, la recta que pasa por P y por Q necesariamente es paralela a r.

a) Verdadero.

b) Falso. Pueden ser coincidentes.

c) Verdadero.

d) Falso. Solo tienen un punto en común.

e) Verdadero.

f) Verdadero.

g) Falso. Pueden tener infinitos puntos en común.

h) Falso. Pueden tener un segmento como intersección.

i) Falso. Es posible si P y Q están cada uno en uno de los semiplanos en que la recta divide al plano.

2 **Reflexiona y contesta apoyando tus respuestas con dibujos.**

a) A, B y C son tres puntos. Sabemos que la recta AB coincide con la recta BC. ¿Qué puedes decir de la recta AC?

b) Dos puntos, A y B, pertenecen a la recta r. ¿Qué queda de r al quitar la porción comprendida entre A y B?

c) ¿Pueden tener dos semirrectas un segmento en común?

d) Una recta, r, divide a un plano en dos semiplanos. Otra recta, s, del mismo plano, es secante a r. ¿Qué tiene en común s con cada semiplano?

e) ¿Deben ser necesariamente paralelas dos rectas que no tienen ningún punto común? (Dibuja un cubo y las diagonales de dos caras opuestas).

a) Que es también coincidente con las otras dos.

b) Dos semirrectas.

c) Sí, el punto que los separa.

d) Infinitos puntos.

e) No, porque pueden no pertenecer al mismo plano.

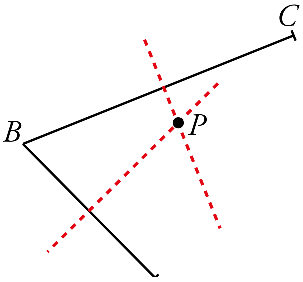
2 ▶ DOS RECTAS IMPORTANTES

Página 182

Para practicar

1 **Dibuja dos segmentos concatenados, *AB* y *BC*. Traza sus mediatrices y llama *P* al punto en que se cortan.**

Razona por qué *P* está a la misma distancia (equidista) de *A*, de *B* y de *C*.



Por estar *P* en la mediatriz de *AB*, la distancia de *P* a *A* es igual a la distancia de *P* a *B*.

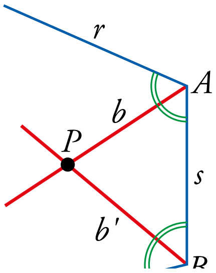
Por estar *P* en la mediatriz de *BC*, la distancia de *P* a *B* es igual a la distancia de *P* a *C*.

Por tanto, la distancia de *P* a *A*, *B* y *C* es la misma.

2 **Dibuja en tu cuaderno dos ángulos $\widehat{rs}$ y $\widehat{st}$ como se ve en la figura.**

— Traza sus bisectrices, *b* y *b'*, que se cortan en *P*.

— Razona que las distancias del punto *P* a las rectas *r*, *s* y *t* coinciden.



Por estar *P* en la bisectriz de $\widehat{rs}$, la distancia de *P* a *r* es igual a la distancia de *P* a *s*.

Por estar *P* en la bisectriz de $\widehat{st}$, la distancia de *P* a *s* es igual a la distancia de *P* a *t*.

Por tanto, la distancia de *P* a *r*, a *s* y a *t* es la misma.

3 ÁNGULOS

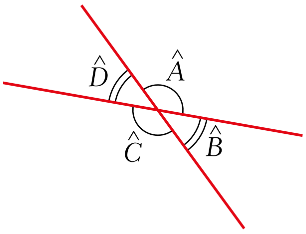
Página 183

Para practicar

1 **Observa la ilustración e identifica:**

a) Parejas de ángulos adyacentes.

b) Parejas de ángulos opuestos por el vértice.



a) $\widehat{D}$ y $\widehat{A}$; $\widehat{C}$ y $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$; $\widehat{B}$ y $\widehat{A}$

b) $\widehat{D}$ y $\widehat{B}$; $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$

2 **¿Verdadero o falso?**

a) Si dos ángulos suplementarios son iguales, entonces ambos son rectos.

b) Dos ángulos complementarios no pueden ser iguales.

c) El suplementario de un ángulo agudo es un ángulo obtuso.

a) Verdadero.

b) Falso. Dos ángulos de 45° son complementarios e iguales.

c) Verdadero.

4 ▶ MEDIDA DE ÁNGULOS

Página 184

Para practicar

1 **¿Cuántos minutos son 5°? ¿Y 7°? ¿Y 18°?**

$5^\circ = 5 \cdot 60' = 300'$

$7^\circ = 7 \cdot 60' = 420'$

$18^\circ = 18 \cdot 60' = 1\,080'$

2 **Pasa a segundos las siguientes expresiones:**

a) 3'
b) 5'
c) 10'
d) 15'

a) $3' = 3 \cdot 60'' = 180''$
b) $5' = 5 \cdot 60'' = 300''$
c) $10' = 10 \cdot 60'' = 600''$
d) $15' = 15 \cdot 60'' = 900''$

3 **Transforma en minutos estas cantidades:**

a) 120"
b) 180"
c) 1 200"
d) 3 600"

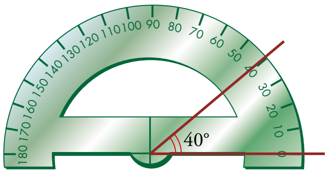
a) $120'' = (120 : 60)' = 2'$
b) $180'' = (180 : 60)' = 3'$
c) $1\,200'' = (1\,200 : 60)' = 20'$
d) $3\,600'' = (3\,600 : 60)' = 60'$

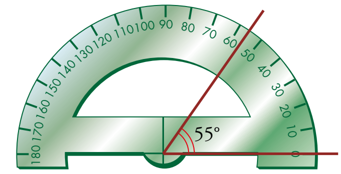
4 **Pasa a grados las siguientes expresiones:**

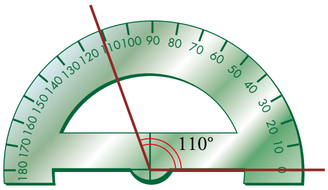
a) 60'
b) 180'
c) 240'
d) 120'

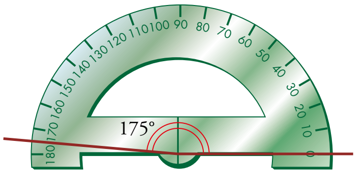
a) $60' = 1^\circ$
b) $180' = (180 : 60)^\circ = 3^\circ$
c) $240' = (240 : 60)^\circ = 4^\circ$
d) $120' = (120 : 60)^\circ = 2^\circ$

5 **Con la ayuda del transportador, dibuja en tu cuaderno ángulos de 40°, 55°, 110° y 175°.**









6 **Calcula el ángulo suplementario de los ángulos que has dibujado en la actividad anterior.**

Suplementario de 40°: 180° – 40° = 140°

Suplementario de 55°: 180° – 55° = 125°

Suplementario de 110°: 180° – 110° = 70°

Suplementario de 175°: 180° – 175° = 5°

Página 185

Para fijar ideas

1 **¿Cuántos segundos son 45° 27' 53"?**

— Multiplica 45 grados por 60 para transformarlos en minutos y otra vez por 60 para transformarlos en segundos.

— Multiplica 27 minutos por 60 para hacerlos segundos.

— Suma las cantidades de segundos obtenidas al transformar los grados y los minutos con los 53 segundos iniciales del enunciado.

Solución: **45° 27' 53" = …"**

45° → 45 × 60 × 60 = 162 000"

27' → 27 × 60 = 1 620"

162 000" + 1 620" + 53" = 163 673"

45° 27' 53" = 163 673"

2 **Pasa 163 673" a grados, minutos y segundos. Copia y completa.**

— Divide 163 673" entre 60 para pasarlos a minutos. Queda un resto de … segundos.

— Divide los minutos otra vez entre 60 para pasarlos a grados.

— Finalmente, se obtienen … grados y queda un resto de … minutos.

Solución: **163 673" = …° …' …"**

```
163673" |60             2727' |60
  436    2727'            327   45°
    167                    27'
      473
        53"
```

163 673" = 45° 27' 53"

Para practicar

7 **Copia y completa.**

a) 25° · 60 = … **b) 8° · 3 600 = …**

c) 180" : 60 = … **d) 7 200" : 3 600 = …**

a) 1 500' b) 28 800"

c) 3' d) 2°

8 **Opera mentalmente y completa en tu cuaderno.**

a) 1° 20' → …'　　**b) 2' 15" → …"**

c) 65' → …° …'　　**d) 130" → …' …"**

a) 80'　　b) 135"

c) 1° 5'　　d) 2' 10"

9 **Pasa a la unidad que se indica.**

a) 0,1° → …'　　**b) 2,5° → …°…'**　　**c) 4,2' → …' …"**

a) 6'　　b) 2° 30'　　c) 4' 12"

10 **Pasa a segundos.**

a) 53° 45' 13"

b) 81° 37'

c) 26° 11"

a) 53° 45' 13" = (53 · 3 600)" + (45 · 60)" + 13" = 190 800" + 2 700" + 13" = 193 513"

b) 81° 37' = (81 · 3 600)" + (37 · 60)" = 291 600" + 2 220" = 293 820"

c) 26° 11" = (26 · 3 600)" + 11" = 93 600" + 11" = 93 611"

11 **Pasa a forma compleja.**

a) 32 220"

b) 59 233"

c) 9 123"

a) 32220" |60
222　537'
420
00"

537' |60
57'　8°

32 220'' = 8° 57' 0'' = 8° 57'

b) 59233" |60
523　987'
433
13"

987' |60
387　16°
27'

59 233'' = 16° 27' 13''

c) 9123" |60
312　152'
123
03"

152' |60
32'　2°

9 123'' = 2° 32' 3''

12 **Observa y después transforma en grados.**

$$24' \rightarrow 24 : 60 = 0{,}4° \longrightarrow 37° \, 24' = 37{,}4°$$

a) **15'** **b)** **1° 15'** **c)** **27° 30'**

d) **10° 45'** **e)** **16° 24'** **f)** **20° 6'**

a) 15' : 60 = 0,25°

b) 1° 15' → 15' : 60 = 0,25° → 1° 15' = 1,25°

c) 27° 30' → 30' : 60 = 0,5° → 27° 30' = 27,5°

d) 10° 45' → 45' : 60 = 0,75° → 10° 45' = 10,75°

e) 16° 24' → 24' : 60 = 0,4° → 16° 24' = 16,4°

f) 20° 6' → 6' : 60 = 0,1° → 20° 6' = 20,1°

5 OPERACIONES CON MEDIDAS ANGULARES

Página 186

Para fijar ideas

1 **Copia, completa y resuelve las sumas.**

$$\begin{array}{rcr}
\mathbf{16^\circ} & & \mathbf{43'} \\
+\,\mathbf{18^\circ} & & \mathbf{32'} \\ \hline
\mathbf{34^\circ} & & \mathbf{75'} \\
\downarrow & \xleftarrow{+1} & \downarrow \\
\mathbf{35^\circ} & & \mathbf{\ldots'}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcrcr}
\mathbf{79^\circ} & & \mathbf{54'} & & \mathbf{28''} \\
+\,\mathbf{36^\circ} & & \mathbf{27'} & & \mathbf{45''} \\ \hline
\mathbf{115^\circ} & & \mathbf{81'} & & \mathbf{73''} \\
\downarrow & & \downarrow & \xleftarrow{+1} & \downarrow \\
\mathbf{115^\circ} & & \mathbf{82'} & & \mathbf{\ldots''} \\
\downarrow & \xleftarrow{+1} & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{116^\circ} & & \mathbf{\ldots'} & & \mathbf{\ldots''}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
16^\circ & & 43' \\
+\,18^\circ & & 32' \\ \hline
34^\circ & & 75' \\
\downarrow & \xleftarrow{+1} & \downarrow \\
35^\circ & & 15'
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcrcr}
79^\circ & & 54' & & 28'' \\
+\,36^\circ & & 27' & & 45'' \\ \hline
115^\circ & & 81' & & 73'' \\
\downarrow & & \downarrow & \xleftarrow{+1} & \downarrow \\
115^\circ & & 82' & & 13'' \\
\downarrow & \xleftarrow{+1} & \downarrow & & \downarrow \\
116^\circ & & 22' & & 13''
\end{array}$$

2 **Copia, completa y resuelve las restas.**

$$\begin{array}{rr}
\mathbf{35^\circ} & \mathbf{15'} \\
-\,\mathbf{16^\circ} & \mathbf{43'} \\ \hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrr}
\mathbf{116^\circ} & \mathbf{22'} & \mathbf{13''} \\
-\,\mathbf{79^\circ} & \mathbf{14'} & \mathbf{28''} \\ \hline
\end{array}$$

NO SE PUEDE ↑ NO SE PUEDE ↑

$$\begin{array}{rcr}
\mathbf{34^\circ} & \xrightarrow{+60} & \mathbf{75'} \\
-\,\mathbf{16^\circ} & & \mathbf{43'} \\ \hline
\mathbf{18^\circ} & & \mathbf{32'}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrcr}
\mathbf{116^\circ} & \mathbf{21'} & \xrightarrow{+60} & \mathbf{\ldots''} \\
-\,\mathbf{79^\circ} & \mathbf{14'} & & \mathbf{28''} \\ \hline
\mathbf{\ldots^\circ} & \mathbf{\ldots'} & & \mathbf{\ldots''}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr}
116^\circ & 21' & \xrightarrow{+60} & 73'' \\
-\,79^\circ & 14' & & 28'' \\ \hline
37^\circ & 7' & & 45''
\end{array}$$

Para practicar

1 **Realiza las siguientes operaciones:**

a) **35° 27' 14" + 62° 48' 56"**

b) **62° 46" + 25' 43" + 39° 58'**

c) **82° 2' 7" – 39° 43' 27"**

d) **56° 14' – 34° 42"**

a)

$$\begin{array}{rrrr} & 35^\circ & 27' & 14'' \\ + & 62^\circ & 48' & 56'' \\ \hline & 97^\circ & 75' & 70'' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr} & 97^\circ & 75' & 70'' \\ & & \swarrow & \downarrow \\ + & & 1' & 10'' \\ \hline & 97^\circ & 76' & 10'' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr} & 97^\circ & 76' & 10'' \\ & \swarrow & \downarrow & \\ + & 1^\circ & 16' & \\ \hline & 98^\circ & 16' & 10'' \end{array}$$

Resultado: 98° 16' 10''

b)

$$\begin{array}{rrrr} & 62^\circ & & 46'' \\ & & 25' & 43'' \\ + & 39^\circ & 58' & \\ \hline & 101^\circ & 83' & 89'' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr} & 101^\circ & 83' & 89'' \\ & & \swarrow & \downarrow \\ + & & 1' & 29'' \\ \hline & 101^\circ & 84' & 29'' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr} & 101^\circ & 84' & 29'' \\ & \swarrow & \downarrow & \\ + & 1^\circ & 24' & \\ \hline & 102^\circ & 24' & 29'' \end{array}$$

Resultado: 102° 24' 29''

c)

$$\begin{array}{rrrr} & 82^\circ & 2' & 7'' \\ - & 39^\circ & 43' & 27'' \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr} & 81^\circ & 61' & 67'' \\ - & 39^\circ & 43' & 27'' \\ \hline & 42^\circ & 18' & 40'' \end{array}$$

Resultado: 42° 18' 40''

d)

$$\begin{array}{rrrr} & 56^\circ & 14' & \\ - & 34^\circ & & 42'' \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr} & 56^\circ & 13' & 60'' \\ - & 34^\circ & & 42'' \\ \hline & 22^\circ & 13' & 18'' \end{array}$$

Resultado: 22° 13' 18''

2 **Opera, de igual forma, con medidas de tiempo.**

a) 2 h 20 min 46 s + 3 h 55 min 17 s

b) 1 h 59 min 50 s + 33 min 15 s

c) 5 h 18 min 30 s – 3 h 24 min 47 s

d) 4 h 50 s – 2 h 56 min 59 s

a)
$$\begin{array}{rrlrlrl} & 2 & \text{h} & 20 & \text{min} & 46 & \text{s}\\ + & 3 & \text{h} & 55 & \text{min} & 17 & \text{s}\\ \hline & 5 & \text{h} & 75 & \text{min} & 63 & \text{s}\\ & 5 & \text{h} & 76 & \text{min} & 3 & \text{s}\\ & \mathbf{6} & \mathbf{h} & \mathbf{16} & \mathbf{min} & \mathbf{3} & \mathbf{s}\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrlrlrl} & 1 & \text{h} & 59 & \text{min} & 50 & \text{s}\\ + & & & 33 & \text{min} & 15 & \text{s}\\ \hline & 1 & \text{h} & 92 & \text{min} & 65 & \text{s}\\ & 1 & \text{h} & 93 & \text{min} & 5 & \text{s}\\ & \mathbf{2} & \mathbf{h} & \mathbf{33} & \mathbf{min} & \mathbf{5} & \mathbf{s}\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrlrlrl} & 5 & \text{h} & 18 & \text{min} & 30 & \text{s}\\ - & 3 & \text{h} & 24 & \text{min} & 47 & \text{s}\\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrlrlrl} & 4 & \text{h} & 77 & \text{min} & 90 & \text{s}\\ - & 3 & \text{h} & 24 & \text{min} & 47 & \text{s}\\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{h} & \mathbf{53} & \mathbf{min} & \mathbf{43} & \mathbf{s}\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrlrlrl} & 4 & \text{h} & & & 50 & \text{s}\\ - & 2 & \text{h} & 56 & \text{min} & 59 & \text{s}\\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrlrlrl} & 3 & \text{h} & 59 & \text{min} & 110 & \text{s}\\ - & 2 & \text{h} & 56 & \text{min} & 59 & \text{s}\\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{h} & \mathbf{3} & \mathbf{min} & \mathbf{51} & \mathbf{s}\end{array}$$

Página 187

Para fijar ideas

3 **Copia, completa y resuelve las multiplicaciones.**

$$\begin{array}{rr} \mathbf{7°} & \mathbf{13'}\\ & \mathbf{\times 5}\\ \hline \mathbf{35°} & \mathbf{65'}\\ \downarrow \overset{+1}{\swarrow} & \downarrow\\ \mathbf{36°} & \mathbf{5'}\end{array} \qquad \begin{array}{rrr} \mathbf{42°} & \mathbf{58'} & \mathbf{26''}\\ & & \mathbf{\times 3}\\ \hline \mathbf{126°} & \mathbf{174'} & \mathbf{78''}\\ \downarrow & \downarrow \overset{+1}{\swarrow} & \downarrow\\ \mathbf{126°} & \mathbf{175'} & \mathbf{18''}\\ \downarrow \overset{+\ldots}{\swarrow} & \downarrow & \downarrow\\ \ldots° & \ldots' & \ldots''\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} 42° & 58' & 26''\\ & & \times 3\\ \hline 126° & 174' & 78''\\ \downarrow & \downarrow \overset{+1}{\swarrow} & \downarrow\\ 126° & 175' & 18''\\ \downarrow \overset{+2}{\swarrow} & \downarrow & \downarrow\\ 128° & 55' & 18''\end{array}$$

4 **Copia, completa y resuelve las divisiones.**

$$\begin{array}{rrl}
\mathbf{36^\circ} & \mathbf{5'} & \underline{|\mathbf{5}\quad\quad} \\
\mathbf{1^\circ} \rightarrow + & \underline{\mathbf{60'}} & \mathbf{7^\circ\ \ldots'} \\
 & \ldots & \\
 & \ldots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrl}
\mathbf{128^\circ} & \mathbf{55'} & \mathbf{18''} & \underline{|\mathbf{3}\quad\quad\quad} \\
\mathbf{2^\circ} \rightarrow + & \underline{\mathbf{120'}}+ & \underline{\mathbf{60''}} & \mathbf{42^\circ\ \ldots'\ \ldots''} \\
 & \ldots & \ldots & \\
 & \mathbf{1'} & \mathbf{0} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl}
36^\circ & 5' & \underline{|5\quad\quad} \\
1^\circ \rightarrow + & \underline{60'} & 7^\circ\ 13' \\
 & 65' & \\
 & 00' &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrl}
128^\circ & 55' & 18'' & \underline{|3\quad\quad\quad} \\
2^\circ \rightarrow + & \underline{120'}+ & \underline{60''} & 42^\circ\ 58'\ 26'' \\
 & 175' & 78'' & \\
 & 1' & 00'' &
\end{array}$$

Para practicar

3 **Halla el suplementario del ángulo de 108° 49' 1".**

180° – 108° 49' 1" = 71° 10' 59"

4 **Efectúa.**

a) **36° 51" + 2° 11'**

b) **48° 26' – 13° 52'**

c) **37' 11" · 13**

d) **(32° 37') : 6**

a) 38° 11' 51"

b) 34° 34'

c) 8° 3' 23"

d) 5° 26' 10"

5 **Dado el ángulo $\hat{A}$ = 35° 46' 23", halla:**

a) $2\hat{A}$

b) $5\hat{A}$

c) $\dfrac{\hat{A}}{4}$

d) $\dfrac{2}{3}\cdot\hat{A}$

a) 2 · (35° 46' 23'') = 70° 92' 46'' = 71° 32' 46''

b) 5 · (35° 46' 23'') = 175° 230' 115'' = 175° 231' 55'' = 178° 51' 55''

c)

$$\begin{array}{rrrl}
35^\circ & 46' & 23'' & \underline{|4\quad\quad\quad} \\
3^\circ \rightarrow & \underline{180'} & & 8^\circ\ 56'\ 35'' \\
 & 226' & & \\
 & 26 & & \\
 & 2' \rightarrow & \underline{120''} & \\
 & & 143'' & \\
 & & 23 & \\
 & & 3'' &
\end{array}$$

Cociente: 8° 56' 35"
Resto: 3"

d) 2 · $\hat{A}$ = 71° 32' 46"

$$\begin{array}{rrrl}
71^\circ & 32' & 46'' & \underline{|3\quad\quad\quad\quad\quad} \\
 & & & 23^\circ\ 50'\ 55'' \\
2^\circ \rightarrow & \underline{120'} & & \\
 & 152' & & \\
 & 2' \rightarrow & \underline{120''} & \\
 & & 166'' & \\
 & & 1'' &
\end{array}$$

Cociente: 23° 50' 55"
Resto: 1"

6 **Divide 151° 6' 17" entre 7, de dos formas:**

a) Como se explica arriba.

b) Pasándolo a segundos, dividiendo entre 7 y pasando el resultado a grados, minutos y segundos.

$$\begin{array}{rrr|l}
\text{a) } 151^\circ & 6' & 17'' & 7 \\ \cline{4-4}
4^\circ \rightarrow & \underline{240'} & & 21^\circ\ 35'\ 11'' \\
 & 246' & & \text{Cociente: } 21^\circ\ 35'\ 11'' \\
 & 1' \rightarrow & \underline{60''} & \text{Resto: } 0'' \\
 & & 77'' & \\
 & & 0'' &
\end{array}$$

b) $151^\circ\ 6'\ 17'' = (151 \cdot 3\,600)'' + (6 \cdot 60)'' + 17'' = 543\,600'' + 360'' + 17'' = 543\,977''$

$543\,977'' : 7 = 77\,711'' = 21^\circ\ 35'\ 11''$

Se obtiene lo mismo que en el apartado a).

7 **Un grifo llena $\frac{5}{12}$ de un depósito en una hora. ¿Cuánto tarda en llenar $\frac{1}{12}$ de depósito? ¿Y en llenar el depósito completo?**

$60 : 5 = 12$

En llenar $\frac{1}{12}$ tarda 12 minutos.

$12 \cdot 12 = 144$

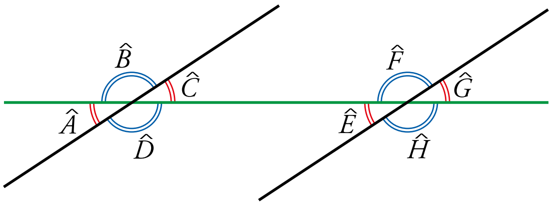
En llegar el deposito completo tardará 144 minutos, o lo que es lo mismo, 2 horas y 24 minutos.

6 ▶ RELACIONES ANGULARES

Página 188

Para practicar

1 **De estos ángulos, di dos que sean iguales por ser:**



a) Opuestos por el vértice.

b) Correspondientes.

c) Alternos internos.

d) Alternos externos.

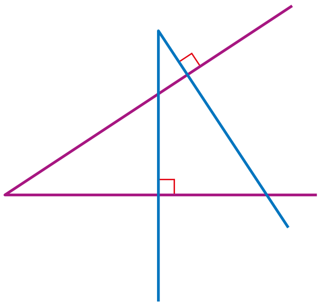
a) $\widehat{A} = \widehat{C}$; $\widehat{B} = \widehat{D}$; $\widehat{E} = \widehat{G}$; $\widehat{F} = \widehat{H}$

b) $\widehat{A} = \widehat{E}$; $\widehat{B} = \widehat{F}$; $\widehat{C} = \widehat{G}$; $\widehat{D} = \widehat{H}$

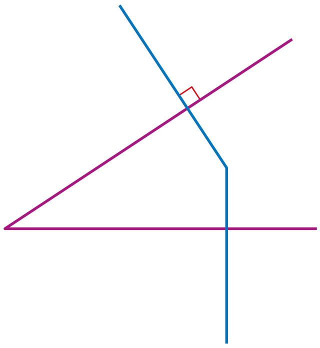
c) $\widehat{C} = \widehat{E}$; $\widehat{D} = \widehat{F}$

d) $\widehat{A} = \widehat{G}$; $\widehat{B} = \widehat{H}$

2 **Dos ángulos de lados perpendiculares pueden ser iguales, pero también pueden ser suplementarios.**



Justifícalo en tu cuaderno con un dibujo.



7 ÁNGULOS EN LOS POLÍGONOS

Página 189

Para fijar ideas

1 **Dos de los ángulos de un triángulo miden 45° y 37°. ¿Cuál es la medida del tercer ángulo?**

180 – 45 – 37 = 98°

2 **¿Es posible construir un cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos? ¿Cómo será el cuarto ángulo? Dibújalo.**

Un cuadrilátero con tres ángulos rectos tiene que tener el cuarto ángulo recto obligatoriamente: 360° – 3 · 90° = 90°. Por tanto, no puede haber un cuadrilátero con solo 3 ángulos rectos.

3 **Averigua cuánto suman todos los ángulos de un decágono cualquiera y cuánto mide cada ángulo de un decágono regular.**

Suma de los ángulos de un decágono: (10 – 2) · 180° = 1 440°

Cada uno de los ángulos de un decágono regular mide:

$$\frac{(10-2)\cdot 180^\circ}{10} = 144^\circ$$

Para practicar

1 **Tres de los cuatro ángulos de un cuadrilátero miden 110°, 110° y 80°. ¿Cuánto mide el cuarto ángulo?**

360° – (110° + 110° + 80°) = 60°

2 **Si uno de los ángulos de un rombo mide 39°, ¿cuánto miden los otros tres?**

(360° – 2 · 39°) : 2 = 141°

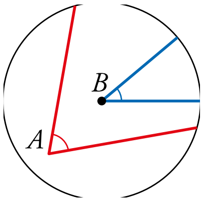
Dos de ellos miden 39° y los otros dos 141°.

8 ▶ ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Página 190

Para practicar

1 ¿Verdadero o falso?

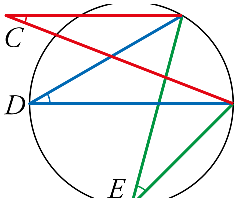


a) El ángulo $\hat{A}$ es central.

b) El ángulo $\hat{B}$ es central.

a) Falso. Su vértice debería estar en el centro de la circunferencia.

b) Verdadero.



c) Los ángulos $\hat{C}$ y $\hat{D}$ son iguales.

d) Los ángulos $\hat{D}$ y $\hat{E}$ son iguales.

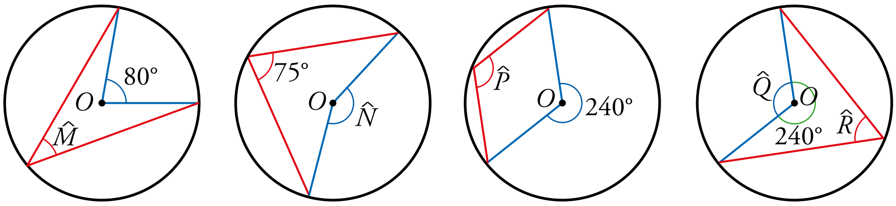
c) Falso. El ángulo $\widehat{C}$ no es inscrito.

d) Verdadero.

Página 191

Para fijar ideas

1 Copia y completa en tu cuaderno.



$\boldsymbol{\hat{M}} = \square : \mathbf{2} = \square$

$\boldsymbol{\hat{N}} = \square \times \mathbf{2} = \square$

$\boldsymbol{\hat{P}} = \square : \square = \square$

$\boldsymbol{\hat{Q}} = \square \times \square = \square$

$\hat{M} = 80° : 2 = 40°$

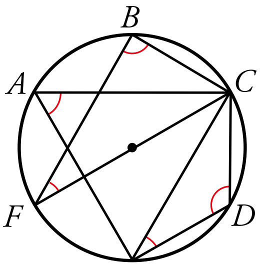
$\hat{N} = 75° \times 2 = 150°$

$\hat{P} = 240° : 2 = 120°$

$\hat{Q} = 240° \times 1/2 = 120°$

Para practicar

2 Teniendo en cuenta que cada arco señalado en la circunferencia es de 60°, di el valor de los ángulos marcados en rojo.



$\widehat{CAE} = \dfrac{2 \cdot 60°}{2} = 60°$ $\widehat{CBF} = \dfrac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$ $\widehat{CDE} = \dfrac{4 \cdot 60°}{2} = 120°$

$\widehat{CED} = \dfrac{60°}{2} = 30°$ $\widehat{BFC} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

3 **Dibuja una semicircunferencia y recorta una esquina de una hoja de papel (ángulo recto). Comprueba que, siempre que hagas pasar los lados del ángulo por los extremos del diámetro, el vértice estará situado sobre la semicircunferencia.**

Respuesta abierta.

Página 192

Ejercicios y problemas

Operaciones con ángulos

1 **Efectúa las siguientes sumas:**

a) 32° 18’ 22” + 85° 31’ 47”

b) 26° 19’ 15” + 2° 48’ 36”

c) 24° 16’ 27” + 34’ 13” + 3° 9’ 20”

a) 117° 50' 9"

b) 29° 7' 51"

c) 28°

2 **Resuelve estas restas:**

a) 102° 54’ 27” – 59° 25’ 37”

b) 35° 1’ 46” – 32° 51’ 49”

c) 93° 23” – 28° 23’

a) 43° 28' 50"

b) 2° 9' 57"

c) 64° 37' 23"

3 **Haz los productos siguientes:**

a) (18° 12’ 3”) · 4

b) (13° 2’ 35”) · 5

c) (36° 39’ 27”) · 8

d) (84° 26”) · 13

a) 72° 48' 12"

b) 65° 12' 55"

c) 293° 15' 36"

d) 1 092° 5' 38"

4 **Resuelve estas divisiones:**

a) (280° 40’ 20”) : 20

b) (121° 52’ 33”) : 11

c) (84° 37’ 52”) : 2

d) (190° 42’) : 7

a) Cociente: 14° 2' 1"; resto: 0"

b) Cociente: 11° 4' 46"; resto: 7"

c) Cociente: 42° 18' 56"; resto: 0"

d) Cociente: 27° 14' 34"; resto: 2"

5 **Halla el complementario de los siguientes ángulos:**

a) 24° **b) 86° 23’ 39”**

c) 52° 29” **d) 58’ 24”**

a) 90° – 24° = 66° b) 90° – 86° 23' 39" = 3° 36' 21"

c) 90° – 52° 29" = 37° 59' 31" d) 90° – 58' 24" = 89° 1' 36"

6 **Halla, en cada caso, el suplementario del ángulo que se te da:**

a) 103° **b) 89° 28’ 52”**

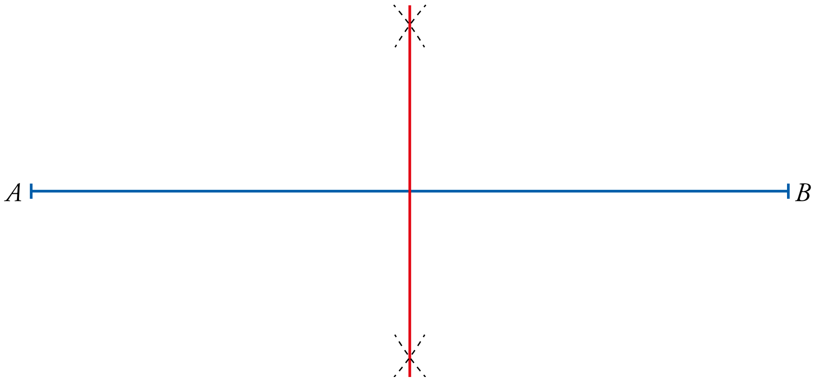
c) 129° 31’ **d) 76° 29”**

a) 180° – 103° = 77° b) 180° – 89° 28' 52'' = 90° 31' 8"

c) 180° – 129° 31' = 50° 29' d) 180° – 76° 29'' = 103° 59' 31"

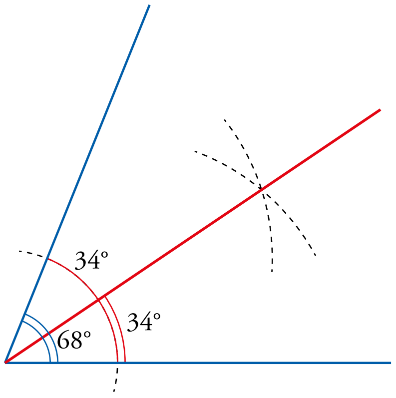
Construcciones geométricas

7 **Traza un segmento de 6 cm y construye su mediatriz. ¿Qué propiedad tienen sus puntos?**



Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.

8 **Traza, con ayuda del transportador, un ángulo de 68°. Construye con regla y compás su bisectriz y comprueba que obtienes dos ángulos de 34°.**



9 **Dibuja:**

a) Dos semirrectas que tengan un segmento en común.

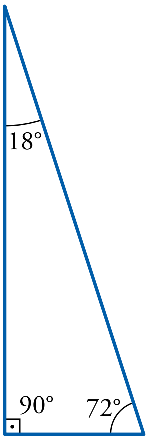
b) Dos semirrectas que estén sobre la misma recta y no tengan nada en común.

a)

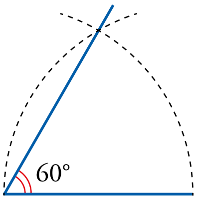
Una semirrecta tiene origen en *A* y va hacia la derecha y la otra tiene origen en *B* y va hacia la izquierda. El segmento en común es *AB*.

b) Dibuja dos semirrectas que estén sobre la misma recta y no tengan nada en común.

10 **Construye, con ayuda del transportador, un triángulo rectángulo con un ángulo de 72°.**



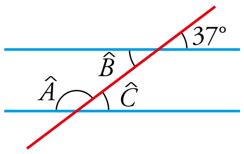
11 **Dibuja un ángulo de 60° sin usar el transportador.**



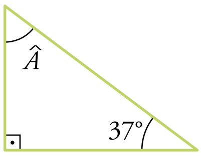
Relaciones angulares

12 **Calcula el valor de los ángulos indicados.**

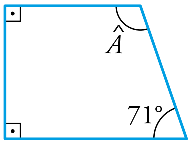
a)



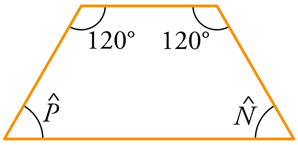
b)



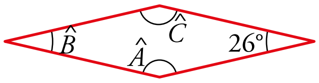
c)



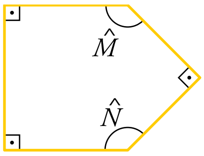
d)



e)



f)



a) $\widehat{A} = 180° - 37° = 143°$; $\widehat{B} = 37°$; $\widehat{C} = 37°$

b) $\widehat{A} = 180° - 90° - 37° = 53°$

c) $\widehat{A} = 360° - 90° - 90° - 71° = 109°$

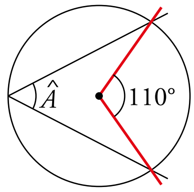
d) $\widehat{P} = \widehat{N} = \dfrac{360° - 120° - 120°}{2} = 60°$

e) $\widehat{B} = 26°$; $\widehat{A} = \widehat{C} = 180° - 26° = 154°$

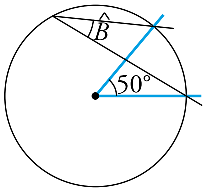
f) $\widehat{N} = \widehat{M} = 270° : 2 = 135°$

13 **Halla el valor de los ángulos indicados.**

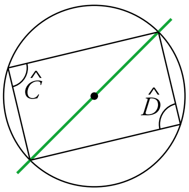
a)



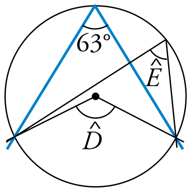
b)



c)



d)



a) $\widehat{A} = \dfrac{110°}{2} = 55°$ b) $\widehat{B} = \dfrac{50°}{2} = 25°$

c) $\widehat{C} = \widehat{D} = 90°$ d) $\widehat{D} = 2 \cdot 63° = 126°$; $\widehat{E} = 63°$

Resuelve problemas

14 ODS Meta 6.4. **Para hacer un uso eficiente de los recursos hídricos, siete agricultores han de repartirse el agua que llega de una acequia regando por turnos. ¿Cuánto tiempo al día puede regar cada uno?**

1 día → 86 400 s

Como son 7 agricultores, a cada agricultor le toca un turno de 86 400 : 7 = 12 342 segundos y sobran 6 segundos al día.

Pasamos los segundos a horas:

12 342 : 60 = 205 minutos y 42 minutos

205 : 60 = 3 horas y 25 minutos

Por tanto, cada agricultor podrá regar al día 3 horas, 25 minutos y 42 segundos, y sobrarán 6 segundos al día.

15 **Un reloj se pone en hora a las 12 de la noche del 31 de marzo. A las 12 de la noche del 2 de junio el reloj ha adelantado 3 min 9 s. ¿Cuánto adelanta cada día?**

Han pasado 30 días de abril, 31 de mayo y 2 días de junio, que suman 63 días, durante los cuales el reloj se ha adelantado $(3 \cdot 60) + 9 = 189$ segundos.

Por tanto, cada día adelanta 189 : 63 = 3 segundos.

16 **a) ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 2 en punto?**

b) ¿Y a las 5 en punto?

c) ¿Y a las 5 y cuarto? Ten en cuenta que la aguja horaria ha recorrido la cuarta parte del arco que va de 5 a 6.

d) ¿Y a las 7 menos cuarto?

a) $(360° : 12) \cdot 2 = 30° \cdot 2 = 60°$

b) $(360° : 12) \cdot 5 = 30° \cdot 5 = 150°$

c) $(360° : 12) \cdot 2 + 30° : 4 = 30° \cdot 2 + 7°\ 30' = 67°\ 30'$

d) $(360° : 12) \cdot 2 + 30° : 4 = 30° \cdot 2 + 7°\ 30' = 67°\ 30'$

Página 193

17 ***Un planeta, en el movimiento de rotación sobre su propio eje, gira un grado (1°) cada 31 segundos. ¿Cuánto tarda en dar una vuelta completa?***

Problema resuelto.

18 **Un planeta, en el movimiento de rotación sobre su propio eje, gira un grado (1°) cada 4 minutos y 11 segundos. ¿Cuánto tarda en dar una vuelta completa?**

Una vuelta completa son 360°.

4 minutos y 11 segundos son $(4 \cdot 60) + 11 = 240 + 11 = 251$ segundos.

En girar 360° tarda $360 \cdot 251 = 90\,360$ segundos.

$90\,360 : 60 = 1\,506$ minutos → $1\,506 : 60 = 25{,}1 = 25$ horas y 6 minutos

Tarda 25 horas y 6 minutos.

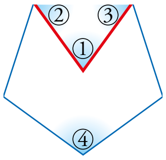
19 **Un satélite de comunicaciones, para modificar su orientación, ha tardado 40 segundos en hacer un giro de diez grados (10°). ¿Cuánto tardaría en girar un cuarto de vuelta?**

Un cuarto de vuelta son 90°.

$$\frac{10}{90} = \frac{4}{x} \rightarrow x = 36$$

Tardaría 36 segundos.

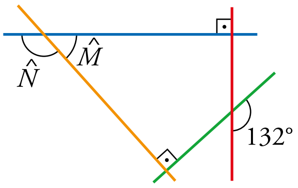
20 ***¿Cuánto mide cada uno de los cuatro ángulos señalados en este pentágono regular?***



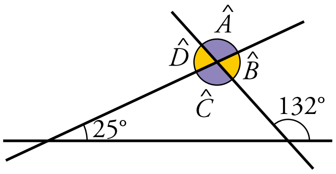
Problema resuelto.

21 **Calcula la amplitud de cada uno de los ángulos señalados con letras:**

a)



b)



a) $\widehat{M} = 180° - 132° = 48°$

$\widehat{N} = 132°$

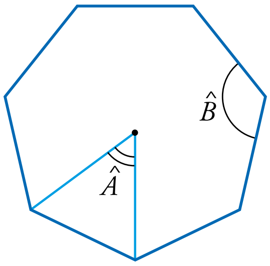
b) $\widehat{A} = \widehat{C} = 132° - 25° = 107°$

$\widehat{B} = \widehat{D} = 180° - 107° = 73°$

22 **Halla el ángulo interior de un heptágono regular. Calcula, también, su ángulo central.**

$\widehat{A} = 360° : 7 \approx 51° \, 25' \, 43''$

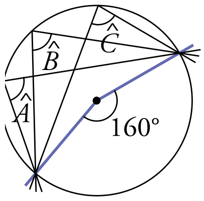
$$\widehat{B} = \frac{(7-2) \cdot 180°}{7} = \frac{5 \cdot 180°}{7} = \frac{900°}{7} \approx 128° \, 34' \, 17''$$



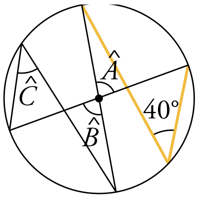
Problemas «+»

23 **Halla el valor de los ángulos indicados.**

a)



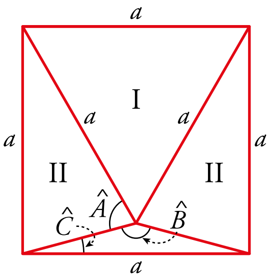
b)



a) $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{160°}{2} = 80°$

b) $\widehat{A} = \widehat{B} = 2 \cdot 40° = 80°$; $\widehat{C} = 40°$

24 **El triángulo I es equilátero. Los triángulos II son isósceles. Halla la medida de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.**



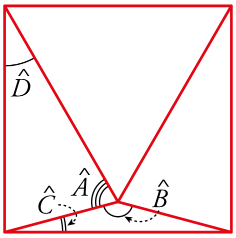
Los ángulos del triángulo equilátero I miden 60°.

Por lo que el ángulo $\widehat{D}$ medirá: 90° – 60° = 30°

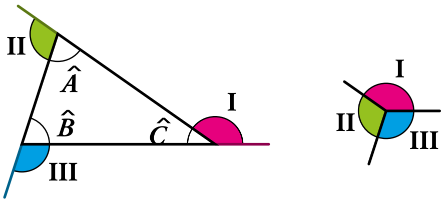
Así: $\widehat{A} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$

$\widehat{B} = 360° - 2 \cdot 75° - 60° = 150°$

$\widehat{C} = \dfrac{180° - 150°}{2} = 15°$



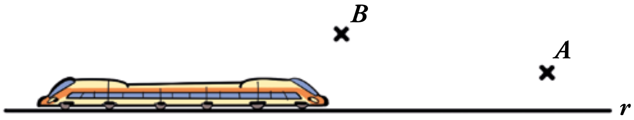
25 **Los ángulos coloreados se llaman ángulos exteriores del triángulo. ¿Cuánto vale su suma?**



$(180° - \hat{A}) + (180° - \hat{B}) + (180° - \hat{C}) = \dots$

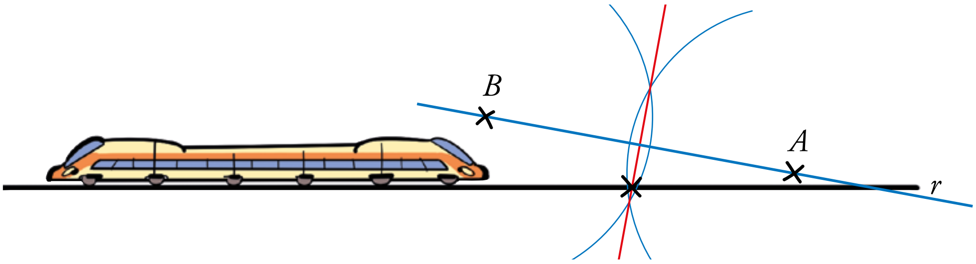
360°

26 **La recta *r* representa una línea ferroviaria, y los puntos *A* y *B*, la situación de dos pueblos.**



Copia y resuelve gráficamente: ¿En qué punto de *r* hay que colocar una estación para que esté a la misma distancia de ambas poblaciones? (Recuerda las propiedades de la mediatriz de un segmento).

Se halla la mediatriz del segmento *AB,* que tiene la propiedad de que todos sus puntos equidistan de *A* y de *B,* y donde se corte esta recta con *r,* ese es el punto de *r* que dista lo mismo de *A* y de *B.*

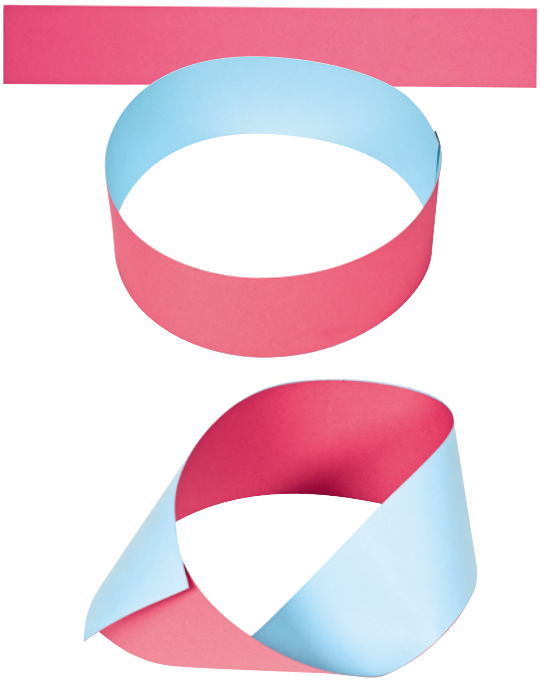


Página 194

LEE E INFÓRMATE

Cintas que se retuercen y se anudan

Con unas hojas de papel, unas tijeras y una barra de pegamento se pueden realizar estas apasionantes actividades.



- **Se corta una tira de papel y se pegan sus extremos.**
- **La cinta así anudada tiene dos caras (la interior y la exterior). Una hormiga que esté en una de las caras no podrá pasar a la otra salvo que haga malabarismos en los bordes.**
- **Corta otra tira de papel y pégala de nuevo, pero, previamente, gírala como se indica.**

  Comprueba que esta cinta solo tiene una cara. Una hormiga podría pasearse tranquilamente por toda ella. Esta cinta se llama de Möbius (se pronuncia *Moebius*).

Con este sencillo experimento, los estudiantes pueden observar cómo, tras un pequeño cambio en la construcción de una superficie, se obtienen inesperados cambios en sus propiedades.

La cinta de Möbius es una superficie tan sencilla como sorprendente.

INVESTIGA

- **Hazte una cinta de Möbius y comprueba que tiene una sola cara.**

  Córtala a todo lo largo como indica la figura. Antes de completar el corte, contesta: ¿qué crees que va a resultar?

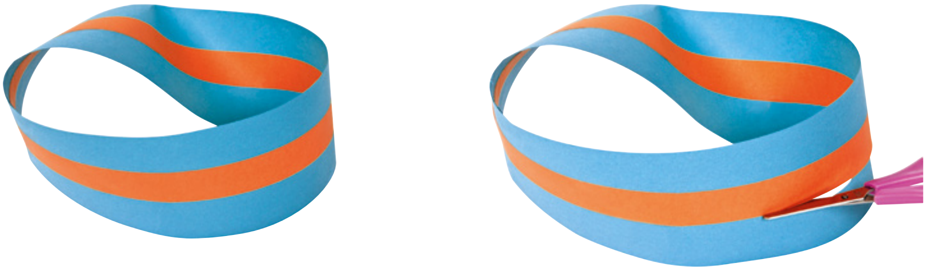
  Cuando hayas acabado de cortar, comprueba cuántas caras tiene la cinta resultante. (Es decir, ¿podrá recorrerla entera una hormiga?)

Cuando se corta por la mitad una cinta de Möbius, se obtiene otra cinta, el doble de larga, que tiene dos caras: esta no es una cinta de Möbius.

- **Señala en una tira de papel tres bandas mediante dos líneas trazadas a todo lo largo. Colorea de naranja la banda central. Hazlo por las dos caras.**

Con esta tira de papel, construye una cinta de Möbius. Córtala a todo lo largo de una de las líneas. Antes de completar el corte, contesta: ¿qué crees que va a salir?

Cuando hayas acabado de cortar, comprueba cuántas caras tiene cada una de las dos cintas que has obtenido. Comprobarás que una es de Möbius y la otra no.



En el segundo caso se obtienen dos cintas anudadas. La primera es como la que se obtiene en el caso anterior, y la segunda sí es de Möbius.

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Prueba, tantea, deduce

- **Aquí tienes un reloj analógico al que tienes que ponerle las agujas. Piensa en las condiciones pedidas y responde a las preguntas que se te plantean.**

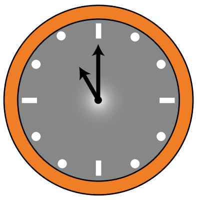
a) ¿Qué hora es cuando la aguja de las horas está, exactamente, en una de las divisiones marcadas en este reloj y la del minutero en la siguiente?

b) ¿Qué hora es cuando la aguja de las horas está, exactamente, en una de las divisiones y la del minutero en la anterior?

c) ¿Qué hora es sabiendo que la aguja de las horas tardará en llegar a la marca de las seis justo el doble que la del minutero?

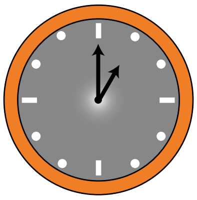
d) ¿Qué hora es sabiendo que la aguja de las horas tardará en llegar a la marca de las seis el triple que la del minutero?

a)



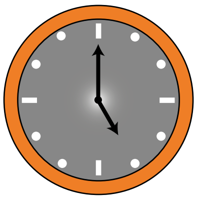
Las once en punto.

b)



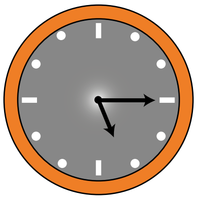
La una en punto.

c)



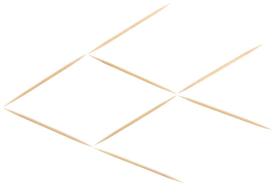
Las cinco en punto. La aguja pequeña tardará una hora en llegar a la marca de las seis. El minutero tardará media hora.

d)



Las cinco y cuarto. La aguja pequeña tardará tres cuartos de hora en llegar a la marca de las seis. El minutero tardará un cuarto de hora.

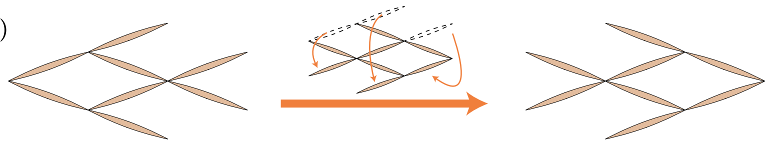
- **Hemos construido un pez con 8 palillos.**



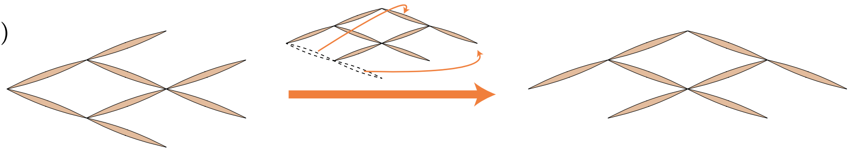
a) Moviendo solo tres palillos, consigue que el pez vaya en la dirección contraria.

b) Si movemos solo dos palillos, podemos conseguir un pez que mire en otra dirección. Compruébalo.

a)



b)



AUTOEVALUACIÓN

1 **Realiza las siguientes operaciones con ángulos:**

a) 27° 30’ 18” + 3° 42’ 52” **b) 17° 21’ 37” – 4° 48”**

c) (3° 27’ 19”) · 4 **d) (12° 4’ 11”) : 5**

a) 31° 13' 10" b) 13° 20' 49"

c) 13° 49' 16" d) Cociente: 2° 24' 50"; resto: 1"

2 **Pasa a segundos los ángulos de la actividad anterior y vuelve a realizar los cálculos. Expresa luego el resultado en forma compleja.**

a) 99 018" + 13 372" = 112 390"

(112 390 : 60)' = 1 873'; resto: 10"

(1 873 : 60)° = 31°; resto: 13'

112 390" = 31° 13' 10"

b) 62 497" – 14 448" = 48 049"

(48 049 : 60)' = 800'; resto: 49"

(800 : 60)° = 13°; resto: 20'

48 049" = 13° 20' 49"

c) 12 439" · 4 = 49 756"

(49 756 : 60)' = 829'; resto: 16"

(829 : 60)° = 13°; resto: 49'

49 756" = 13° 49' 16"

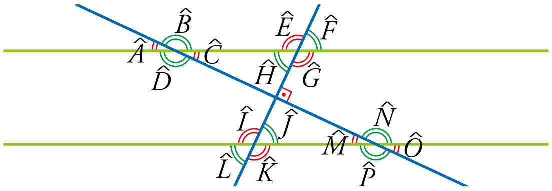
d) 43 451" : 5 = 8 690"; resto: 1"

(8 690 : 60)' = 144'; resto: 50"

(144 : 60)° = 2°; resto: 24'

8 690"; resto: 1" = 2° 24' 50"; resto: 1"

3 **Observa estos ángulos:**



a) Identifica dos ángulos complementarios y dos suplementarios.

b) Indica dos ángulos opuestos por el vértice, dos correspondientes, dos alternos externos y dos alternos internos.

c) Sabiendo que $\hat{A}$ = 25°, calcula el resto de ángulos.

a) Águlos complementarios: $\widehat{C}$ y $\widehat{H}$; $\widehat{J}$ y $\widehat{M}$

Ángulos suplementarios: $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$; $\widehat{E}$ y $\widehat{F}$; $\widehat{G}$ y $\widehat{H}$; $\widehat{I}$ y $\widehat{J}$

$\widehat{L}$ y $\widehat{K}$; $\widehat{M}$ y $\widehat{N}$; $\widehat{P}$ y $\widehat{O}$

b) Ángulos opuestos por el vértice: $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$; $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$; $\widehat{E}$ y $\widehat{G}$; $\widehat{F}$ y $\widehat{H}$

$\widehat{I}$ y $\widehat{K}$; $\widehat{J}$ y $\widehat{L}$; $\widehat{M}$ y $\widehat{O}$; $\widehat{N}$ y $\widehat{P}$

Ángulos correspondientes: $\widehat{F}$ y $\widehat{J}$; $\widehat{G}$ y $\widehat{K}$; $\widehat{H}$ y $\widehat{L}$; $\widehat{E}$ y $\widehat{I}$; $\widehat{B}$ y $\widehat{N}$; $\widehat{C}$ y $\widehat{O}$; $\widehat{D}$ y $\widehat{P}$; $\widehat{A}$ y $\widehat{M}$

Ángulos alternos externos: $\widehat{F}$ y $\widehat{L}$; $\widehat{E}$ y $\widehat{K}$; $\widehat{A}$ y $\widehat{O}$; $\widehat{B}$ y $\widehat{P}$

Ángulos alternos internos: $\widehat{H}$ y $\widehat{J}$; $\widehat{G}$ y $\widehat{I}$; $\widehat{D}$ y $\widehat{N}$; $\widehat{C}$ y $\widehat{M}$

c) $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{M} = \widehat{O} = 25°$

$\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{N} = \widehat{P} = 155°$

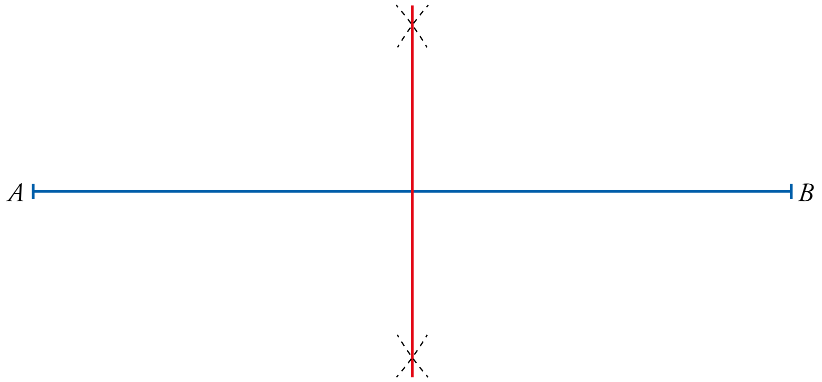
$\widehat{H} = \widehat{F} = \widehat{L} = \widehat{J} = 65°$

$\widehat{E} = \widehat{G} = \widehat{I} = \widehat{K} = 115°$

4 **a) Dibuja un segmento *AB* de 10 cm y traza, con regla y compás, su mediatriz. ¿Qué propiedad cumplen todos sus puntos?**

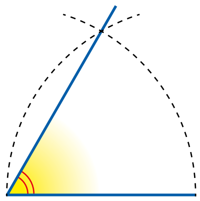
b) Dibuja un ángulo de 60°. Traza, con regla y compás, la bisectriz del ángulo. ¿Cuánto debe medir cada uno de los ángulos generados? Compruébalo.

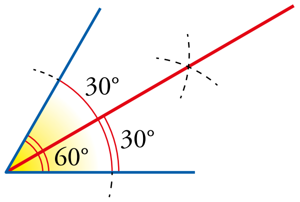
a)



Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.

b)

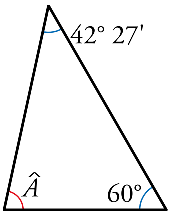




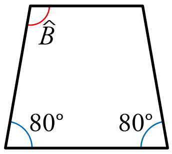
Cada uno de los ángulos generados por la bisectriz mide 30°.

5 **Calcula el valor de los ángulos indicados.**

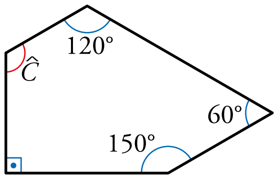
a)



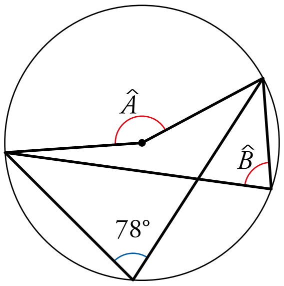
b)



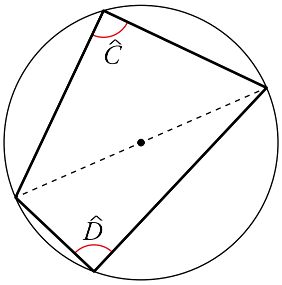
c)



d)



e)



a) $\widehat{A} = 77° 33'$ b) $\widehat{B} = 100°$ c) $\widehat{C} = 120°$

d) $\widehat{A} = 156°$; $\widehat{B} = 78°$ e) $\widehat{C} = \widehat{D} = 90°$

6 **Una rueda ha girado 20° en 1 min y 22 s. A este ritmo, ¿cuánto tarda en dar un cuarto de vuelta?**

1 minuto y 22 segundos son 60 + 22 = 82 segundos.

En un cuarto de vuelta tarda:

$\frac{20}{90} = \frac{82}{x} \to x = 369$ s = 6 minutos y 9 segundos

10 FIGURAS GEOMÉTRICAS. ÁREAS Y PERÍMETROS

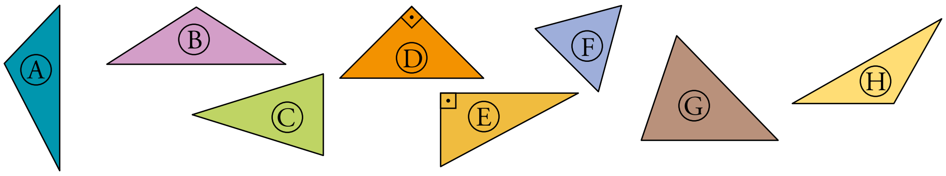
Página 196

1 Di cuáles de estos triángulos son:

a) Acutángulos.

b) Obtusángulos isósceles.

c) Rectángulos escalenos.



a) Acutángulos → C, F, G

b) Obtusángulos isósceles → B, H

c) Rectángulos escalenos → E

2 Asocia su nombre a cada una de las figuras dibujadas:

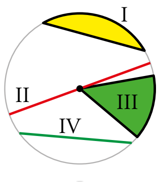
a) Sector circular.

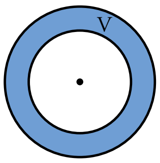
b) Cuerda.

c) Segmento circular.

d) Diámetro.

e) Corona circular.





a) Sector circular → III

b) Cuerda → IV

c) Segmento circular → I

d) Diámetro → II

e) Corona circular → V

Página 197

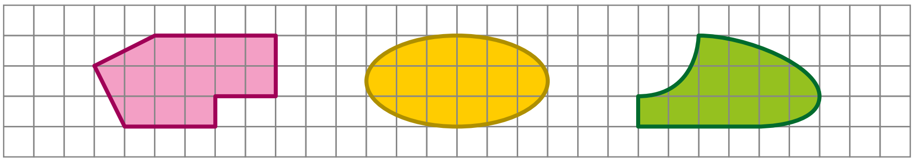
3 Cruzando estas dos bandas de papel hemos conseguido un rombo.

Dibújalas en otras posiciones formando otros cuadriláteros (cuadrado, rectángulo, romboide, trapezoide) indicando el nombre de cada uno.

Respuesta abierta.

4 **a) ¿Cuántos cuadros de la cuadrícula abarca cada figura?**

b) Tomando el cuadro de la cuadrícula como unidad, ¿cuál es el área de cada una? ¿Cuál de esas medidas es exacta y cuál aproximada?

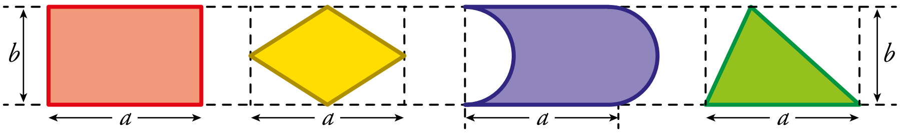


a) La primera, 14 cuadros. La segunda, 14,5 cuadros aproximadamente. Y la tercera, 12 cuadros aproximadamente.

b) El área de la primera son 14 unidades cuadradas. La segunda 14,5 unidades cuadradas, aproximadamente. Y la tercera 12 unidades cuadradas, aproximadamente.

5 **¿Cuál de estas fórmulas da el área de cada una de las figuras?**

$\boldsymbol{A = a \cdot b}$ $\quad$ $\boldsymbol{A = (a \cdot b) : 2}$



Rectángulo, rombo y figura geométrica → $A = a \cdot b$

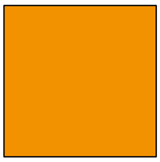
Triángulo → $A = (a \cdot b) : 2$

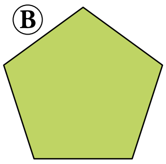
2 ▶ SIMETRÍAS EN LAS FIGURAS PLANAS

Página 199

Para practicar

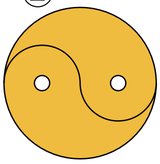
1 **Di cuáles de las siguientes figuras son simétricas respecto a algún eje. Dibuja en tu cuaderno cada eje de simetría y, si tienes un pequeño espejo a mano, comprueba que lo es. Si tiene más de un eje de simetría, averigua qué ángulo forman cada dos de ellos contiguos:**

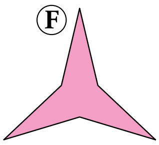
Ⓐ


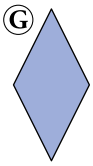
Ⓑ


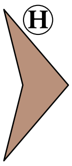
Ⓒ


Ⓓ

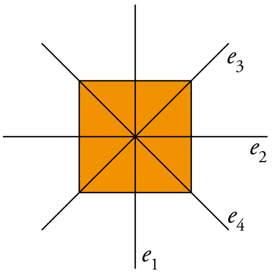

Ⓔ


Ⓕ


Ⓖ


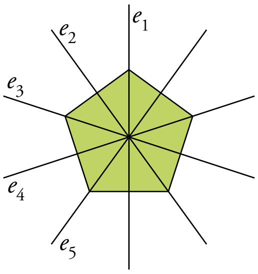
Ⓗ


a) El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría: e_1, e_2, e_3 y e_4.



Cada dos ejes contiguos forman 45°.

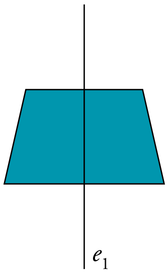
b) El pentágono regular tiene cinco ejes de simetría: e_1, e_2, e_3, e_4 y e_5.



Cada dos ejes contiguos forman 36°.

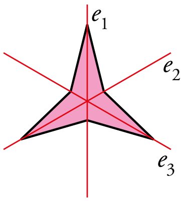
c) No tiene ejes de simetría.

d) El trapecio isósceles tiene un eje de simetría: e_1.



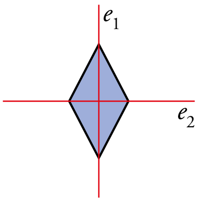
e) No tiene ejes de simetría.

f) Tiene tres ejes de simetría: e_1, e_2 y e_3.



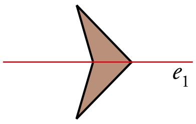
Cada dos ejes contiguos forman 60°.

g) Tiene dos ejes de simetría: e_1 y e_2.



Cada dos ejes contiguos forman 90°.

h) Tiene un eje de simetría: e_1.



3 TRIÁNGULOS

Página 200

Para practicar

1 **¿Verdadero o falso?**

a) Un triángulo puede tener dos ángulos rectos.

b) Un triángulo puede ser escaleno y rectángulo.

c) Un triángulo isósceles siempre es acutángulo.

d) Un triángulo equilátero siempre es acutángulo

e) Cuanto más grandes sean los lados de un triángulo equilátero, más grandes son sus ángulos.

a) Falso. En un triángulo no puede haber dos ángulos rectos porque la suma de todos sus ángulos sería mayor de 180°.

b) Verdadero.

c) Falso. Puede ser rectángulo y obtusángulo.

d) Verdadero.

e) Falso. En un triángulo equilátero, todos sus ángulos miden lo mismo, 60°.

2 **Construye con regla y compás un triángulo cuyos lados miden:**

a) $a = 6$ **cm,** $b = 6$ **cm,** $c = 6$ **cm.**

b) $a = 6$ **cm,** $b = 6$ **cm,** $c = 3$ **cm.**

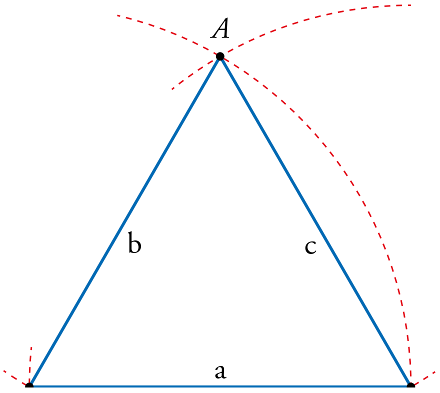
c) $a = 6$ **cm,** $b = 6$ **cm,** $c = 8$ **cm.**

d) $a = 7$ **cm,** $b = 5$ **cm,** $c = 8$ **cm.**

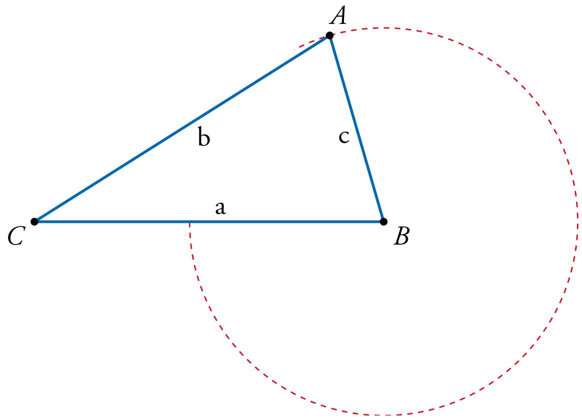
Estudia, en cada caso, la relación entre sus ángulos.

a) Como todos los lados son iguales, sus ángulos son iguales.

Nota: gráfica reducida al 75 %.

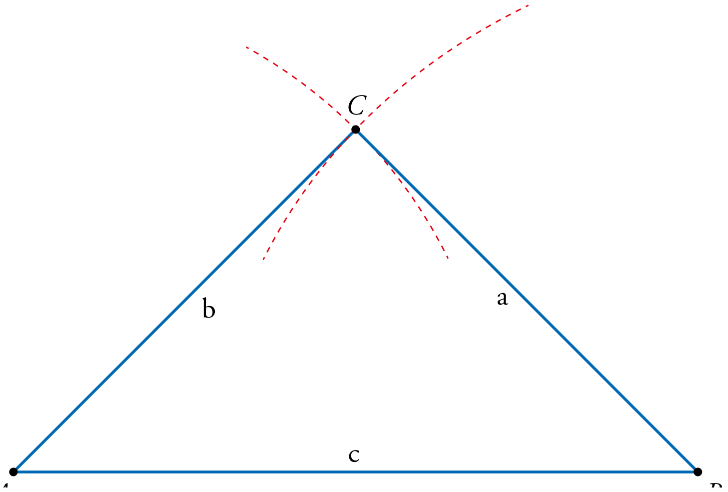


b) Como los lados a y b son iguales, los ángulos correspondientes $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ también son iguales. Sin embargo, el lado c es menor que a y b; por tanto, el ángulo $\widehat{C}$ es menor que los otros dos ángulos.

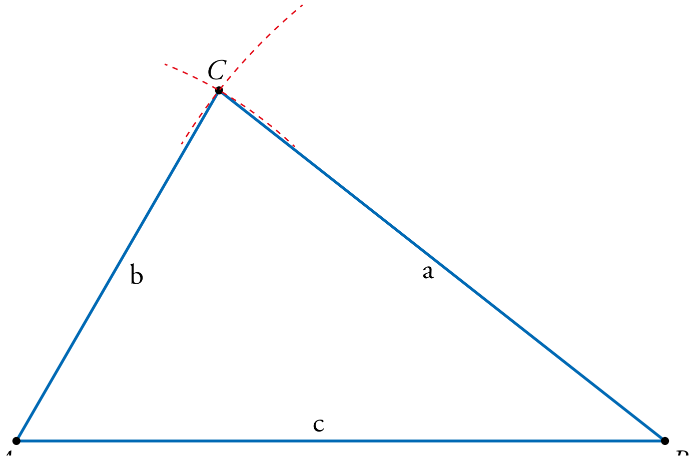


Nota: gráfica reducida al 75 %.

c) Como los lados a y b son iguales, los ángulos correspondientes $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ también son iguales. Sin embargo, el lado c es mayor que a y b; por tanto, el ángulo $\widehat{C}$ es mayor que los otros dos ángulos.



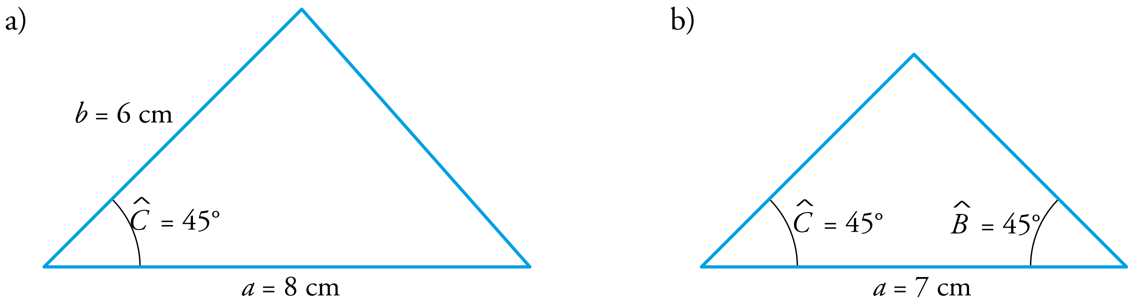
d) $b < a < c$. Por tanto, los ángulos correspondientes son $\widehat{B} < \widehat{A} < \widehat{C}$.



3 **Construye con regla y transportador de ángulos:**

a) **Un triángulo de lados a = 8 cm y b = 6 cm, y ángulo $\hat{C}$ = 45º.**

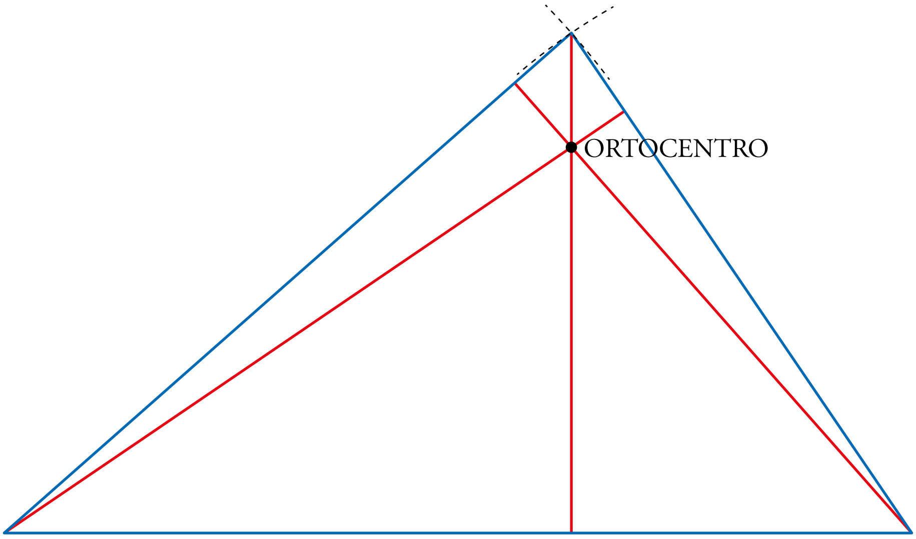
b) **Un triángulo de lado a = 7 cm y ángulos $\hat{B}$ = 45º y $\hat{C}$ = 45º.**



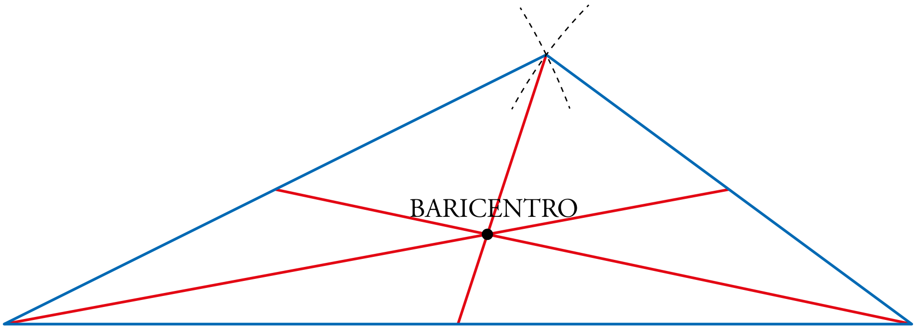
Página 201

Para practicar

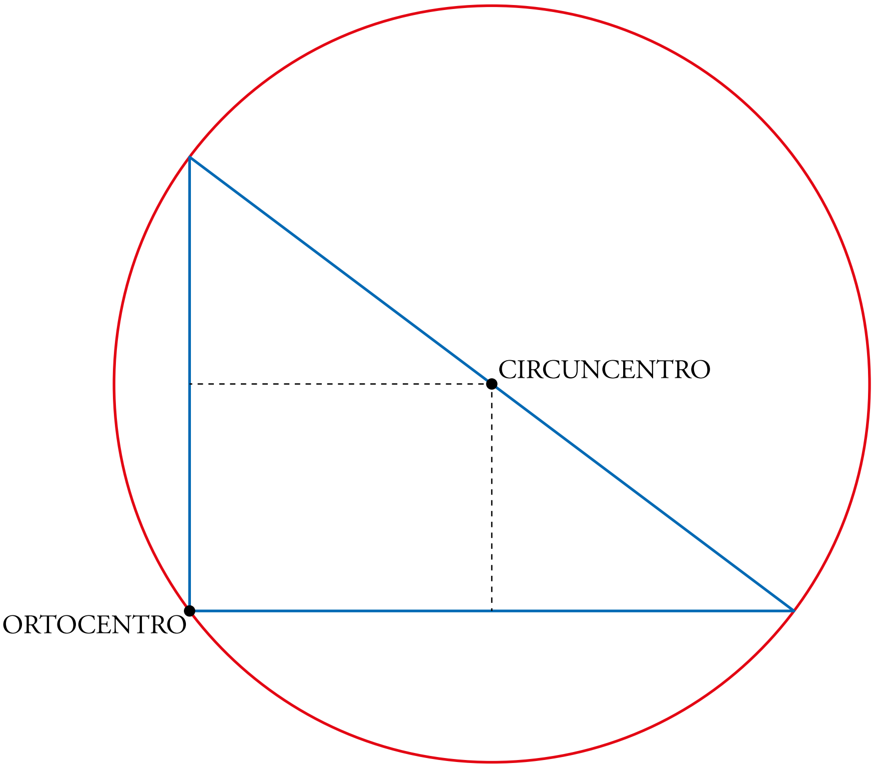
4 **Dibuja el triángulo de lados 8 cm, 10 cm y 12 cm. Observa que es acutángulo. Traza sus tres alturas y señala su ortocentro.**



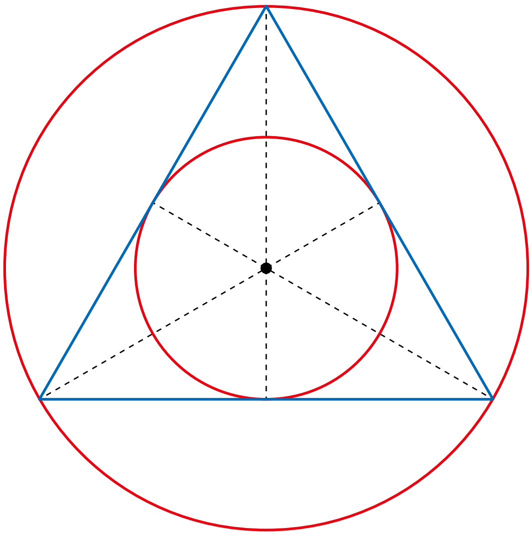
5 **Dibuja el triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 12 cm. Observa que es obtusángulo. Traza sus medianas y señala su baricentro.**



6 **Dibuja el triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm. Observa que es rectángulo. Localiza su ortocentro y su circuncentro. Traza la circunferencia circunscrita.**



7 **Dibuja el triángulo equilátero de lado 6 cm. Traza la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita.**

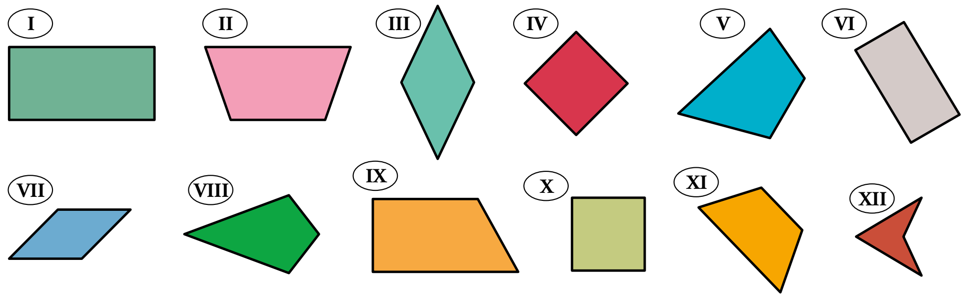


4 CUADRILÁTEROS

Página 202

Para fijar ideas

1 **Para clasificar estos cuadriláteros, copia y completa en tu cuaderno.**



- **Cuadrados → IV, X**
- **Rombos → …**
- **Trapecios → …**
- **Rectángulos → …**
- **Romboides → …**
- **Trapezoides → …**

Cuadrados → IV, X

Rombos → III, VII

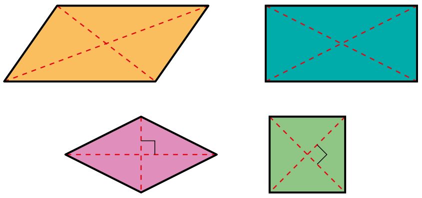
Trapecios → II, IX, XI

Rectángulos → I, VI

Romboides → No hay

Trapezoides → V, VIII, XII

2 **Observa los cuatro tipos de paralelogramos, copia y completa en tu cuaderno.**

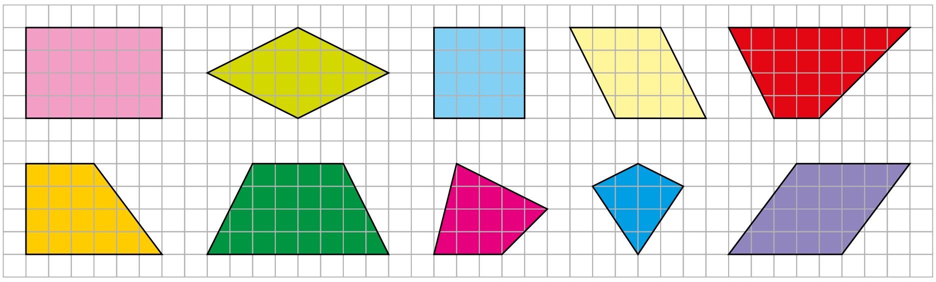


- **Las diagonales se cortan en sus puntos medios en todos ellos.**
- **Las diagonales son perpendiculares en el … y en el…**
- **Las diagonales son iguales en el … y en el…**
- **Los ángulos son iguales dos a dos en el … y en el…**
- **Los cuatro ángulos son iguales en … y en el…**
- **Los cuatro ángulos son rectos en el … y en el…**
- Las diagonales se cortan en sus puntos medios en todos ellos.
- Las diagonales son perpendiculares en el rombo y en el cuadrado.
- Las diagonales son iguales en el rectángulo y en el cuadrado.
- Los ángulos son iguales dos a dos en el rombo y en el romboide.
- Los cuatro ángulos son iguales en el rectángulo y en el cuadrado.
- Los cuatro ángulos son rectos en el rectángulo y en el cuadrado.

Página 203

Para fijar ideas

3 **Reproduce en papel cuadriculado estos cuadriláteros y traza sus ejes de simetría, si los hay. Después, copia y completa:**

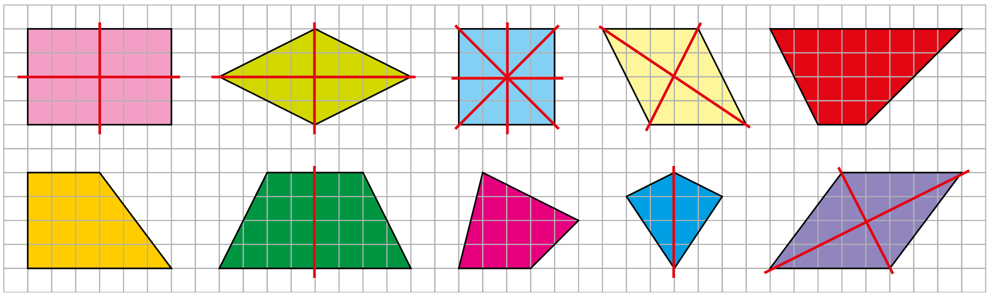


a) Los rectángulos y los rombos tienen … ejes de simetría.

b) Los … tienen cuatro ejes de simetría.

c) Los … no tienen ejes de simetría.

d) Hay algunos … y también algunos … con simetrías.



a) Los rectángulos y los rombos tienen 2 ejes de simetría.

b) Los cuadrados tienen cuatro ejes de simetría.

c) Los trapezoides no tienen ejes de simetría.

d) Hay algunos trapecios y también algunos romboides con simetrías.

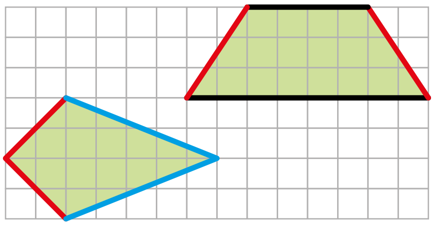
4 **Observa las figuras de la derecha y reflexiona. ¿Verdadero o falso?**

a) Si un cuadrilátero tiene los cuatro ángulos iguales, entonces es un rectángulo.

b) Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos iguales, entonces es un paralelogramo.

c) Si un cuadrilátero tiene los lados iguales dos a dos, entonces es un paralelogramo.

d) Si un cuadrilátero tiene las diagonales perpendiculares, entonces es un rombo.



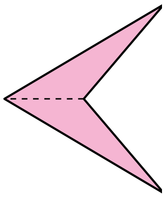
a) Verdadero. Podría decirse que es un cuadrado, pero en realidad un cuadrado es un rectángulo con todos sus lados iguales.

b) Falso. Si los lados no son paralelos no tiene por qué ser un paralelogramo.

c) Falso. Un trapezoide con forma de cometa tiene los lados iguales dos a dos y no es un paralelogramo.

d) Falso. Por ejemplo, un trapezoide con forma de cometa no es un rombo y tiene las diagonales perpendiculares.

5 **Los polígonos en los que una diagonal queda fuera se llaman polígonos cóncavos. ¿Qué clases de cuadriláteros pueden ser cóncavos? Dibuja alguno en tu cuaderno.**

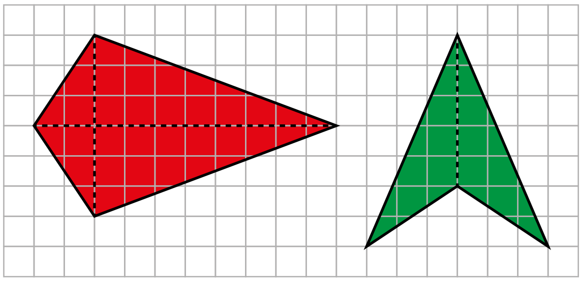


Los trapezoides.

6 **Observa. De la figura roja podemos decir:**

- **Es un trapezoide con los lados iguales dos a dos.**
- **Sus diagonales son perpendiculares.**
- **Tiene un eje de simetría que coincide con la diagonal mayor.**
- **Los ángulos cuyos vértices coinciden con los extremos de la diagonal menor son iguales y obtusos.**

Describe de igual forma las características de la figura verde.



- Es un trapezoide con los lados iguales dos a dos.
- Tiene dos diagonales, una interior y otra exterior, y son perpendiculares.
- Tiene un eje de simetría que coincide con la diagonal menor.
- Los ángulos cuyos vértices coinciden con los extremos de la diagonal mayor son iguales y agudos.

Para practicar

1 **Dibuja y di qué polígono tiene sus vértices en:**

a) Los puntos medios de los lados de un rectángulo.

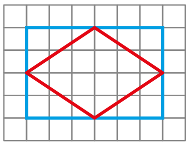
b) Los puntos medios de los lados de un cuadrado.

c) Los puntos medios de los lados de un rombo.

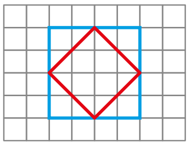
d) Los puntos medios de los lados de un romboide.

e) Los extremos de dos diámetros de una circunferencia.

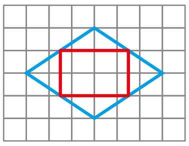
a) Un rombo.



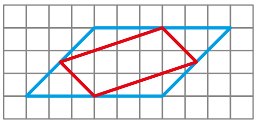
b) Un cuadrado.



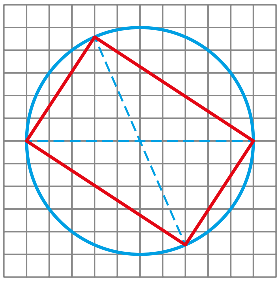
c) Un rectángulo.



d) Un romboide.



e) Un rectángulo.

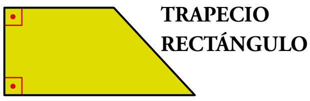


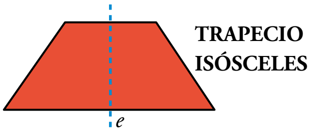
2 **Completa en tu cuaderno y responde.**

a) Un trapecio rectángulo tiene, iguales, …

b) Un trapecio isósceles tiene, iguales, …

c) ¿Puede un trapecio ser a la vez rectángulo e isósceles?





a) Un trapecio rectángulo tiene, iguales, dos de sus ángulos.

b) Un trapecio isósceles tiene, iguales, los ángulos dos a dos.

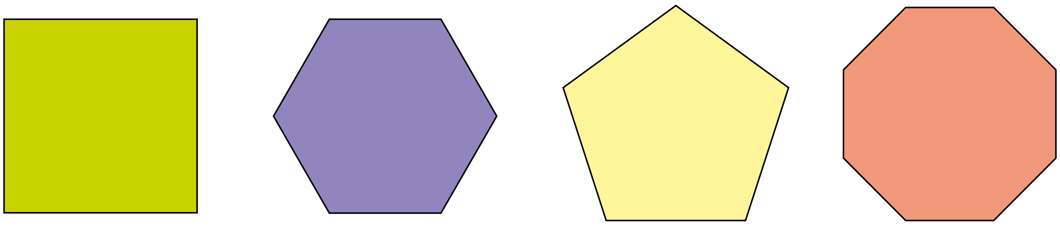
c) No.

5 POLÍGONOS REGULARES Y CIRCUNFERENCIAS

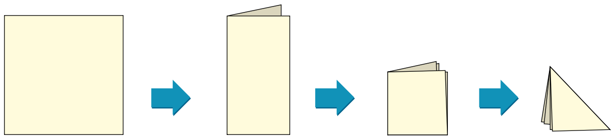
Página 205

Para fijar ideas

1 **Calca las siguientes figuras y recórtalas. Señala, mediante pliegues, todos sus ejes de simetría:**

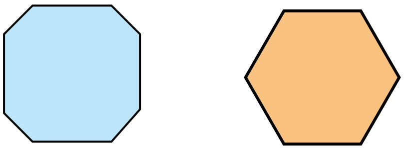


Observa que en el cuadrado puedes hacerlo mediante tres pliegues, y en el octógono, mediante cuatro.



Respuesta abierta.

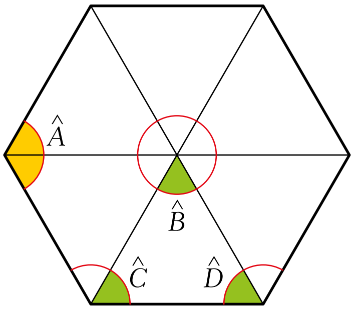
2 **El octógono tiene todos sus ángulos iguales, y el hexágono, todos los lados iguales. ¿Son regulares? Explica tu respuesta.**



El octógono no es regular porque sus lados no son iguales.

El hexágono es regular porque sus lados son iguales y sus ángulos son también iguales.

3 **Recuerda cómo se calcula la suma de los ángulos de un polígono. Reflexiona y completa en tu cuaderno.**



a) La suma de los ángulos del hexágono es: 180° · (6 – 2) = 720°

b) La medida de cada uno de los ángulos del hexágono regular es: $\hat{A}$ = 720° : … = …

c) El ángulo $\hat{B}$ es la sexta parte del ángulo completo: $\hat{B}$ = 360° : 6 = …

d) Los ángulos $\hat{C}$ y $\hat{D}$ son iguales y miden: $\hat{C} = \hat{D} = \hat{A}$: 2 = … : 2 = …

e) Sabiendo la medida de los ángulos $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$, diremos que ese triángulo es: …

f) El hexágono regular se divide en seis triángulos … iguales.

b) $\hat{A}$ = 720° : 6 = 120°

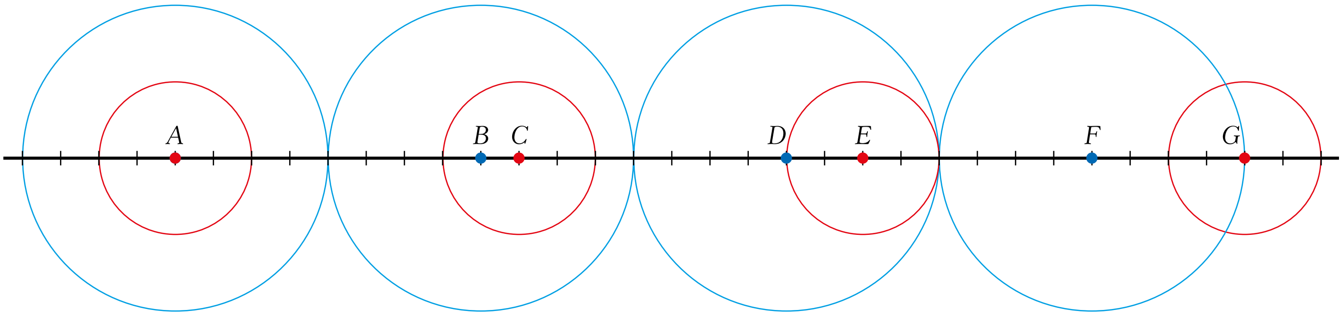
c) $\hat{B}$ = 360° : 6 = 60°

d) $\hat{C} = \hat{D} = \hat{A}$: 2 = 120° : 2 = 60°

e) Equilátero.

f) El hexágono regular se divide en seis triángulos equiláteros iguales.

4 **Copia y completa.**



a) Las dos circunferencias que tienen sus centros en el punto *A* son concéntricas.

b) La circunferencia que tiene su centro en el punto *C* es … a la que lo tiene en *B*.

c) Las circunferencias que tienen sus centros en los puntos *A* y *B* son…

d) Las circunferencias que tienen sus centros en … y … son secantes.

e) Las circunferencias … son tangentes interiores.

b) La circunferencia que tiene su centro en el punto *C* es interior a la que lo tiene en *B*.

c) Las circunferencias que tienen sus centros en los puntos *A* y *B* son exteriores.

d) Las circunferencias que tienen sus centros en *F* y *G* son secantes.

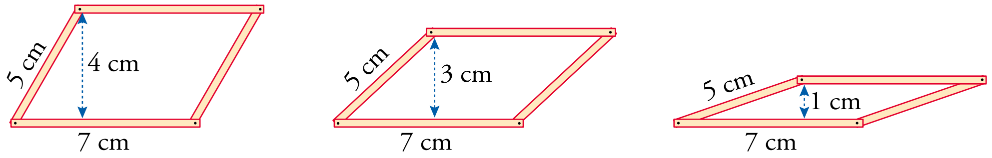
e) Las circunferencias que tienen sus centros en *D* y *E* son tangentes interiores.

6 ▶ MEDIDAS EN LOS CUADRILÁTEROS

Página 207

Para fijar ideas

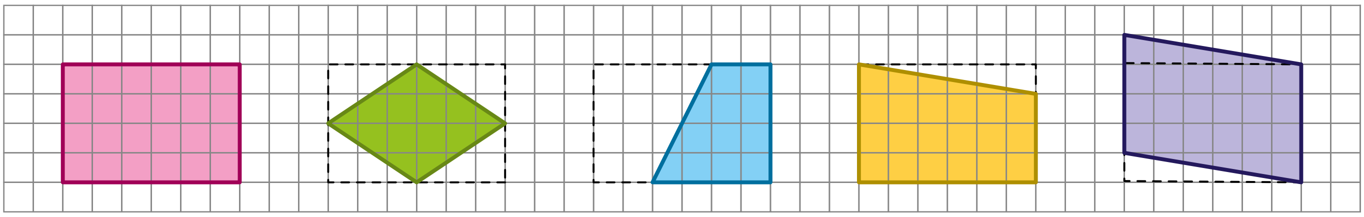
1 **¿Puede haber paralelogramos que tengan los mismos lados, pero diferente área? Explica tu respuesta.**



Sí, porque el área también depende de la altura.

2 **Teniendo en cuenta que el área del rectángulo rosa es 24 u^2, ¿sabrías calcular sin utilizar ninguna fórmula el área de los demás cuadriláteros?**

Por ejemplo: observa que el trapecio azul ocupa la mitad, es decir, 24 : 2 = 12 u^2.



$A = 6 \cdot 4 = 24\ u^2$ $\quad A = \dfrac{6 \cdot \square}{2}$ $\quad A = \dfrac{(\square + \square) \cdot 4}{2}$ $\quad A = \dfrac{(\square + \square) \cdot 6}{2}$ $\quad A = \square \cdot \square$

Después, compara tus resultados con los que obtengas completando las fórmulas.

Rombo → $\dfrac{(6 \cdot 4)}{2} = 12\ u^2$

Trapecio azul → $\dfrac{(2 + 4) \cdot 4}{2} = 12\ u^2$

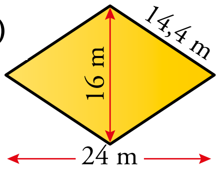
Trapecio amarillo → $\dfrac{(4 + 3) \cdot 6}{2} = 21\ u^2$

Trapecio morado → $6 \cdot 4 = 24\ u^2$

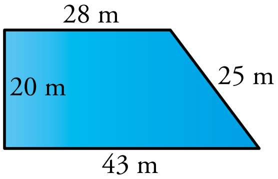
Para practicar

1 **Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras:**

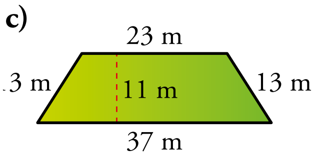
a)



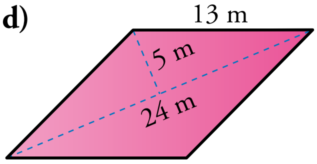
b)



c)



d)



a) Área = $\frac{24 \cdot 16}{2}$ = 192 m^2

Perímetro = 4 · 14,4 = 57,6 m

b) Área = $\frac{(28 + 43) \cdot 20}{2}$ = 710 m^2

Perímetro = 28 + 20 + 43 + 25 = 116 m

c) Área = $\frac{(23 + 37) \cdot 11}{2}$ = 330 m^2

Perímetro = 2 · 13 + 23 + 37 = 86 m

d) Área = 24 · 5 = 120 m^2

Perímetro = 4 · 13 = 52 m

2 **Calcula el perímetro y el área de un salón rectangular de dimensiones 6,4 m y 3,5 m.**

Perímetro = 2 · 6,4 + 2 · 3,5 = 19,8 m

Área = 6,4 · 3,5 = 22,4 m^2

3 **¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de 225 cm^2 de área?**

$225 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{225} = 15$ cm

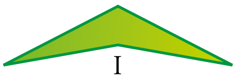
El lado del cuadrado mide 15 cm.

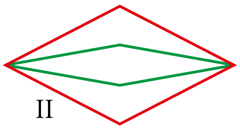
4 **La diagonal de un cuadrado mide 15 cm. Halla su área. (Recuerda que el cuadrado es también un rombo).**

Área = $\frac{15 \cdot 15}{2}$ = 112,5 cm^2

El área del cuadrado es 112,5 cm^2.

5 **¿Verdadero o falso?**





El área del *ala-delta* (figura I) se puede hallar calculando el área del rombo rojo (figura II), restándole el área del rombo verde y dividiendo la diferencia por 2.

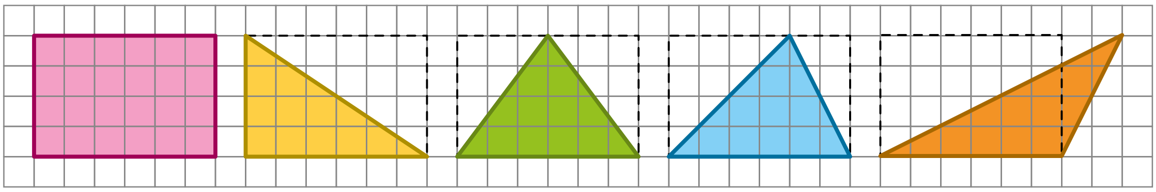
Verdadero.

7 ▶ MEDIDAS EN LOS TRIÁNGULOS

Página 208

Para fijar ideas

1 **Teniendo en cuenta que el área del rectángulo es 6 · 4 = 24 u², calcula mentalmente, sin utilizar ninguna fórmula, el área de cada triángulo.**



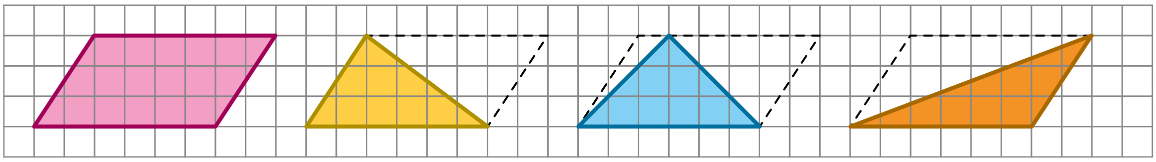
Triángulo amarillo → 12 u²

Triángulo verde → 12 u²

Triángulo azul → 12 u²

Triángulo naranja → 12 u²

2 **Observa estas figuras. Todas tienen 6 unidades de base y 3 de altura. Copia, calcula y completa las áreas de los triángulos. Compáralas con el área del paralelogramo.**



$\boldsymbol{A = 6 \cdot 3 = 18\ u^2}$ $\quad \boldsymbol{A = \dfrac{\square \cdot \square}{2}}$ $\quad \boldsymbol{A = \dfrac{\square \cdot \square}{2}}$ $\quad \boldsymbol{A = \dfrac{\square \cdot \square}{2}}$

Triángulo amarillo → $\dfrac{(6 \cdot 3)}{2} = 9\ u^2$

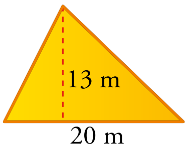
Triángulo azul → $\dfrac{(6 \cdot 3)}{2} = 9\ u^2$

Triángulo naranja → $\dfrac{(6 \cdot 3)}{2} = 9\ u^2$

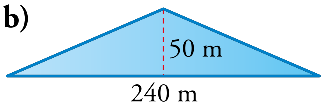
Para practicar

1 **Halla el área de estos triángulos:**

a)



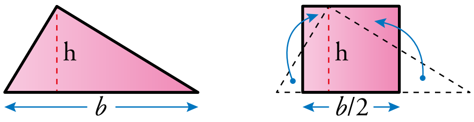
b)



a) Área = $\dfrac{20 \cdot 13}{2} = 130\ m^2$

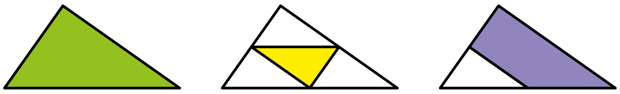
b) Área = $\dfrac{240 \cdot 50}{2} = 6\,000\ m^2$

2 **¿Verdadero o falso? El área de un triángulo es igual al área de un rectángulo con su misma altura y la mitad de su base.**



Verdadero.

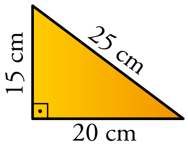
3 **El área del triángulo verde es 40 dm^2. ¿Cuál es el área del amarillo? ¿Y la del trapecio morado?**

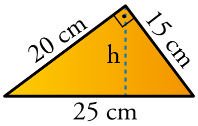


Triángulo amarillo → $40 : 4 = 10$ dm^2

Trapecio morado → $10 \times 3 = 30$ dm^2

4 **Observa el mismo triángulo rectángulo, apoyado sobre un cateto, y apoyado sobre la hipotenusa. Calcula el área y, con ese dato, calcula la altura sobre la hipotenusa.**





$$A = \frac{(15 \cdot 20)}{2} = 150 \text{ cm}^2$$

$$150 = \frac{(25 \cdot \text{h})}{2} \rightarrow \text{h} = \frac{300}{25} = 12 \text{ cm}$$

8 ▶ MEDIDAS EN LOS POLÍGONOS

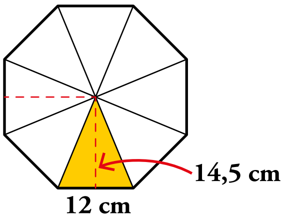
Página 209

Para fijar ideas

1 **El lado de un octógono regular mide 12 cm y la apotema 14,5 cm.**

Completa y calcula el área.

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\square \cdot \square}{2} = \dots \qquad A_{\text{OCTÓGONO}} = 8 \cdot A_{\text{TRIÁNGULO}} = 8 \cdot \square = \dots$



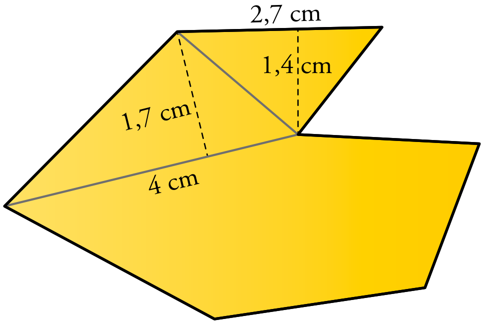
$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{(12 \cdot 14,5)}{2} = 87 \text{ cm}^2$

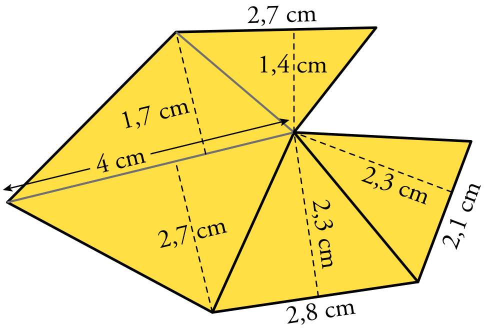
$A_{\text{OCTÓGONO}} = 8 \cdot A_{\text{TRIÁNGULO}} = 8 \cdot 87 = 696 \text{ cm}^2$

Para practicar

1 **Calca este polígono en tu cuaderno, continúa descomponiéndolo en triángulos y toma en ellos las medidas necesarias para calcular sus áreas.**

Halla, así, el área total.

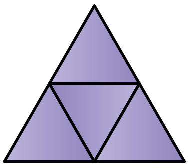


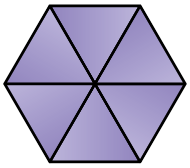


$$A = \frac{2,7 \cdot 1,4}{2} + \frac{4 \cdot 1,7}{2} + \frac{4 \cdot 2,7}{2} + \frac{2,8 \cdot 2,3}{2} + \frac{2,1 \cdot 2,3}{2} = 16,325 \text{ cm}^2$$

2 **Observa estas dos figuras. El área del triángulo es 80 dm^2. ¿Cuál es el área del hexágono?**

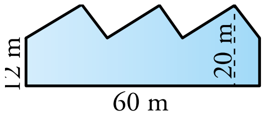
b)

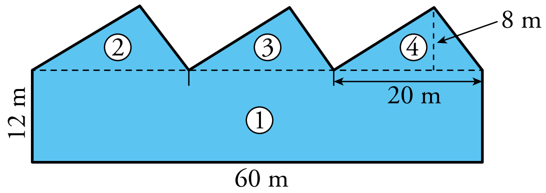




80 : 4 = 20 → 20 · 6 = 120 dm^2

3 **Calcula el área de la siguiente figura:**





Área ① = 60 · 12 = 720 m^2

Área ② = Área ③ = Área ④ = $\frac{20 \cdot 8}{2}$ = 80 m^2

Área figura = 720 + 3 · 80 = 960 m^2

4 **El lado de un pentágono regular mide 8 cm y su apotema 5,5 cm. Calcula su área.**

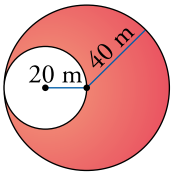
$$A_{\text{PENTÁGONO}} = \frac{(\text{perímetro} \cdot ap)}{2} = \frac{(5 \cdot 8 \cdot 5{,}5)}{2} = 110 \text{ cm}^2$$

9 ▶ MEDIDAS EN EL CÍRCULO

Página 210

Para practicar

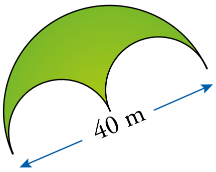
1 **Halla la superficie y el perímetro del recinto coloreado.**



Área = $\pi \cdot 40^2 - \pi \cdot 20^2 = 1200\pi \approx 3\,769{,}9$ m^2

Perímetro = $2\pi \cdot 40 + 2\pi \cdot 20 = 120\pi \approx 376{,}99$ m

2 **Calcula el perímetro y el área de esta figura:**



Área = $\dfrac{\pi \cdot 20^2}{2} - \pi \cdot 10^2 = 100\pi \approx 314{,}16$ m^2

Perímetro = $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot 20}{2} + 2\pi \cdot 10 = 40\pi \approx 125{,}66$ m

Página 211

Para practicar

3 **¿Verdadero o falso?**

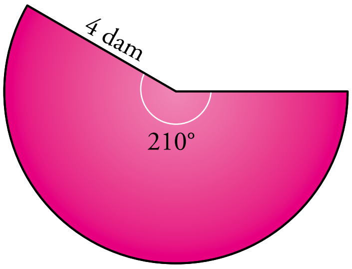
a) El valor de π es tanto mayor cuanto más grande sea la circunferencia sobre la que actúa.

b) Cuando tomamos para π el valor 3,14, lo estamos haciendo de forma aproximada.

a) Falso. El número π siempre es el mismo número.

b) Verdadero.

4 **Halla el área y el perímetro de esta figura:**



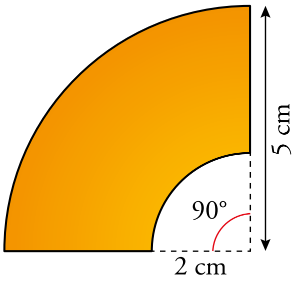
Área = $\dfrac{\pi \cdot 4^2}{360} \cdot 210 = 9{,}3\pi \approx 29{,}32$ dam^2

Perímetro = $\dfrac{2\pi \cdot 4}{360} \cdot 210 + 4 + 4 \approx 22{,}66$ dam

5 **Halla la longitud de un arco de circunferencia de 10 cm de radio y 40° de amplitud.**

Longitud del arco = $\frac{2\pi \cdot 10}{360} \cdot 40 \approx 6{,}98$ cm

6 **Calcula el área y el perímetro de esta figura:**



Área = $\frac{\pi \cdot 5^2}{360} \cdot 90 - \frac{\pi \cdot 2^2}{360} \cdot 90 \approx 16{,}49 \text{ cm}^2$

Perímetro = $\frac{2\pi \cdot 5}{360} \cdot 90 + \frac{2\pi \cdot 2}{360} \cdot 90 + 3 + 3 \approx 17$ cm

7 **Calcula el área de un sector circular de 20 cm de radio y 30° de amplitud.**

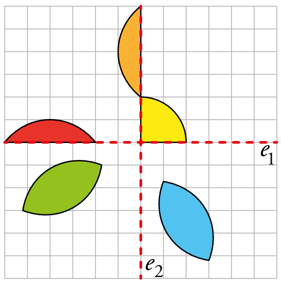
Área = $\frac{\pi \cdot 20^2}{360} \cdot 30 \approx 104{,}72 \text{ cm}^2$

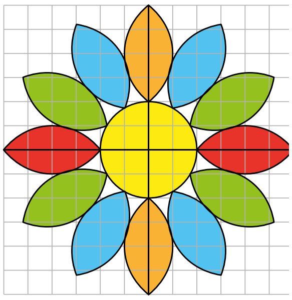
Página 212

Ejercicios y problemas

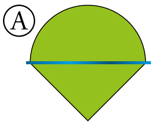
Simetrías

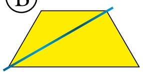
1 **Copia en tu cuaderno y completa la siguiente figura para que tenga los dos ejes de simetría que se indican.**

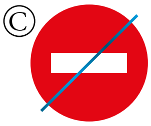




2 **Imagina que pones un espejo sobre la línea azul de las siguientes figuras:**

Ⓐ 

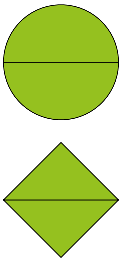
Ⓑ 

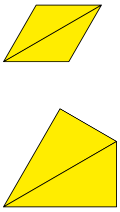
Ⓒ 

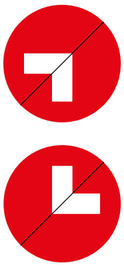
a) Dibuja en tu cuaderno lo que crees que se verá mirando por cada una de sus dos caras.

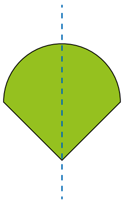
b) ¿Cómo hay que situar el espejo en cada figura para que se vea lo mismo por las dos caras?

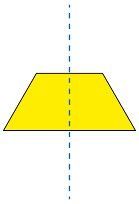
a) El círculo y el cuadrado se obtienen de la figura A; los trapezoides, de la B, y las otras dos, de la C.

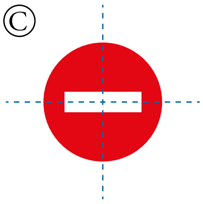
Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

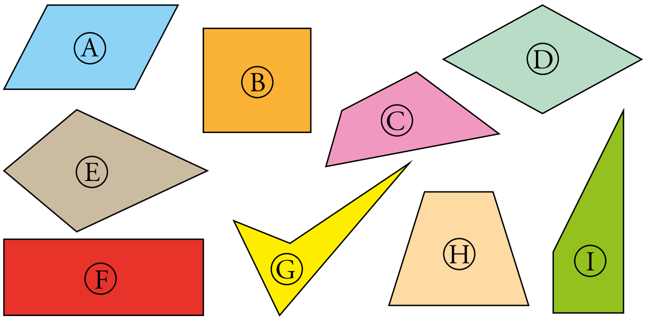
b) Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Polígonos. Clasificación

3 **Pon nombre a cada uno de estos cuadriláteros:**



A → Romboide, paralelogramo.
B → Cuadrado, paralelogramo.
C, E, G → Trapezoide.
D → Rombo, paralelogramo.
F → Rectángulo, paralelogramo.
H → Trapecio isósceles.
I → Trapecio rectángulo.

4 **Indica qué propiedades de la derecha tienen las figuras de la izquierda.**

CUADRADO

RECTÁNGULO (no cuadrado)

ROMBO (no cuadrado)

ROMBOIDE

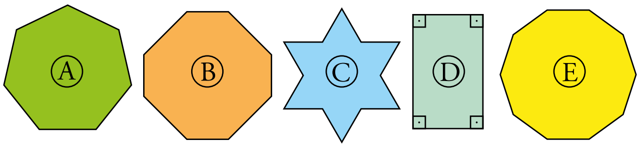
PARALELOGRAMO

TRAPEZOIDE

① **Cuatro lados iguales.**
② **Cuatro ángulos rectos.**
③ **Ángulos opuestos iguales.**
④ **Diagonales perpendiculares.**
⑤ **Diagonales que se cortan en sus puntos medios.**
⑥ **Diagonales no perpendiculares.**
⑦ **Cuatro ejes de simetría.**
⑧ **Dos ejes de simetría.**

CUADRADO → 1, 2, 4, 5, 7.
RECTÁNGULO (no cuadrado) → 2, 5, 6, 8.
ROMBO (no cuadrado) → 1, 3, 4, 5, 8.
ROMBOIDE → 3, 5, 6.
PARALELOGRAMO → 5.
TRAPEZOIDE → 6.

5 **¿Cuáles de estos polígonos son regulares?**

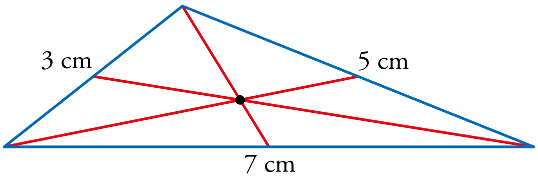


Los polígonos que son regulares son el A (heptágono regular) y el E (decágono regular).

Construcciones

6 **Dibuja un triángulo de lados 3 cm, 5 cm y 7 cm, y traza sus medianas. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan?**

El punto donde se cortan las medianas se llama baricentro.



7 **Dibuja estos triángulos, clasifícalos y encuentra el circuncentro de cada uno:**

a) **4 cm, 6 cm y 5 cm.**

b) **12 cm, 13 cm y 5 cm.**

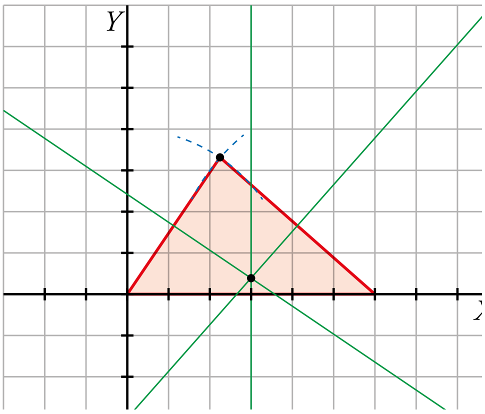
c) **8 cm, 6 cm y 12 cm.**

d) **5 cm, 5 cm y 5 cm.**

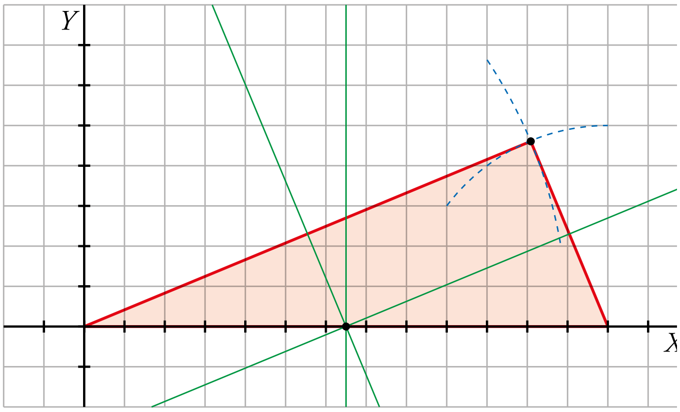
Intenta formular una propiedad que relacione la posición del circuncentro y el tipo de triángulo.

Nota: el lado de cada cuadradito representa 1 cm.

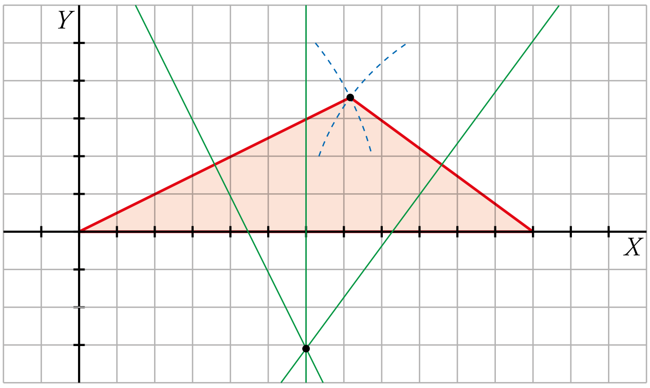
a) Es un triángulo acutángulo y el circuncentro se sitúa en su interior.



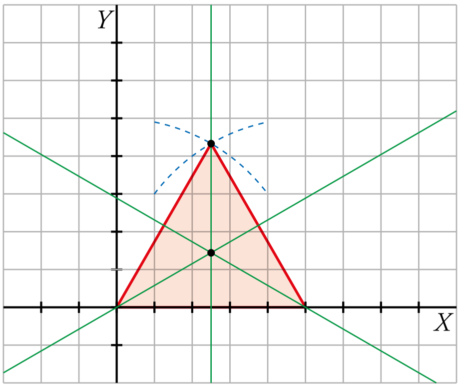
b) Es un triángulo rectángulo y el circuncentro está en el punto medio de la hipotenusa.



c) Es un triángulo obtusángulo y el circuncentro está en el exterior del triángulo.



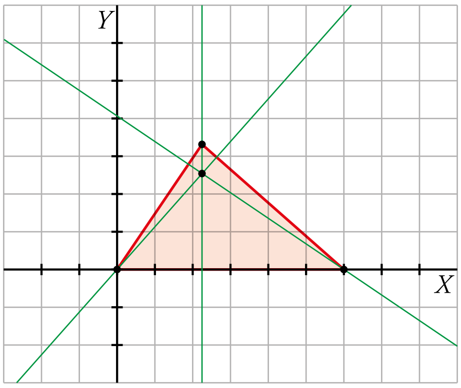
d) Es un triángulo equilátero y el circuncentro coincide con el incentro, el baricentro y el ortocentro en el centro de gravedad del triángulo.



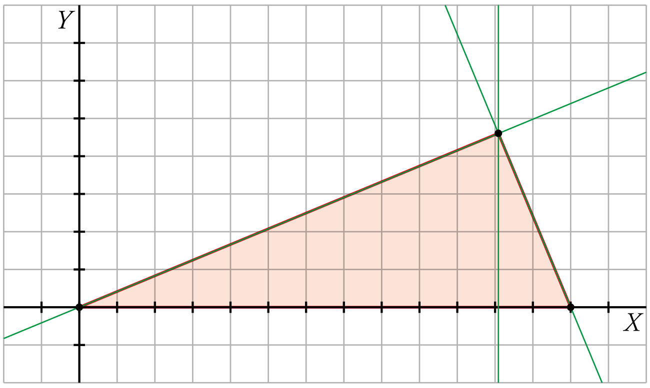
8 **Haz lo mismo que en la actividad anterior pero en lugar del circuncentro, encuentra el ortocentro.**

Nota: el lado de cada cuadradito representa 1 cm.

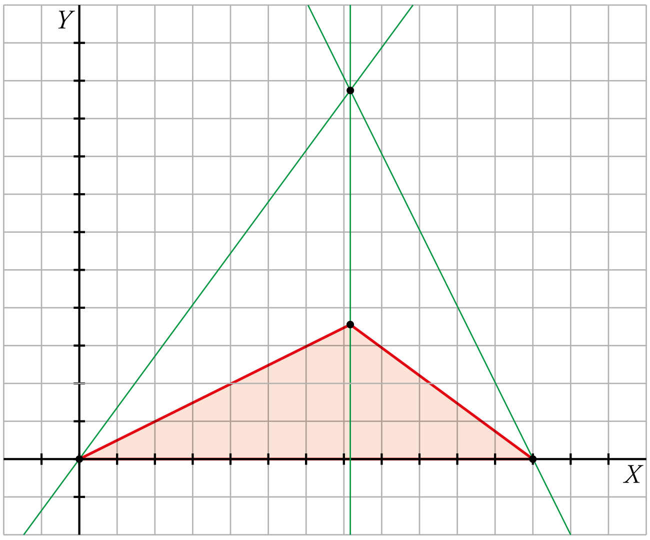
a) Es un triángulo acutángulo y el ortocentro se sitúa en su interior.



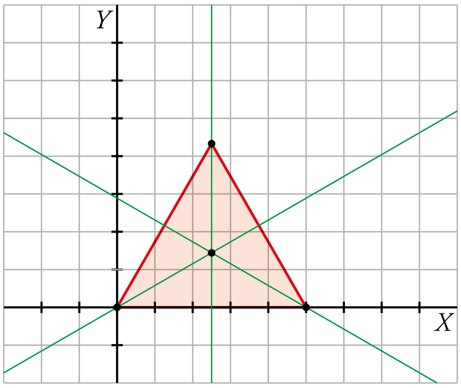
b) Es un triángulo rectángulo y el ortocentro está en el vértice del ángulo recto.



c) Es un triángulo obtusángulo y el ortocentro está en el exterior del triángulo.



d) Es un triángulo equilátero y el ortocentro coincide con el incentro, el baricentro y el circuncentro en el centro de gravedad del triángulo.



Propiedades de las figuras planas

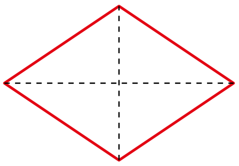
Para resolver las siguientes actividades, te puedes ayudar de un dibujo.

9 **Si dibujas dos segmentos que sean perpendiculares en sus puntos medios y unes sus extremos, obtienes un cuadrilátero. ¿De qué tipo es…**

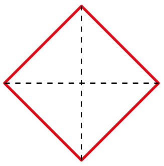
a) … si los dos segmentos tienen distinta longitud?

b) … si los dos segmentos tienen la misma longitud?

a) Es un rombo.

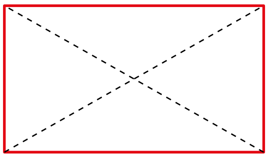


b) Es un cuadrado.

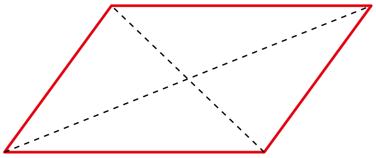


10 **Resuelve el ejercicio anterior pero sin que los segmentos sean perpendiculares.**

Es un rectángulo.



Es un romboide.



11 **Dibuja y clasifica, cuando sea posible, un ejemplo de cada cuadrilátero:**

a) Con dos ejes de simetría.

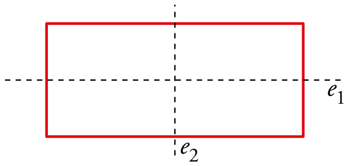
b) Con cuatro ejes de simetría.

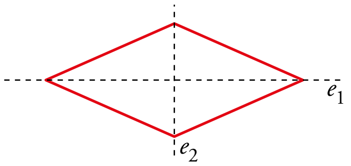
c) Con un eje de simetría.

d) Paralelogramo sin ejes de simetría.

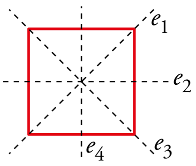
e) No trapecio con un eje de simetría.

a) Puede ser un rectángulo o un rombo.

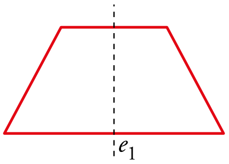


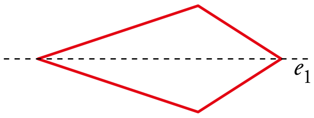


b) Cuadrado.

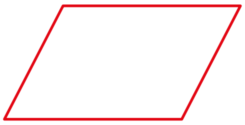


c) Por ejemplo:

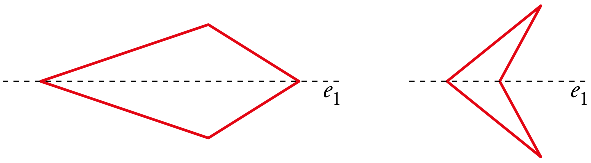




d) Por ejemplo:



e) Por ejemplo:



12 **Escribe el nombre de cada cuadrilátero:**

a) Paralelogramo con diagonales perpendiculares.

b) No paralelogramo con diagonales perpendiculares.

c) Paralelogramo con diagonales iguales.

d) No paralelogramo con diagonales iguales.

a) Cuadrado o rombo.

b) Una «cometa».

c) Cuadrado o rectángulo.

d) Trapecio isósceles.

Página 213

13 **¿De qué cuadrilátero se trata?**

a) Dos pares de lados iguales y paralelogramo.

b) Dos pares de lados iguales y no paralelogramo.

c) Dos pares de ángulos iguales y paralelogramo.

d) Dos pares de ángulos iguales y no paralelogramo.

a) Rectángulo o romboide.

b) Una «cometa».

c) Rombo.

d) Trapecio isósceles.

Posiciones relativas

14 **Indica en cada caso la posición relativa de dos circunferencias de radios 7 cm y 10 cm, respectivamente, cuyos centros se encuentran a:**

a) 9 cm b) 20 cm c) 3 cm d) 17 cm e) 0 cm

a) Secantes.

b) Exteriores.

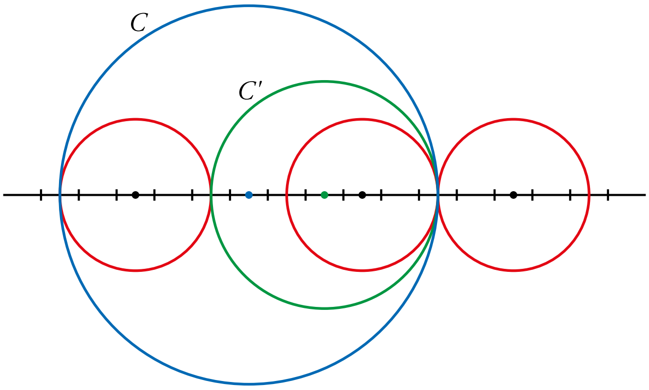
c) Tangentes interiores.

d) Tangentes exteriores.

e) Concéntricas.

15 **Dibuja dos circunferencias, *C* y *C'*, de radios 5 cm y 3 cm que sean tangentes interiores. Traza tres circunferencias distintas, de 2 cm de radio, tales que cada una de ellas sea tangente a *C* y a *C'*.**

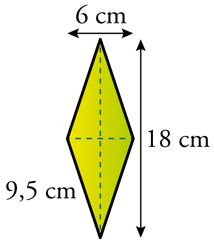
Nota: cada división de la recta representa 1 cm.



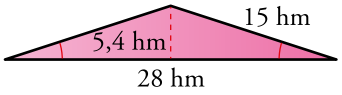
Áreas y perímetros de figuras sencillas

Halla el área y el perímetro de cada una de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

16 **a)**



b)



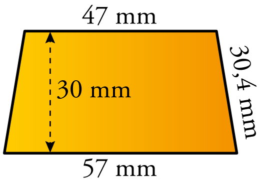
a) $A = \frac{18 \cdot 6}{2} = 54 \text{ cm}^2$

$P = 9{,}5 \cdot 4 = 38$ cm

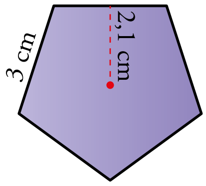
b) $A = \frac{28 \cdot 5{,}4}{2} = 75{,}6 \text{ hm}^2$

$P = 28 + 15 \cdot 2 = 58$ hm

17 **a)**



b)



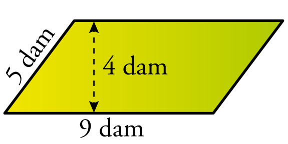
a) $A = \frac{47 + 57}{2} \cdot 30 = 1\,560 \text{ mm}^2$

$P = 57 + 47 + 2 \cdot 30{,}4 = 164{,}8$ mm

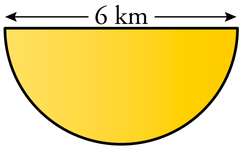
b) $A = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2{,}1}{2} = 15{,}75 \text{ cm}^2$

$P = 5 \cdot 3 = 15$ cm

18 **a)**



b)



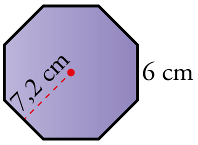
a) $A = 9 \cdot 4 = 36 \text{ dam}^2$

$P = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = 28$ dam

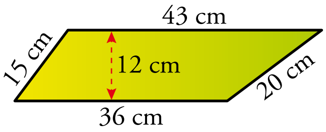
b) $A = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} \approx 14{,}13 \text{ km}^2$

$P = \frac{2\pi \cdot 3}{2} + 6 \approx 15{,}42$ km

19 a)



b)



a) $A = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7{,}2}{2} = 172{,}8 \text{ cm}^2$

$P = 8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}$

b) $A = \frac{43 + 36}{2} \cdot 12 = 474 \text{ cm}^2$

$P = 36 + 20 + 43 + 15 = 114 \text{ cm}$

20 **Halla el área de un trapecio cuyas bases miden 12 cm y 20 cm, y su altura, 10 cm.**

$A = \frac{12 + 20}{2} \cdot 10 = 160 \text{ cm}^2$

El área del trapecio es 160 cm^2.

21 **Las bases de un trapecio isósceles miden 26 cm y 14 cm; la altura, 8 cm, y otro de sus lados, 10 cm. Calcula el perímetro y el área de la figura.**

$A = \frac{26 + 14}{2} \cdot 8 = 160 \text{ cm}^2$

$P = 26 + 14 + 2 \cdot 10 = 60 \text{ cm}$

22 **Calcula el área y el perímetro de un hexágono regular de 6 mm de lado y 5,2 mm de apotema.**

$A = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ mm}^2$

$P = 6 \cdot 6 = 36 \text{ mm}$

23 **Calcula la longitud de la mayor circunferencia que cabe dentro de un cuadrado de 20 cm de lado. Calcula, también, el área del círculo correspondiente.**

$P = 2\pi\, r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \approx 62{,}8 \text{ cm}$

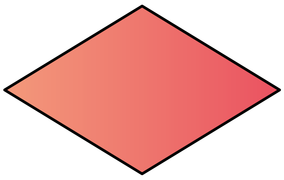
$A_c = \pi\, r^2 = 3{,}14 \cdot (10)^2 \approx 314 \text{ cm}^2$

Medir y calcular áreas y perímetros

En cada una de las siguientes figuras coloreadas, halla su área y su perímetro. Para ello, tendrás que medir algún elemento (lado, diagonal, radio…):

24 a)

b)



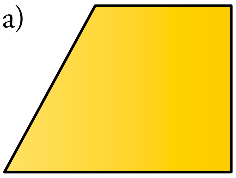
a) $A = 7{,}8 \text{ cm}^2$

$P = 11{,}2 \text{ cm}$

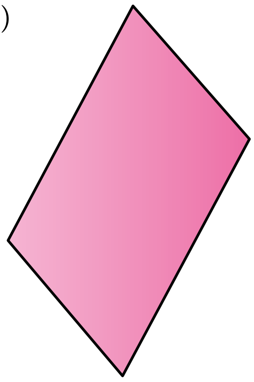
b) $A = 3{,}5 \text{ cm}^2$

$P = 8 \text{ cm}$

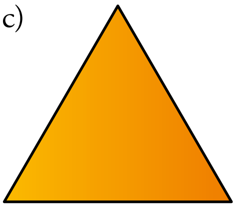
25 a)



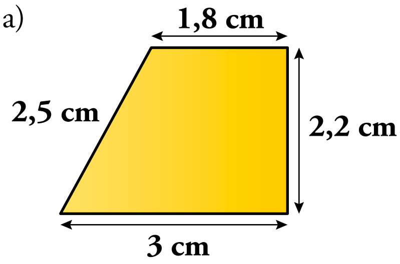
b)



c)

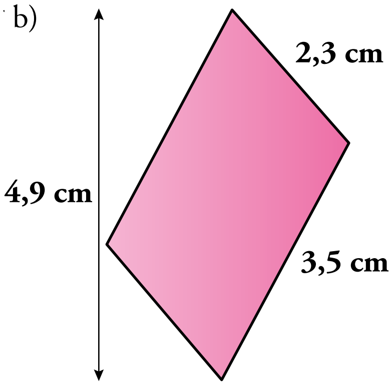


a)



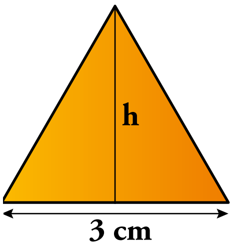
$A = 5{,}28$ cm^2
$P = 9{,}5$ cm

b)



$A = 7{,}7$ cm^2
$P = 11{,}6$ cm

c)



$\text{h} = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} \approx 2{,}6$ cm

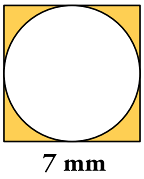
$A = \dfrac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 3{,}9$ cm^2

$P = 3 \cdot 3 = 9$ cm

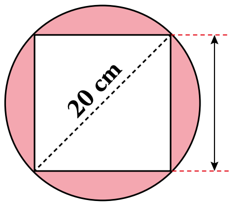
Áreas y perímetros menos sencillos

Halla el perímetro y el área de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

26 a)



b)

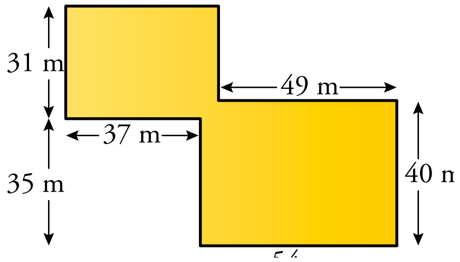


a) $A = 7^2 - \pi \cdot 3{,}5^2 \approx 10{,}53$ mm^2
$P = 7 \cdot 4 + 2\pi \cdot 3{,}5 \approx 49{,}98$ mm

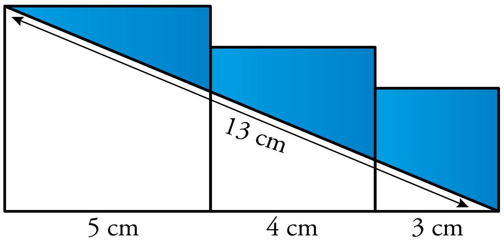
b) $20^2 = 2l^2 \rightarrow l^2 = 200$ cm
$A = \pi \cdot 10^2 - 200 \approx 114$ cm^2
$P = 2\pi \cdot 10 + 14{,}14 \cdot 4 = 119{,}36$ cm

Página 214

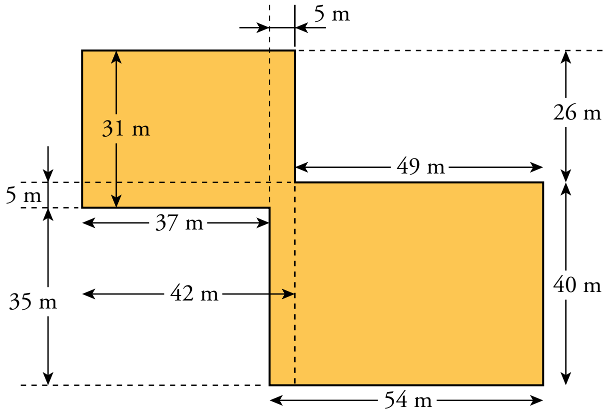
27 **a)**



b)



a)



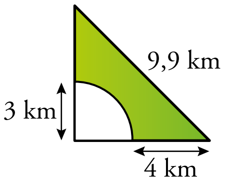
$A = 42 \cdot 31 + 54 \cdot 40 - 5^2 = 3\,437 \text{ m}^2$

$P = 54 + 40 + 49 + 26 + 42 + 31 + 37 + 35 = 314 \text{ m}$

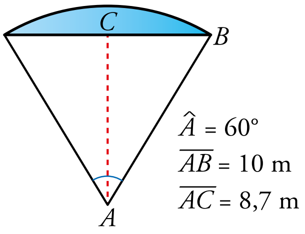
b) $A = 5^2 + 4^2 + 3^2 - \dfrac{(5+4+3) \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$

$P = 13 + 5 + 1 + 4 + 1 + 3 + 3 = 30 \text{ cm}$

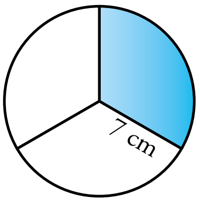
28 **a)**



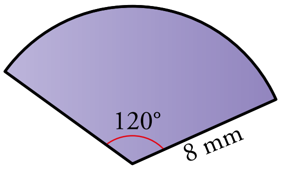
b)



c)



d)



a) $A = \dfrac{7 \cdot 7}{2} - \dfrac{\pi \cdot 3^2}{4} \approx 17{,}43 \text{ km}^2$

$P = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 3}{4} + 4 + 4 + 9{,}9 \approx 22{,}61 \text{ km}$

c) $A = \dfrac{\pi \cdot 7^2}{2} \approx 51{,}29 \text{ cm}^2$

$P = \dfrac{2\pi \cdot 7}{3} + 2 \cdot 7 \approx 28{,}65 \text{ cm}$

b) $A = \dfrac{\pi \cdot 10^2}{360} \cdot 60 - \dfrac{10 \cdot 8{,}7}{2} \approx 8{,}8 \text{ m}^2$

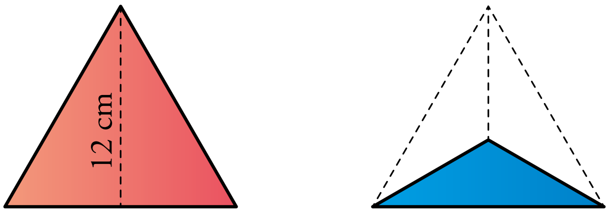
$P = \dfrac{2\pi \cdot 10}{360} \cdot 60 + 10 \approx 20{,}5 \text{ m}$

d) $A = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{360} \cdot 120 \approx 66{,}97 \text{ mm}^2$

$P = \dfrac{2\pi \cdot 8}{360} \cdot 120 + 8 + 8 \approx 32{,}75 \text{ mm}$

Piensa, justifica, describe

29 Observa el triángulo equilátero rojo y el isósceles azul.



a) ¿Cuál es la relación entre sus áreas?

b) Basándote en la respuesta anterior, y teniendo en cuenta que tienen bases iguales, ¿cuál es la altura del triángulo azul?

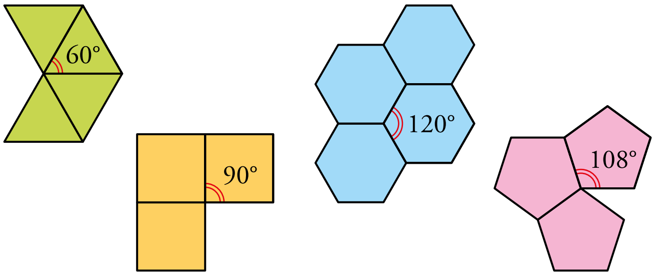
c) ¿Cuál es la distancia del centro del triángulo a cada vértice?

a) El área del triángulo rojo es el triple que la del azul.

b) La altura del triángulo azul son 4 cm.

c) La distancia del centro del triángulo a cada vértice es, aproximadamente, de 7,74 cm.

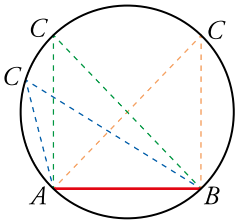
30 Podemos embaldosar el suelo con losetas cuadradas o triangulares regulares. También encajan bien, unas con otras, las losetas hexagonales regulares.



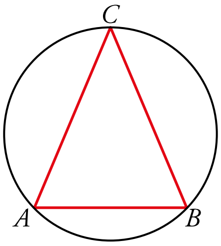
Sin embargo, los pentágonos regulares no sirven para embaldosar el suelo. Explica por escrito qué tiene que ver esto con el ángulo de los polígonos regulares.

El ángulo del pentágono regular es de 108°, que no es divisor de 360°; por tanto, un número entero de losetas no encajarán sin dejar huecos o producirse solapamientos.

31 ***A*** **y** ***B*** **son puntos fijos. El punto** ***C*** **puede estar situado en cualquier lugar de la circunferencia. ¿Dónde lo pondrás si quieres que el área del triángulo** ***ABC*** **sea la mayor posible?**

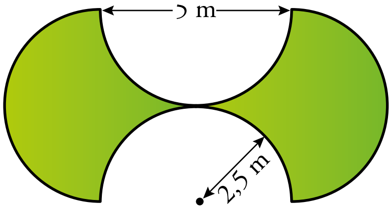


Pondremos *C* en el punto más alto de la circunferencia para que el área sea lo mayor posible. Esto es porque con la misma base, cuanto mayor sea la altura, mayor será el área del triángulo.



Reflexiona, dibuja y resuelve

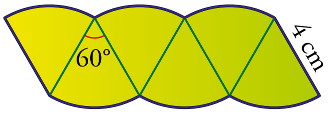
32 Calcular el área de esta figura.



Problema resuelto.

Página 215

33 Halla el área y el perímetro de toda la figura.



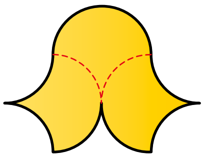
Cada sector, al ser de 60°, es una sexta parte de un círculo. Como hay 6 sectores, resulta que tenemos el círculo entero. Por tanto:

$A = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

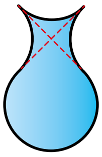
$P = 2\pi \cdot r = 24{,}12 \text{ cm}$

34 Todos los arcos con los que se han trazado estas figuras son iguales; pertenecen a circunferencias de 6 cm de radio. Halla el área de cada una.

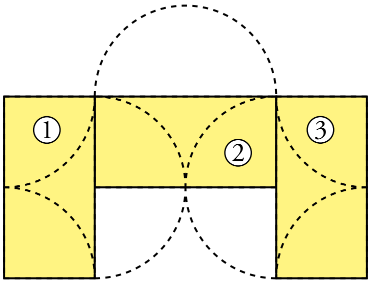
a)



b)



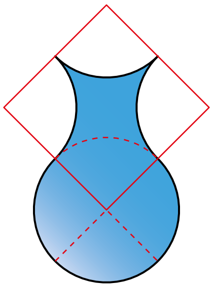
a)



Las figuras (rectángulos) ①, ② y ③ son iguales y miden 12 cm × 6 cm, es decir:

$$A_{①} = A_{②} = A_{③} = 72 \text{ cm}^2 \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 72 = 216 \text{ cm}^2$$

b)



El área pedida es la del cuadrado, que resulta ser de 12 cm de lado.

Así, $A = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$.

35 **Un salón cuadrado tiene una superficie de 50 m^2. Hemos de embaldosarlo con losetas cuadradas de 25 cm de lado (se llaman losetas de 25 × 25). ¿Cuántas losetas son necesarias?**

$A_{\text{LOSETA}} = 25 \cdot 25 = 625 \text{ cm}^2$

$A_{\text{SALÓN}} = 50 \text{ m}^2 = 500\,000 \text{ cm}^2$

Para cubrir el salón se necesitan $\frac{500\,000}{625} = 800$ losetas.

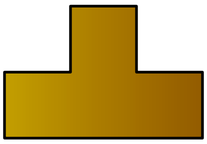
36 **Para cubrir un patio rectangular, se han usado 540 baldosas de 600 cm^2 cada una. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm de lado serán necesarias para cubrir el patio, exactamente igual, del vecino?**

El patio tiene un área de $540 \cdot 600 = 324\,000 \text{ cm}^2$.

La superficie de una baldosa de 20 cm de lado es $20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$.

Por tanto, se necesitan $\frac{324\,000}{400} = 810$ baldosas de 20 cm de lado para cubrir el patio.

37 **La valla de esta parcela tiene una longitud de 450 m. ¿Cuál es el área de la parcela?**



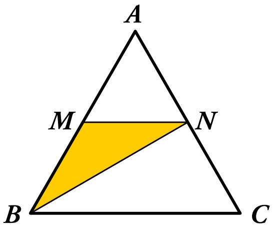
Si llamamos x al lado del cuadrado que está encima del rectángulo, el perímetro de la parcela es $10x$. Al igualarlo a la longitud de la parcela, obtenemos:

$$10x = 450 \text{ m} \rightarrow x = 45 \text{ m}$$

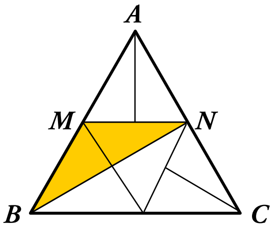
Por tanto, el área de la figura es la misma que la de 4 cuadrados de lado 45 m:

$$A = 4 \cdot 45^2 = 8\,100 \text{ m}^2$$

38 **El área del triángulo *ABC* es de 60 cm^2, y *M* y *N* son los puntos medios de dos de sus lados. ¿Cuál es el área del triángulo amarillo?**

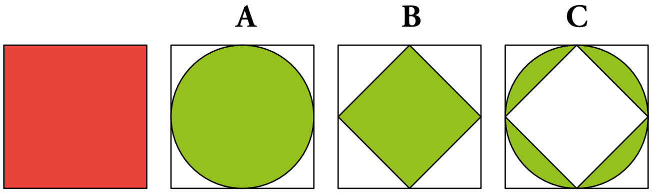


$A_{MBN} \rightarrow \frac{2}{8}$ de $60 = 15 \text{ cm}^2$



Resuelve problemas

39 **El cuadrado rojo ocupa una superficie de 100 m^2. Calcula el área de las figuras A, B y C, coloreadas en verde.**



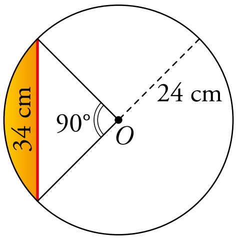
Como el área del cuadrado es 100 m^2 entonces la medida del lado es 10 m.

A → $A = \pi r^2 = 3{,}14 \times 5^2 = 78{,}5$ m^2

B → $A = \dfrac{100}{2} = 50$ m^2

C → $A = \text{A} - \text{B} = 78{,}5 - 50 = 28{,}5$ m^2

40 **En una circunferencia de 24 cm de radio trazamos una cuerda de 34 cm. Halla el área del segmento circular sabiendo que el ángulo central correspondiente es de 90°.**

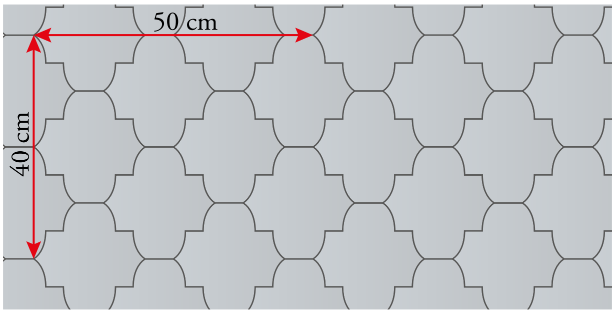


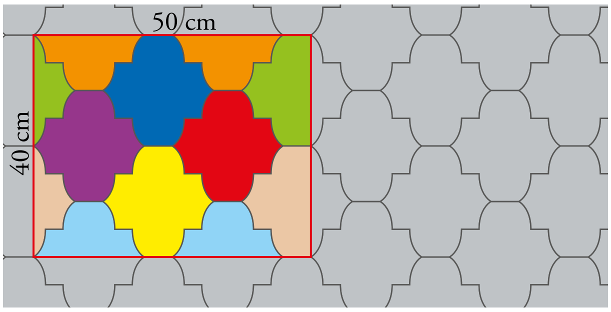
$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{24 \cdot 24}{2} = 288 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 24^2 \approx 1\,808{,}64 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = \frac{1}{4} A_{\text{CÍRCULO}} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{1\,808{,}64}{4} - 288 = 161{,}16 \text{ cm}^2$$

41 **Halla la superficie de cada loseta de este embaldosado:**



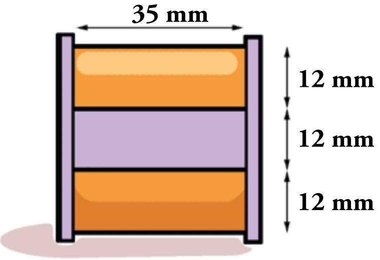


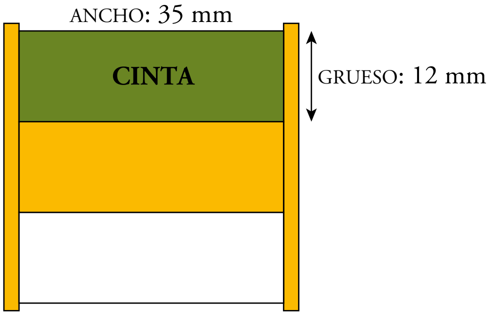
El área del rectángulo es 50 · 40 = 2 000 cm^2.

Como dentro del rectángulo hay 8 losetas completas, cada loseta tiene un área de $A = \dfrac{2\,000}{8} = 250$ cm^2.

Problemas «+»

42 **Con los datos que te ofrece el esquema, haz una estimación de la longitud de la cinta enrollada en el carrete. (Grosor de la cinta: 1/3 mm).**



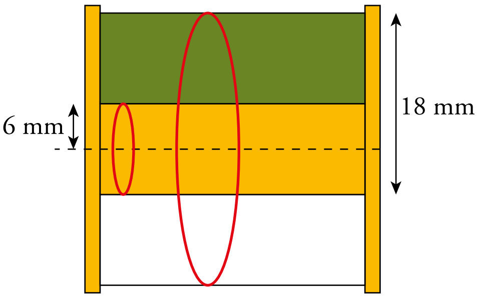


Como el diámetro de la cinta es $\frac{1}{3}$ de mm, en cada milímetro hay 3 cintas.

A lo ancho hay, pues, $3 \cdot 35 = 105$ cintas.

A lo grueso hay $3 \cdot 12 = 36$ cintas.

Supongamos que las cintas forman circunferencias (no es así, pero se aproxima mucho). ¿De qué radios son esas circunferencias? Las más pequeñas tienen un radio de 6 mm. Las mayores, de 18 mm.



El promedio es $\frac{6+18}{2} = 12$ mm.

Supondremos que *todas* las circunferencias tienen el radio promedio. Su longitud es:

$2 \cdot \pi \cdot 12 \approx 75{,}4$ mm

¿Cuántas circunferencias de cinta hay?

105 a lo ancho × 36 a lo grueso = 3 780 circunferencias.

Longitud total = 3 780 circunf. × longitud de la circunferencia promedio = 285 012 mm

Por tanto, estimamos que la longitud total de la cinta del carrete es 285 000 mm, es decir, 285 m.

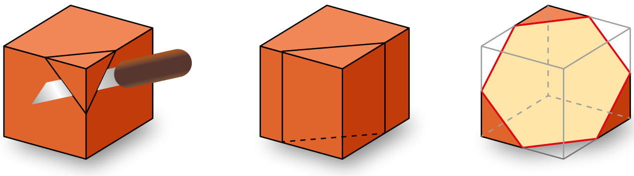
43 **Construye un cubo de plastilina.**

a) Señala sobre él cómo hay que cortarlo para obtener un triángulo equilátero. ¿Cuál es el mayor posible?

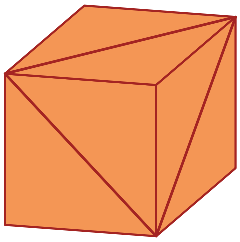
b) ¿Y un cuadrado?

c) ¿Y un hexágono regular?

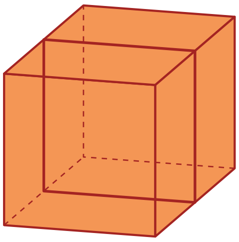
d) Dibuja el cubo y el corte que darías para obtener un trapecio isósceles.



a)

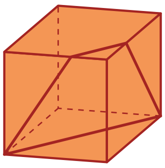


b)

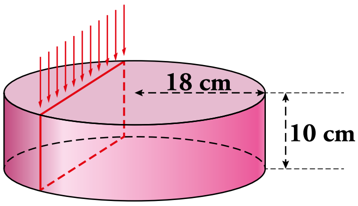


c) Hecho en el libro del alumnado.

d)



44 **Dando un corte vertical al cilindro de la figura, se obtiene un rectángulo. Compruébalo con un modelo en plastilina.**



a) ¿Dónde hay que dar el corte para que ese rectángulo sea lo mayor posible? ¿Cuáles serán sus dimensiones?

b) ¿Dónde hay que dar el corte para obtener un cuadrado? ¿Cuánto medirá el lado?

a) Habría que dar el corte justo por el diámetro de la circunferencia.

Sus dimensiones serán 36 cm × 10 cm.

b) Para obtener el cuadrado se corta por una cuerda de la circunferencia de longitud igual a la altura del cilindro y así se obtiene un cuadrado.

Sus dimensiones serán de 10 cm de lado.

Página 216

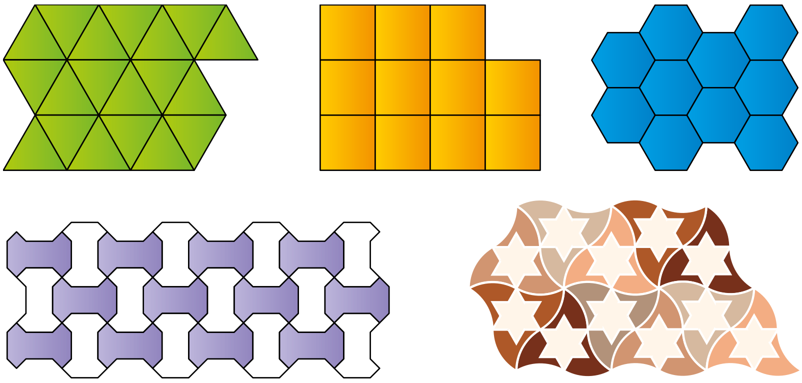
LEE E INFÓRMATE

La estética de los mosaicos

Los mosaicos geométricos son configuraciones con las que se tapiza una superficie plana. Para ello, se utilizan unas pocas piezas (teselas) que se repiten una y otra vez.

Hay mosaicos con un solo tipo de tesela. Si esta es un polígono regular, el mosaico se llama regular.

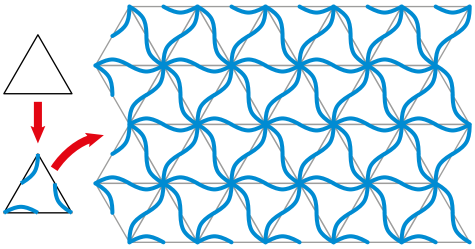
La forma de las teselas, su disposición y su colorido permiten formar mosaicos muy bellos.

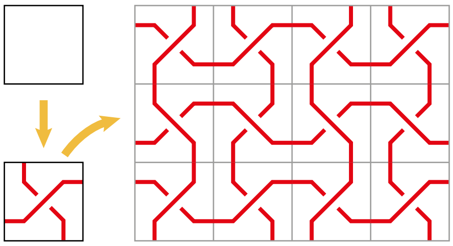


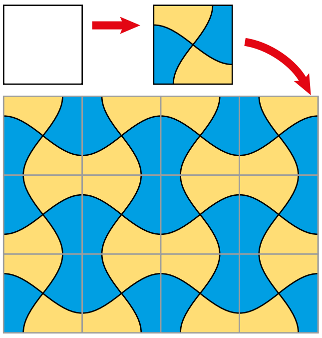
Lectura para introducir a los estudiantes en el interesantísimo mundo de los mosaicos. A partir de ella, se puede pretender que el alumno se familiarice con esos mosaicos geométricos, regulares o no (triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos regulares, rombos, rectángulos…) a partir de los cuales se pueden diseñar otros más bellos y creativos.

Creatividad y belleza

Los mosaicos regulares son muy sosos. Sin embargo, con un pequeño dibujo en cada tesela (siempre el mismo), el cambio y la mejora pueden ser extraordinarios.





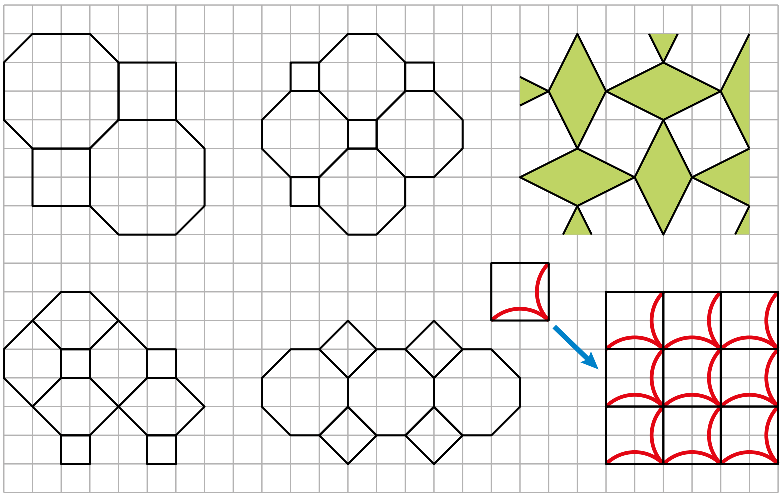


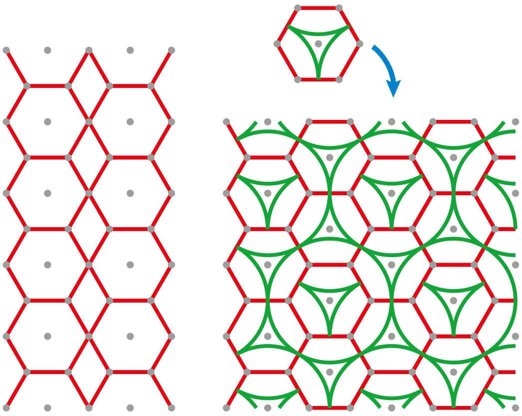
Si se dispone de tiempo, sería muy deseable que el alumnado repitiese estos mosaicos en hojas con tramas cuadradas o triangulares, según corresponda.

De esta manera, apreciará mejor cómo se construyen y la belleza que encierran.

INVESTIGA

- **Observa algunas sugerencias para construir mosaicos sobre papel pautado. Desarróllalas tú en hojas de papel cuadriculado y triangulado.**



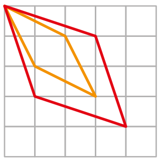


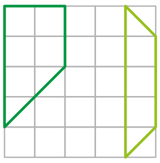
- **Tantea, prueba otras formas, colorea… ¡diviértete con los mosaicos!**

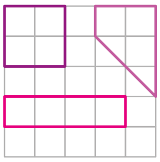
  Se abren nuevas vías para la creación de mosaicos. Son sugerencias con las que se pretende desencadenar la actividad del alumnado, que si lo toma con entusiasmo será capaz de generar autónomamente otros muchos.

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

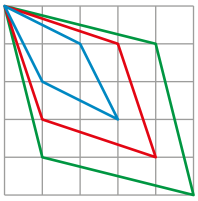
Realiza esta actividad sobre papel cuadriculado. Sin ocupar más que un cuadrado de 5 × 5 y apoyándote en los vértices de la cuadrícula.

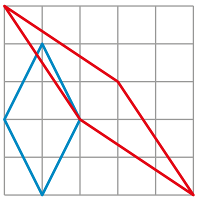
a)  **Representa tantos tipos de rombos que no sean cuadrados como puedas.**

b)  **Inventa cuadriláteros distintos, pero todos ellos con el mismo perímetro.**

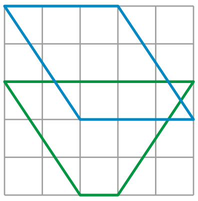
c)  **¿Puedes delimitar varios cuadriláteros con la misma área pero con distinto perímetro?**

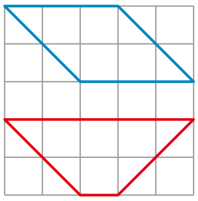
a)

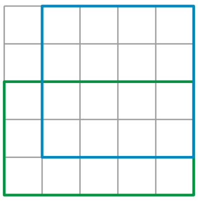


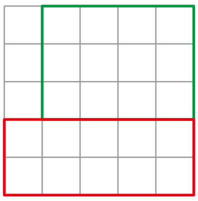


b)

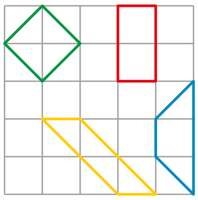


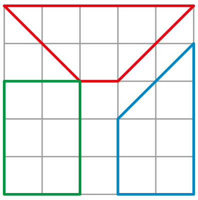


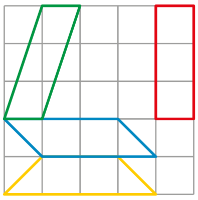


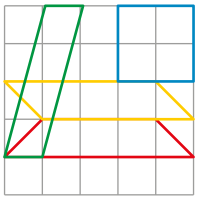


c)



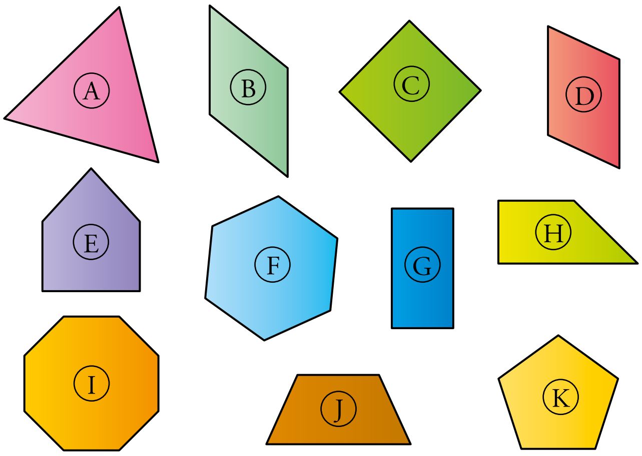






AUTOEVALUACIÓN

1 **Observa los siguientes polígonos:**



a) Clasifica los cuadriláteros y escribe las características de cada uno.

b) Identifica los polígonos regulares y nómbralos.

c) ¿Cuántos ejes de simetría tiene cada figura?

a) Rectángulos: G → paralelogramo, ángulos rectos.

Rombos: B → paralelogramo, lados iguales.

Cuadrados: C → paralelogramo, lados iguales y ángulos rectos.

Romboides: D → paralelogramo.

Trapecios: H, J → solo dos lados paralelos.

b) Triángulo equilátero: A; Cuadrado: C; Pentágono: K; Hexágono: F; Octógono: I.

c) A → 3

B → 2

C → 4

D → No tiene ejes de simetría.

E → 1

F → 6

G → 2

H → No tiene ejes de simetría.

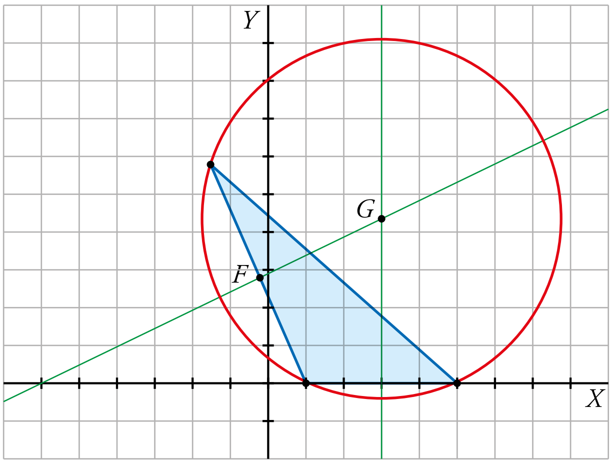
I → 8

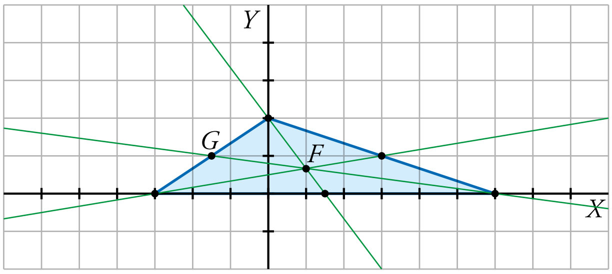
J → 1

K → 5

2 Dibuja en tu cuaderno dos triángulos escalenos. Encuentra el circuncentro y la circunferencia circunscrita de uno de ellos y el baricentro del otro.

En el primer dibujo, *G* es el circuncentro y en el segundo *F* es el baricentro.





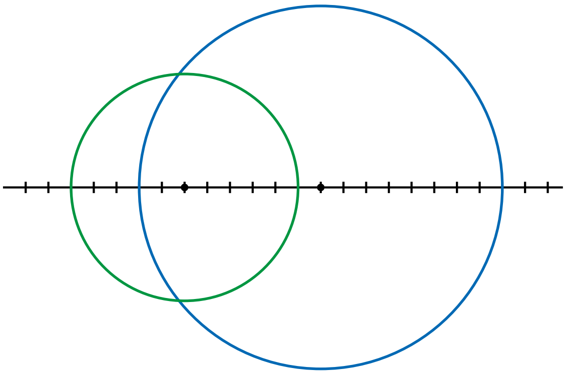
3 **Dadas dos circunferencias de radios $r_1 = 5$ m y $r_2 = 8$ m, indica sus posiciones relativas para cada una de las siguientes distancias de sus centros:**

a) $d = 6$ **m** **b)** $d = 13$ **m** **c)** $d = 15$ **m** **d)** $d = 3$ **m**

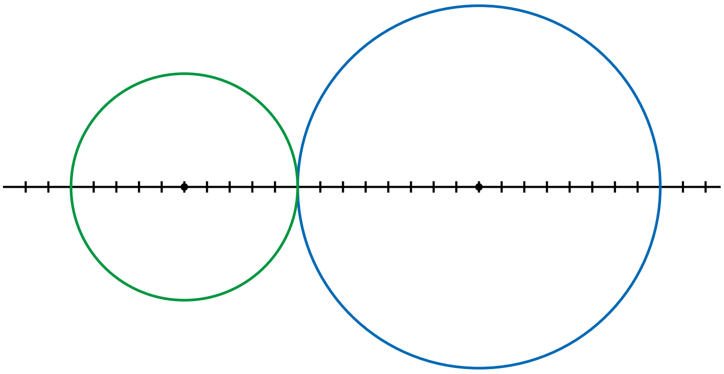
Dibuja esquemáticamente cada uno de los casos.

Nota: cada división de la recta representa 1 m.

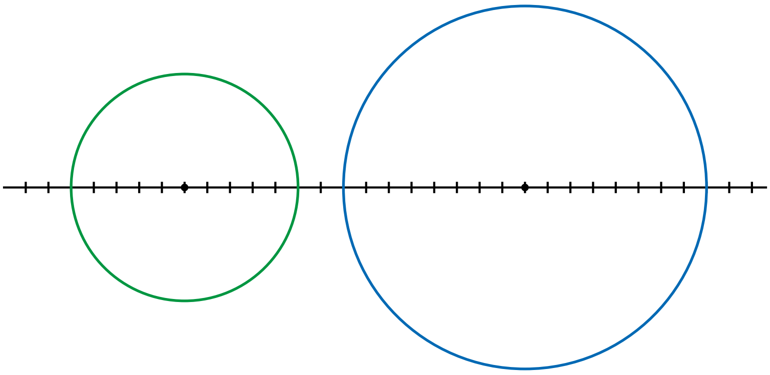
a) Secantes.



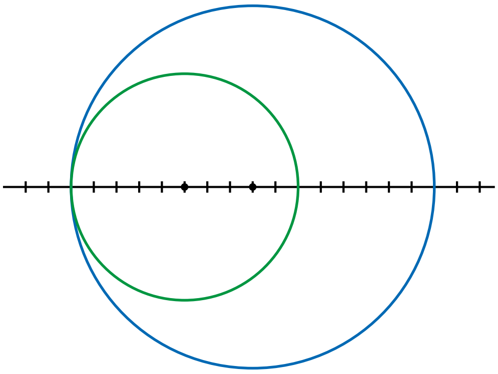
b) Tangentes exteriores.



c) Exteriores.

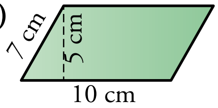


d) Tangentes interiores.

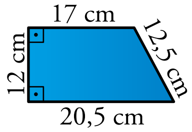


4 **Calcula el área y el perímetro de cada figura.**

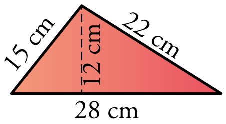
a)



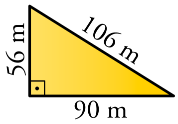
b)



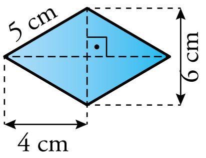
c)



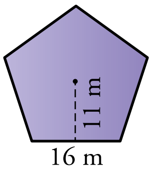
d)



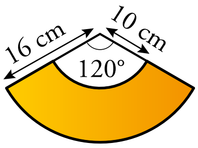
e)



f)



g)



a) $A = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$; $P = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 10 = 34 \text{ cm}$

b) $A = \dfrac{20{,}5 + 17}{2} \cdot 12 = 225 \text{ cm}^2$; $P = 12 + 17 + 12{,}5 + 20{,}5 = 62 \text{ cm}$

c) $A = \dfrac{28 \cdot 12}{2} = 168 \text{ cm}^2$; $P = 15 + 22 + 28 = 65 \text{ cm}$

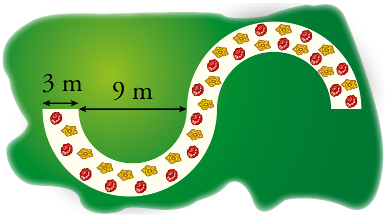
d) $A = \dfrac{90 \cdot 56}{2} = 2\,520 \text{ m}^2$; $P = 56 + 106 + 90 = 252 \text{ m}$

e) $A = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$; $P = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}$

f) $A = \dfrac{5 \cdot 16 \cdot 11}{2} = 440 \text{ m}^2$; $P = 16 \cdot 5 = 80 \text{ m}$

g) $A = (\pi \cdot 16^2 - \pi \cdot 10^2) \cdot \dfrac{120}{360} \approx 163{,}36 \text{ cm}^2$; $P = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 16}{3} + \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 10}{3} + 2 + 6 \approx 66{,}45 \text{ cm}$

5 **En un parque, que está cubierto de césped, se ha delimitado la zona que ves en la ilustración para poner una rosaleda. Como preparación, se va a cubrir con mantillo, a razón de medio saco por metro cuadrado. ¿Cuántos sacos de mantillo se van a necesitar?**



$A = \pi \cdot 7{,}5^2 - \pi \cdot 4{,}5^2 \approx 113 \text{ m}^2$

$113 : 2 = 56{,}5$

Se van a necesitar 56 sacos y medio de mantillo.

6 **Sobre la arena de una plaza circular, que tiene un radio de 30 metros, se va a instalar, para un festival de danza, una plataforma cuadrada de 10 m de lado. El resto del círculo albergará sillas para los espectadores. ¿Qué superficie queda para colocar las sillas?**

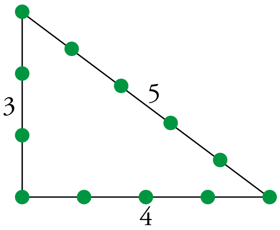
$A = \pi \cdot r^2 - l^2 = \pi \cdot 30^2 - 10^2 = 2\,726$

Quedan 2 726 m^2 para colocar las sillas.

11 TEOREMA DE PITÁGORAS

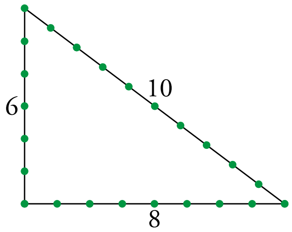
Página 218

1 **¿Crees que otro triángulo, de lados doble que los de la derecha, 6 cm, 8 cm, 10 cm, será también rectángulo? Dibújalo y compruébalo.**



Se puede comprobar que es rectángulo utilizando una escuadra, o comprobando que se cumple la igualdad:

$6^2 + 8^2 = 10^2$



2 **Atendiendo al teorema de Pitágoras, si B ocupa 9 cm^2 y C ocupa 16 cm^2, ¿cuánto ocupa A?**

$9 + 16 = 25$

A ocupa 25 cm^2.

Página 219

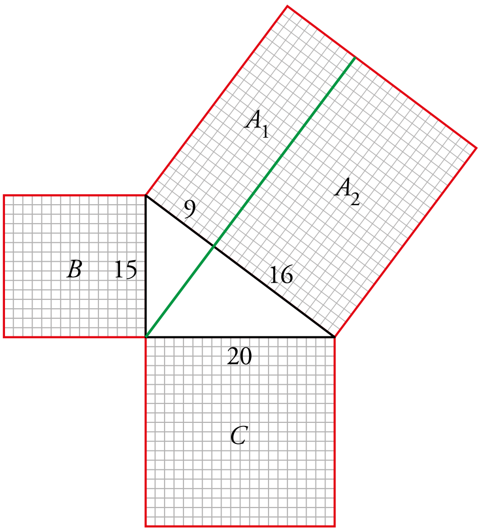
3 **Observa la figura y responde. Tomando como unidad el cuadro de la cuadrícula:**

a) ¿Cuántas unidades cuadradas contiene el cuadrado pequeño, B? ¿Y el rectángulo A_1? ¿Qué observas?

b) Comprueba que el número de unidades del cuadrado C coincide con el de A_2.

c) Enuncia la propiedad.

d) ¿Qué teorema se confirma? Enúncialo.



a) Área de $B = 15 \cdot 15 = 225$ unidades cuadradas

Área de $A_1 = 9 \cdot 25 = 225$ unidades cuadradas

Que A_1 y B contienen las mismas unidades cuadradas.

b) Área de $C = 20 \cdot 20 = 400$ unidades cuadradas

Área de $A_2 = 16 \cdot 25 = 400$ unidades cuadradas

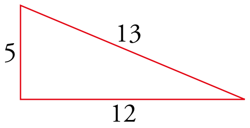
c) El área de los cuadrados B y C suman lo mismo que el área del cuadrado grande:

Área de B + Área de C = Área de A_1 + Área de A_2 = Área de A

d) Se confirma el teorema de Pitágoras:

El área del cuadrado grande equivale a la suma de las áreas de los dos pequeños.

4 **Dibuja un triángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm. Comprueba, con la escuadra, que es rectángulo. Expresa en una igualdad la relación que existe entre las medidas de los lados.**



$12^2 + 5^2 = 13^2$

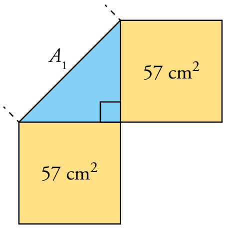
1 ▶ TEOREMA DE PITÁGORAS

Página 221

Para fijar ideas

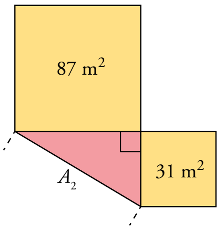
1 Dibuja en tu cuaderno estas figuras. Complétalas construyendo el cuadrado que falta en cada una y di cuál es su área.

a)



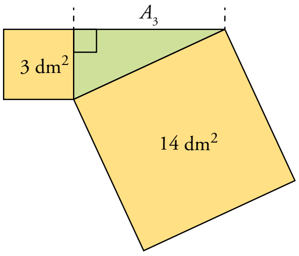
$\mathbf{A_1 = 57 + 57 = \ldots\ cm^2}$

b)



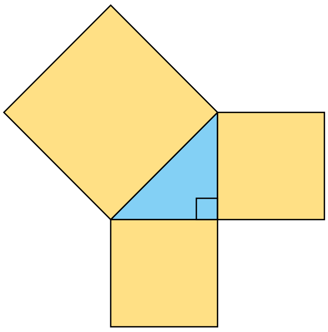
$\mathbf{A_2 = 87 + \ldots = \ldots\ m^2}$

c)



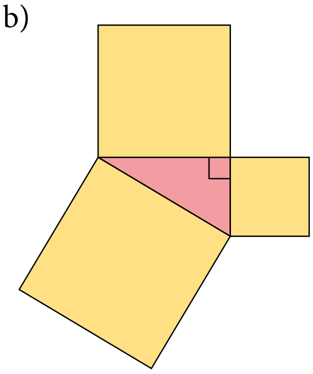
$\mathbf{A_3 = 14 - \ldots = \ldots\ dm^2}$

a)



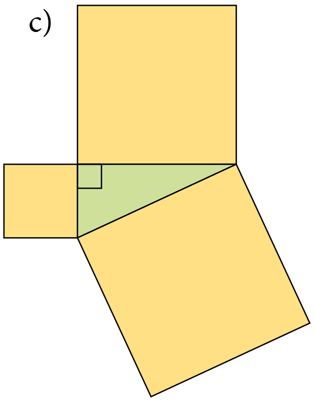
$A_1 = 57 + 57 = 114\ \text{cm}^2$

b)



$A_2 = 87 + 31 = 118\ \text{m}^2$

c)



$A_3 = 14 - 3 = 11\ \text{dm}^2$

2 Copia y completa para averiguar si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

a) 70 cm, 240 cm, 245 cm

$$\left.\begin{array}{l} 70^2 + 240^2 = 4\,900 + 57\,600 = 62\,500 \\ 245^2 = 60\,025 \end{array}\right\} \rightarrow 245^2 < 70^2 + 240^2 \rightarrow \text{El triángulo es acutángulo.}$$

b) 15 dm, 36 dm, 39 dm

$$\left.\begin{array}{l} 15^2 + 36^2 = 225 + 1\,296 = 1\,521 \\ 39^2 = 1\,521 \end{array}\right\} \rightarrow 39^2 = 15^2 + 36^2 \rightarrow \text{El triángulo es rectángulo.}$$

c) 18 m, 80 m, 83 m

$$\left.\begin{array}{l} 18^2 + 80^2 = 324 + 6\,400 = 6\,724 \\ 83^2 = 6\,889 \end{array}\right\} \rightarrow 83^2 > 18^2 + 80^2 \rightarrow \text{El triángulo es obtusángulo.}$$

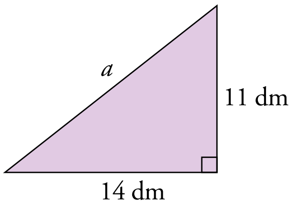
2 ▶ CÁLCULO DE UN LADO CONOCIENDO LOS OTROS DOS

Página 222

Para fijar ideas

1 Copia y completa para hallar el lado desconocido en cada uno de estos triángulos.

a)

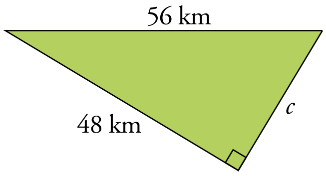


El lado desconocido es la hipotenusa, *a*.

$$a^2 = 11^2 + 14^2 \rightarrow a = \sqrt{11^2 + 14^2} = \sqrt{121 + 196} = \sqrt{317} = 17{,}8$$

La hipotenusa mide 18 dm, aproximadamente.

b)



El lado desconocido es el cateto, *c*.

$$56^2 = 48^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 56^2 - 48^2 \rightarrow c = \sqrt{3136 - 2\,304} = 28{,}84$$

El otro cateto mide 29 km, aproximadamente.

Para practicar

1 Halla la longitud del lado desconocido en estos triángulos rectángulos, donde *a* es la hipotenusa, aproximando cuando haga falta hasta dos cifras decimales.

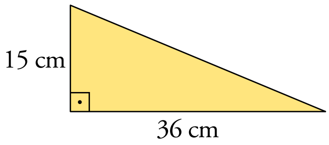
a) $c = 70$ mm; $a = 74$ mm

b) $b = 15$ cm; $a = 25$ cm

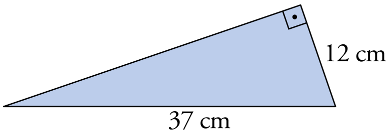
c) $b = 14$ m; $c = 48$ m

d) $b = 13$ pulgadas; $c = 84$ pulgadas

e)



f)



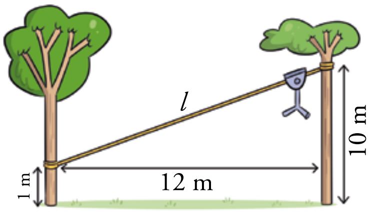
a) $b = 24$ mm b) $c = 20$ cm c) $a = 50$ m d) $a = 85$ pulgadas e) $a = 39$ cm f) $c = 35$ cm

Página 223

Para fijar ideas

Copia, completa y comprueba, en cada caso, que llegas a la solución que se ofrece.

2 Se va a tender una tirolina entre dos árboles separados 12 m. El cable estará atado a 10 m de altura en un árbol y a 1 m de altura en el otro. ¿Cuál será la longitud del cable si además de colocarlo en tensión se necesita un 10 % más para atarlo a los árboles?



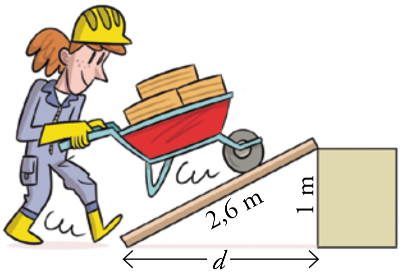
Conociendo los catetos, hallamos la hipotenusa.

$$l^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \rightarrow l = \sqrt{225} = 15 \text{ m}$$

La longitud del cable tenso es de 15 m.

Añadiendo un 10 % → $15 \cdot 1{,}10 = 16{,}5$ m

3 **Queremos salvar un escalón de 1 m de altura para pasar con la carretilla. Disponemos de un tablón de 2,6 m. ¿A qué distancia del escalón empieza la rampa?**

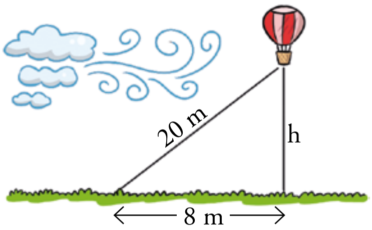


Conociendo la hipotenusa y el cateto vertical, calculamos el cateto horizontal.

$$d^2 = 2{,}6^2 - 1^2 = 6{,}76 - 1 = 5{,}76 \rightarrow d = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4 \text{ m}$$

El pie del tablón estará situado a 2,4 m del escalón, o algo menos para que pueda apoyarse arriba.

4 **Un globo está amarrado al suelo con una cuerda de 20 m. El viento lo empuja, manteniendo tensa la cuerda, de forma que la vertical del globo se aleja 8 m del punto de amarre. ¿A qué altura se encuentra el globo?**

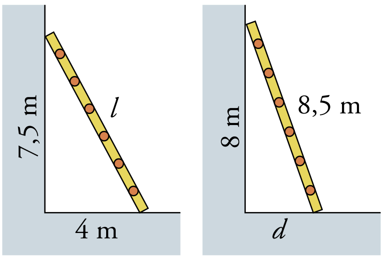


Calculamos la longitud del cateto vertical.

$$\mathrm{h}^2 = 20^2 - 8^2 = 400 - 64 = 336 \rightarrow \mathrm{h} = \sqrt{336} = 18{,}3 \text{ m}$$

El globo se encuentra a 18 m de altura.

5 **Una escalera cuyo pie está a 4 m de la pared se apoya en esta, alcanzando una altura de 7,5 m. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el pie para que llegue a una altura de 8 m?**



Calculamos primero la longitud de la escalera.

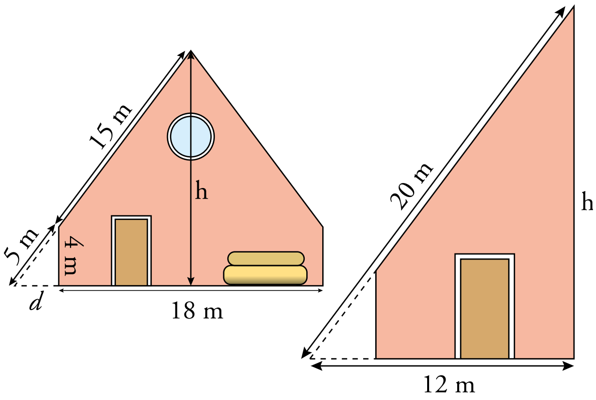
$$l^2 = 4^2 + 7{,}5^2 = 72{,}25 \rightarrow l = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5 \text{ m}$$

Ahora calculamos la distancia pedida, *d*.

$$d^2 = 8{,}5^2 - 8^2 = 72{,}25 - 64 = 8{,}25 \rightarrow d = \sqrt{8{,}25} = 2{,}9 \text{ m}$$

El pie de la escalera debe situarse a 2,9 m de la pared.

6 **Álvaro ha tomado estas medidas para hallar la altura, h, de la pared de su buhardilla. Calcular *d* y, luego, h.**



Calculamos primero la distancia *d*:

$$d^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \rightarrow d = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$$

Ahora calculamos la altura, h, sabiendo que es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 20 m y el otro 12 m:

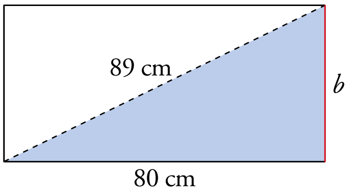
$$\mathrm{h}^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \rightarrow \mathrm{h} = \sqrt{256} = 16 \text{ m}$$

La altura de la buhardilla es de 16 m.

3 ▶ APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Página 224

Para fijar ideas



1 **La diagonal de un rectángulo mide 89 cm, y uno de los lados, 80 cm. Calcula su área.**

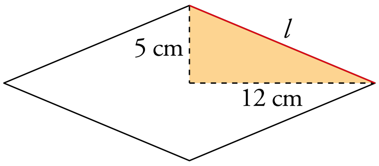
El área de un rectángulo de lados a y b es: $A = a \cdot b$

Empezamos por calcular el otro lado:

$$b = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{1521} = 39$$

El lado corto mide 39 cm.

El área es: $A = 80 \cdot 39 = 3\,120 \text{ cm}^2$



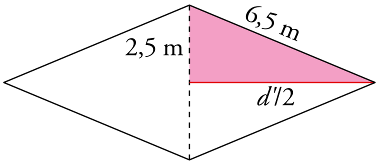
2 **Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm. Halla su perímetro.**

Comenzamos por calcular la longitud de un lado:

$$l = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

Cada lado mide 13 cm.

El perímetro es: $P = 4 \cdot 13 = 52$ cm



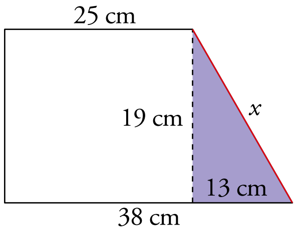
3 **El lado de un rombo mide 6,5 m y una de sus diagonales, 5 m. Halla su área.**

El área de un rombo cuyas diagonales son d y d' es: $A = \dfrac{d \cdot d'}{2}$

Conocemos una diagonal. El teorema de Pitágoras nos permite calcular la otra:

$$\frac{d'}{2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ m}$$

La segunda diagonal mide, pues, $6 \cdot 2 = 12$ m. Por tanto, $A = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ m}^2$.



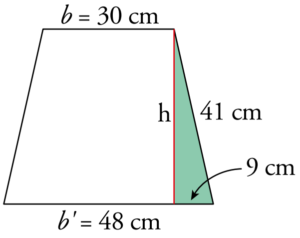
4 **Las bases de un trapecio rectángulo miden 25 cm y 38 cm, y la altura, 19 cm. Halla su perímetro.**

Empezamos calculando la longitud del lado oblicuo:

$$x = \sqrt{13^2 + 19^2} = \sqrt{530} \approx 23,02$$

El lado oblicuo mide, aproximadamente: $x = 23$ cm

El perímetro es: $P = 38 + 19 + 25 + 23 = 105$ cm



5 **Halla el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 30 cm y 48 cm, y el lado oblicuo, 41 cm.**

Recordemos que el área de un trapecio es: $A = \dfrac{(b + b') \cdot \text{h}}{2}$

Hemos de empezar calculando su altura, h.

En el triángulo verde, el lado pequeño mide (48 – 30) : 2 = 9 cm.

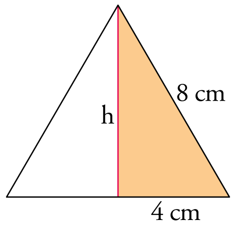
$$a = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$$

La altura del trapecio mide 40 cm.

$$A = \frac{(30 + 48) \cdot 40}{2} = 1\,560 \text{ cm}^2$$

Página 225

6 **Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.**



Empezamos calculando la altura:

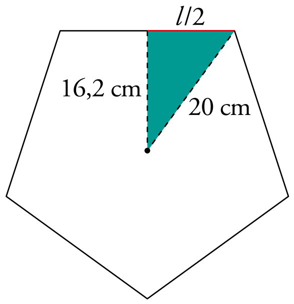
$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$$

La altura mide 6,9 cm, aproximadamente.

El área es:

$$A = \frac{8 \cdot 6{,}9}{2} = 27{,}6 \text{ cm}^2$$

7 **Calcula el área y el perímetro de un pentágono regular cuya apotema mide 16,2 cm, y el radio, 20 cm.**



Primero calculamos el lado:

$$\frac{l}{2} = \sqrt{20^2 - 16{,}2^2} = \sqrt{137{,}56} \approx 11{,}7$$

El lado del pentágono mide:

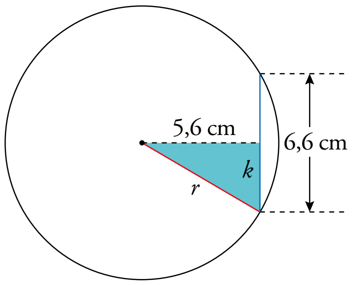
$$l = 11{,}7 \cdot 2 = 23{,}4 \text{ cm}$$

Por tanto, su perímetro es: $P = 23{,}4 \cdot 5 = 117$ cm

Finalmente, calculamos el área.

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{117 \cdot 16{,}2}{2} = 947{,}7 \text{ cm}^2$$

8 **Halla la longitud de una circunferencia en la que se ha trazado una cuerda de 6,6 cm a una distancia de 5,6 cm del centro. Calcula el área del círculo correspondiente.**



Comenzamos calculando el radio.

En el triángulo rectángulo coloreado, el lado pequeño mide:

$$k = 6{,}6 : 2 = 3{,}3 \text{ cm}$$

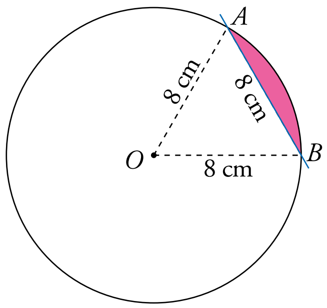
Por tanto: $r = \sqrt{3{,}3^2 + 5{,}6^2} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$

El radio mide 6,5 cm.

$P = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}5 \approx 40{,}8$ cm

$A = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 6{,}5^2 \approx 132{,}7 \text{ cm}^2$

9 **Una circunferencia de 8 cm de radio es cortada por una recta en dos puntos A y B que distan 8 cm entre sí. Calcula el área del segmento circular determinado por la cuerda $\overset{\frown}{AB}$.**



El segmento circular, en rosa, es la diferencia entre el sector circular de arco $\overset{\frown}{AB}$ y el triángulo OAB.

El triángulo OAB, equilátero, es el mismo cuya área hemos obtenido en el ejercicio 6 de esta página ($A_{\text{TRIÁNGULO}} = 27{,}6 \text{ cm}^2$).

Como el triángulo es equilátero, $\widehat{AOB} = 60°$.

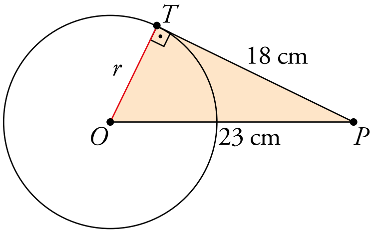
Por tanto, el área del sector es la sexta parte del área de todo el círculo:

$$A_{\text{SECTOR}} = (\pi \cdot 8^2) : 6 = 33{,}5 \text{ cm}^2$$

Por tanto: $A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 33{,}5 - 27{,}6 = 5{,}9 \text{ cm}^2$

Página 226

10 En una circunferencia, la distancia de un punto P al centro O es $\overline{OP}$ = 23 cm. Trazamos una tangente desde P a la circunferencia. El segmento tangente PT mide 18 cm. Halla el área del círculo.



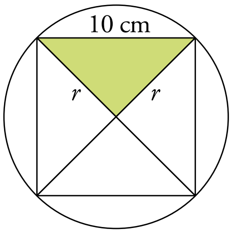
La recta tangente es perpendicular al radio.

Por tanto, el triángulo PTO es rectángulo en T:

$$r^2 = \overline{OP}^2 - \overline{PT}^2 = 23^2 - 18^2 = 205$$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 205 \approx 643{,}7 \text{ cm}^2$

11 Calcula el radio de la circunferencia circunscrita a un cuadrado de 10 cm de lado.



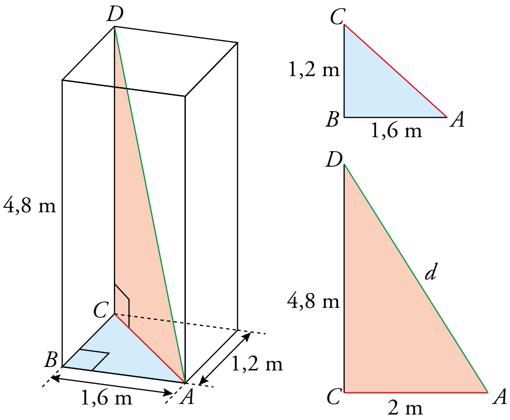
Las diagonales del cuadrado son perpendiculares.

Por tanto, el triángulo coloreado es rectángulo y tiene los catetos iguales.

$$r^2 + r^2 = 10^2 \;\rightarrow\; 2r^2 = 100 \;\rightarrow\; r^2 = 50$$

$$r = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ cm}$$

12 Halla la diagonal de un ortoedro de dimensiones 1,2 m; 1,6 m y 4,8 m.



Atendiendo al triángulo azul: $\overline{AC} = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = 2$ m

Atendiendo al triángulo rojo: $d = \sqrt{2^2 + 4,8^2} = 5{,}2$ m

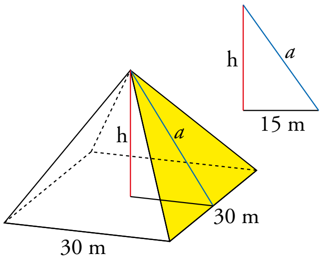
La diagonal del ortoedro mide 5,2 m.

Observa que se puede hallar directamente:

$$d = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2 + 4,8^2} = \sqrt{27,04} = 5{,}2 \text{ m}$$

En general, en un ortoedro de dimensiones $a \times b \times c$ la diagonal es: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

13 Calcula la altura, h, de una pirámide cuadrangular regular cuya base es un cuadrado de 30 m de lado y cuya cara lateral tiene un área de 255 m².



Primero hallamos la altura, a, de la cara lateral.

$$255 = \frac{30 \cdot a}{2} \;\rightarrow\; 510 = 30a \;\rightarrow\; a = 17 \text{ m}$$

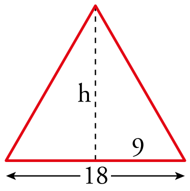
La altura de la cara lateral es la hipotenusa del triángulo que aparece a la derecha:

$$\text{h} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ m}$$

La pirámide tiene 8 m de altura.

Para practicar

1 Halla el área de un triángulo equilátero de 54 cm de perímetro.

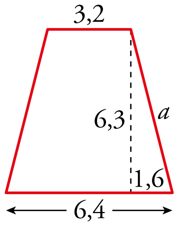


$$\text{Lado} = \frac{54}{3} = 18 \text{ cm}$$

$$\text{h} = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} \approx 15{,}59 \text{ cm}$$

$$A = \frac{18 \cdot 15{,}59}{2} = 140{,}31 \text{ cm}^2$$

2 **Halla el área y el perímetro de un trapecio isósceles cuyas bases miden 3,2 m y 6,4 m, y su altura, 6,3 m.**

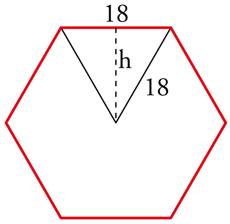


$$a = \sqrt{6{,}3^2 + 1{,}6^2} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5 \text{ m}$$

$$P = 3{,}2 + 2 \cdot 6{,}5 + 6{,}4 = 22{,}6 \text{ m}$$

$$A = \frac{6{,}4 + 3{,}2}{2} \cdot 6{,}3 = 30{,}24 \text{ m}^2$$

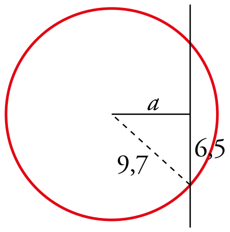
3 **Calcula el área de un hexágono regular de 18 cm de lado. (Recuerda que en un hexágono regular, el lado mide igual que el radio).**



$$h = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} \approx 15{,}6 \text{ cm}$$

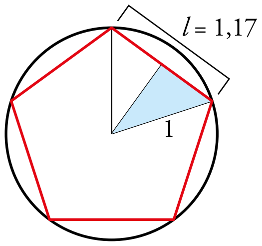
$$A = \frac{18 \cdot 6 \cdot 15{,}6}{2} = 842{,}4 \text{ cm}^2$$

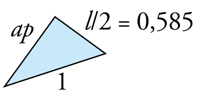
4 **En una circunferencia de radio 9,7 m, se traza una cuerda de 13 m. ¿A qué distancia de la cuerda se encuentra el centro de la circunferencia?**



$$a = \sqrt{9{,}7^2 - 6{,}5^2} = \sqrt{51{,}84} = 7{,}2 \text{ m}$$

5 **Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 1 m. Su perímetro es 5,85 m. Calcula su área.**





$$l = 5{,}85 : 5 = 1{,}17 \text{ m}$$

$$ap = \sqrt{1^2 - 0{,}585^2} = 0{,}81$$

$$A = \frac{5{,}85 \cdot 0{,}81}{2} = 2{,}37 \text{ m}^2$$

6 **Halla la longitud de la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 8 dm, 6 dm y 14 dm.**

La figura es como la del ejercicio 12 de «Para fijar ideas», pero cambiando las medidas: $\overline{AB} = 8$ dm, $\overline{BC} = 6$ dm y $\overline{CD} = 14$ dm.

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ dm}$$

$$d = \sqrt{10^2 + 14^2} = 17{,}2 \text{ dm}$$

La diagonal del ortoedro mide 17,2 dm.

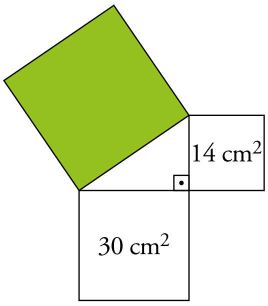
Página 227

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

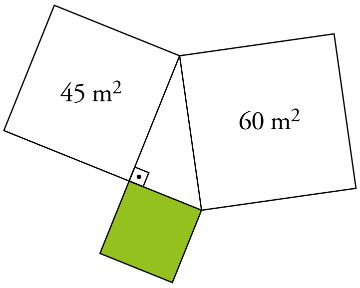
Teorema de Pitágoras

1 **Calcula el área del cuadrado verde en cada uno de los siguientes casos:**

a)



b)

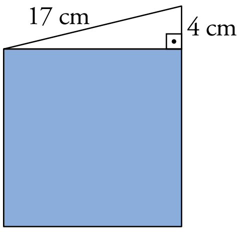


a) $A = 30 + 14 = 44 \text{ cm}^2$

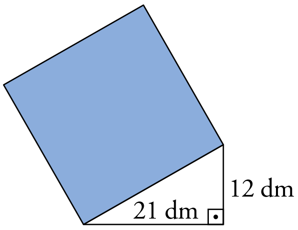
b) $A = 60 - 45 = 15 \text{ m}^2$

2 **Calcula el área de los siguientes cuadrados:**

a)



b)



a) $l = \sqrt{17^2 - 4^2} = \sqrt{273}$

$A = l^2 = 273 \text{ cm}^2$

b) $l = \sqrt{21^2 + 12^2} = \sqrt{585}$

$A = l^2 = 585 \text{ dm}^2$

3 **Di si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.**

a) 15 cm, 10 cm, 11 cm

b) 35 m, 12 m, 37 m

c) 23 dm, 30 dm, 21 dm

d) 15 km, 20 km, 25 km

e) 17 millas, 10 millas, 5 millas

f) 21 mm, 42 mm, 21 mm

g) 18 cm, 80 cm 82 cm

a) Obtusángulo.

b) Rectángulo.

c) Acutángulo.

d) Rectángulo.

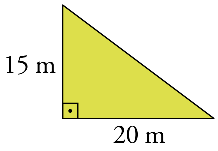
e) Obtusángulo.

f) Obtusángulo.

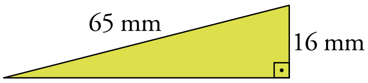
g) Rectángulo.

4 **Calcula el lado desconocido en cada triángulo rectángulo:**

a)



b)

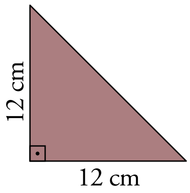


a) $l = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ m}$

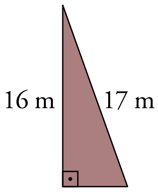
b) $l = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{3969} = 63 \text{ mm}$

5 **Calcula el lado desconocido en cada triángulo aproximando hasta las décimas:**

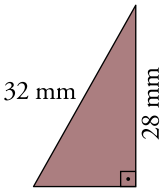
a)



b)



c)

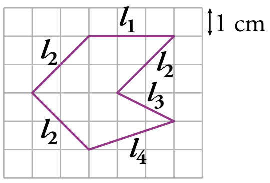


a) $l = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{2 \cdot 12^2} = 12\sqrt{2}$ cm ≈ 17 cm

b) $l = \sqrt{17^2 - 16^2} = \sqrt{33}$ m ≈ 5,7 m

c) $l = \sqrt{32^2 - 28^2} = \sqrt{240}$ mm ≈ 15,5 mm

6 **Halla el perímetro de la siguiente figura:**



$l_1 = 3$ cm

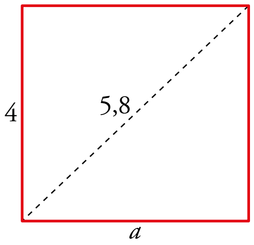
$l_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2{,}8$ cm

$l_3 = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2{,}2$ cm

$l_4 = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3{,}2$ cm

$P = l_1 + 3 \cdot l_2 + l_3 + l_4 = 16{,}8$ cm

7 **Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5,8 cm, y uno de los lados, 4 cm.**



$a = \sqrt{5{,}8^2 - 4^2} = \sqrt{17{,}64} = 4{,}2 \rightarrow P = 16{,}4$ cm

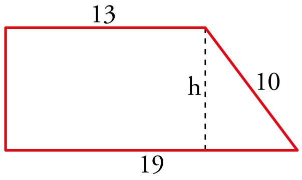
El perímetro es de 16,4 cm.

8 **Halla la diagonal de un cuadrado cuyo perímetro mide 28 dam.**

$$l = \frac{28}{4} = 7 \text{ dam}$$

La diagonal mide $\sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$ ≈ 9,9 dam

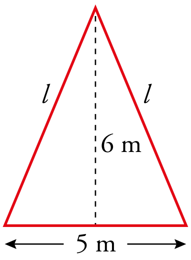
9 **Los lados paralelos de un trapecio rectángulo miden 13 dm y 19 dm, y el lado oblicuo mide 10 dm. Calcula la altura.**



h = $\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ dm

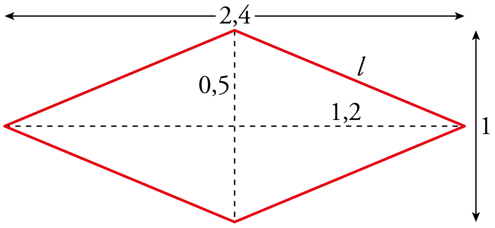
El trapecio tiene una altura de 8 dm.

10 **Calcula los lados iguales de un triángulo isósceles sabiendo que el lado desigual mide de 5 m y la altura correspondiente, 6 m.**



$$l = \sqrt{6^2 + 2{,}5^2} = 6{,}5 \text{ m}$$

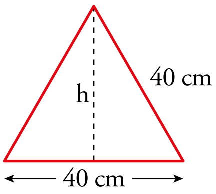
11 **Calcula la medida del lado de un rombo cuyas diagonales miden 1 dm y 2,4 dm.**



$$l = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3 \text{ dm}$$

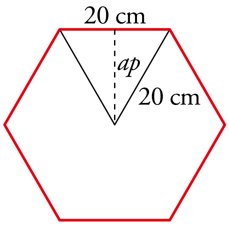
Cada lado mide 1,3 dm.

12 **Halla la altura de un triángulo equilátero de 40 cm de lado. Aproxima hasta los milímetros.**



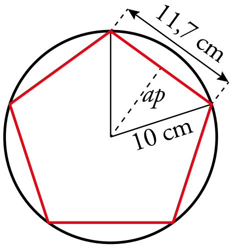
$$\text{h} = \sqrt{40^2 - 20^2} = 34{,}6 \text{ cm}$$

13 **Halla la apotema de un hexágono regular de 20 cm de lado. (Recuerda que en el hexágono regular el lado mide lo mismo que el radio).**



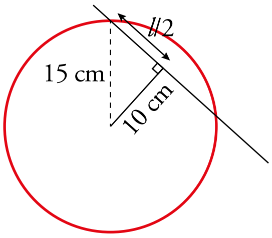
$$ap = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}3 \text{ cm}$$

14 **Un pentágono regular de 11,7 cm de lado está inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. Calcula su apotema.**



$$ap = \sqrt{10^2 - 5{,}85^2} = 8{,}1 \text{ cm}$$

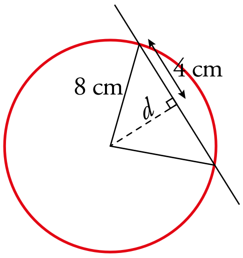
15 **Una recta pasa a 10 cm del centro de una circunferencia de 15 cm de radio. Halla, aproximando hasta las décimas, la longitud de la cuerda que se genera.**



$$\frac{l}{2}=\sqrt{15^2-10^2}=11{,}2\text{ cm}$$

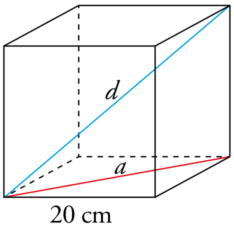
$$l=2\cdot 11{,}2=22{,}4\text{ cm}$$

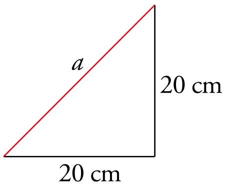
16 **¿A qué distancia del centro de una circunferencia de 8 cm de radio debe pasar una recta para que la cuerda mida 8 cm?**

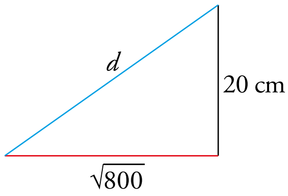


$$d=\sqrt{8^2-4^2}=7\text{ cm}$$

17 **Calcula la diagonal de un cubo de 20 cm de arista. Aproxima hasta los milímetros.**

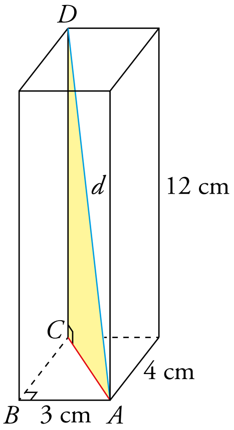


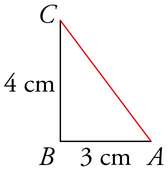




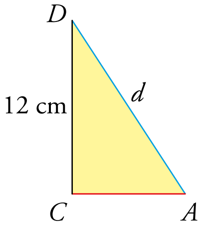
$$a=\sqrt{20^2+20^2}=\sqrt{800}\qquad d=\sqrt{(\sqrt{800})^2+20^2}=\sqrt{800+400}=34{,}6\text{ cm}$$

18 **Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 3 cm, 4 cm y 12 cm.**



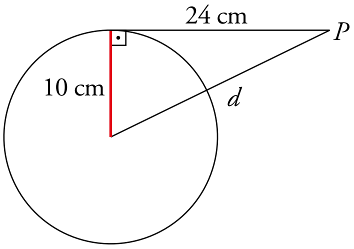


$$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{ cm}$$



$$d=\sqrt{5^2+12^2}=13\text{ cm}$$

19 **Desde un punto *P* exterior a una circunferencia de radio 10 m se traza un segmento tangente de 24 m. ¿A qué distancia está *P* del centro de la circunferencia?**

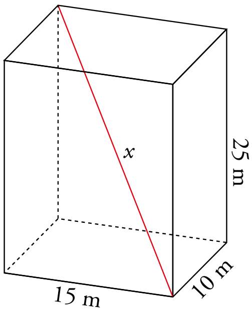


$$d=\sqrt{24^2+10^2}=26\text{ cm}$$

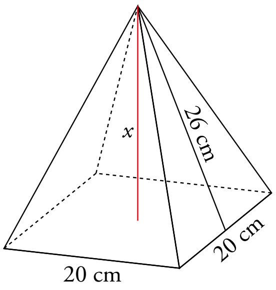
Página 228

20 **Calcula, con una cifra decimal, la longitud de x en cada uno de los siguientes cuerpos geométricos:**

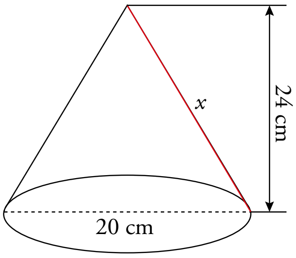
a)



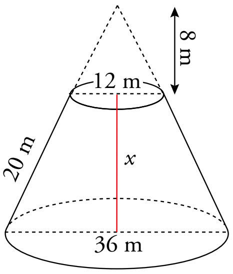
b)



c)



d)



a) Diagonal de la base: $d = \sqrt{15^2 + 10^2} = 18$ m

$x = \sqrt{18^2 + 25^2} = 30{,}8$ m

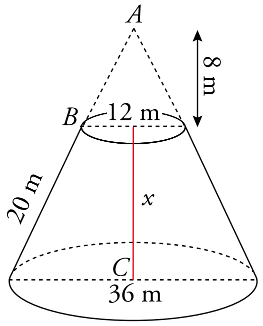
b) Diagonal de la base: $d = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28{,}3$ cm $\rightarrow$ Semidiagonal $= 14{,}2$ cm

Arista de una cara triangular: $a = \sqrt{26^2 + 10^2} = 27{,}9$ cm

$x = \sqrt{27{,}9^2 - 14{,}2^2} = 24$ cm

c) $x = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ cm

d)



$\overline{AB} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ m

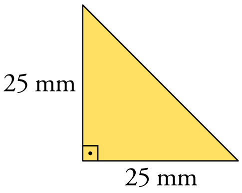
$\overline{AC} = 8 + x = \sqrt{(10 + 20)^2 - 18^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$ m

Por tanto: $x = 24 - 8 = 16$ m

Áreas y perímetros utilizando el teorema de Pitágoras

21 **Halla el área y el perímetro de estas figuras. Para ello, tendrás que calcular previamente la longitud desconocida de alguno de sus elementos. Si no es exacta, hállala con una cifra decimal.**

a)

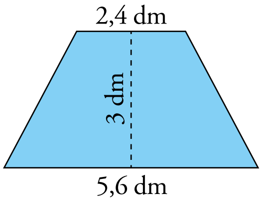


$$A = \frac{25 \cdot 25}{2} = \frac{625}{2} = 312{,}5 \text{ mm}^2$$

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1\,250} = 35{,}4 \text{ mm}$$

$$P = 25 + 25 + 35{,}4 = 85{,}4 \text{ mm}$$

b)

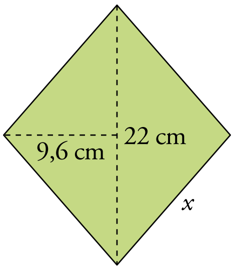


$$A = \frac{(2{,}4 + 5{,}6) \cdot 3}{2} = 12 \text{ dm}^2$$

$$\text{Lado oblicuo} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{5{,}6 - 2{,}4}{2}\right)^2} = 3{,}4 \text{ dm}$$

$$P = 2{,}4 + 5{,}6 + 2 \cdot 3{,}4 = 14{,}8 \text{ dm}$$

c)

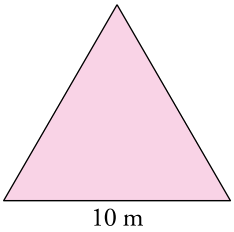


$$A = \frac{(2 \cdot 9{,}6) \cdot 22}{2} = 211{,}2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lado} = x = \sqrt{11^2 + 9{,}6^2} = 14{,}6 \text{ cm}$$

$$P = 4 \cdot 14{,}6 = 58{,}4 \text{ cm}$$

d)

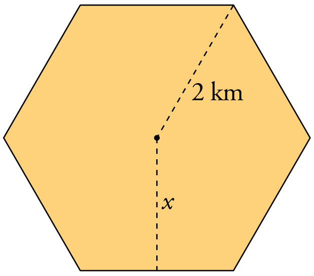


$$\text{Altura} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}7 \text{ m}$$

$$A = \frac{10 \cdot 8{,}7}{2} = 43{,}5 \text{ m}^2$$

$$P = 3 \cdot 10 = 30 \text{ m}$$

e)



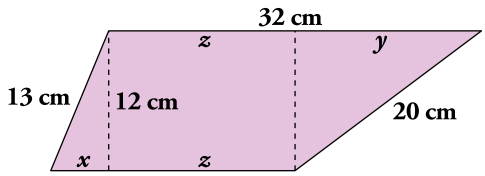
$$x = ap = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1{,}7 \text{ km}$$

$$A = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}7}{2} = 10{,}2 \text{ km}^2$$

$$P = 2 \cdot 6 = 12 \text{ km}$$

22 **Halla el área y el perímetro de estas figuras. Para ello, tendrás que calcular previamente la longitud desconocida de alguno de sus elementos. Si no es exacta, hállala con una cifra decimal.**

a)



$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ cm

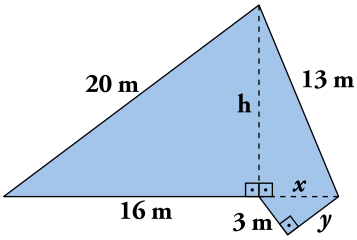
$y = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm

$z = 32 - 16 = 16$ cm

$P = 32 + 20 + 16 + 5 + 13 = 86$ cm

$A = \dfrac{32 + 21}{2} \cdot 12 = 318\ \text{cm}^2$

b)



$h = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ m

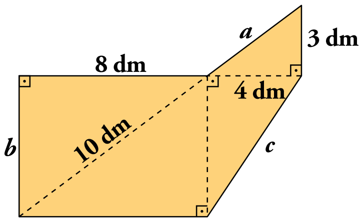
$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ m

$y = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ m

$P = 20 + 13 + 4 + 3 + 16 = 56$ m

$A = \dfrac{(16 + 5) \cdot 12}{2} + \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 132\ \text{m}^2$

c)



$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ dm

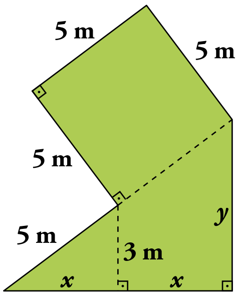
$b = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ dm

$c = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7{,}21$ dm

$P = 8 + 5 + 3 + 7{,}21 + 8 + 6 = 37{,}21$ dm

$A = 6 \cdot 8 + (4 \cdot 6) : 2 + (3 \cdot 4) : 2 = 48 + 12 + 6 = 66\ \text{dm}^2$

d)



$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ m

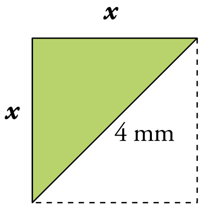
$y = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ m

$P = 4 \cdot 5 + 8 + 6 = 34$ m

$A = 5^2 + \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 49\ \text{m}^2$

23 **Calcular el área y el perímetro del triángulo que coincide con la mitad de un cuadrado cuya diagonal mide 4 mm.**

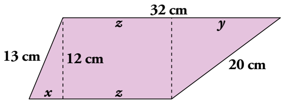
Ejercicio resuelto.



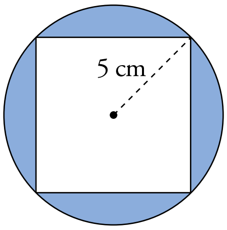
Página 229

24 **Calcula el área y el perímetro de cada una de estas figuras. Observa que en las dos primeras el perímetro es la periferia interior y exterior.**

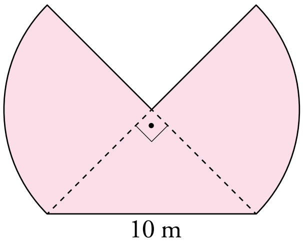
a)



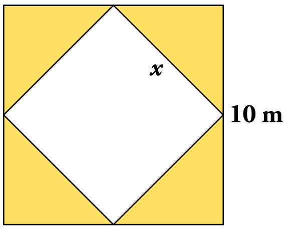
b)



c)



a)

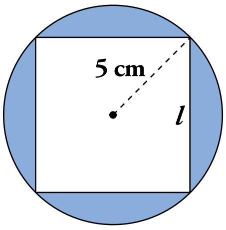


$x^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \text{ m} \rightarrow x = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ m}$

$P = 10 \cdot 4 + 7{,}07 \cdot 4 = 68{,}28 \text{ m}$

$A = 100 - x^2 = 100 - 50 = 50 \text{ m}^2$

b)

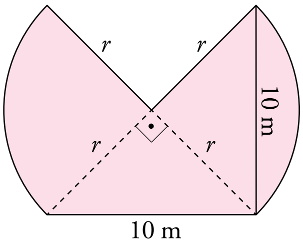


$l^2 + l^2 = 10^2 \rightarrow l^2 = 50 \text{ cm} \rightarrow l = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ cm}$

$P = 2\pi r + 4l = 10\pi + 4l = 59{,}7 \text{ cm}$

$A = \pi r^2 - l^2 = 25\pi - 50 = 28{,}5 \text{ cm}^2$

c)



$r^2 + r^2 = 10^2 \rightarrow r^2 = 50 \rightarrow r = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ m}$

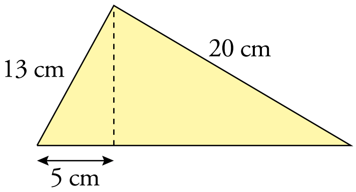
$$P = 10 + 2 \cdot \frac{2\pi r \cdot 90}{360} + 2r = 10 + 22{,}2 + 14{,}14 = 46{,}34 \text{ m}$$

$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\pi r^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi \cdot 50 \cdot 90}{360} = 39{,}25 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{r^2}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m}^2$$

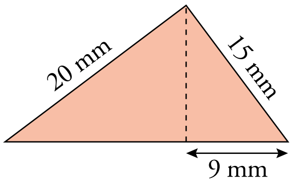
$$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 39{,}25 + 25 = 103{,}5 \text{ m}^2$$

25 **¿Es rectángulo este triángulo?**



Ejercicio resuelto.

26 **Calcula las medidas que sean necesarias para clasificar el siguiente triángulo según sus ángulos:**



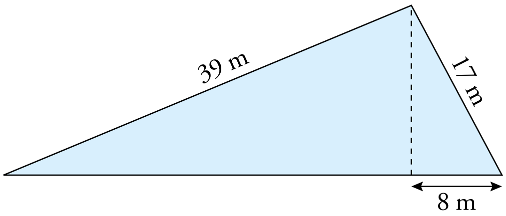
Llamando h a la altura del triángulo y x al trozo de base que falta, tenemos:

$h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ mm

$x = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ mm

$20^2 + 15^2 = 625 = (16 + 9)^2 \rightarrow$ Rectángulo

27 **Clasifica el siguiente triángulo en rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Para ello, calcula la medida de alguno de sus elementos:**



Llamando h a la altura del triángulo y x al trozo de base que falta, tenemos:

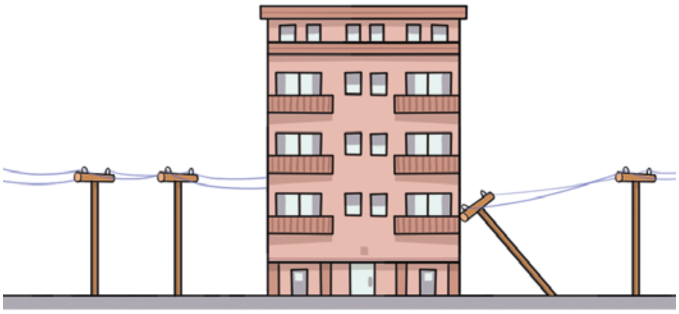
$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ m

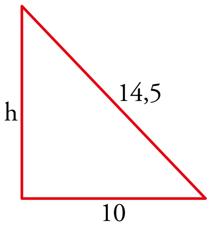
$x = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$ m

$39^2 + 17^2 = 1\,810 < 1\,936 = (36 + 8)^2 \rightarrow$ Obtusángulo

Resuelve problemas

28 **Un poste de 14,5 m de alto se quiebra por su base y cae sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que golpea?**

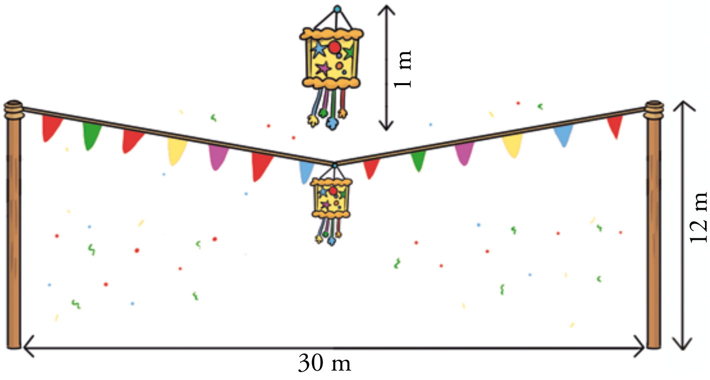


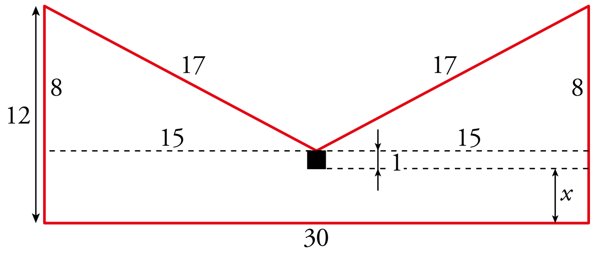


$$h = \sqrt{14,5^2 - 10^2} = \sqrt{110,25} = 10,5$$

Golpea el edificio a una altura de 10,5 m.

29 **En las fiestas de un pueblo, cuelgan una piñata de 1 m de altura en medio de una cuerda de 34 m que está atada a los extremos de dos postes de 12 m separados 30 m entre sí. ¿A qué distancia del suelo queda la piñata?**





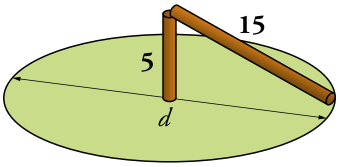
$$\sqrt{17^2 - 15^2} = 8$$

$x = 12 - 8 - 1 = 3$

La piñata está a 3 m del suelo.

Página 230

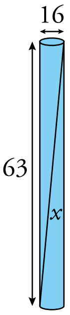
30 **El tronco de un árbol seco de 20 m está en el centro de un parque circular. Debemos cortarlo para poner columpios, pero no queremos que al partirse se salga del recinto del parque. Para ello lo hemos cortado a un cuarto de su altura y así cae justo en el borde del recinto. ¿Cuántos metros mide el diámetro del parque?**



$20 : 4 = 5 \rightarrow d = 2 \cdot \sqrt{15^2 - 5^2} \approx 28{,}3$

El diámetro del parque mide 28,3 m.

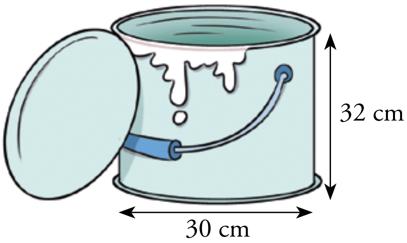
31 **Indica si una varilla de 65 cm de longitud cabe en un cilindro de 63 cm de altura y 8 cm de radio de la base.**

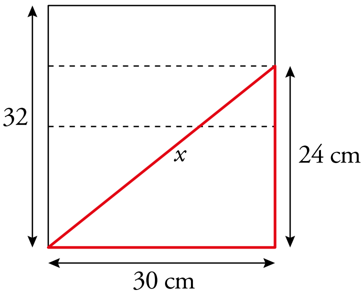


$x = \sqrt{16^2 + 63^2} = 65$

Cabe justo.

32 **Este bote de pintura está lleno en sus tres cuartas partes. En su interior se ha caído un pincel de 40 cm de largo. ¿Crees que el pincel se habrá sumergido completamente en la pintura?**



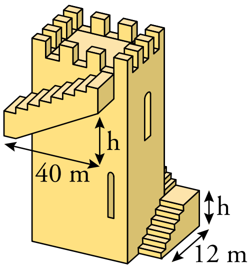


$\frac{3}{4}$ de $32 = 24$

$x = \sqrt{24^2 + 30^2} = 38{,}4$

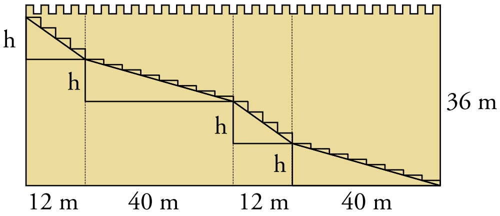
Por tanto, el pincel no se habrá sumergido completamente.

33 **En una torre con forma de prisma de 36 m de altura cuya base es un rectángulo de 40 m de largo y 12 m de ancho, hay una escalera por el exterior. Hay cuatro tramos de escalera, uno por cada cara lateral. En todos ellos se asciende la misma altura (h).**



Sabiendo que cada metro de escalera tiene 3 escalones, ¿cuántos escalones hay en cada tramo? ¿Cuántos escalones hay en total?

Imagina que es un recortable de cartón y que lo extiendes. (El tamaño de los escalones es ficticio).



Dividiendo los 36 m de altura de la torre en cuatro tramos, tenemos que cada tramo tiene 9 m de alto.

El tramo oblicuo que va por la parte estrecha de la torre mide: $\sqrt{12^2+9^2}$ = 15 m

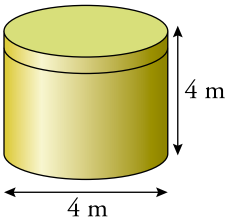
El que va por la parte ancha: $\sqrt{40^2+9^2}$ = 41 m

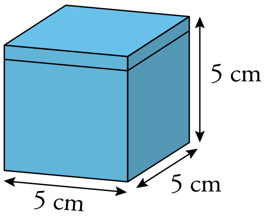
En cada tramo estrecho hay: 15 · 3 = 45 escalones

En cada tramo ancho hay: 41 · 3 = 123 escalones

En total hay 2 · 45 + 2 · 123 = 336 escalones.

34 **Calcula la longitud del mayor listón que cabe en cada una de estas cajas:**





En la caja cilíndrica:

$$\sqrt{4^2+4^2} = 5{,}6 \text{ (aproximando a las décimas por truncamiento)}$$

La longitud del mayor listón que cabe es 5,6 m.

En la caja cúbica, la diagonal de la base es:

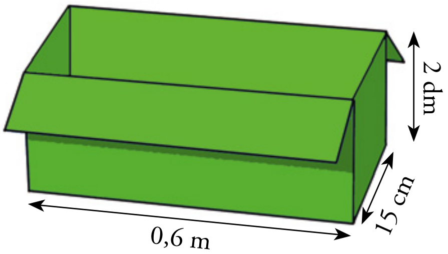
$$\sqrt{5^2+5^2} = 7 \text{ (aproximando a las décimas por truncamiento)}$$

Y la diagonal de la caja es:

$$\sqrt{7^2+5^2} = 8{,}6$$

La longitud del mayor listón que cabe es 8,6 cm.

35 **Julián quiere guardar una plancha metálica de 20 cm × 62 cm en una caja como la siguiente. Comprueba si puede hacerlo.**



Pasamos todas las medidas de la caja a centímetros y calculamos la diagonal de su base.

Altura caja = 20 cm

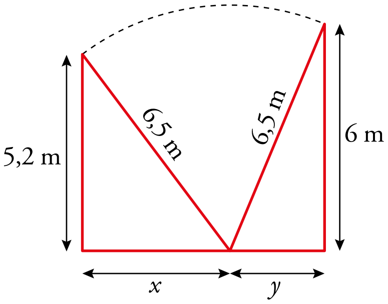
Ancho caja = 60 cm

Profundidad caja = 15 cm

$$d = \sqrt{60^2 + 15^2} = \sqrt{3825} = 61{,}85 \text{ cm}$$

La plancha metálica no cabe en la caja.

36 **Una operaria de la compañía eléctrica apoya su escalera de 6,5 m de largo en una pared a una altura de 6 m. Después de arreglar la avería, sin mover la base de la escalera, apoya esta en la pared de enfrente a una altura de 5,2 m. ¿A qué distancia se encuentran las paredes?**



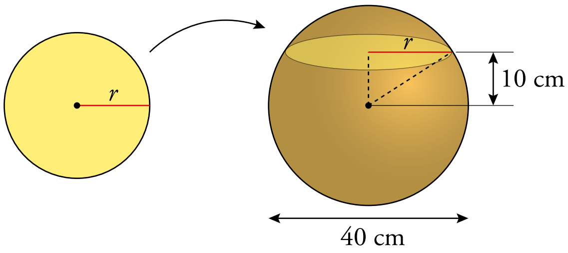
$x = \sqrt{6{,}5^2 - 5{,}2^2} = 3{,}9$

$y = \sqrt{6{,}5^2 - 6^2} = 2{,}5$

$x + y = 6{,}4$

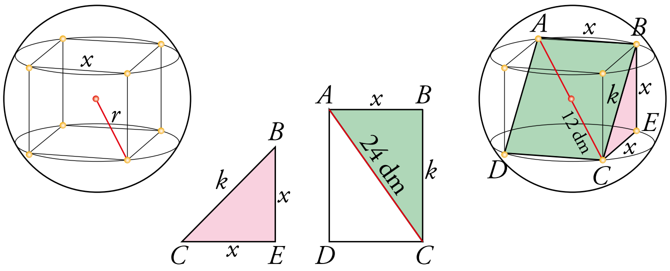
Hay 6,4 m de distancia entre ambas paredes.

37 **Calcula el radio de la circunferencia que se obtiene al cortar una esfera de 40 cm de diámetro por un plano que pasa a 10 cm del centro.**



$r = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}3$ cm (redondeando a las décimas)

38 **Piensa en una esfera de 12 dm de radio. Si dentro construimos el mayor cubo que sea posible, ¿cuánto medirá la arista de ese cubo?**



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo *BCE:*

$$k^2 = x^2 + k^2 \rightarrow k^2 = 2x^2$$

Y ahora lo aplicamos en el triángulo *ABC* y sustituimos k^2:

$$24^2 = x^2 + k^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{24^2}{3} = 192 \rightarrow x = \sqrt{192} = 13{,}86$$

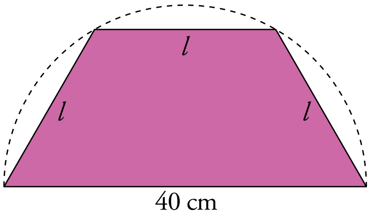
La arista del cubo medirá 13,86 dm.

Página 231

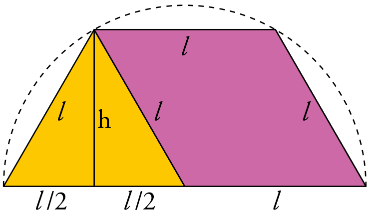
Interpreta, describe, exprésate

39 **Explica lo que ha hecho cada uno para resolver el siguiente problema.**

Calcula el área de esta figura.



Resolución de Alba



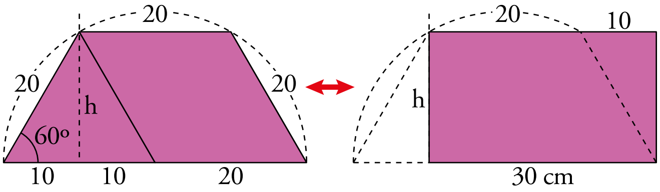
$l = 40 : 2 = 20$ cm

$$h = \sqrt{20^2 - 10^2} =$$

$$= \sqrt{300} = 17{,}3 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(40 + 20) \cdot 17{,}3}{2} = 519 \text{ cm}^2$$

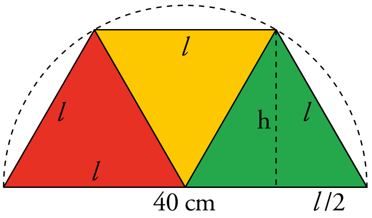
Resolución de Bruno



$$h = \sqrt{400 - 100} = 17{,}32 \text{ cm}$$

$$A = 30 \cdot 17{,}32 = 519{,}6 \text{ cm}^2$$

Resolución de Celia



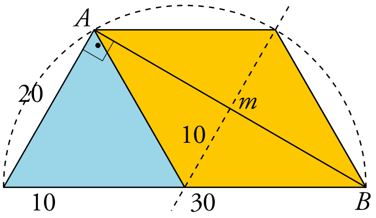
$l = 40 : 2 = 20$ cm

$h = \sqrt{20^2 - 10^2} =$

$= \sqrt{300} = 17{,}3$ cm

$A = 3 \cdot \dfrac{l \cdot h}{2} = 3 \cdot \dfrac{20 \cdot 17{,}3}{2} = 519 \text{ cm}^2$

Resolución de David



$m^2 = 40^2 - 20^2 \rightarrow$

$m = \sqrt{1\,200} =$

$= 34{,}64$ cm

$A = \left(\dfrac{34{,}64 \cdot 20}{2} : 2\right) \cdot 3 = 519{,}6 \text{ cm}^2$

Alba ha resuelto el problema buscando el área con la fórmula del trapecio, buscando las medidas de su base mayor, menor y su altura.

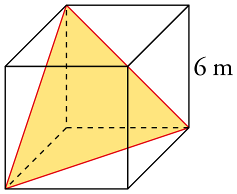
Bruno ha resuelto el problema transformando el trapecio en un rectángulo y calculando su área a partir de la base y la altura.

Celia ha resuelto el problema dividiendo el trapecio en 3 triángulos y sumando sus áreas.

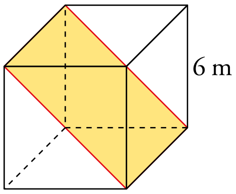
David ha resuelto el problema dibujando un triángulo rectángulo y encontrando sus medidas, y descomponiendo el área total en 3 triángulos iguales.

40 **Hemos cortado cuatro cubos de poliespán como se muestra en las siguientes figuras. Halla el área y el perímetro de estos polígonos.**

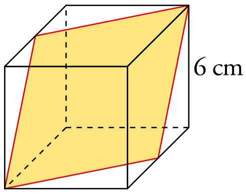
a)



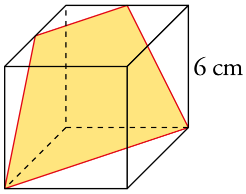
b)



c)



d)



TRIÁNGULO:

$l = \sqrt{6^2 + 6^2} = 8{,}5$ m

$h = \sqrt{8{,}5^2 - 4{,}25^2} = 7{,}4$ m

$A \approx \dfrac{8{,}5 \cdot 7{,}4}{2} = 31{,}45 \text{ m}^2$

$P \approx 8{,}5 \cdot 3 = 25{,}5$ m

RECTÁNGULO:

Lado mayor, $L = \sqrt{6^2 + 6^2} = 8{,}5$ m

Lado menor, $l = 6$ m

$A \approx 8{,}5 \cdot 6 = 51 \text{ m}^2$

$P \approx 2 \cdot (6 + 8{,}5) = 29$ m

ROMBO:

$l = \sqrt{6^2 + 3^2} \approx 6{,}7$ cm

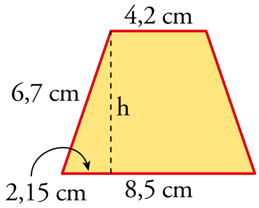
Diagonal menor, $d = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}5$ cm

Diagonal mayor, $D = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} \approx 10{,}4$ cm

$P = 4 \cdot 6{,}7 = 26{,}8$ cm

$A = \dfrac{8{,}5 \cdot 10{,}4}{2} = 44{,}2 \text{ cm}^2$

TRAPECIO:



$h = \sqrt{6{,}7^2 - 2{,}15^2} \approx 6{,}3$ cm

Base mayor, $B = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}5$ cm

Base menor, $b = \sqrt{3^2 + 3^2} \approx 4{,}2$ cm

Lado lateral, $l = \sqrt{6^2 + 3^2} \approx 6{,}7$ cm

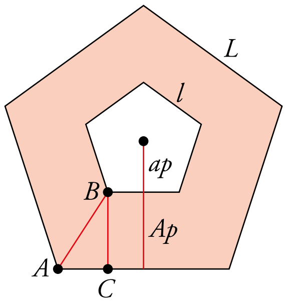
$P = 8{,}5 + 4{,}2 + 2 \cdot 6{,}7 = 26{,}1$ cm

$$A = \frac{8{,}5 + 4{,}2}{2} \cdot 6{,}3 = 40 \text{ cm}^2$$

Problemas «+»

41 **El edificio El Pentágono, en Washington (Estados Unidos), es un pentágono regular de 300 m de lado y la apotema de su patio interior, también pentagonal regular, mide 86 m.**

La longitud del lado del pentágono exterior es 2,4 veces la del interior y la distancia entre los vértices *A* y *B* (observa el gráfico) es de 148,51 m. ¿Qué superficie tiene su planta?



Tenemos estos datos:

$L = 300$ m

$l = 300 : 2{,}4 = 125$ m

$ap = 86$ m

$\overline{AB} = 148{,}51$ m

- Calculamos la apotema del pentágono grande:

$$\overline{AC} = \frac{L - l}{2} = \frac{300 - 125}{2} = 87{,}5 \text{ m}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{148{,}51^2 - 87{,}5^2} = \sqrt{22\,055{,}22 - 7\,656{,}25} \approx 120 \text{ m}$$

$$Ap = ap + \overline{BC} = 86 + 120 = 206 \text{ m}$$

- Área del pentágono grande:

$$A_1 = \frac{(300 \cdot 5) \cdot 206}{2} = 154\,500 \text{ m}^2$$

- Área del pentágono pequeño:

$$A_2 = \frac{(125 \cdot 5) \cdot 86}{2} = 26\,875 \text{ m}^2$$

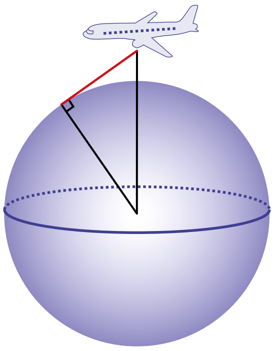
- Area de la planta:

$$A_1 - A_2 = 154\,500 - 26\,875 = 127\,625 \text{ m}^2$$

42 **Si vuelas en un avión a 10 000 m de altura, ¿a qué distancia se encuentra el punto más alejado que puedes ver en el horizonte?**

Radio de la Tierra: 6371 km

$x = \sqrt{(10 + 6\,371)^2 + 6\,371^2} \approx 9\,017$ km



Página 233

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Recurre al álgebra

Escribe un número cualquiera de dos cifras y después otro con las mismas cifras, cambiadas de orden. Resta ambos números. ¿Puedes explicar por qué la diferencia es siempre múltiplo de 9?

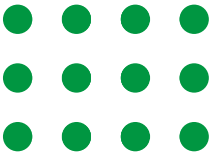
$$\begin{matrix}\boxed{x}\boxed{y} \rightarrow \\ \boxed{y}\boxed{x} \rightarrow\end{matrix}\begin{cases}10x + y\\ 10y + x\end{cases} \text{¿}\boxed{x}\boxed{y} - \boxed{y}\boxed{x}\text{?}$$

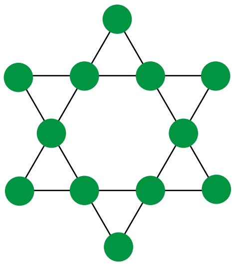
Esta actividad muestra al alumnado una utilidad del álgebra como lenguaje práctico y potente para economizar la expresión de procesos que sería mucho más farragosa con el lenguaje ordinario.

$$(10x + y) - (10y + x) = 9x - 9y = 9(x - y) \rightarrow \text{Múltiplo de 9}$$

Imagina el espacio

- **Aquí puedes ver doce fichas colocadas en tres filas de cuatro. Colócalas ahora de forma que haya seis filas de cuatro.**

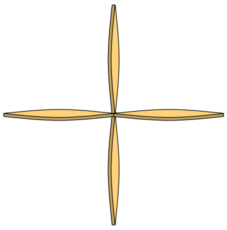


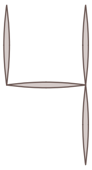


- **¡Medio en broma, medio en serio!**

  Aquí puedes ver cuatro palillos formando una cruz.

  Moviendo solo uno, ¿podrías formar un cuadrado?





Es el «cuadrado» de 2.

AUTOEVALUACIÓN

1 Clasifica los siguientes triángulos en rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

a) 20 cm, 24 cm, 30 cm

b) 5 m, 6 m, 10 m

c) 10 mm, 24 mm, 26 mm

d) 7 dm, 7 dm, 7 dm

a) $20^2 + 24^2 = 976 > 900 = 30^2$ → Acutángulo

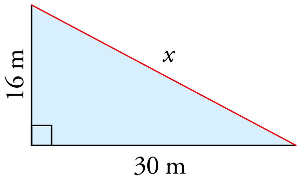
b) $5^2 + 6^2 = 61 < 100 = 10^2$ → Obtusángulo

c) $10^2 + 24^2 = 676 = 26^2$ → Rectángulo

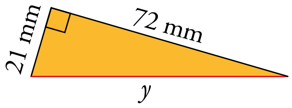
d) $7^2 + 7^2 > 7^2$ → Acutángulo

2 Calcula el segmento desconocido en cada una de estas figuras:

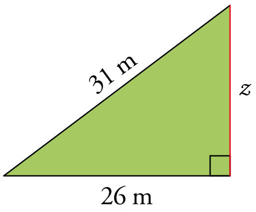
a)



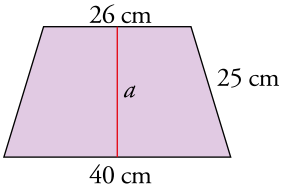
b)



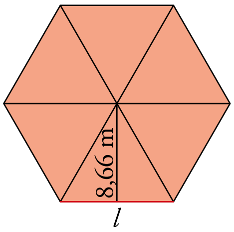
c)



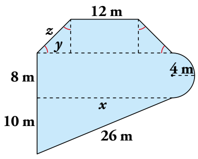
d)



e)



f)



a) $x = \sqrt{16^2 + 30^2} = 34$ m

b) $y = \sqrt{21^2 + 72^2} = 75$ mm

c) $z = \sqrt{31^2 - 26^2} = \sqrt{285} = 16,88$ m

d) $a = \sqrt{25^2 - \left(\dfrac{40 - 26}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ cm

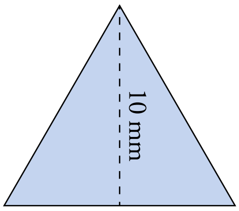
e) $l^2 = \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + 8,66^2 \rightarrow l^2 - \dfrac{l^2}{4} = 75 \rightarrow 3l^2 = 4 \cdot 75 = 300 \rightarrow l = 10$ m

f) Primero hallamos la diagonal de la base: $x = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5,66$ cm

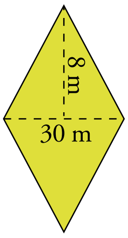
$d = \sqrt{5,66^2 + 6^2} = 8,25$ cm

3 **Calcula las áreas y los perímetros de estas figuras:**

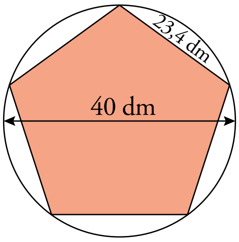
a)



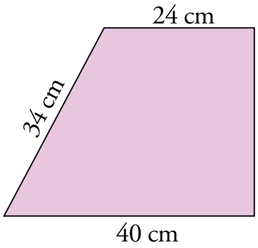
b)



c)



d)



a) $l^2 = 10^2 + (l/2)^2 \rightarrow 3l^2 = 400 \rightarrow l = 11{,}5$ mm

$A = \dfrac{11{,}5 \cdot 10}{2} = 57{,}5 \text{ mm}^2$

$P = 11{,}5 \cdot 3 = 34{,}5$ mm

b) $A = \dfrac{(2 \cdot 8) \cdot 30}{2} = 240 \text{ m}^2$

$l = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ m

$P = 4 \cdot 17 = 68$ m

c) $ap = \sqrt{20^2 - 11{,}7^2} = 16{,}2$ dm

$P = 5 \cdot 23{,}4 = 117$ dm

$A = \dfrac{117 \cdot 16{,}2}{2} = 947{,}7 \text{ dm}^2$

d) Longitud del lado que falta: $x = \sqrt{34^2 - (40 - 24)^2} = 30$ cm

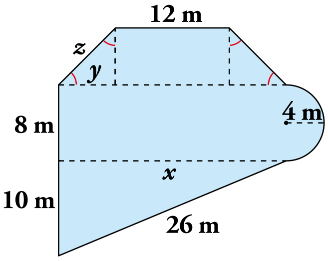
Como es la mitad de un trapecio, calculamos el área del trapecio entero:

$A = \dfrac{(48 + 80) \cdot 30}{2} = 1\,920 \text{ cm}^2$

Área de la mitad del trapecio → $1\,920 : 2 = 960 \text{ cm}^2$

$P = 40 + 34 + 24 + 30 = 128$ cm

4 **La plaza de un pueblo tiene la forma y las dimensiones que aparecen en el dibujo. Los ángulos señalados son todos ellos de 45°. Calcula el área y el perímetro de la plaza.**



$x = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ m

$y = \dfrac{24 - 12}{2} = 6$ m

$z = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}5$ cm

$P = 12 + 8{,}5 \cdot 2 + 4\pi + 26 + 18 \approx 85{,}6$ m

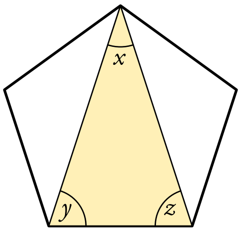
$A = \dfrac{24 + 12}{2} \cdot 6 + 24 \cdot 8 + \dfrac{24 \cdot 10}{2} + \dfrac{\pi \cdot 4^2}{2} = 445{,}1 \text{ m}^2$

12 SEMEJANZA

Página 234

El proceso deductivo

1 **Calcula la medida de los ángulos del triángulo coloreado en la figura.**



$x = \frac{A}{3} = \frac{108°}{3} = 36°$

$180° - 36° = 144°$

$y = z = \frac{144°}{2} = 72°$

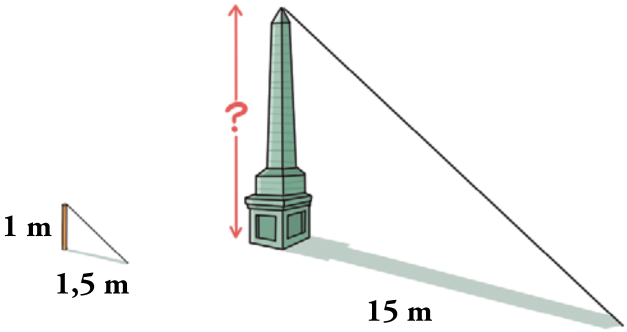
2 **¿Cuánto medirán los ángulos mencionados más arriba en un pentágono cuyos lados midan la mitad los del anterior?**

Medirán lo mismo.

Página 235

Una aplicación del teorema de Tales

3 **El palo, que mide un metro, arroja una sombra de metro y medio. En ese momento el obelisco de la plaza arroja una sombra de 15 metros. ¿Cuál es la altura del obelisco?**



$\frac{1}{1,5} = \frac{x}{15} \rightarrow x = 10$

El obelisco mide 10 metros.

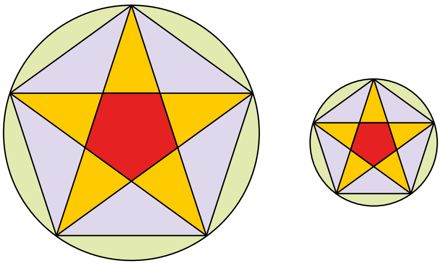
Formas y tamaños

4 **Observa las dos figuras de la derecha y contesta.**

a) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?

b) ¿Qué puedes decir de dos distancias correspondientes de la una y la otra?

c) ¿Y de dos ángulos correspondientes?



a) Se parecen en la forma y el color y se diferencian en el tamaño.

b) Que las distancias son semejantes.

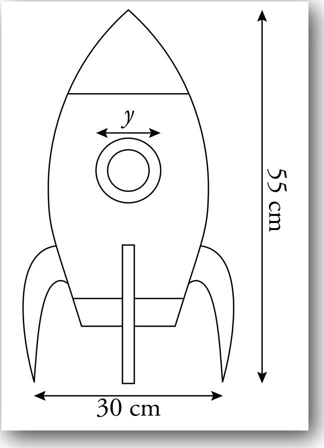
c) Los ángulos correspondientes son iguales.

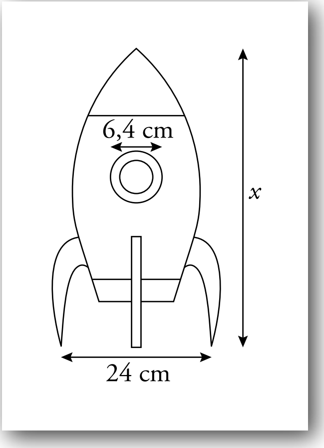
1 ▸ FIGURAS SEMEJANTES

Página 237

Para fijar ideas

1 Copia y completa en tu cuaderno.





Con una fotocopiadora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha.

a) ¿Cuál ha sido la reducción?

b) ¿Cuánto mide la altura x de la figura reducida?

c) ¿Cuánto mide el diámetro de la ventana en la figura inicial?

d) Las fotocopiadoras expresan la reducción en forma de porcentaje. ¿Cuál es ese porcentaje en este caso?

a) Calculamos el factor de reducción, es decir, la razón de semejanza entre la figura reducida y la original. ¿Por cuánto hay que multiplicar cada segmento de la primera figura para obtener el correspondiente de la segunda?

$$30 \cdot r = 24 \rightarrow r = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

El cociente obtenido (r = 0,…) es la razón de semejanza que transforma la primera figura en la segunda.

b) Conociendo la reducción, r, calculamos la altura x:

$$55 \cdot r = x \rightarrow x = 55 \cdot 0,\dots = \dots \text{ cm}$$

c) Siguiendo el mismo criterio, calculamos el diámetro, y, pero teniendo en cuenta que pertenece a la primera figura y ahora conocemos su valor reducido.

$$y \cdot r = 6{,}4 \rightarrow y = \frac{6{,}4}{0,\dots} = \dots \text{ cm}$$

d) Tenemos la razón de semejanza en forma decimal. Pasamos ese decimal a forma porcentual:

$$r = 0,\dots = \frac{\dots}{100} \rightarrow \dots\%$$

a) $30 \cdot r = 24 \rightarrow r = \frac{24}{30} = 0{,}8$

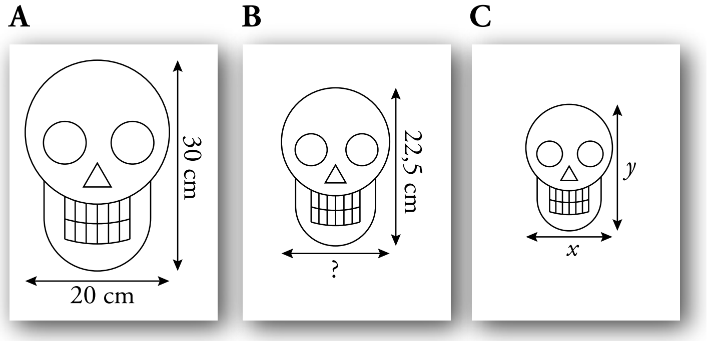
b) $55 \cdot r = x \rightarrow x = 55 \cdot 0{,}8 = 44$ cm

c) $y \cdot r = 6{,}4 \rightarrow \frac{6{,}4}{0{,}8} = 8$ cm

d) $r = 0{,}8 = \frac{8}{100} \rightarrow 8\,\%$

Para practicar

1 **Las dos figuras de la derecha, B y C, son reducciones que se han hecho en una fotocopiadora sobre la figura de la izquierda, A.**



a) ¿Qué reducción se ha aplicado a la página central?

Exprésala en forma decimal y en tanto por ciento.

b) ¿Cuánto mide el ancho de la imagen de la hoja central?

c) Calcula los valores de x e y sabiendo que se ha hecho la reducción al 60 %.

a) $\frac{22{,}5}{30} = 0{,}75$. Se ha aplicado una reducción del 75 %.

b) 75 % de 20 = 15. El ancho de la calavera central es de 15 cm.

c) y = 60 % de 30 = 18 cm

x = 60 % de 20 = 12 cm

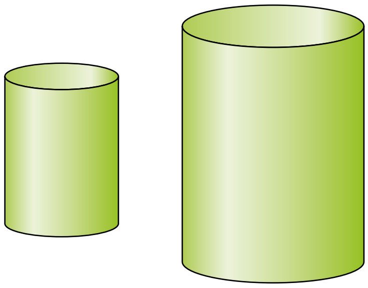
Página 238

Para fijar ideas

2 **Copia y completa en tu cuaderno.**

Una empresa de transportes tiene en su base logística dos depósitos cilíndricos para almacenaje de combustible.

Ambos son semejantes y la altura de uno es 1,6 veces la del otro.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza?

$$\text{Altura}_{\text{GRANDE}} = r \cdot \text{Altura}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow r = \ldots$$

b) Para pintar el menor, se han gastado 12,5 kg de pintura. ¿Cuántos kilos se necesitarán para pintar el grande?

$$\text{kg}_{\text{GRANDE}} = r^2 \cdot \text{kg}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow \text{kg}_{\text{GRANDE}} = (\ldots)^2 \cdot 12{,}5 = \ldots \text{ kg}$$

c) En el pequeño caben 3 750 litros de gasoil. ¿Cuántos litros caben en el grande?

$$\text{L}_{\text{GRANDE}} = r^3 \cdot \text{L}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow \text{L}_{\text{GRANDE}} = (\ldots)^3 \cdot \ldots = \ldots \text{ L}$$

a) $\text{Altura}_{\text{GRANDE}} = r \cdot \text{Altura}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow r = 1{,}6$

b) $\text{kg}_{\text{GRANDE}} = r^2 \cdot \text{kg}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow \text{kg}_{\text{GRANDE}} = (1{,}6)^2 \cdot 12{,}5 = 32 \text{ kg}$

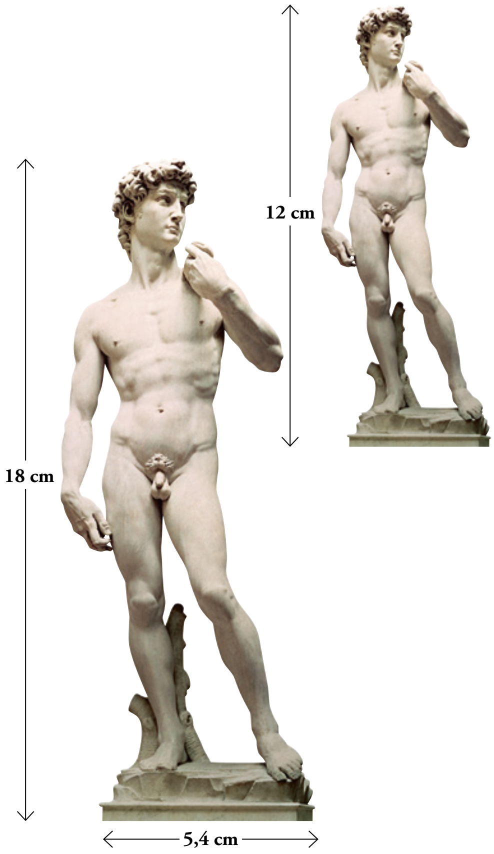
c) $\text{L}_{\text{GRANDE}} = r^3 \cdot \text{L}_{\text{PEQUEÑO}} \rightarrow \text{L}_{\text{GRANDE}} = (1{,}6)^3 \cdot 3\,750 = 15\,360 \text{ L}$

Página 239

Para fijar ideas

3 Copia, completa y comprueba que llegas a los resultados que aparecen.

En una pequeña tienda de Florencia venden reproducciones del *David,* de Miguel Ángel. Las hay de dos tamaños: de 18 cm y de 12 cm de altura.



a) ¿Son figuras semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza entre la estatua grande y la pequeña?

Las figuras son semejantes porque tienen la misma …, es decir, solo difieren en el…

La razón de semejanza, *r,* entre la grande y la pequeña:

$$r = \frac{\dots}{\dots} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

b) El pedestal de la figura mayor tiene una anchura de 5,4 cm. ¿Cuál es la anchura del pedestal de la pequeña?

La anchura, *a,* del pedestal de la pequeña:

$$a \cdot r = 5{,}4 \rightarrow a = \frac{\dots}{\dots} = \dots \text{ cm}$$

c) Si el pedestal de la estatua original tiene una anchura de 1,55 m, ¿qué altura tiene la estatua?

La altura, h, de la estatua:

$$\frac{\dots}{5{,}4} = \frac{h}{\dots} \rightarrow h = \frac{\dots \cdot \dots}{\dots} = 516{,}66 \text{ cm} \approx 517 \text{ cm} = \dots \text{ m}$$

d) Si para envolver la pequeña utilizamos un pliego de papel de 4 dm², ¿cuál será la superficie del pliego necesario para envolver en las mismas condiciones la grande?

$$\text{Superficie}_{\text{ENVOLTORIO GRANDE}} = r^2 \cdot \text{Superficie}_{\text{ENVOLTORIO PEQUEÑO}}$$

$$\text{Superficie}_{\text{ENVOLTORIO GRANDE}} = \dots^2 \cdot 4 = 9 \text{ dm}^2$$

a) Las figuras son semejantes porque tienen la misma forma, es decir, solo difieren en el tamaño.

$$r = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

b) $a \cdot r = 5{,}4 \rightarrow a = \frac{5{,}4}{1{,}5} = 3{,}6 \text{ cm}$

c) $\frac{155}{5{,}4} = \frac{h}{18} \rightarrow h = \frac{155 \cdot 18}{5{,}4} = 516{,}66 \text{ cm} \approx 517 \text{ cm} = 5{,}17 \text{ m}$

d) $\text{Superficie}_{\text{ENVOLTORIO GRANDE}} = 1{,}5^2 \cdot 4 = 9 \text{ dm}^2$

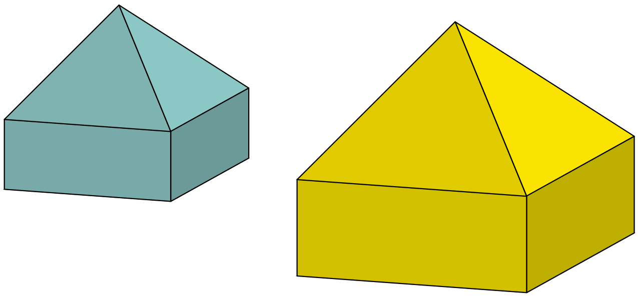
Para practicar

2 **Estas dos casitas de cartulina, construidas en el taller de pretecnología, son semejantes.**

La razón de semejanza es 1,5.

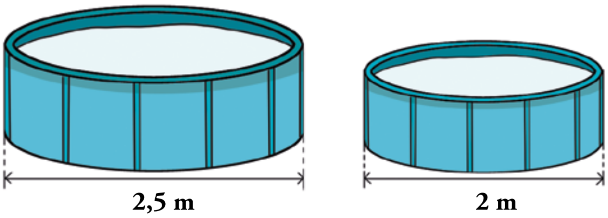
Para fabricar la pequeña, se han necesitado 7,2 dm^2 de cartulina, y su volumen es 6,4 L.

¿Cuánta cartulina lleva la grande y qué volumen tiene?



La grande lleva 7,2 · 1,5^2 = 16,2 dm^2 de cartulina y tiene un volumen de 6,4 · 1,5^3 = 21,6 L.

3 **Estas dos piscinas son semejantes.**



a) **¿Cuál es la razón de semejanza?**

b) **Si la pequeña tiene 120 cm de profundidad, ¿cuál es la profundidad de la grande?**

c) **La lona impermeable de la pequeña costó 50 €. ¿Cuánto costará la lona de la grande?**

d) **Llenar de agua la pequeña cuesta 23 €. ¿Cuánto costará llenar la grande?**

a) $r = \frac{2,5}{2} = 1,25$

b) La profundidad de la grande es 120 · 1,25 = 150 cm.

c) La lona de la grande costará 50 · 1,25^2 = 78,12 €.

d) Llenar la grande costará 23 · 1,25^3 = 44,92 €.

2 PLANOS, MAPAS Y MAQUETAS

Página 241

Para practicar

1 **Tomando medidas sobre el mapa de la página anterior y teniendo en cuenta la escala. Calcula:**

a) La distancia entre Las Palmas y Puerto del Rosario.

b) El tiempo que tarda un ferri, a 20 nudos, en ir de Las Palmas a Santa Cruz de Tenerife.

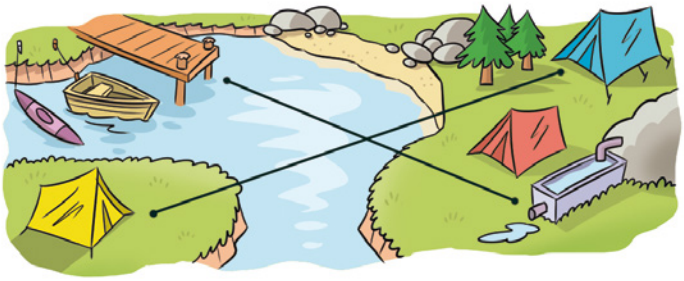
Cada nudo equivale a 1,852 km/h.

a) Distancia sobre el mapa = 4 cm → Distancia real = 4 · 4 000 000 cm = 160 km

b) Distancia sobre el mapa = 2,2 cm → Distancia real = 2,2 · 4 000 000 cm = 88 km

$$t = \frac{e}{v} = \frac{88}{20 \cdot 1,852} = 2,4 \text{ h} = 2 \text{ horas } 24 \text{ minutos}$$

2 **Sabiendo que la distancia que separa en la realidad el embarcadero de la fuente es 136 m, halla su escala y calcula la distancia entre la tienda azul y la amarilla.**

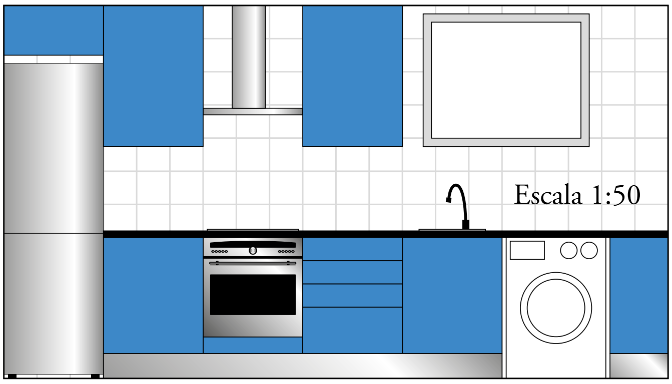


$$\text{Escala} = \frac{4}{13\,600}$$

$$\frac{4}{13\,600} = \frac{5,5}{d} \to d = \frac{13\,600 \cdot 5,5}{4} = 18\,700 \text{ cm} = 187 \text{ m}$$

La distancia entre la tienda azul y la amarilla es de 187 metros.

3 **Este es el plano de la pared de una cocina.**



Calcula:

a) Sus dimensiones (largo y ancho).

b) La superficie de la ventana.

c) La distancia entre los fogones y la campana.

d) Las dimensiones del frigorífico.

a) Largo de la cocina: 8,8 cm · 50 = 440 cm = 4,4 m

   Ancho de la cocina: 5 cm · 50 = 250 cm = 2,5 m

b) Superficie en el plano de la ventana: 2,2 · 1,8 = 4 cm^2

   Superficie real de la ventana: $4 \cdot 50^2 = 10\,000$ cm^2 = 1 m^2

c) Distancia en el plano entre los fogones y la campana: 1,5 cm

   Distancia real entre los fogones y la campana: 1,5 · 50 = 75 cm

d) Alto del frigorífico: 4,1 cm · 50 = 205 cm

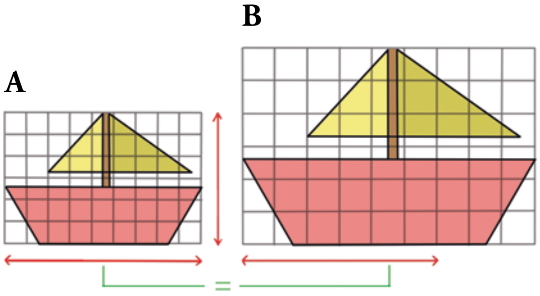
   Ancho del frigorífico: 1,3 cm · 50 = 65 cm

3 CÓMO CONSTRUIR FIGURAS SEMEJANTES

Página 242

Para fijar ideas

1 **Copia y completa en tu cuaderno.**



¿Qué ampliación ha sufrido la figura A para obtener la figura B?

Tomando como unidad la cuadrícula de B:

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{Alto de B} \to \dots & \textbf{Ancho de B} \to \dots \\ \textbf{Alto de A} \to \dots & \textbf{Ancho de A} \to \dots\end{array}\right\} \to r = \frac{6}{\dots} = \frac{\dots}{6} = \frac{\dots}{2} = \dots$$

Cada distancia de A ha quedado multiplicada por: $r = \dots$

$$\begin{array}{ll}\text{Alto de B} \to 4 & \left.\begin{array}{l}\text{Ancho de B} \to 6 \\ \text{Ancho de A} \to 9\end{array}\right\} \to r = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5 \\ \text{Alto de A} \to 6 & \end{array}$$

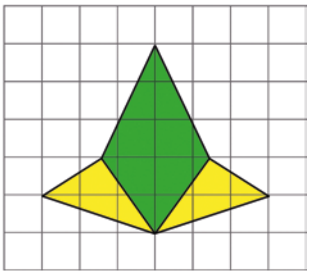
Cada distancia de A ha quedado multiplicada por: $r = 1,5$

Página 243

Para practicar

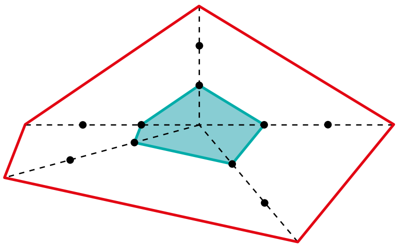
1 **Dibuja en tu cuaderno una figura como esta y amplíala al doble de tamaño mediante el método de la proyección.**

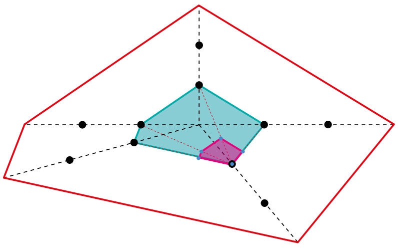
Respuesta abierta.



2 **Dibuja en tu cuaderno un pentágono irregular. Redúcelo a su tercera parte proyectando desde un punto interior. Vuelve a hacerlo tomando como punto de proyección uno de los vértices.**

El dibujo a escala 1/3 queda pegado al vértice que se elige como proyección. Respuesta abierta; por ejemplo:





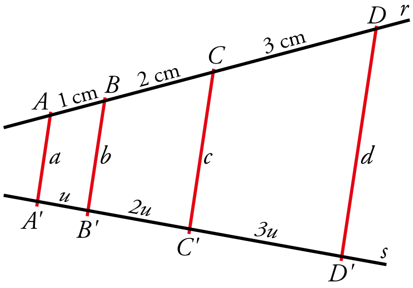
4 ▶ TEOREMA DE TALES

Página 244

Para fijar ideas

1 **Traza dos rectas cualesquiera, *r* y *s*. Señala en *r* cuatro puntos, *A*, *B*, *C* y *D*, de modo que:**

$$\overline{AB} = 1 \text{ cm} \qquad \overline{BC} = 2 \text{ cm} \qquad \overline{CD} = 3 \text{ cm}$$



Traza cuatro rectas paralelas, *a*, *b*, *c* y *d*, que pasen por *A*, *B*, *C* y *D*. Llama *A'*, *B'*, *C'* y *D'* a los puntos en que estas rectas cortan a *s*.

Comprueba que $\overline{B'C'} = 2 \cdot \overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'} = 3 \cdot \overline{A'B'}$.

Se comprueba.

2 **Copia y completa en tu cuaderno para calcular *x*.**

Primero comprueba que las rectas *a*, *b* y *c* del dibujo son paralelas.

Escribe una proporción con los segmentos determinados en las rectas *r* y *s*, y calcula *x*.

$$\frac{1}{\dots} = \frac{\dots}{x} \rightarrow x = \frac{\dots \cdot \dots}{1} = \dots$$

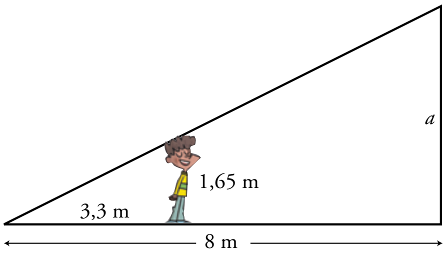
$$\frac{1}{1,6} = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{1,6 \cdot 2}{1} = 3,2 \text{ cm}$$

Página 245

Para fijar ideas

3 **Copia en tu cuaderno y comprueba.**

a) El salón de la casa de Jaime es abuhardillado. Para medir la altura de la pared, Jaime se coloca como se ve en el dibujo. Teniendo en cuenta las medidas, calcula la altura máxima del salón.

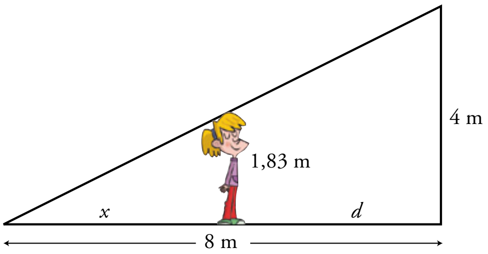


Llamamos *a* a la altura máxima del salón de Jaime.

Como son dos triángulos en posición de Tales, son semejantes. Por tanto:

$$\frac{1,65}{\dots} = \frac{a}{\dots} \rightarrow a = \frac{165 \cdot \dots}{\dots} = 4 \text{ m}$$

b) Raquel, que mide 1,83 m, va a visitar a su amigo Jaime. ¿A qué distancia, *d,* de la pared debe colocarse para tocar el techo con la cabeza?



Vemos que en el triángulo mayor, un lado, 8 m, es el doble de otro, 4 m.

Como los triángulos son semejantes:

$$\boldsymbol{x = 2 \cdot \ldots = \ldots \text{ m} \rightarrow d = 8 - x = \ldots - \ldots = 4{,}34 \text{ m}}$$

a) $\frac{1{,}65}{3{,}3} = \frac{a}{8} \rightarrow a = \frac{1{,}65 \cdot 8}{3{,}3} = 4 \text{ m}$

b) $x = 2 \cdot 1{,}83 = 3{,}66 \text{ m} \rightarrow d = 8 - x = 8 - 3{,}66 = 4{,}34 \text{ m}$

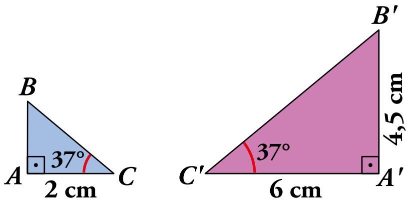
5 SEMEJANZA ENTRE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Página 246

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 Observa los triángulos.



a) ¿Son semejantes?

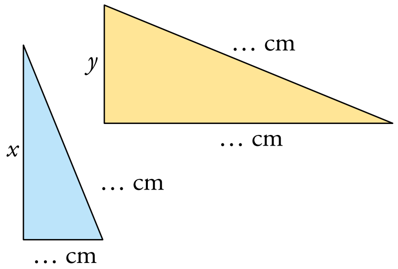
Los dos triángulos son semejantes porque son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual.

b) Calcula el cateto AB.

$$\frac{\overline{AB}}{\ldots} = \frac{2}{\ldots} \rightarrow \overline{AB} = \frac{2\cdot\ldots}{\ldots} = 1{,}5 \text{ cm}$$

b) $\frac{\overline{AB}}{4{,}5} = \frac{2}{6} \rightarrow \overline{AB} = \frac{2\cdot 4{,}5}{6} = 1{,}5 \text{ cm}$

2 En un triángulo rectángulo, el cateto menor mide 10 cm, y la hipotenusa, 26 cm. En otro triángulo rectángulo, el cateto mayor mide 36 cm, y la hipotenusa, 39 cm. ¿Son semejantes?



Antes de comenzar, ponemos los datos en un dibujo.

Con el teorema de Pitágoras calculamos un cateto desconocido, por ejemplo x.

$$x = \sqrt{\ldots^2 - \ldots^2} = 24 \text{ cm}$$

Ahora comprobamos si los lados son proporcionales: hipotenusa es a cateto, como hipotenusa es a cateto. ¿Es cierta la igualdad?

$$¿\frac{26}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}? \rightarrow \text{Los triángulos … semejantes.}$$

$x = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ cm}$

$¿\frac{26}{24} = \frac{39}{36}?$ → Los triángulos son semejantes.

Para practicar

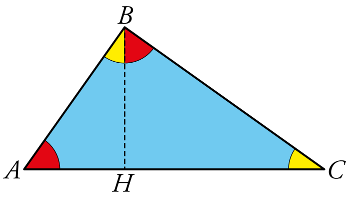
1 Si $\hat{A} = 33°$, $\hat{C} = 90°$, $\hat{B}' = 57°$ y $\hat{C}' = 90°$, explica por qué ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

Los ángulos de un triángulo suman 180°, por lo que, en el triángulo ABC, $\hat{B} = 57°$. Así, ABC y $A'B'C'$ tienen un ángulo agudo igual y otro recto, y, por tanto, son semejantes.

2 **Razona.**

a) ¿Por qué son iguales los ángulos señalados del mismo color?

b) ¿Por qué los triángulos *ABC, AHB* y *BHC* son semejantes?



a) El ángulo B es rectángulo. $\rightarrow \widehat{B} = \widehat{B}_{\text{AMARILLO}} + \widehat{B}_{\text{ROJO}} = 90°$

En el triángulo ABC sabemos que sus ángulos suman 180°. $\rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

Por tanto: $\widehat{A} + 90° + \widehat{C} = 180° \rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 90°$

Si ahora nos fijamos en el triángulo rectángulo ABH:

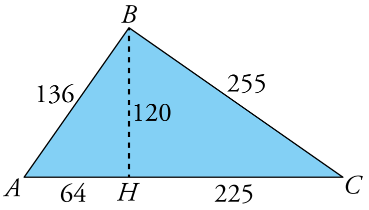
$$\left.\begin{array}{r} \widehat{A} + \widehat{B}_{\text{AMARILLO}} + 90° = 180° \rightarrow \widehat{A} + \widehat{B}_{\text{AMARILLO}} = 90° \\ \widehat{A} + \widehat{C} = 90° \end{array}\right\} \rightarrow \widehat{B}_{\text{AMARILLO}} = \widehat{C}$$

Y si nos fijamos en el triángulo rectángulo BHC:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{C} + \widehat{B}_{\text{ROJO}} + 90° = 180° \rightarrow \widehat{C} + \widehat{B}_{\text{ROJO}} = 90° \\ \widehat{A} + \widehat{C} = 90° \end{array}\right\} \rightarrow \widehat{B}_{\text{ROJO}} = \widehat{A}$$

b) $ABC - ABH \rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = 2{,}125 = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BH}}$

$ABC - BHC \rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = 1{,}1\overset{\frown}{3} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{HC}}$

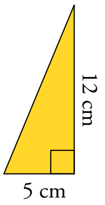


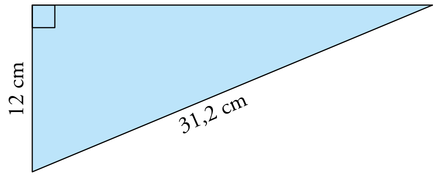
Como la semejanza es una relación de equivalencia y ABH es semejante a ABC, que es semejante a BHC, entonces ABH es semejante a BHC.

3 **Explica por qué dos triángulos rectángulos isósceles son semejantes.**

Si es rectángulo e isósceles, sus catetos son iguales y, por tanto, son triángulos semejantes.

4 **Explica por qué estos dos triángulos son semejantes.**





Aplicamos Pitágoras para calcular la hipotenusa en el triángulo pequeño:

$$a = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}$$

Vemos si los triángulos tienen la hipotenusa y un cateto proporcionales:

$$\frac{31{,}2}{13} = 2{,}4 = \frac{12}{5}$$

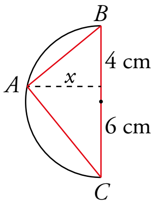
Efectivamente, así es. Por tanto, los triángulos son semejantes.

Página 247

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

3 **Calcula x aplicando el teorema de la altura.**



El triángulo ABC es rectángulo (está inscrito en una …). Aplicamos el teorema de la altura:

$$x^2 = \ldots \cdot \ldots = \ldots$$

$$x = \sqrt{\ldots} \approx 4{,}9 \text{ cm}$$

El triángulo ABC es rectángulo (está inscrito en una semicircunferencia).

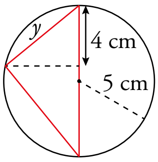
Aplicamos el teorema de la altura:

$$x^2 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$x = \sqrt{24} \approx 4{,}9 \text{ cm}$$

4 **Calcula y aplicando el teorema del cateto.**

Aplicamos el teorema del cateto teniendo en cuenta que la hipotenusa mide … cm:



$$y^2 = \ldots \cdot \ldots = \ldots$$

$$y = \sqrt{\ldots} \approx 6{,}3 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema del cateto teniendo en cuenta que la hipotenusa mide 10 cm:

$$y^2 = 10 \cdot 4 = 40$$

$$y = \sqrt{40} \approx 6{,}3 \text{ cm}$$

Para practicar

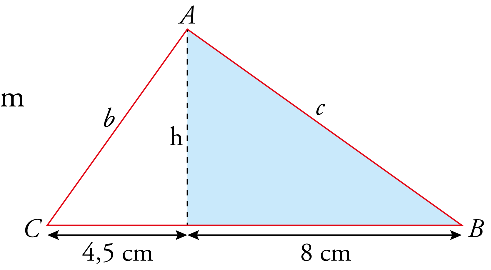
5 **En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 8 cm y 4,5 cm, respectivamente. Calcula las medidas de los catetos y de la altura sobre la hipotenusa.**

$a = 4{,}5 + 8 = 12{,}5$ cm

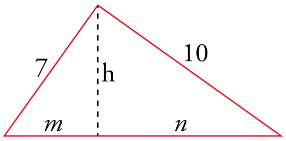
Por el teorema del cateto, $\begin{cases} b^2 = 12{,}5 \cdot 4{,}5 = 56{,}25 \;\rightarrow\; b = 7{,}5 \text{ cm} \\ c^2 = 12{,}5 \cdot 8 = 100 \;\rightarrow\; c = 10 \text{ cm} \end{cases}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo coloreado:

$\text{h} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm



6 **Calcula las longitudes h, m y n en este triángulo rectángulo.**



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$m + n = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149} \approx 12{,}21$ cm

Aplicamos el teorema del cateto:

$7^2 = m \cdot (m + n) \;\rightarrow\; 49 = m \cdot 12{,}21 \;\rightarrow\; m = 49 : 12{,}21 \approx 4{,}01$ cm

$10^2 = n \cdot (m + n) \;\rightarrow\; 100 = n \cdot 12{,}21 \;\rightarrow\; n = 100 : 12{,}21 \approx 8{,}19$ cm

$\text{h} = \sqrt{10^2 - 8{,}19^2} = \sqrt{32{,}92} \approx 5{,}74$ cm

6 ▶ APLICACIONES DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Página 248

Para fijar ideas

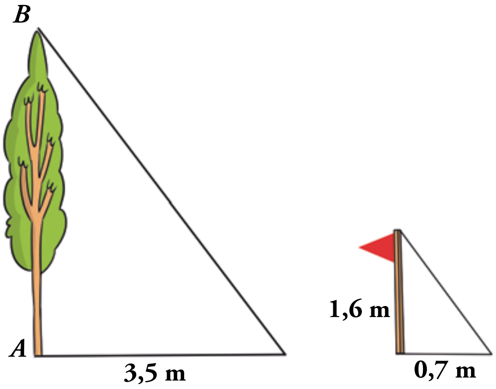
1 **En la descripción anterior, calcula la altura del árbol sabiendo que:**

- **Longitud de la estaca = 1,6 m**
- **Sombra del árbol = 3,5 m**
- **Sombra de la estaca = 0,7 m**

$$\frac{\overline{AB}}{1,6} = \frac{\dots}{\dots} \to \overline{AB} = \frac{1,6 \cdot \dots}{\dots} = 8 \text{ m}$$

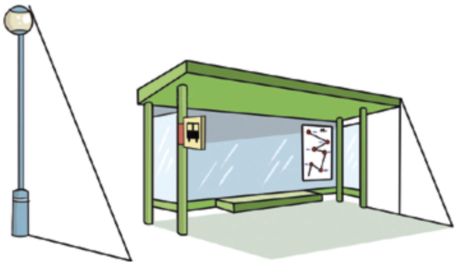
Solución: **El árbol mide 8 m.**

$$\frac{\overline{AB}}{1,6} = \frac{3,5}{0,7} \to \overline{AB} = \frac{1,6 \cdot 3,5}{0,7} = 8$$



Para practicar

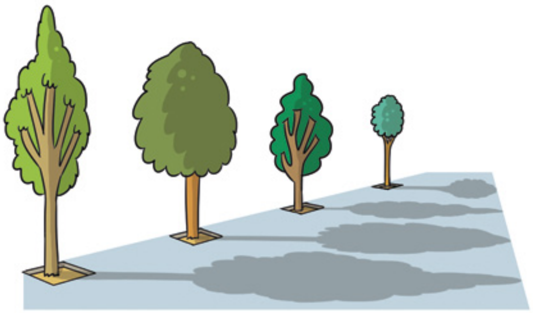
1 **Calcula la altura de una farola que proyecta una sombra de 1,90 m en el momento en que la marquesina del autobús, de 2,40 m de altura, proyecta una sombra de 96 cm.**



$$\frac{x}{240} = \frac{190}{96} \to x = \frac{240 \cdot 190}{96} = 225 \text{ cm}$$

La altura de la farola es de 2,25 metros.

2 **Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. Si el árbol pequeño mide 2,5 m, ¿cuánto miden los demás?**



$$\frac{2,5}{4} = \frac{x}{12} \to x = 7,5$$

$0,625 \cdot 8 = y \to y = 5$

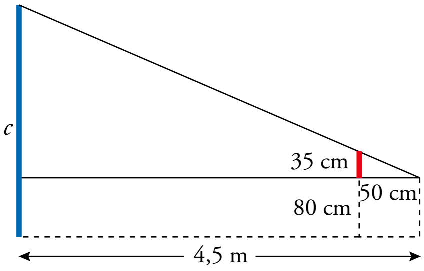
$0,625 \cdot 6 = z \to z = 3,75$

El primero mide 7,5 m, el segundo, 5 m y el tercero, 3,75 m.

Página 249

Para fijar ideas

2 En la descripción anterior, calcula la altura de la casa sabiendo que:



- **Longitud de la regla, b = 35 cm**
- **Distancia del borde de la mesa al pie de la regla, a = 50 cm**
- **Distancia del borde de la mesa a la casa, d = 4,5 m**
- **Altura de la mesa = 80 cm**

Expresamos todas las distancias en metros.

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \to \frac{c}{4,5} = \frac{\ldots}{\ldots} \to c = \frac{4,5 \cdot \ldots}{\ldots} = \ldots \text{ m}$$

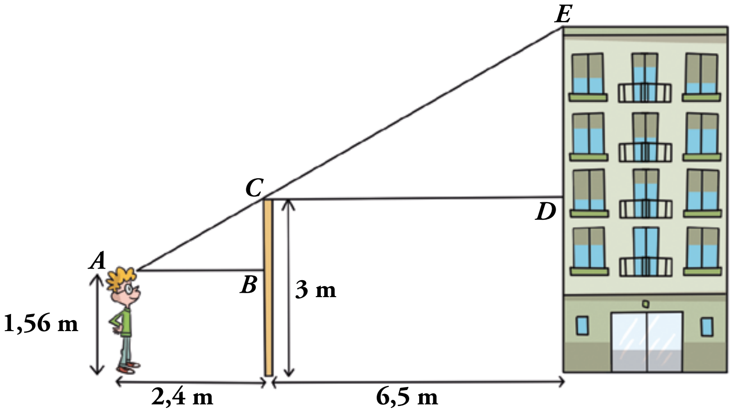
***Solución:* La altura de la casa es de … + 80 = 3,95 m.**

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \to \frac{c}{4,5} = \frac{0,35}{0,5} \to c = \frac{4,5 \cdot 0,35}{0,5} = 3,15 \text{ m}$$

Solución: La altura de la casa es de 3,15 + 80 = 3,95 m.

Para practicar

3 Observa de qué ingenioso método se vale Ramón para averiguar la altura del edificio:



Se sitúa de tal manera que la parte alta de la verja y la parte alta del edificio estén alineadas con sus ojos. Señala su posición y toma las medidas que se ven en el dibujo.

a) Explica por qué los triángulos ABC y CDE son semejantes.

b) Calcula $\overline{ED}$.

c) Calcula la altura del edificio.

a) Porque $\hat{A}$ del pequeño es igual que $\hat{C}$ del grande, y como son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual, son semejantes.

b) 3 – 1,56 = 1,44

$$\frac{\overline{ED}}{1,44} = \frac{6,5}{2,4} \to \overline{ED} = 3,9 \text{ m}$$

c) 3 + 3,9 = 6,9 m

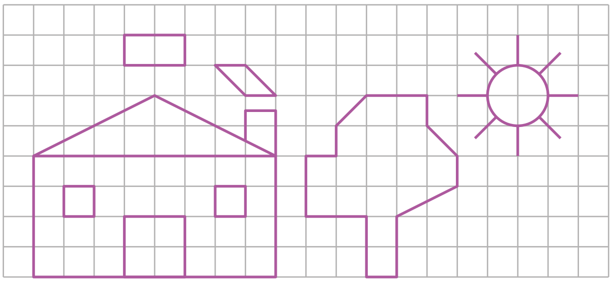
La altura del edificio es de 6,9 m.

Página 250

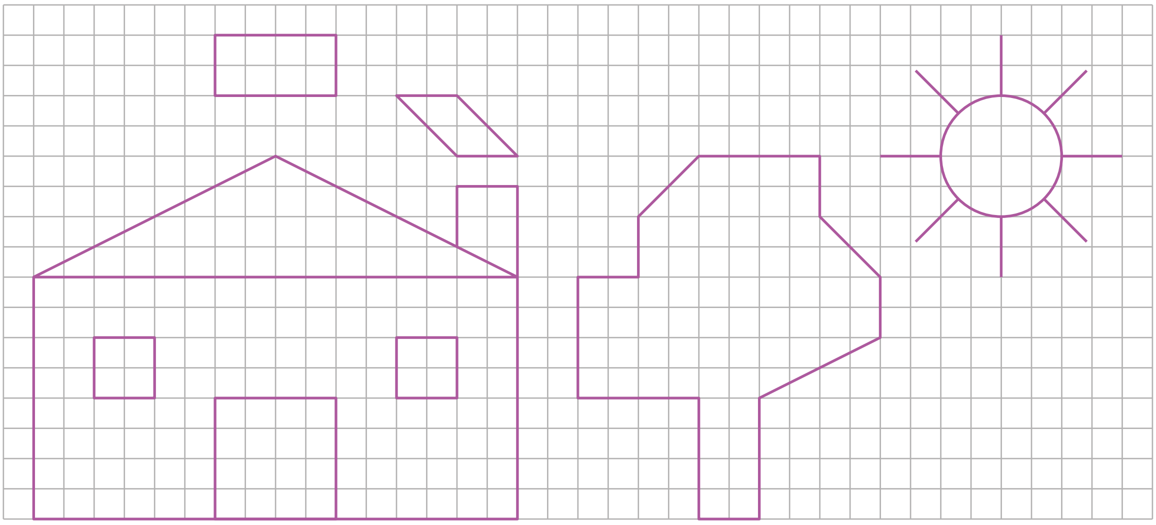
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Figuras semejantes

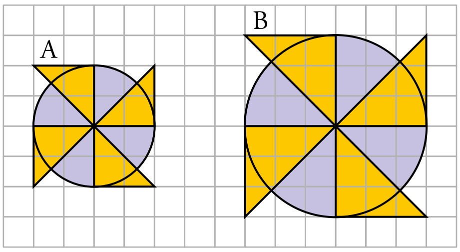
1 **Sobre una hoja de papel cuadriculado, realiza una copia del siguiente dibujo, pero al doble de su tamaño.**



Construcción:



2 **Estas dos figuras son semejantes.**



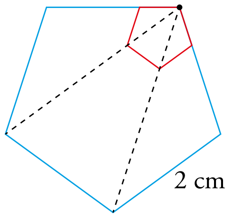
a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre B y A? Expresa el resultado con un número decimal.

b) ¿Cuál es la razón de semejanza entre A y B? Expresa el resultado con una fracción.

a) Su razón de semejanza es $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$.

b) Su razón de semejanza es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3 **Para construir un pentágono regular de 2 cm de lado, copiamos un pentágono regular cualquiera (figura roja), alargamos dos de sus lados consecutivos hasta 2 cm y completamos una figura semejante a la roja trazando rectas paralelas a sus lados. Prueba a hacerlo en tu cuaderno.**



Respuesta abierta.

4 **Calca en tu cuaderno el pentágono azul del ejercicio anterior y, procediendo de la misma manera, dibuja, con color negro, un pentágono regular de 3 cm de lado.**

a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre el pentágono negro y el azul?

b) ¿Y la razón de semejanza entre el azul y el negro?

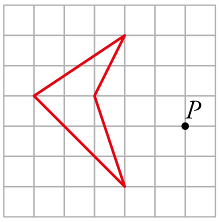
c) Expresa las razones de semejanza anteriores mediante porcentajes.

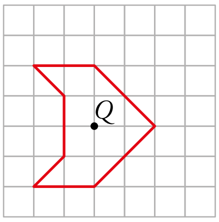
a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $1{,}5$ y $0{,}\widehat{6}$

5 **Copia por separado estas figuras en tu cuaderno.**



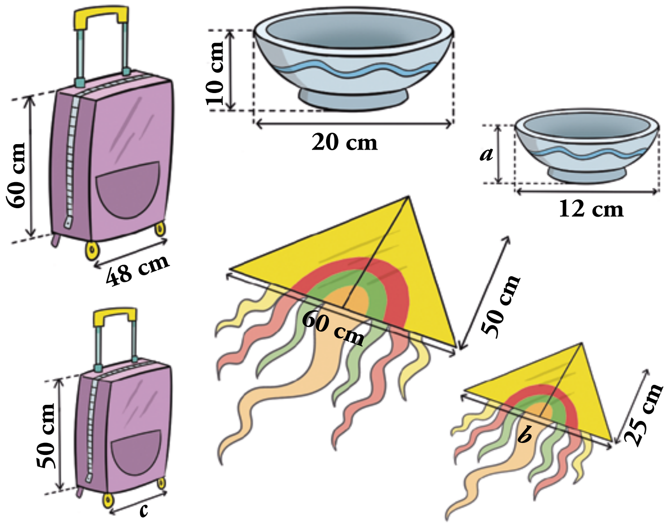


a) Amplía al doble la primera proyectándola desde el punto exterior *P*.

b) Amplía al triple la segunda proyectándola desde el punto interior *Q*.

Respuesta abierta.

6 **Suponiendo que en cada caso se trata de dos figuras semejantes, calcula la razón de semejanza entre la pequeña y la grande, halla las longitudes que faltan.**



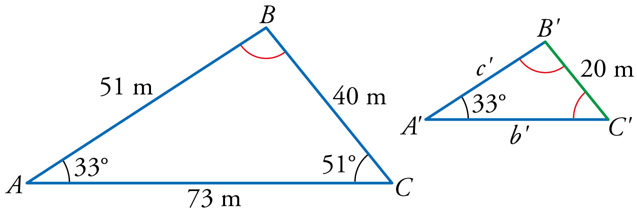
Cuenco: $r = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \to a = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$ cm

Cometa: $r = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \to b = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$ cm

Maleta: $r = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} \to c = 48 \cdot \frac{5}{6} = 40$ cm

Semejanza de triángulos

7 **Sabemos que los siguientes triángulos son semejantes. Halla los lados y los ángulos que faltan.**

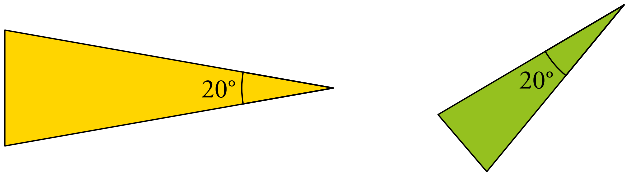


$\hat{B} = 180° - 51° - 33° = 96°$

$\hat{B}' = 96°$ $\qquad b' = \frac{73}{2} = 36{,}5$ m

$\hat{C}' = 51°$ $\qquad c' = \frac{51}{2} = 25{,}5$ m

8 **Explica por qué estos dos triángulos son semejantes.**



Por ser isósceles tiene los otros dos ángulos iguales y miden 80° cada uno.

Por tanto, tienen los mismos ángulos y los podemos colocar en posición de Tales.

Página 251

9 **Los lados de un triángulo miden 7,5 cm, 18 cm y 19,5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 5 cm.**

a) ¿Cuál es la razón de semejanza al pasar del primero al segundo?

b) ¿Cuánto medirán los otros dos lados del segundo triángulo?

c) Sabiendo que el primer triángulo es rectángulo, ¿podemos asegurar que el segundo también lo será? Compruébalo aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos.

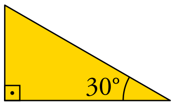
a) $r = \frac{5}{7{,}5} = \frac{2}{3}$

b) $18 \cdot \frac{2}{3} = 12$ cm y $19{,}5 \cdot \frac{2}{3} = 13$ cm

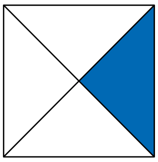
c) El segundo será rectángulo. Lo comprobamos: $5^2 + 12^2 = 13^2$

10 **Entre los siguientes triángulos rectángulos hay algunos semejantes entre sí. Averigua cuáles son calculando previamente los ángulos que faltan.**

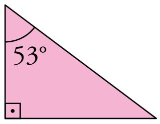
①



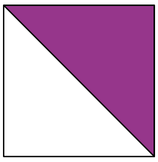
②



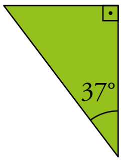
③



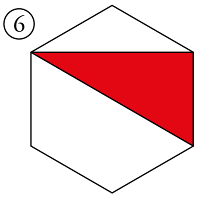
④



⑤



⑥



Son semejantes:

① y ⑥	② y ④	③ y ⑤
(90°, 60°, 30°)	(90°, 45°, 45°)	(90°, 53°, 37°)

11 **¿Verdadero o falso?**

a) Si la razón de semejanza entre dos triángulos, T_1 y T_2, es 2/3, el mayor es T_1.

b) Dos triángulos con dos ángulos iguales son semejantes.

c) Dos triángulos con dos lados iguales son semejantes.

d) Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual son semejantes.

e) La altura sobre la hipotenusa divide a un triángulo rectángulo en dos triángulos semejantes.

a) Falso. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}$ el mayor es T_2.

b) Verdadero.

c) Falso. Los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales.

d) Verdadero.

e) Verdadero.

Aplicaciones de la semejanza

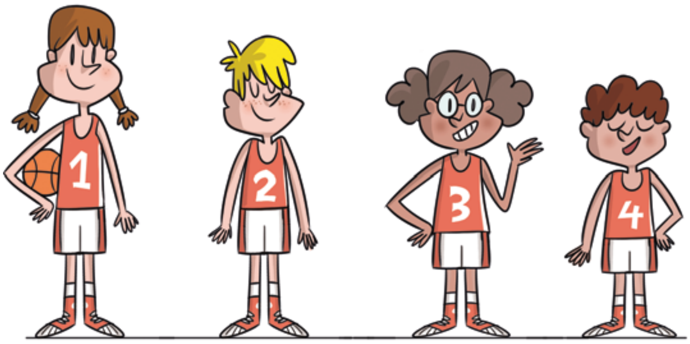
12 **La altura de la puerta de la casa mide 2 m. ¿Cuál es la altura de la casa? ¿Y la del árbol más pequeño?**

$$\frac{1\ \text{cm}}{2\ \text{cm}} = \frac{2{,}5\ \text{cm}}{a} \rightarrow a = 5\ \text{m}$$

$$\frac{1\ \text{cm}}{2\ \text{cm}} = \frac{1{,}7\ \text{cm}}{b} \rightarrow b = 3{,}4\ \text{m}$$

La casa tiene 5 metros de altura, y el árbol pequeño, 3,4 m.

13 **Si el más alto de estos jugadores mide 1,80 m, ¿cuánto miden los demás?**



$$\frac{4{,}4\ \text{cm}}{1{,}8\ \text{m}} = \frac{4\ \text{cm}}{a} \rightarrow a = 1{,}64\ \text{m}$$

$$\frac{4{,}4\ \text{cm}}{1{,}8\ \text{m}} = \frac{3{,}8\ \text{cm}}{b} \rightarrow b = 1{,}55\ \text{m}$$

$$\frac{4{,}4\ \text{cm}}{1{,}8\ \text{m}} = \frac{3{,}5\ \text{cm}}{c} \rightarrow c = 1{,}43\ \text{m}$$

Los jugadores miden, respectivamente, 1,80 m; 1,64 m; 1,55 m y 1,43 m.

14 **Un rectángulo tiene unas dimensiones de 10 cm por 15 cm. El lado menor de otro rectángulo semejante a él mide 12 cm. Calcula:**

a) La razón de semejanza para pasar del primer al segundo rectángulo.

b) El lado mayor del segundo.

c) Las áreas de ambos rectángulos.

a) Razón de semejanza = $\frac{12}{10} = 1{,}2$

b) $15 \cdot 1{,}2 = 18$ cm

c) El área del primero es 150 cm^2, y la del segundo, 216 cm^2.

15 **Para determinar que la altura de un eucalipto es de 11 m, Carlos ha medido la sombra de este (9,6 m) y la suya propia (1,44 m), ambas proyectadas por el sol a la misma hora. ¿Cuánto mide Carlos?**

$\frac{11}{9,6} = \frac{x}{1,44} \rightarrow x = 1,65$. Carlos mide 1,65 m.

16 **En la orilla del río Sena (París) hay una réplica a escala 1:4 de la Estatua de la Libertad, cuya altura es 11,5 m.**

Halla la altura de la estatua de Nueva York.

En Cenicero, un pueblo riojano, hay otra réplica de la Estatua de la Libertad de 1,2 m de altura. ¿Cuál es la escala de esta con respecto a la de Nueva York?

La estatua de Nueva York mide 11,5 · 4 = 46 m.

La escala entre la estatua de Cenicero y la de Nueva York es $\frac{1,2}{46} = \frac{3}{115}$; es decir, 3:115.

17 **Sobre la pantalla del sonar de un submarino se ve que un objeto se acerca a 1 cm por minuto. Si la imagen en la pantalla tiene una escala de 1:1 000 000, ¿a cuántos kilómetros por hora se mueve el objeto?**

1 cm por minuto son, en la realidad, 1 000 000 cm por minuto, o lo que es lo mismo, 10 km por minuto, que son 10 · 60 = 600 km por hora.

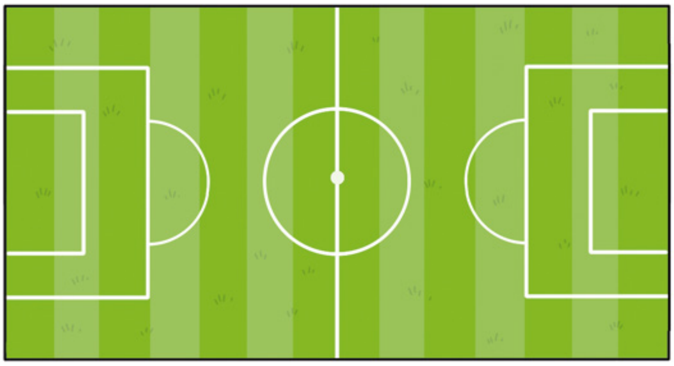
Página 252

Resuelve problemas

18 **Una pareja que va a comprar una casa consulta un callejero a escala 1:30 000. Miden sobre el plano la distancia de esta al metro y resulta ser de 2,3 cm. ¿Cuál es la distancia real?**

Distancia real: 30 000 · 2,3 = 69 000 cm = 690 m

19 **Averigua cuáles son las dimensiones reales de este campo de fútbol. Calcula la superficie del área de penalti (área grande) y la del círculo central.**



1:1 400

DIMENSIONES REALES DEL CAMPO

Largo del campo: 7,5 · 1 400 = 10 500 cm = 105 m

Ancho del campo: 4,7 · 1 400 = 6 580 cm = 65,8 m

SUPERFICIE ÁREA DE PENALTI

Área de penalti en la maqueta: 1 · 2,6 = 2,6 cm^2

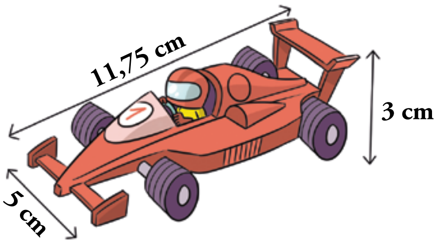
Área de penalti real: 2,6 · 1 400^2 = 5 096 000 cm^2 = 509,6 m^2

SUPERFICIE ÁREA DEL CÍRCULO CENTRAL

Área del círculo central de la maqueta: 3,14 · 0,65^2 = 1,32665 cm^2

Área del círculo central real: 1,32665 · 1 400^2 = 2 600 234 cm^2 ≈ 260 m^2

20 **El coche teledirigido de Pablo es una reproducción a escala 1:40 de los de «Fórmula 1». Observa sobre el dibujo las dimensiones del coche de juguete y halla las dimensiones del coche real.**

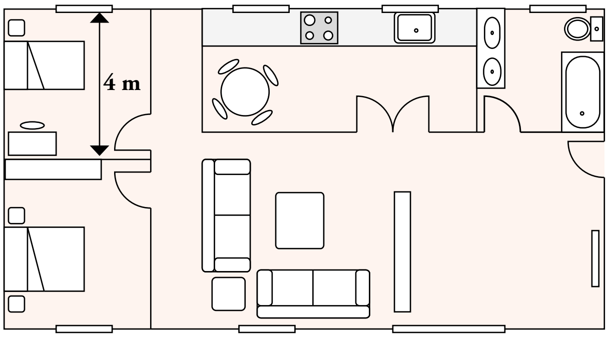


Largo: 11,75 · 40 = 470 cm = 4,7 m

Ancho: 5 · 40 = 200 cm = 2 m

Alto: 3 · 40 = 120 cm = 1,2 m

21 **Observa el plano del piso en el que vive Adela.**



a) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la vivienda sabiendo que la habitación de Adela, desde la ventana a la pared de enfrente, mide 4 metros?

b) Los padres de Adela han comprado una mesa de billar para el salón. Sus dimensiones son 2,5 m × 1,5 m. ¿Hay hueco para ponerla?

a) Escala: $\frac{\text{plano}}{\text{realidad}} = \frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ m}} = \frac{2 \text{ cm}}{400 \text{ cm}} = \frac{1}{200}$

Medidas del piso en el plano:

Largo: 4,3 cm Ancho: 8 cm Superficie: 4,3 · 8 = 34,4 cm^2

Superficie real del piso:

$$34{,}4 \text{ cm}^2 \times 200^2 = 137{,}60 \text{ m}^2$$

La vivienda tiene 137,60 m^2.

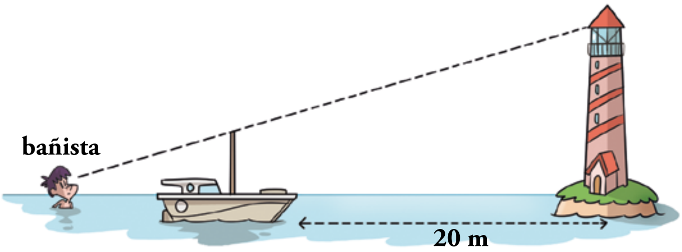
b) Como 1 m = 100 cm, la mesa tiene unas dimensiones de 250 cm × 150 cm.

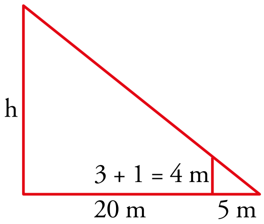
$$\frac{250}{200} = 1{,}25 \text{ cm en el plano}$$

$$\frac{150}{200} = 0{,}75 \text{ cm en el plano}$$

La mesa de billar se dibuja en el plano como un rectángulo de 1,25 cm × 0,75 cm. Vemos que cabe perfectamente en el salón al lado de la puerta de entrada.

22 **El bañista se encuentra a 5 m del barco. La borda del barco está a 1 m sobre el nivel del mar. El mástil del barco sobresale 3 m de la borda. El bañista ve alineados el extremo del mástil y el foco del faro. ¿A qué altura sobre el nivel del mar se encuentra el foco del faro?**

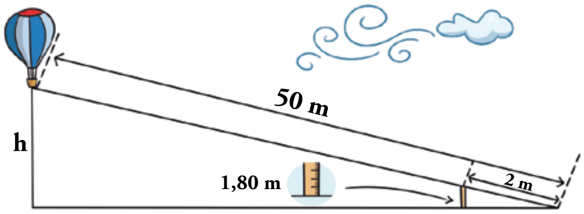




$$\frac{h}{25} = \frac{4}{5} \rightarrow h = \frac{4 \cdot 25}{5} = 20 \text{ m}$$

El foco del faro se encuentra a 20 m sobre el nivel del mar.

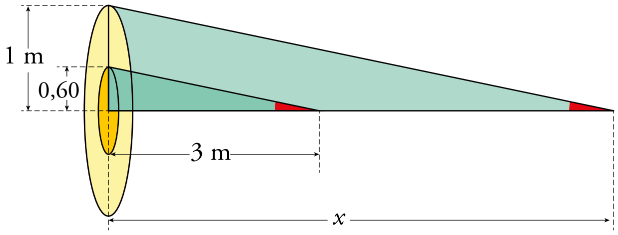
23 **Un globo, amarrado al suelo con una cuerda de 50 m, se desplaza lateralmente empujado por el viento. Para calcular su altura en cada momento, se ha atado en la cuerda, a 2 m del punto de amarre, una cinta métrica que se desenrolla verticalmente hasta tocar el suelo. ¿A qué altura se encuentra el globo cuando la cinta se ha desplegado 1,80 m?**



$$\frac{1{,}80}{h} = \frac{2}{50} \rightarrow h = \frac{1{,}80 \cdot 50}{2} = 45 \text{ m}$$

El globo se encuentra a 45 metros del suelo.

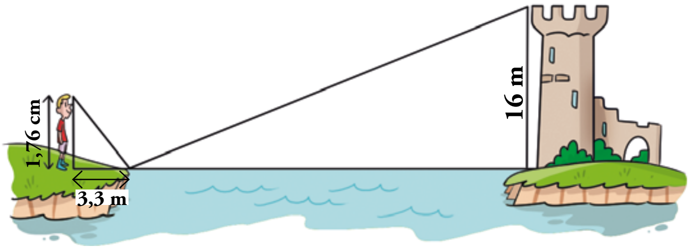
24 **Una linterna, a 3 m de una pared, ilumina sobre ella un círculo de 60 cm de radio. ¿A qué distancia de la pared se debe colocar para que el círculo iluminado tenga un metro de radio?**

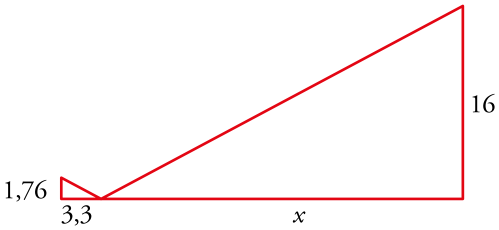


$$\frac{3}{0,6}=\frac{x}{1}\rightarrow x=5$$

Se debe colocar a 5 metros de distancia.

25 **Marcos ve las almenas de la torre reflejadas en el agua. Halla su distancia a la base de la torre a partir de los datos del dibujo.**





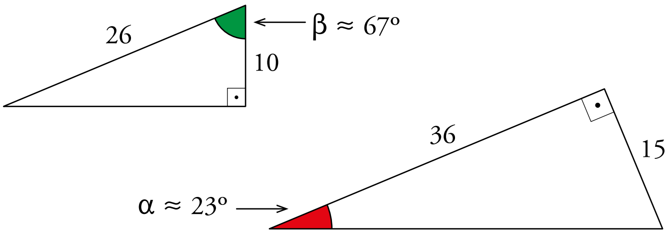
$$\frac{1,76}{16}=\frac{3,3}{x}\rightarrow x=\frac{3,3\cdot 16}{1,76}=30\text{ m}$$

La distancia entre Marcos y la base de la torre es de 33,3 m.

Página 253

Interpreta, describe, exprésate

26 **Explica y justifica cada una de las respuestas que se presentan a la siguiente pregunta: ¿Son semejantes estos dos triángulos?**

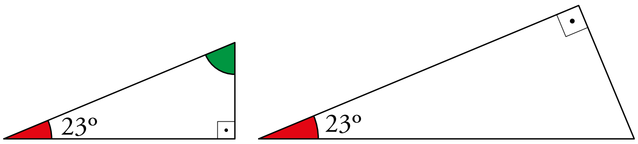


Ⓐ **Llamando x al cateto desconocido en el triángulo menor:**

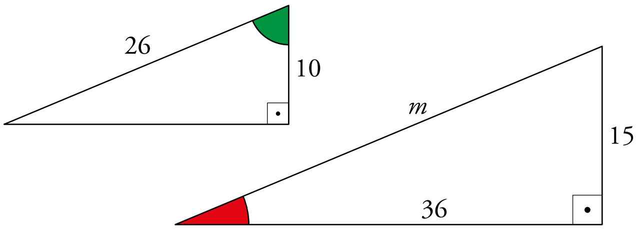
$$x=\sqrt{26^2-10^2}=24\leftrightarrow ¿\frac{10}{24}=\frac{15}{36}?$$

$10\cdot 36=360=24\cdot 15$ → Son semejantes.

Ⓑ **$90°-\beta=90°-67°=23°$ → Son semejantes.**



Ⓒ



$¿\frac{10}{15} = \frac{26}{m}?$

$\boldsymbol{m = \sqrt{36^2 + 15^2} = 39}$

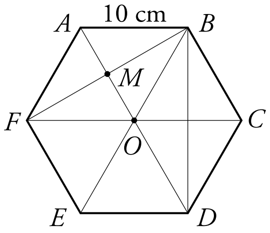
$10 \cdot 39 = 26 \cdot 15 = 390$ → Son semejantes.

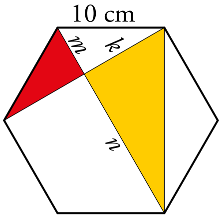
Ⓐ Se ha visto que son semejantes teniendo en cuenta que son triángulos rectángulos y que tienen lados proporcionales. Se ha comparado la proporción del cateto pequeño respecto al cateto grande.

Ⓑ Se ha visto que son semejantes teniendo en cuenta que son triángulos rectángulos y que tienen un ángulo igual, además del ángulo rectángulo. Por tanto, el tercer ángulo será igual forzosamente y son semejantes.

Ⓒ Se ha visto que son semejantes teniendo en cuenta que son triángulos rectángulos y que tienen lados proporcionales. Se ha comparado la proporción entre sus catetos pequeños respecto a la proporción entre sus hipotenusas.

27 **Observa dos construcciones sobre un hexágono regular de 10 cm de lado y explica:**





a) Por qué $\widehat{AFB} = 30°$; $\widehat{FBD} = 60°$; $\widehat{AMF} = 90°$.

b) Por qué los triángulos coloreados son semejantes.

c) Por qué $\overline{AD} = 20$ cm; $m = 5$ cm; $n = 15$ cm.

d) Por qué $k^2 = 5 \cdot 15 \rightarrow k = \sqrt{75}$

a) Al ser un hexágono regular, el triángulo $\widehat{BFD}$ es equilátero. → Sus ángulos son iguales y suman 180°. → $\widehat{FBD} = 60°$

$\overline{FB}$ parte al triángulo equilátero $\widehat{AFO}$ en dos triángulos iguales, y los ángulos de $\widehat{AFO}$ son de 60°. → $\widehat{AFB} = 30°$

$\overline{AO}$ corta perpendicularmente a $\overline{BF}$. → $\widehat{AMF} = 90°$

b) El triángulo rojo es igual a $\widehat{AMB}$ y, por el teorema de la altura, son semejantes.

c) El hexágono se divide en 3 triángulos iguales, todos ellos equiláteros de lado 10 cm.

$\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD} = 10 + 10 = 20$ cm

$m = \frac{\overline{AO}}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm

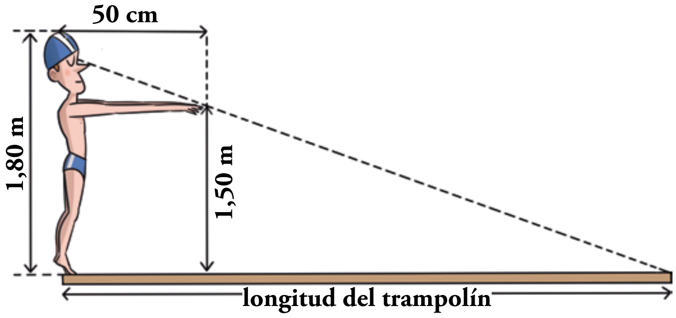
$n = \overline{OD} + \overline{OM} = 10 + 5 = 15$ cm

d) Si aplicamos el teorema de Pitágoras en $\widehat{AMB}$:

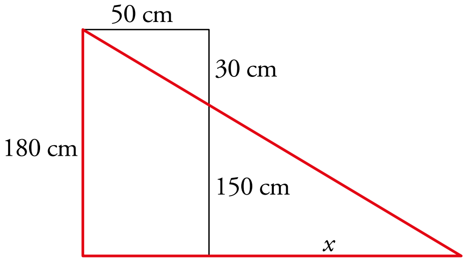
$k^2 + m^2 = 10^2 \rightarrow k^2 = 100 - 25 = 75 = 5 \cdot 15 \rightarrow k = \sqrt{75}$

Problemas «+»

28 **Calcula la longitud del trampolín teniendo en cuenta las medidas.**



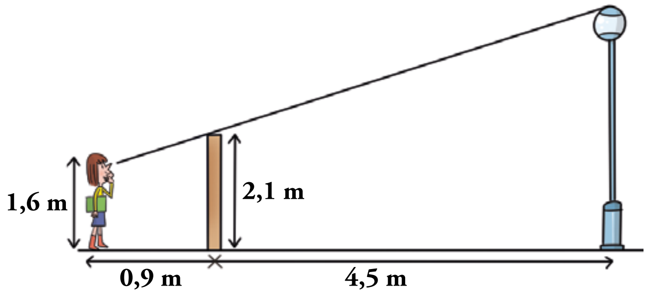
Llamando x a la distancia desde la proyección de las manos sobre el trampolín hasta el final de este, tenemos:

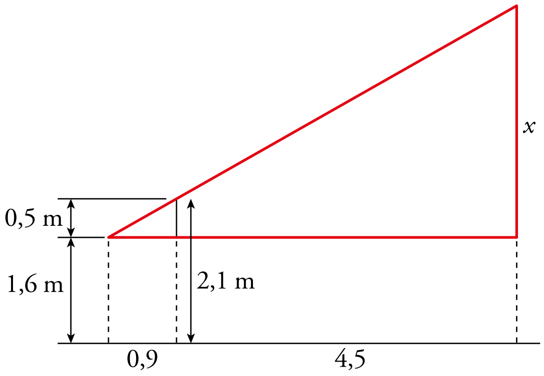


$$\frac{50}{x} = \frac{30}{150} \to x = 250 \text{ cm} = 2{,}5 \text{ m}$$

Por tanto, el trampolín mide 2,5 + 0,5 = 3 metros.

29 **¿A qué altura se encuentra el extremo superior de la farola, sabiendo que Paula lo ve alineado con el borde de la valla?**

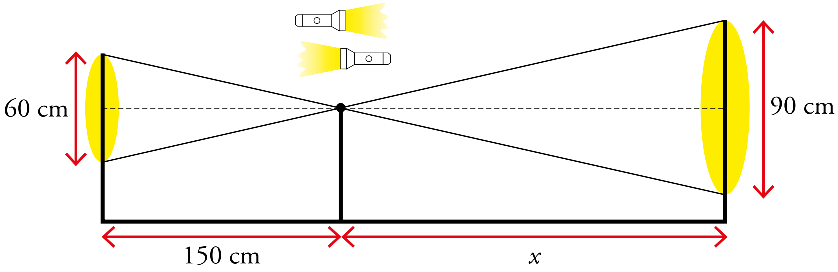




$$\frac{x}{0{,}5} = \frac{5{,}4}{0{,}9} \to x = 3$$

El extremo superior de la farola se encuentra a 3 + 1,6 = 4,6 m.

30 **Una linterna, a 1,5 m de una pared, ilumina sobre ella un círculo de 60 cm de diámetro. Y si se le da la vuelta, enfocando la pared opuesta de la habitación, el círculo iluminado tiene un diámetro de 90 cm. ¿Qué distancia separa las dos paredes?**



$$\frac{150}{60} = \frac{x}{90} \rightarrow x = 225\,\text{cm}$$

225 + 150 = 375 cm = 3,75 m

La distancia que separa las dos paredes es de 3,75 metros.

31 **El Titanic fue un barco británico que se hundió en 1912 durante su viaje inaugural. James Cameron construyó, para rodar la película *Titanic*, una réplica de unos 15 m de largo. El Titanic medía unos 270 m de largo, 30 m de ancho y 53 m de alto. Además, pesaba unas 46 000 toneladas.**

a) ¿A qué escala construyó James Cameron el barco?

b) ¿Cuánto medían el ancho y alto de la maqueta?

c) Si la maqueta se hubiera construido con los mismos materiales que el barco, ¿cuánto pesaría?

a) $\frac{15}{270} = \frac{1}{18}$ → Lo construyó a escala 1:18.

b) Ancho de la maqueta = $\frac{30}{18} \approx 1{,}67$ m

Alto de la maqueta = $\frac{53}{18} \approx 2{,}94$ m

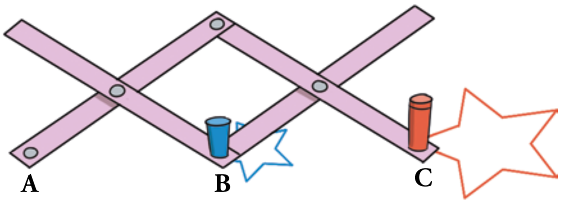
c) $46\,000 \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^3 = 7{,}8875$ toneladas = 7 887,5 kg

Página 254

INVESTIGA

Ampliadoras con cuatro palos

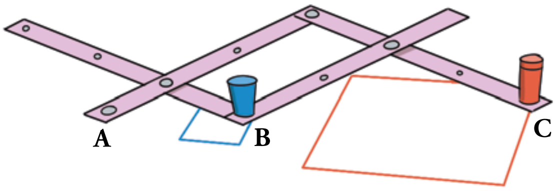
Con cuatro varillas (del material que quieras) convenientemente taladradas y unidas como se indica en la figura, se consigue un aparato con el que se pueden ampliar las figuras al doble de su tamaño.



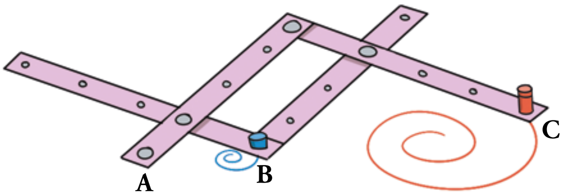
- **En A se sujeta a la mesa.**
- **En B hay un punzón que recorre la figura que se quiere reproducir.**
- **En C hay un lápiz que reproduce la figura al doble de su tamaño.**

Si hacemos en las varillas más taladros, se pueden conseguir ampliaciones diversas; es decir, semejanzas con razones distintas de 2. Por ejemplo:

- **Esta disposición sirve para ampliar el tamaño por 3.**



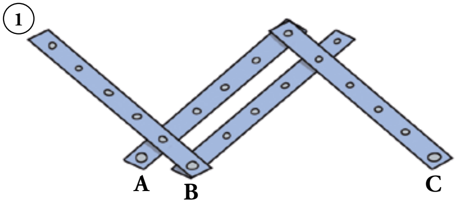
- **Y con esta otra hacemos una figura 4 veces mayor.**



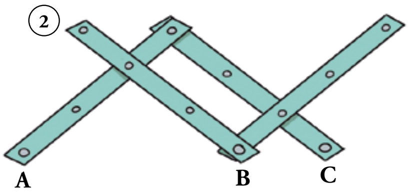
Si en estos aparatos intercambiamos el punzón y el lápiz y, además, se coloca a la derecha la figura original, la copia quedará reducida. En este caso, si el aparato ampliaba al doble de tamaño, ahora reduce a la mitad; si era el triple, a un tercio…

A raíz de lo que hemos visto, ¿sabrías decir qué ampliaciones dan los siguientes aparatos?

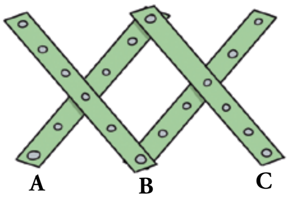
①



②



③

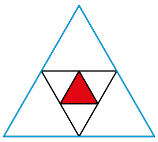


El aparato ① amplía el tamaño multiplicando por 5. El aparato ② amplía el tamaño multiplicando por 1,5. El aparato ③ multiplica los tamaños por 2,5.

Página 255

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

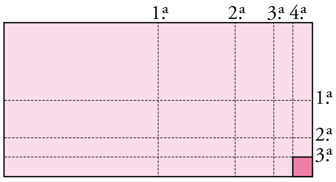
- **¿Qué fracción del triángulo grande se ha coloreado en rojo? ¿Cuál es la razón de semejanza entre estos dos triángulos?**



El triángulo rojo ocupa $\frac{1}{16}$ del triángulo grande.

La razón de semejanza entre ambos es $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$.

- **Una hoja de papel de regalo, con forma de rectángulo, tiene una superficie de 32 dm^2. Si la pliego por la mitad cuatro veces a lo largo y luego tres veces a lo ancho, obtengo un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del papel?**

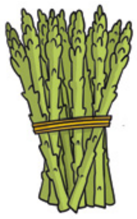


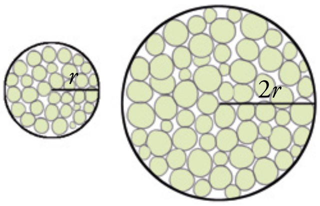
Llamando x al lado del cuadrado final, en centímetros, sus dimensiones son $16x$ y $8x$. Entonces:

$$16x \cdot 8x = 32 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow 16x = 8; \;\; 8x = 4$$

Por tanto, la hoja de papel mide 8 cm por 4 cm.

- **Una vendedora de espárragos cree duplicar la cantidad de cada manojo duplicando la longitud de la cuerda con la que los envuelve, pero se equivoca. Si la cuerda se duplica, ¿qué pasa con la cantidad de espárragos que contiene?**





La razón de las circunferencias es $\frac{1}{2}$ y, la de las áreas de los círculos, $\frac{1}{4}$.

Por tanto, doblando la longitud de la cuerda, el número de espárragos se multiplicará por 4.

- **Una alfombra de 2 m × 3 m está centrada en el suelo de una habitación rectangular y ocupa la cuarta parte del piso. Los bordes más largos de la alfombra quedan a un metro de la pared. ¿A qué distancia de la pared quedan los bordes más cortos?**

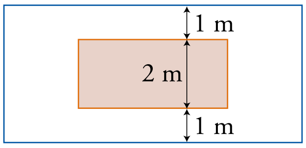
La superficie de la alfombra es de $2 \cdot 3 = 6$ m^2.

La superficie de la habitación es, pues, de 24 m^2.

La habitación tiene 4 m de ancho. Por tanto, su longitud es $24 : 4 = 6$ m.

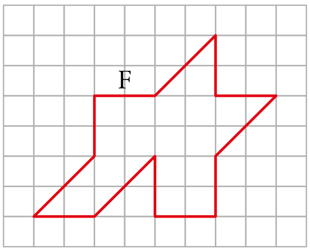
Largo de la habitación – largo de la alfombra $= 6 - 3 = 3$ m

Los bordes están a 1,5 m de las paredes.



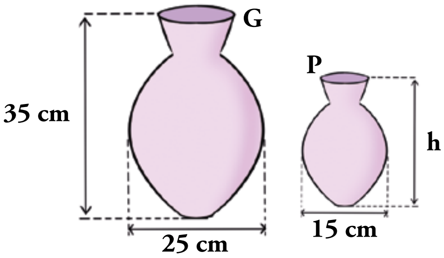
AUTOEVALUACIÓN

1 **Dibuja dos figuras, A y B, semejantes a F, de forma que la razón de semejanza entre A y F sea 2, y entre B y F, 1/2.**



Respuesta abierta.

2 **Estos dos jarrones de cristal, G y P, son semejantes.**



a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre P y G?

b) ¿Cuál es la altura, h, de P?

c) Si P, vacío, pesa 400 g, ¿en cuánto estimas el peso de G?

d) Si G tiene una capacidad de 16 litros, ¿cuántos litros caben en P?

a) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$

La razón de semejanza entre P y G es 0,6.

b) h = 35 · 0,6 = 21 cm

La altura es de 21 cm.

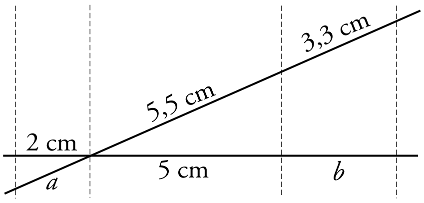
c) 400 : 0,6 = 666,7 g

El peso de G es de 666,7 g, aproximadamente.

d) 16 · 0,6 = 9,6

En P caben 9,6 litros.

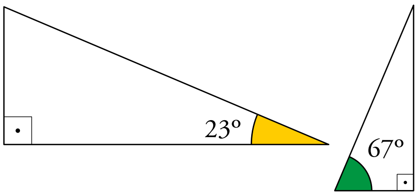
3 **Observa y calcula *a* y *b*.**



$\frac{a}{5,5} = \frac{2}{5} \rightarrow a = 2,2 \text{ cm}$

$\frac{b}{5} = \frac{3,3}{5,5} \rightarrow b = 3 \text{ cm}$

4 **Explica por qué son semejantes estos dos triángulos.**

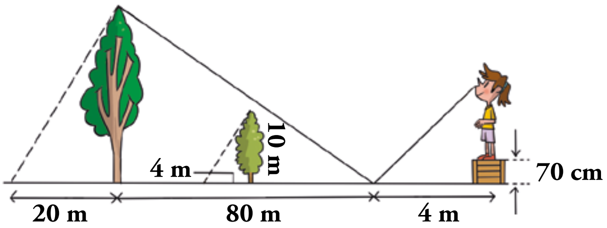


Los ángulos de un triángulo suman 180°, y como son rectángulos ambos tienen un lado de 90°: $90 + 23 + x = 180 \rightarrow x = 67$

El ángulo desconocido del primer triángulo mide 67°. Así, en el segundo triángulo rectángulo, su ángulo desconocido será de 23°.

Ambos triángulos tienen los tres ángulos iguales y, por tanto, son semejantes.

5 **Manuela se ha subido a una caja desde donde ve reflejada en un charco la copa de un árbol.**



Teniendo en cuenta las medidas, calcula:

a) La altura del árbol.

b) La altura de Manuela.

a) Calculamos la altura del árbol por semejanza de los triángulos *ABC* y *A'B'C'*:

$$\frac{h}{20} = \frac{10}{4} \rightarrow 4h = 200 \rightarrow h = 50$$

El árbol mide 50 metros de altura.

b) Como Manuela ve el árbol reflejado, los dos ángulos α son iguales y, por tanto, los triángulos *CBD* y *FED* son semejantes. Por tanto:

$$\frac{80}{4} = \frac{50}{x + 0{,}7} \rightarrow 80 \cdot (x + 0{,}7) = 200 \rightarrow x = 1{,}80$$

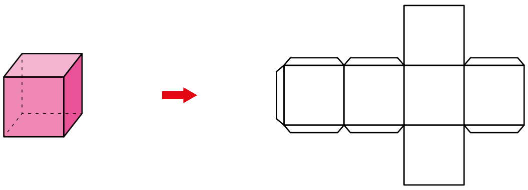
Manuela mide 1,80 metros de altura.

13 CUERPOS GEOMÉTRICOS

Página 256

Investiga, experimenta y aplica lo que sabes

1 **Para construir un cubo de 2 cm de arista, se han necesitado 24 cm^2 de cartulina (sin contar las solapas).**

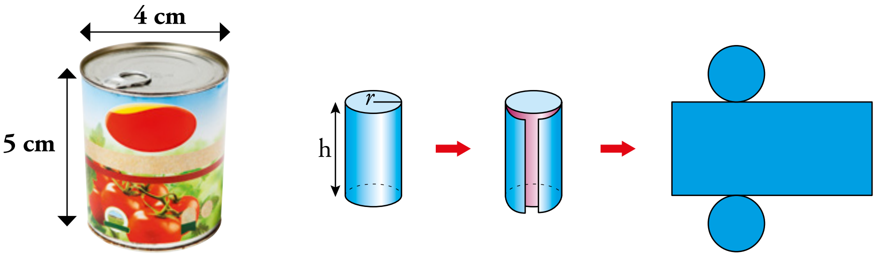


¿Cuál de las siguientes cantidades de cartulina se necesitan para construir otro cubo de 4 cm de arista?

30 cm^2 más | **El doble** | **El cuádruplo** | **30 cm^2 menos**

El cuádruplo, 96 cm^2.

2 **¿Sabrías calcular, en centímetros cuadrados, la cantidad de chapa que lleva este bote de conserva?**



RECUERDA: **Longitud de la circunferencia → $2\pi \cdot r$**

Superficie del círculo → $\pi \cdot r^2$

La superficie del círculo: $\pi \cdot 2^2 = 12{,}56$ cm^2

La superficie del rectángulo: $5 \cdot 2\pi \cdot 2 = 62{,}8$ cm^2

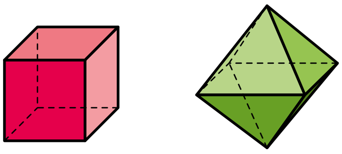
Superficie total: $12{,}56 + 12{,}56 + 62{,}8 = 87{,}92$ cm^2

Lleva 88 cm^2 de chapa, aproximadamente.

Página 257

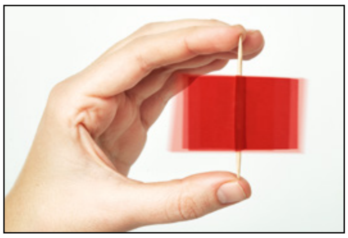
Estudia propiedades de los cuerpos

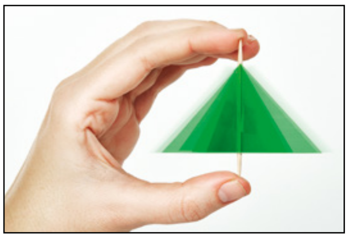
3 **Cuenta y compara las caras, las aristas y los vértices del cubo y del octaedro.**



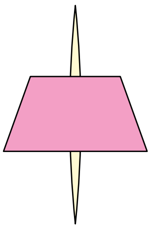
	CUBO	OCTAEDRO
CARAS	6	8
ARISTAS	12	12
VÉRTICES	8	6

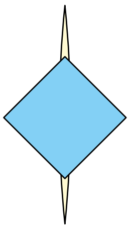
4 **Construye, manipula y observa.**

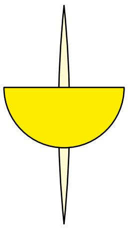


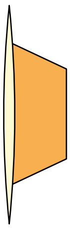


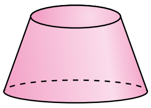
¿Qué cuerpos geométricos se visualizan al hacer girar estas cartulinas tomando como eje el correspondiente palillo?



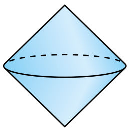




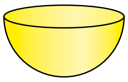




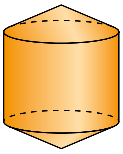
Tronco de cono.



Dos conos unidos por la base.



Media esfera.



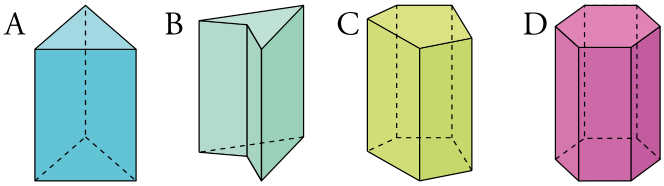
Cilindro con un cono en cada base.

1 PRISMAS

Página 258

Para practicar

1 **Observa los siguientes prismas:**



a) Clasifícalos según sea su base.

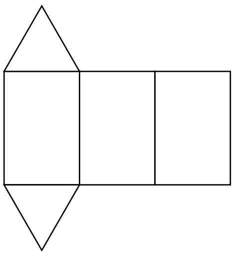
b) Indica cuáles son regulares.

c) Dibuja el desarrollo plano del prisma A.

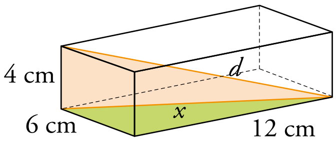
a) A: Triangular
B: Cuadrangular
C: Pentagonal
D: Hexagonal

b) Son regulares el A y el D.

c)



2 **Copia y completa para calcular la diagonal de un ortoedro de dimensiones 4 cm, 6 cm y 12 cm.**



Los triángulos coloreados son rectángulos. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$\boldsymbol{x^2 = 12^2 + 6^2}$

$\boldsymbol{d^2 = x^2 + 4^2 = \ldots^2 + \ldots^2 + \ldots^2 = \ldots \;\to\; d = \sqrt{\ldots} = 14}$ **cm**

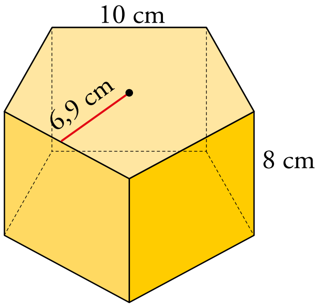
Solución: **La diagonal del ortoedro mide 14 cm.**

$d^2 = x^2 + 4^2 = 12^2 + 6^2 + 4^2 = 196 \to d = \sqrt{196} = 14$ cm

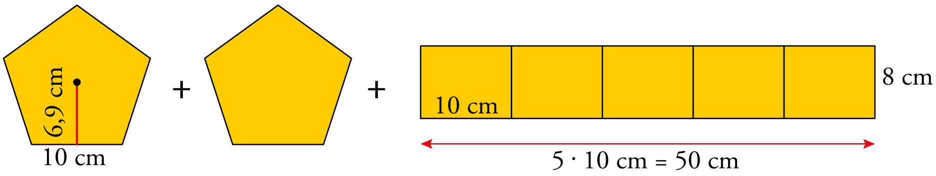
Página 259

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.



1 **Calcula el área de este prisma pentagonal regular.**

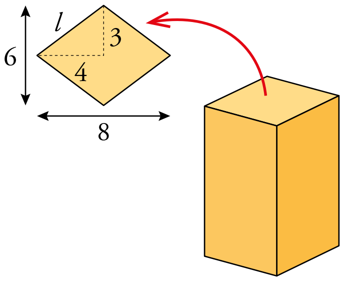


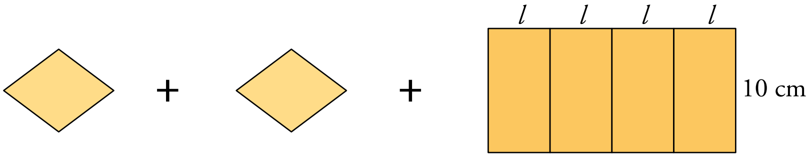
$$\mathbf{A_{BASE} = \frac{perímetro \cdot apotema}{2} = \frac{\ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots\ cm^2}$$

$$\mathbf{A_{LATERAL} = perímetro\ de\ la\ base \cdot altura = \ldots \cdot \ldots = \ldots\ cm^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{BASE} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{50 \cdot 6{,}9}{2} = 172{,}5\ \text{cm}^2 \\ A_{LATERAL} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = 50 \cdot 8 = 400\ \text{cm}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE} = \\ = 400 + 2 \cdot 172{,}5 = 745\ \text{cm}^2 \end{array}$$

2 **Las bases de un prisma recto son rombos cuyas diagonales miden 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Halla su área total.**





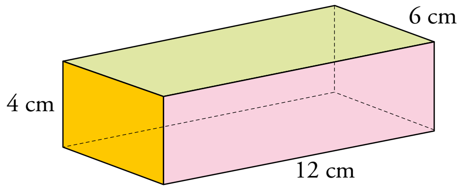
Utilizando el teorema de Pitágoras: $\mathbf{l = \sqrt{3^2 + \ldots^2} = \ldots\ cm}$

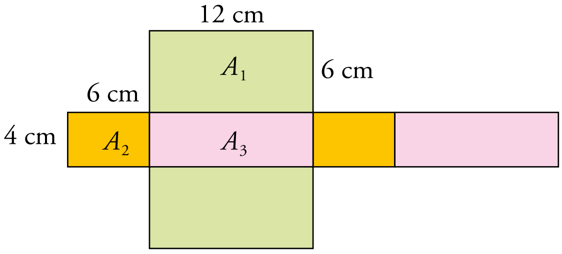
Perímetro de la base: $\mathbf{P = 4 \cdot l = \ldots\ cm}$; **Altura:** $\mathbf{h = \ldots\ cm}$

$$\mathbf{\left.\begin{array}{l} A_{BASE} = \dfrac{diagonal_1 \cdot diagonal_2}{2} = \dfrac{\ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots\ cm^2 \\ A_{LATERAL} = P \cdot h = \ldots \cdot \ldots = \ldots\ cm^2 \end{array}\right\} A_{TOTAL} = \ldots + 2 \cdot \ldots = 248\ cm^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{BASE} = \dfrac{\text{diagonal}_1 \cdot \text{diagonal}_2}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ \text{cm}^2 \\ A_{LATERAL} = P \cdot \text{h} = 20 \cdot 10 = 200\ \text{cm}^2 \end{array}\right\} A_{TOTAL} = 200 + 2 \cdot 24 = 248\ \text{cm}^2$$

3 **Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 4 cm, 6 cm y 12 cm. Como las caras son iguales dos a dos, podemos actuar de una forma más directa:**





$\mathbf{A_1 = 12 \cdot 6 = \ldots\ cm^2}$

$\mathbf{A_2 = 4 \cdot \ldots = \ldots\ cm^2}$

$\mathbf{A_3 = \ldots \cdot \ldots = \ldots\ cm^2}$

$$\mathbf{A_{TOTAL} = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (\ \ldots + \ldots + \ldots) = 288\ cm^2}$$

$A_1 = 12 \cdot 6 = 72\ \text{cm}^2$ $\qquad A_2 = 4 \cdot 6 = 24\ \text{cm}^2$ $\qquad A_3 = 4 \cdot 12 = 48\ \text{cm}^2$

$$A_{TOTAL} = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (72 + 24 + 48) = 288\ \text{cm}^2$$

2 PIRÁMIDES

Página 261

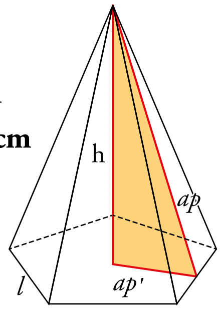
Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Halla el área total de esta pirámide pentagonal regular.**

Empezamos calculando la apotema, *ap*, de la pirámide.

Ten en cuenta que el triángulo coloreado es rectángulo (la hipotenusa es *ap*, y los catetos *ap'* y h).



$l = 8$ cm
h = 18 cm
$ap' = 5{,}5$ cm

$$ap = \sqrt{h^2 + (ap')^2} = \sqrt{\ldots + \ldots} = \sqrt{\ldots} \approx \ldots \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \frac{(5 \cdot \ldots) \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{(5 \cdot \ldots) \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \ldots + \ldots = 486 \text{ cm}^2$$

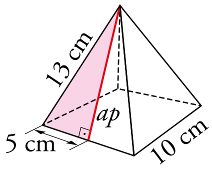
$$ap = \sqrt{h^2 + (ap')^2} = \sqrt{324 + 30{,}25} = \sqrt{354{,}25} \approx 18{,}8 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \frac{(5 \cdot 8) \cdot 5{,}5}{2} = 110 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{(5 \cdot 8) \cdot 18{,}8}{2} = 376 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 110 + 376 = 486 \text{ cm}^2$$

2 **Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y su arista lateral mide 13 cm.**



Empezamos calculando la apotema, *ap*, de la pirámide. Ten en cuenta que el triángulo coloreado es rectángulo (la hipotenusa es 13, y los catetos *ap* y 5).

$$ap = \sqrt{13^2 - \ldots^2} = \sqrt{\ldots - \ldots} = \sqrt{\ldots} = \ldots \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \ldots^2 = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{4 \cdot \ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \ldots + \ldots = 340 \text{ cm}^2$$

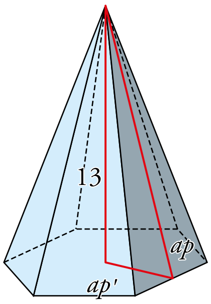
$$ap = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

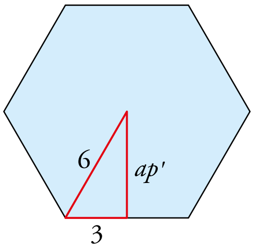
$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 12}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 100 + 240 = 340 \text{ cm}^2$$

3 **Calcula las superficies lateral y total de una pirámide hexagonal regular de 13 cm de altura sabiendo que el radio de su base mide 6 cm.**



Calculamos la apotema de la pirámide, *ap*, y la apotema de la base, *ap'*. Recuerda que en un hexágono regular el radio es igual al lado. Por tanto:



$(ap')^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \rightarrow ap' = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ cm

$ap = \sqrt{\ldots^2 + (ap')^2} = \sqrt{\ldots + 27} = \sqrt{\ldots} = \ldots$ cm

$A_{BASE} = \dfrac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \dfrac{6 \cdot \ldots \cdot \ldots}{2} \approx \ldots \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL} = \dfrac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \dfrac{6 \cdot \ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \ldots + \ldots = 345{,}6 \text{ cm}^2$

$ap = \sqrt{13^2 + (ap')^2} = \sqrt{169 + 27} = \sqrt{197} = 14$ cm

$A_{BASE} = \dfrac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} \approx 93{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL} = \dfrac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 14}{2} = 252 \text{ cm}^2$

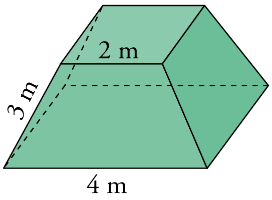
$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 93{,}6 + 252 = 345{,}6 \text{ cm}^2$

3 TRONCOS DE PIRÁMIDE

Página 262

Para fijar ideas

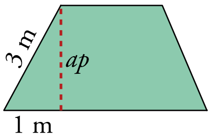
Copia y completa en tu cuaderno.



1 **Halla el área lateral y el área total del tronco de pirámide cuadrangular regular.**

Empezamos calculando la apotema (altura de la cara lateral):

$$\boldsymbol{ap = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2{,}83 \text{ m}}$$



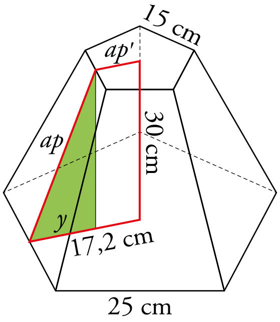
$$\boldsymbol{A_{\text{LATERAL}} = \frac{4 \cdot \ldots + 4 \cdot \ldots}{2} \cdot \ldots = 33{,}96 \text{ m}^2}$$

$$\boldsymbol{A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE MAYOR}} + A_{\text{BASE MENOR}} = \ldots + 4^2 + \ldots^2 = 53{,}96 \text{ m}^2}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{4 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{2} \cdot 2{,}83 = 33{,}96 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE MAYOR}} + A_{\text{BASE MENOR}} = 33{,}96 + 4^2 + 2^2 = 53{,}96 \text{ m}^2$$

2 **Calcula el área lateral del tronco de pirámide que ves en la figura.**



Teniendo en cuenta que ambas bases son polígonos semejantes, calculamos la apotema, *ap'*, de la base menor es:

$$\boldsymbol{\frac{25}{15} = \frac{17{,}2}{ap'} \to ap' = \frac{15 \cdot 17{,}2}{25} = 10{,}32 \text{ cm}}$$

Calculamos la apotema del tronco de pirámide. El triángulo coloreado es rectángulo. La hipotenusa es *ap*, un cateto 30 y el otro $y = 17{,}2 - ap' = \ldots$

$$\boldsymbol{ap = \sqrt{30^2 + \ldots^2} \approx 30{,}78 \text{ cm}} \qquad \boldsymbol{A_{\text{LATERAL}} = \frac{5 \cdot \ldots + 5 \cdot \ldots}{2} \cdot \ldots = 3\,078 \text{ cm}^2}$$

$$y = 17{,}2 - ap' = 6{,}9$$

$$ap = \sqrt{30^2 + 6{,}9^2} \approx 30{,}78 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{5 \cdot 25 + 5 \cdot 15}{2} \cdot 30 = 3\,078 \text{ cm}^2$$

Página 263

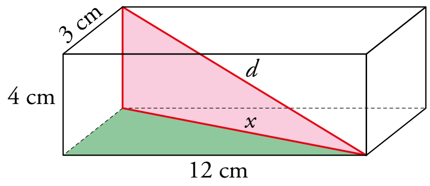
Para practicar

1 **Halla el área total de un cubo de 10 cm de arista.**

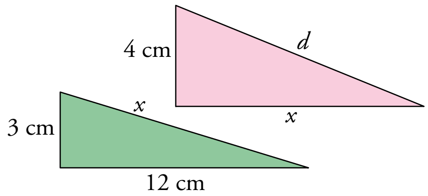
Cada cara: $A = 100 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 600 \text{ cm}^2$

2 **Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 3 cm y 12 cm. Halla el área total y la longitud de la diagonal.**



Observa que los dos triángulos coloreados son rectángulos. Si calculas primero x, después puedes calcular d.



$x^2 = 3^2 + 12^2$

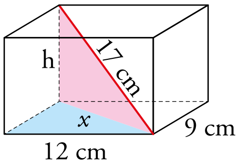
$d^2 = x^2 + 4^2 = 3^2 + 12^2 + 4^2 = 169 \rightarrow d = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$

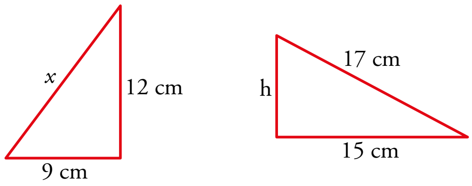
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 12) = 192 \text{ cm}^2$

3 **La base de un ortoedro es un rectángulo de lados 9 cm y 12 cm. La diagonal del ortoedro mide 17 cm. Calcula la altura del ortoedro y su área total.**

$\boldsymbol{x^2 = \ldots^2 + \ldots^2}$

$\mathbf{h^2 = 17^2 - x^2}$





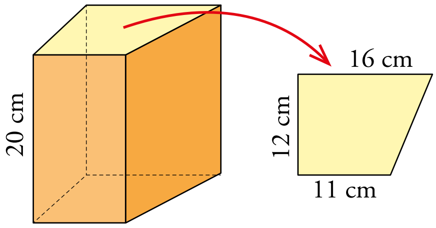
$x = 15 \text{ cm}$

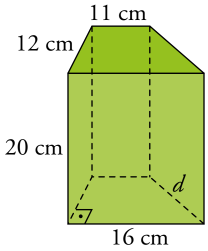
$\text{h} = 8 \text{ cm}$

La altura es 8 cm.

$A_{\text{TOTAL}} = 2(9 \cdot 12 + 9 \cdot 8 + 8 \cdot 12) = 552 \text{ cm}^2$

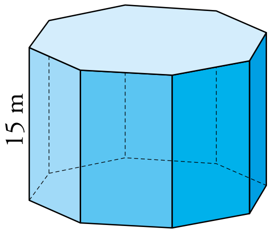
4 **La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios rectángulos cuyas bases miden 11 cm y 16 cm, respectivamente, y la altura, 12 cm. Halla el área total del prisma.**

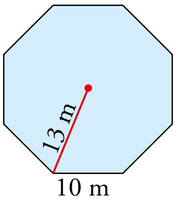




$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{LATERAL}} = 1\,040 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{BASE}} = 162 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Su área total es de } 1\,364 \text{ cm}^2.$$

5 **La altura de un prisma octogonal regular mide 15 m, el lado de la base 10 m y el radio de la misma 13 m. Calcula su área total.**





Para encontrar el área de la base debemos encontrar el área de los 8 triángulos isósceles que la forman, de lados iguales 13 m y lado desigual 10 m. Para ello, calculamos su altura, ap':

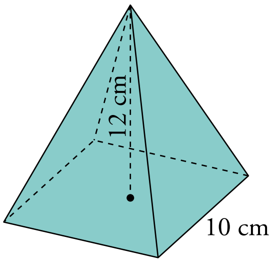
$$ap' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$$

$$A_{\text{BASE}} = 8 \cdot A_{\text{TRIÁNGULO}} = 8 \cdot \frac{10 \cdot 12}{2} = 480 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{LATERAL}} = 8 \cdot A_{\text{RECTÁNGULO}} = 8 \cdot 10 \cdot 15 = 1\,200 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 480 + 1\,200 = 2\,160 \text{ m}^2$$

6 **Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y cuya altura es de 12 cm.**

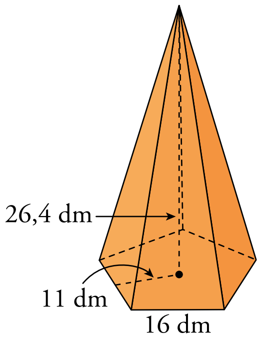


$a' = 5$ cm

Apotema de la pirámide, $ap = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm

$$A_{\text{TOTAL}} = 100 + \frac{40 \cdot 13}{2} = 360 \text{ cm}^2$$

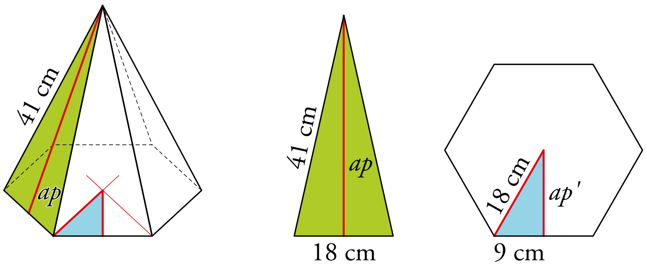
7 **La base de una pirámide regular es un pentágono de 16 dm de lado y 11 dm de apotema. La altura de la pirámide es de 26,4 dm. Halla su área total.**



Apotema, $ap = \sqrt{26,4^2 + 11^2} = 28,6$ dm

$A_{\text{TOTAL}} = \dfrac{16 \cdot 5 \cdot 11}{2} + \dfrac{16 \cdot 5 \cdot 28,6}{2} = 1\,584 \text{ dm}^2$

8 **Calcula el área total de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el lado de la base mide 18 cm y la arista lateral 41 cm.**



$ap' = \sqrt{18^2 - 9^2} = 15,6$ cm

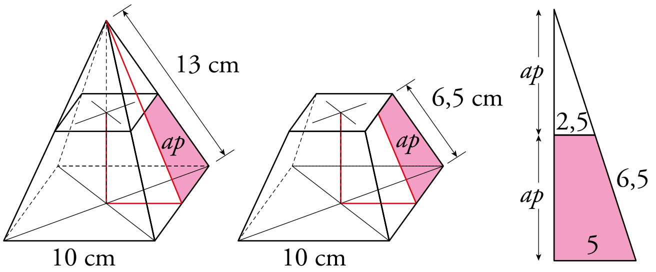
$A_{\text{BASE}} = 6 \cdot \dfrac{18 \cdot 15,6}{2} = 6 \cdot 140,4 = 842,4 \text{ cm}^2$

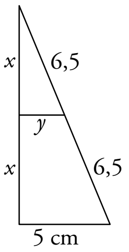
$ap = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \dfrac{18 \cdot 40}{2} = 2\,160 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 842,4 + 2\,160 = 3\,002,4 \text{ cm}^2$

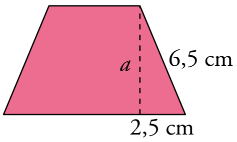
9 **Una pirámide regular de base cuadrada, de 10 cm de lado y arista lateral de 13 cm, se corta por un plano a mitad de su altura. Halla el área total del tronco de pirámide resultante.**





$$\frac{5}{y} = \frac{13}{6,5} \to y = 2,5$$

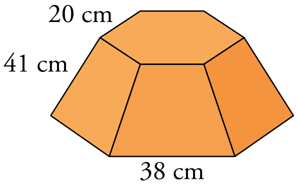
$$x = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ cm}$$

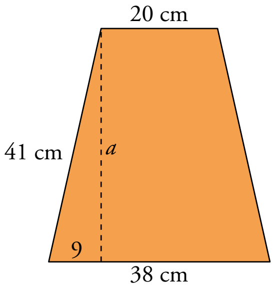


$$a = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE MENOR}} = 25 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{BASE MAYOR}} = 100 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \left(\frac{10 + 5}{2}\right) \cdot 6 = 180 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} A_{\text{TOTAL}} = 25 + 100 + 180 = 305 \text{ cm}^2$$

10 **Halla el área lateral de un tronco de pirámide hexagonal regular cuyas dimensiones son las del dibujo.**





$$a = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{6 \cdot 20 + 6 \cdot 38}{2} \cdot 40 = 6\,960 \text{ cm}^2$$

4 ▶ POLIEDROS REGULARES

Página 264

Para practicar

1 **Considerando la suma de los ángulos que coinciden en cada vértice, justifica por qué no se puede construir un poliedro en los siguientes casos:**

a) Con 6 triángulos equiláteros en cada vértice.

b) Con 4 cuadrados en cada vértice.

c) Con 4 pentágonos regulares en cada vértice.

d) Con hexágonos regulares o polígonos regulares de más lados.

a) Sumarían 360° y eso es plano, no se puede torcer.

b) También suman 360°, y es plano.

c) Miden 432° y eso es más que un plano. Se superpondrían.

d) Con tres hexágonos suman 360°, es un plano; y con solo dos no se puede formar. Los poliedros regulares de más lados tienen ángulos mayores que 360° y, por tanto, no podemos, puesto que se superpondrían.

Página 265

Para practicar

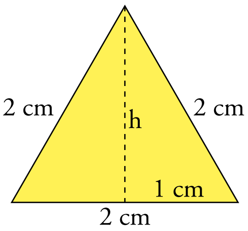
2 **Halla el área de:**

a) Un triángulo equilátero de lado 2 cm.

b) Un cuadrado de lado 2 cm.

c) Un pentágono regular de lado 2 cm y apotema 1,38 cm.

a)



$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}73 \text{ cm}$$

$$A = \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} = 1{,}73 \text{ cm}^2$$

b) $A = 4 \text{ cm}^2$

c) $A = \dfrac{(5 \cdot 2) \cdot 1{,}38}{2} = 6{,}9 \text{ cm}^2$

3 **Con los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, halla el área de:**

a) Un tetraedro.

b) Un cubo.

c) Un octaedro.

d) Un dodecaedro.

e) Un icosaedro.

Todos ellos de arista 2 cm.

Tomamos los datos obtenidos en el ejercicio anterior.

a) $A = 4 \cdot 1{,}73 = 6{,}9 \text{ cm}^2$

b) $A = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$

c) $A = 8 \cdot 1{,}73 = 13{,}84 \text{ cm}^2$

d) $A = 12 \cdot 6{,}9 = 82{,}8 \text{ cm}^2$

e) $A = 20 \cdot 1{,}73 = 34{,}6 \text{ cm}^2$

5 ▸ SECCIONES PLANAS DE POLIEDROS

Página 267

Para practicar

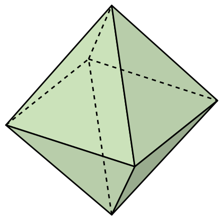
1 Indica por dónde hay que cortar este octaedro regular para obtener:

a) Un cuadrado.

b) El cuadrado más grande posible.

c) Un trapecio.

d) Un trapezoide.



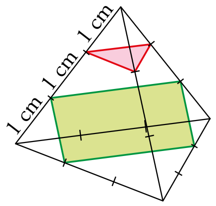
a) Por un plano perpendicular a su diagonal.

b) Por un plano perpendicular a la diagonal en la mitad de la misma, esto es, por el centro del octaedro.

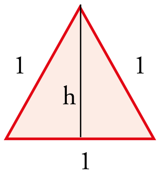
c) El plano del apartado b) lo inclinamos tomando como eje sobre el que gira una de las aristas del cuadrado.

d) El plano del apartado c) lo inclinamos para que no sea paralelo a las aristas del octaedro.

2 Observa dos secciones de un tetraedro regular de 3 cm de arista. La roja es paralela a la base, y la verde, paralela a una de las aristas. Calcula el área de cada una.



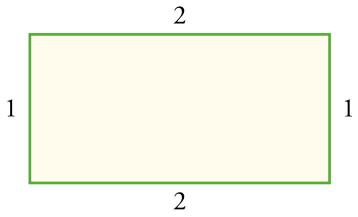
El área de la sección roja, que es un triángulo equilátero de lado 1 cm:



$$h = \sqrt{1 - 0{,}5^2} = 0{,}9$$

$$A_{\text{ROJA}} = \frac{1 \cdot h}{2} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45 \text{ cm}^2$$

El área de la sección verde, que es un rectángulo:

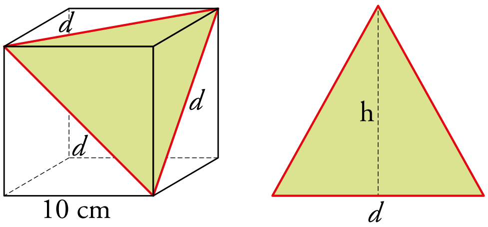


$$A_{\text{VERDE}} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ cm}^2$$

3 **La sección que ves en la imagen es el mayor triángulo equilátero que se puede obtener cortando el cubo.**

a) Calcula el lado, *d*, y la altura, h.

b) Calcula el área.



a) Encontramos *d* a partir del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 10 cm y *d* es su hipotenusa, aplicando el teorema de Pitágoras:

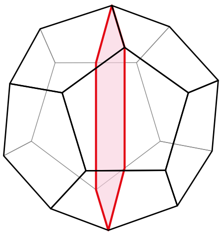
$$d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ cm}$$

Buscamos ahora h aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo dibujado:

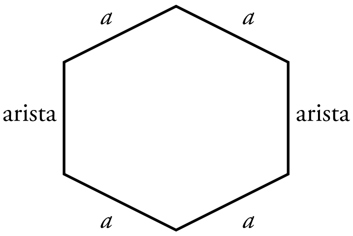
$$h = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{196 - 50} = 12{,}08 \text{ cm}$$

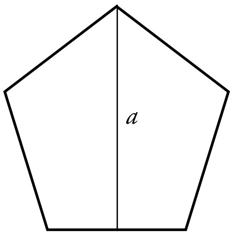
b) $A = \frac{d \cdot h}{2} = 85{,}41 \text{ cm}^2$

4 **¿Qué polígono se obtiene al cortar un dodecaedro en dos mitades iguales por un plano que contiene a dos aristas opuestas? ¿Es un polígono regular? Justifica tu respuesta.**



Obtendremos un hexágono irregular, solamente dos lados serán aristas del dodecaedro, y los otros cuatro serán iguales a *a*:



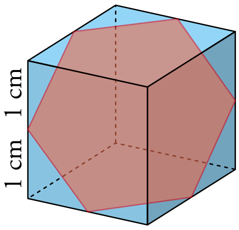


5 **Cortando un cubo de esta forma se obtiene un hexágono regular.**

a) ¿Cuánto mide el lado? ¿Y la apotema?

b) Calcula su área.

c) ¿Qué volumen tiene cada una de las partes en que queda dividido?

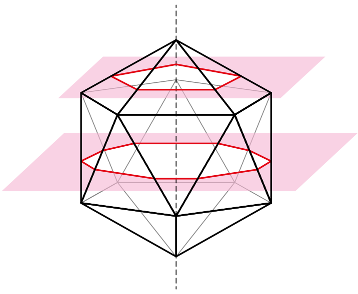


a) El lado mide $\sqrt{2}$ = 1,41 cm y la apotema 1,22 cm.

b) El área mide $\frac{6 \cdot 1,41 \cdot 1,22}{2}$ = 5,16 cm^2.

c) Cada parte tendrá la mitad del volumen del cubo, puesto que el corte divide al cubo en dos partes iguales, así que el volumen de cada parte será de 4 cm^3.

6 **¿Qué polígonos se obtienen al cortar un icosaedro por un plano perpendicular al eje que une dos vértices opuestos? ¿Son regulares?**



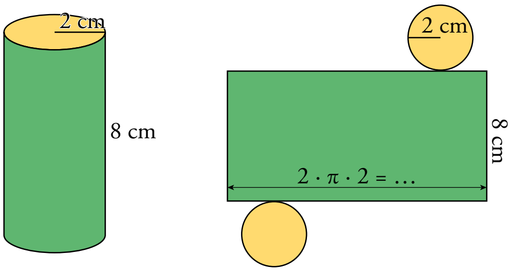
El resultado será un pentágono regular cuyo lado son las aristas del icosaedro, pasando por los vértices marcados en rojo.

6 ▶ CILINDROS

Página 268

Para fijar ideas

1 **Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 2 cm de radio y cuya altura es de 8 cm.**

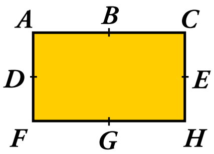


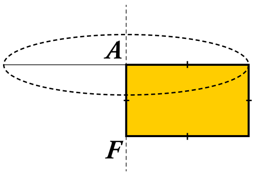
Copia y completa:

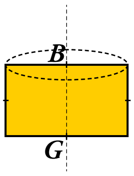
- **La superficie lateral es un…**
- **La base mide: $b = 2\pi \cdot \ldots = \ldots$ cm**
- **Y la altura: h = … cm**
- La superficie lateral es un rectángulo.
- La base mide: $b = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ cm
- Y la altura: h = 8 cm

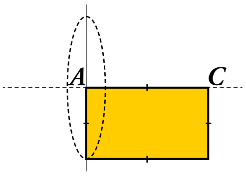
2 **Dibuja en tu cuaderno los cilindros que se generan al hacer girar este rectángulo alrededor de:**

a) ***AF***
b) ***BG***
c) ***AC***

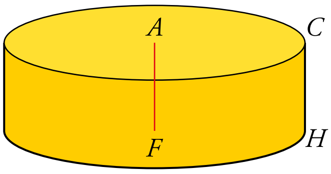




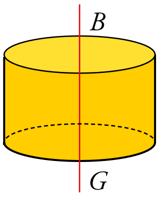




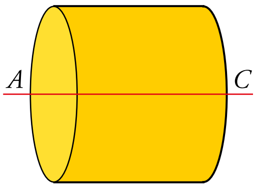
a)



b)



c)

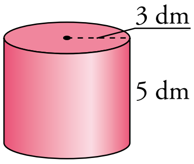


3 **Halla el área lateral y el área total de un cilindro de revolución de 5 dm de altura y 3 dm de radio de la base. Copia y completa:**

$\mathbf{A_{LATERAL} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot \ldots \cdot \ldots = \ldots\ dm^2}$

$\mathbf{A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot \ldots^2 = \pi \cdot \ldots = \ldots\ dm^2}$

$\mathbf{A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE} = \ldots + \ldots = 150{,}72\ dm^2}$



$A_{LATERAL} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}2\ dm^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 9 = 28{,}26\ dm^2$

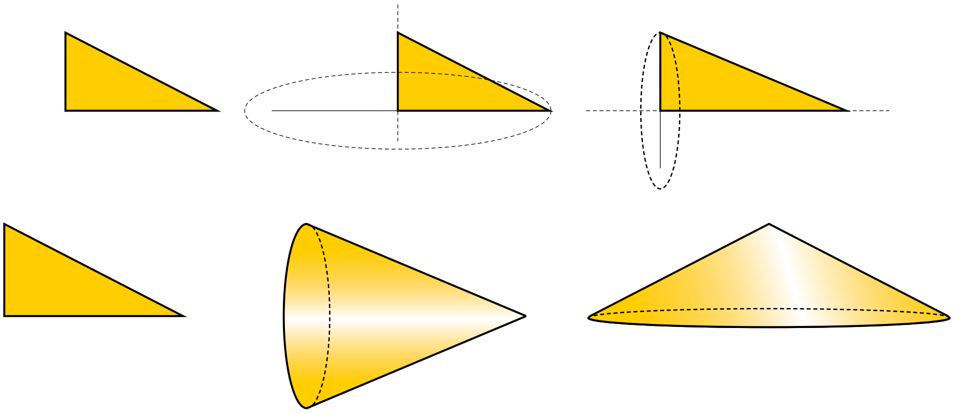
$A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE} = 94{,}2 + 56{,}52 = 150{,}72\ dm^2$

7 CONOS

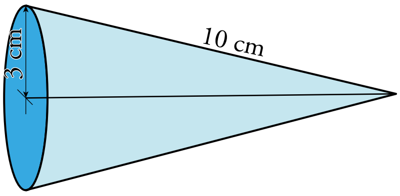
Página 269

Para fijar ideas

1 **Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo. Después, dibuja el cono que se genera al hacerlo girar alrededor de cada cateto.**



2 **La generatriz de un cono mide 10 cm y el radio de la base 3 cm. Calcula el área lateral y el área total. Copia y completa.**



$\boldsymbol{A_{\text{LATERAL}} = \pi r g = \pi \cdot \ldots \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^2}$

$\boldsymbol{A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot \ldots^2 = \pi \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^2}$

$\boldsymbol{A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE}} = \ldots + \ldots = 122{,}46 \text{ cm}^2}$

$A_{\text{LATERAL}} = \pi r g = \pi \cdot 3 \cdot 10 = 94{,}2 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 9 = 28{,}26 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE}} = 94{,}2 + 28{,}26 = 122{,}46 \text{ cm}^2$

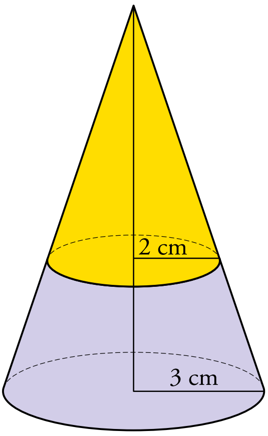
8 TRONCOS DE CONO

Página 270

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Un cono recto tiene un radio de 3 cm en la base y una superficie lateral de 90 cm^2. Un plano paralelo a la base lo corta dando una sección de 2 cm de radio. ¿Cuál es la superficie lateral del tronco de cono resultante del corte?**



Tras el corte, tenemos dos conos semejantes: el original y el que ves coloreado de amarillo, más pequeño.

La razón de semejanza es $k = \frac{r'}{r} = \frac{2}{3}$**. Y la razón de sus áreas es** $k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$**.**

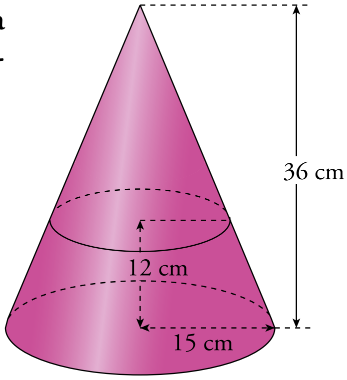
$A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{4}{9} \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRONCO DE CONO}} = A_{\text{CONO GRANDE}} - A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \ldots - \ldots = 50 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{4}{9} \cdot 90 = 40 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRONCO DE CONO}} = A_{\text{CONO GRANDE}} - A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = 90 - 40 = 50 \text{ cm}^2$

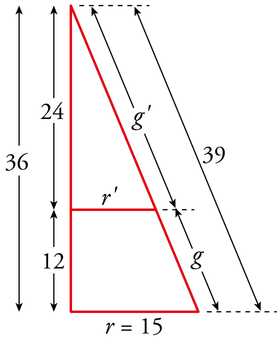
2 **Un cono, cuya base tiene 15 cm de radio y cuya altura es de 36 cm, se corta por un plano paralelo a la base y a 12 cm de la misma. Calcula las dimensiones y el área lateral del tronco de cono resultante.**



Calculamos la generatriz del cono con el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \sqrt{\ldots} = 39 \text{ cm}$$

Y recurrimos a la semejanza para calcular las medidas del tronco de cono:



$\frac{r'}{24} = \frac{15}{\ldots} \rightarrow r' = \frac{24 \cdot \ldots}{\ldots} = 10 \text{ cm}$

$\frac{g'}{24} = \frac{39}{\ldots} \rightarrow g' = \frac{24 \cdot \ldots}{\ldots} = 26 \text{ cm}$

$g = 39 - g' = 39 - 26 = 13 \text{ cm}$

El área lateral del tronco de cono es el área lateral del cono de altura 36 cm menos la del cono de altura 24 cm:

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 15 \cdot 39 - \pi \cdot \ldots \cdot \ldots = 325\pi \approx 1\,021 \text{ cm}^2$$

$\sqrt{36^2 + 15^2} = \sqrt{1521} = 39 \text{ cm}$

$\frac{r'}{24} = \frac{15}{36} \rightarrow r' = \frac{24 \cdot 15}{36} = 10 \text{ cm}$

$\frac{g'}{24} = \frac{39}{36} \rightarrow g' = \frac{24 \cdot 39}{36} = 26 \text{ cm}$

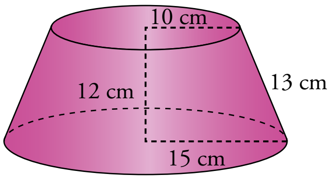
$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 15 \cdot 39 - \pi \cdot 10 \cdot 26 = 325\pi \approx 1\,021 \text{ cm}^2$

Página 271

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

3 **Calcula, aplicando las fórmulas anteriores, el área del tronco de cono visto en el último ejercicio de la página anterior.**



Atendiendo a las fórmulas, solo necesitamos tres datos:

$r = 15$ cm

$r' = 10$ cm

$g = 13$ cm

Entonces:

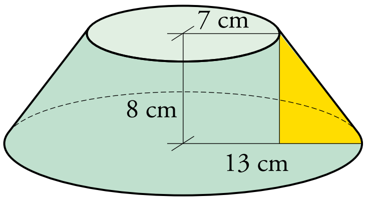
$A_{LATERAL} = \pi(r + r')g = \pi(\dots + \dots) \cdot \dots = \dots\pi \approx \dots \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = \dots + \pi \cdot 15^2 + \pi \cdot \dots^2 \approx 2042 \text{ cm}^2$

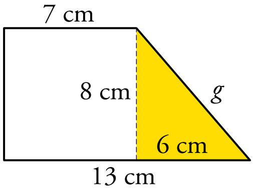
$A_{LATERAL} = \pi(r + r')g = \pi(15 + 10) \cdot 13 = 325\pi \approx 1021 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = 1021 + \pi \cdot 15^2 + \pi \cdot 10^2 \approx 2042 \text{ cm}^2$

4 **Calcula el área del tronco de cono.**



Conocemos r y r'. Solo nos falta la generatriz, g, que obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo coloreado:



$g = \sqrt{\dots^2 + \dots^2} = \sqrt{\dots} = 10$ **cm**

Tenemos por tanto:

$r = 13$ cm **$r' = 7$ cm** **$g = 10$ cm**

$A_{LATERAL} = \pi(r + r')g = \pi(\dots + \dots) \cdot \dots = \dots\ \pi \approx \dots \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = \dots + \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot \dots^2 \approx 1313 \text{ cm}^2$

$g = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

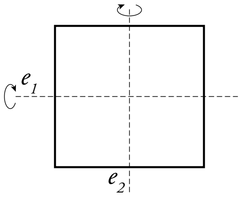
$A_{LATERAL} = \pi(r + r')g = \pi(13 + 7) \cdot 10 = 200\ \pi \approx 628 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = 628 + \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot 7^2 \approx 1313 \text{ cm}^2$

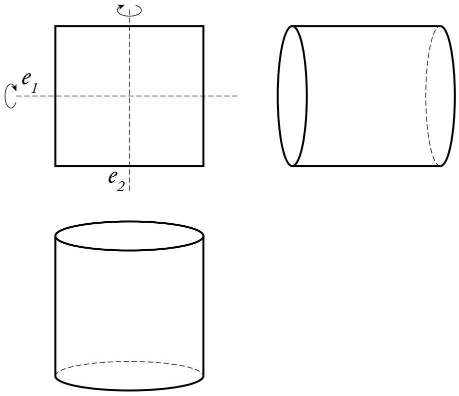
Página 272

Para practicar

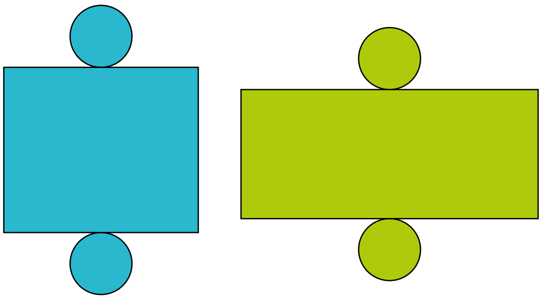
1 **Dibuja en tu cuaderno un cuadrado y traza los ejes de simetría paralelos a los lados.**



Dibuja los cilindros que se generan al girar el cuadrado alrededor de cada uno de esos ejes.

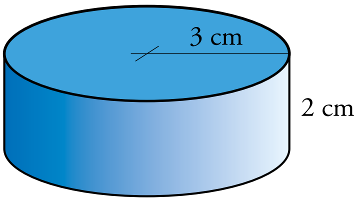


2 **Toma algunas medidas y decide cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cilindro.**

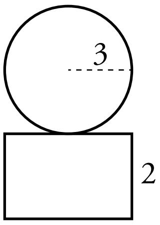


El primero.

3 **Dibuja el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 3 cm de radio y la altura es de 2 cm.**



Calcula el área lateral y el área total.



$$A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 2 = 37{,}68 \text{ cm}^2$$
$$A_{\text{TOTAL}} = 37{,}68 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 37{,}68 + 56{,}52 = 94{,}2 \text{ cm}^2$$

4 **¿Qué cantidad de chapa se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 0,6 m de radio de la base y 1,8 m de altura?**

$2 \cdot \pi \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot \pi \cdot 0{,}6^2 = 2{,}16\pi + 0{,}72\pi = 9{,}0432$

Se necesitan 9,0432 m^2 de chapa.

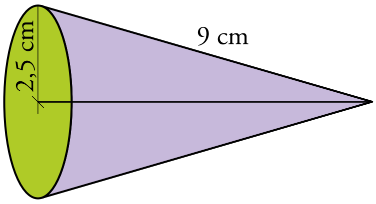
5 **Se han de impermeabilizar el suelo y las paredes interiores de un aljibe cilíndrico abierto por arriba. El radio de su base mide 4 m, y la altura, 5 m. Si cuesta 18 € impermeabilizar 1 m^2, ¿cuál es el coste de toda la obra?**

$A_{\text{ALJIBE}} = 2\pi \cdot 4 \cdot 5 + \pi \cdot 16 = 56\pi = 175{,}84 \text{ m}^2$

$175{,}84 \text{ m}^2 \cdot 18 \text{ €/m}^2 = 3\,165{,}12 \text{ €}$

El coste será de 3 165,12 €.

6 **Calcula el área lateral y el área total de este cono.**

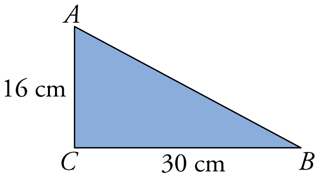


$A_{\text{LATERAL}} = \pi r g = \pi \cdot 2{,}5 \cdot 9 = 70{,}65 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 2{,}5^2 = \pi \cdot 6{,}25 = 19{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE}} = 70{,}65 + 19{,}6 = 90{,}25 \text{ cm}^2$

7 **Dibuja los conos que se obtienen al hacer girar este triángulo rectángulo:**

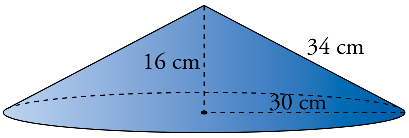


a) Alrededor de *AC*.

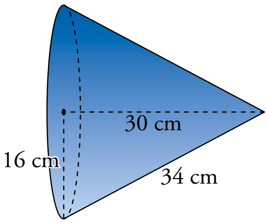
b) Alrededor de *BC*.

c) Calcula el área total de ambos.

a)



b)



c) $A_{\text{LATERAL}} = 30 \cdot \pi \cdot 34 = 3\,202{,}8 \text{ cm}^2$

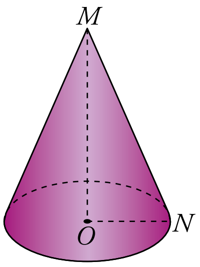
$A_{\text{LATERAL}} = 16 \cdot \pi \cdot 34 = 1\,708{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 3\,202{,}8 + 2\,826 = 6\,028{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 1\,708{,}16 + 803{,}84 = 2\,512 \text{ cm}^2$

8 **Calcula el área lateral y el área total de este cono, sabiendo que:**

$$\overline{MO} = 84 \text{ cm}$$
$$\overline{MN} = 85 \text{ cm}$$

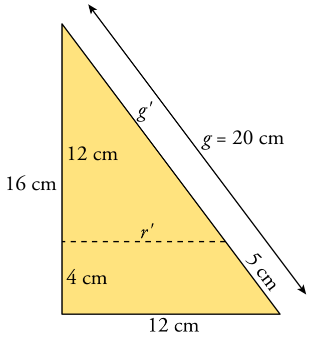


$\overline{ON} = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 13 \cdot 85 = 3\,469{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 3\,469{,}7 + 530{,}66 = 4\,000{,}36 \text{ cm}^2$

9 **El cono cuya base tiene un radio de 12 cm y cuya altura es de 16 cm es cortado por un plano perpendicular a su eje que pasa a 4 cm de la base. Halla las dimensiones, el área lateral y el área total del tronco de cono que se forma.**



$\dfrac{r'}{12} = \dfrac{12}{16} \rightarrow r' = 9$ cm

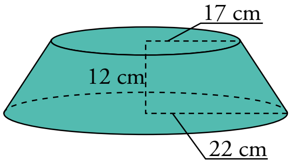
$\dfrac{g'}{12} = \dfrac{20}{16} \rightarrow g' = 15$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = 12 \cdot \pi \cdot 20 - 9 \cdot \pi \cdot 15 = 329{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} + B_{\text{INF}} = 329{,}7 + \pi \cdot 12^2 = 781{,}86 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 781{,}86 + \pi \cdot 9^2 = 1\,036{,}2 \text{ cm}^2$

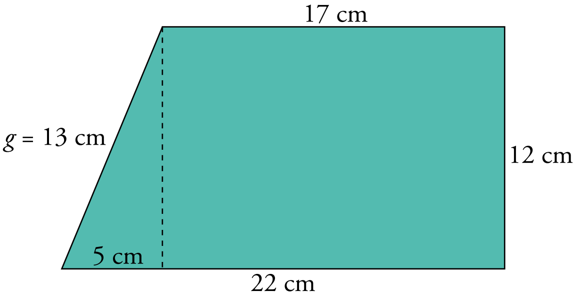
10 **Observa este tronco de cono cuyas bases tienen radios de 17 cm y 22 cm, y cuya altura es de 12 cm.**



a) **Halla su generatriz.**

b) **Calcula su área lateral.**

c) **Halla el área total.**

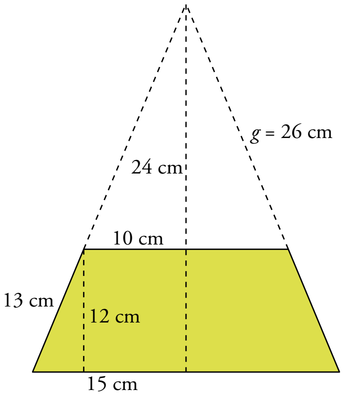


a) $g = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm

b) $A_{\text{LATERAL}} = \pi(r + r') \cdot g = 1\,591{,}98 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{TOTAL}} = 1\,591{,}98 + 907{,}46 + 1\,519{,}76 = 4\,019{,}2 \text{ cm}^2$

11 **Halla la superficie de una flanera abierta por arriba, con las siguientes medidas: radio de las bases, 10 cm y 15 cm; generatriz, 13 cm.**



$$\frac{g}{10} = \frac{13 + g}{15} \rightarrow g = 26 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = 15 \cdot \pi \cdot 39 - 10 \cdot \pi \cdot 26 = 1\,020{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 1\,020{,}5 + \pi \cdot 10^2 = 1\,334{,}5 \text{ cm}^2$$

12 **En nuestro jardín tenemos 32 macetones con forma de tronco de cono. Los radios de sus bases miden 14 cm y 20 cm, respectivamente, y su generatriz, 38 cm. Calcula cuánto cuesta pintarlos (solo la parte exterior) a razón de 40 € por metro cuadrado.**

$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot (14 + 20) \cdot 38 = 4\,056{,}88 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL TODOS}} = 4\,056{,}88 \cdot 32 = 129\,820{,}16 \text{ cm}^2 = 12{,}982016 \text{ m}^2 \approx 13 \text{ m}^2$

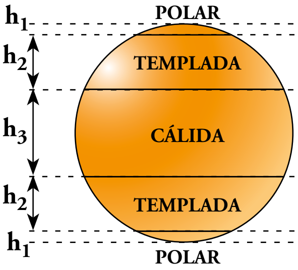
Costará, aproximadamente, 520 €.

9 ESFERAS

Página 273

Para fijar ideas

1 **En una esfera terrestre escolar de 20 cm de radio están señaladas las zonas climáticas. Sabemos que cada casquete polar tiene 2 cm de altura, y cada zona templada, 10 cm de altura. Calcula y completa en tu cuaderno.**



a) La superficie de la esfera: $A_{ESFERA} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot ...^2 \approx ...\ cm^2$

b) La superficie de cada zona. Comprueba que la suma de todas ellas es igual a la superficie de la esfera.

$R = 20\ cm \quad h_1 = 2\ cm \quad h_2 = 10\ cm \quad h_3 = 40 - 2 \cdot (2 + 10) = ...\ cm$

$$\left.\begin{array}{l} A_{CASQUETE\ POLAR} = 2\pi R h_1 = 2\pi \cdot ... \cdot ... \approx 251{,}2\ cm^2 \\ A_{ZONA\ TEMPLADA} = 2\pi R h_2 = 2\pi \cdot ... \cdot ... \approx 1\,256\ cm^2 \\ A_{ZONA\ CÁLIDA} = 2\pi R h_3 = 2\pi \cdot ... \cdot ... \approx 2\,009{,}6\ cm^2 \end{array}\right\} 2 \cdot 251{,}2 + 2 \cdot ... + ... = ...\ cm^2$$

a) $A_{ESFERA} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 20^2 \approx 5\,024\ cm^2$

b) $h_3 = 40 - 2 \cdot (2 + 10) = 16\ cm$

$A_{CASQUETE\ POLAR} = 2\pi R h_1 = 2\pi \cdot 20 \cdot 2 \approx 251{,}2\ cm^2$

$A_{ZONA\ TEMPLADA} = 2\pi R h_2 = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 \approx 1\,256\ cm^2$

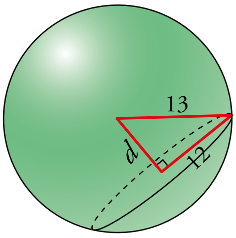
$A_{ZONA\ CÁLIDA} = 2\pi R h_3 = 2\pi \cdot 20 \cdot 16 \approx 2\,009{,}6\ cm^2$

$2 \cdot 251{,}2 + 2 \cdot 1\,256 + 2\,009{,}6 = 5\,024\ cm^2$

10 ▶ SECCIONES DE ESFERAS, CILINDROS Y CONOS

Página 274

Para fijar ideas



Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Una esfera de 13 cm de radio es cortada por un plano que determina en ella una circunferencia de 12 cm de radio.**

Calcula la distancia del centro de la esfera al plano.

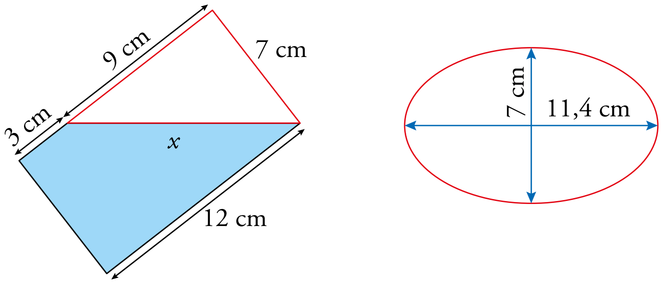
Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo señalado en rojo:

$$d^2 = \ldots^2 - 12^2 = \ldots \rightarrow d = \sqrt{\ldots} = \ldots \text{ cm}$$

Solución: **El plano dista 5 cm del centro de la esfera.**

$d^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \rightarrow d = \sqrt{25} = 5$ cm

2 **Un vaso cilíndrico de 7 cm de diámetro y 12 cm de altura con agua se inclina hasta que el agua llega al borde.**



Por la otra parte, el agua queda a 3 cm del fondo del vaso.

¿Cuánto miden los dos ejes de la elipse que forma la superficie del agua?

Hacemos un esquema del vaso de agua y observamos que el eje mayor de la elipse corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos conocemos. Lo calculamos:

$$x = \sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \sqrt{\ldots} = \ldots \text{ cm}$$

Solución: **El eje menor tiene una longitud igual al diámetro del vaso, 7 cm, y el eje mayor mide 11,4 cm.**

$x = \sqrt{9^2 + 7^2} = \sqrt{130} = 11{,}4$ cm

Página 275

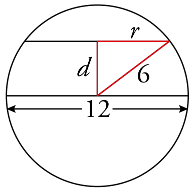
Para practicar

1 **Una esfera de 12 cm de diámetro se corta por un plano obteniendo una sección circular cuya superficie es $72{,}3456 \text{ cm}^2$. Calcula la distancia del plano al centro de la esfera.**

Toma el valor de π como 3,14.

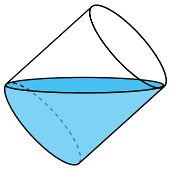
$S = \pi \cdot r^2 = 72{,}3456 \text{ cm}^2 \rightarrow r = 4{,}8 \text{ cm}$

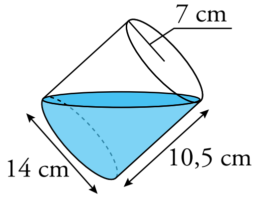
$d = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = 3{,}6 \text{ cm}$



2 **Un cubo cilíndrico de 10,5 cm de altura cuya base mide 7 cm de radio está lleno de agua. Lo inclinamos para vaciar la mitad de su contenido.**

¿Cuánto miden los dos ejes de la elipse que forma la superficie del agua?





El eje mayor mide: $x = \sqrt{14^2 + 10{,}5^2} = 17{,}5 \text{ cm}$

El eje menor mide lo mismo que el diámetro del cubo, 14 cm.

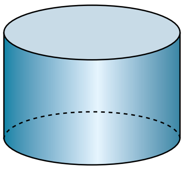
3 **Indica por dónde debe cortar un plano al cilindro para obtener:**

a) Un rectángulo.

b) El mayor rectángulo posible.

c) Un cuadrado.

d) La elipse con el eje mayor más grande posible.



a) Por un plano perpendicular a las bases.

b) Por un plano perpendicular a las bases que pase por cualquier diámetro de esas bases.

c) Por un plano perpendicular a las bases que pase por una cuerda de la circunferencia de la base que mida lo mismo que la altura del cilindro.

d) Este eje mayor tendrá de longitud la diagonal del cilindro (segmento que va de un punto de la base superior al opuesto de la base inferior). El plano es el mismo que aparece en el dibujo del ejercicio 2 formado por la superficie del agua.

4 **Si el cilindro de la actividad anterior tuviera una altura mayor que el diámetro de su base, ¿sería posible obtener un cuadrado? Explica por qué.**

No sería posible, pues dos de los lados del cuadrado serían esa altura, y la longitud mayor posible para los otros dos lados sería justo esa diagonal de la base que me están diciendo que es menor que la altura.

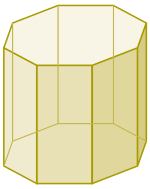
Página 276

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

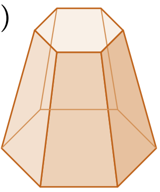
Tipos de cuerpos geométricos

1 **Indica cuáles de estos poliedros no son catalogables entre los conocidos (prisma, pirámide, tronco de pirámide, poliedro regular). Cataloga los demás.**

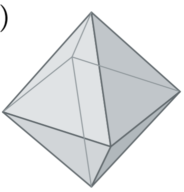
a)



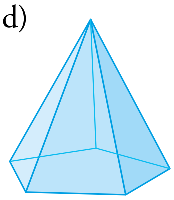
b)



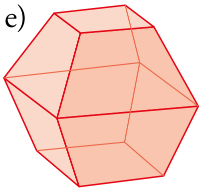
c)



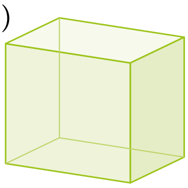
d)



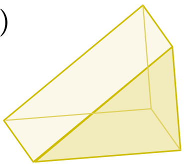
e)



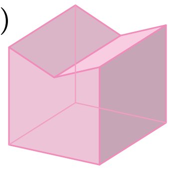
f)



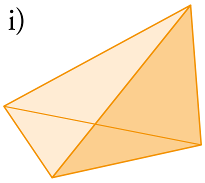
g)



h)



i)

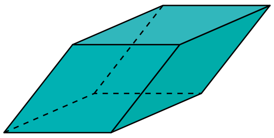


a) Prisma octogonal recto
b) Tronco de pirámide hexagonal
c) Octaedro
d) Pirámide pentagonal recta
e) No catalogable
f) Ortoedro
g) Prisma triangular recto
h) No catalogable
i) Pirámide triangular

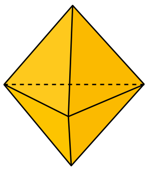
2 **Explica por qué estos poliedros no son regulares.**

a) Pirámide cuadrangular regular.

b) Este poliedro cuyas caras son rombos iguales:



c) Este poliedro formado por seis triángulos equiláteros:



a) Porque no todas sus caras son polígonos regulares iguales.

b) Porque sus caras no son polígonos regulares.

c) Porque en algunos vértices concurren tres caras y en otros, cuatro. Para que fuera regular deberían concurrir el mismo número de caras en todos los vértices.

3 **¿Cuáles de estas figuras son cuerpos de revolución? Identifica las que reconozcas.**

a)


b)


c)


d)


e)


f)


g)


h)


Son todas cuerpos de revolución menos e).

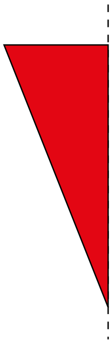
Las conocidas son:

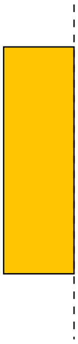
b) Cono

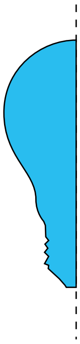
f) Cilindro

h) Esfera

4 **Dibuja los cuerpos de revolución generados al girar cada una de estas figuras alrededor del eje.**

a)


b)


c)


Relaciona cada una de las figuras que has dibujado con una del ejercicio anterior.

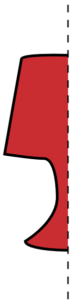
a) Al dibujar esta figura, sale un cono como el de la figura b) del ejercicio anterior.

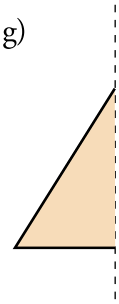
b) Al dibujar esta figura, sale un cilindro como el de la figura f) del ejercicio anterior.

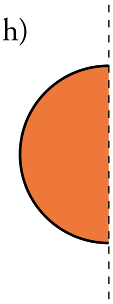
c) Al dibujar esta figura, sale una bombilla como la figura c) del ejercicio anterior.

5 **Dibuja en tu cuaderno la figura y el eje sobre el que debe girar para generar los objetos de los apartados a), d), g) y h) del ejercicio 3.**

a)


d)


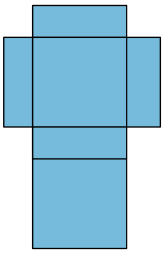
g)


h)


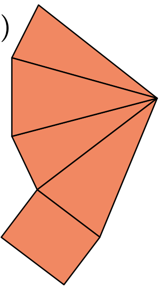
Desarrollo de cuerpos geométricos

6 **¿Con cuáles de estos desarrollos se pueden completar un poliedro o un cuerpo de revolución? Cataloga aquellos que se puedan completar.**

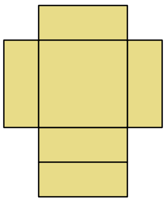
a)



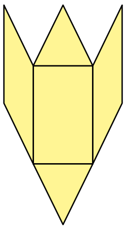
b)



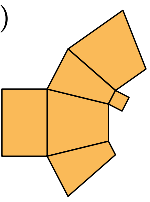
c)



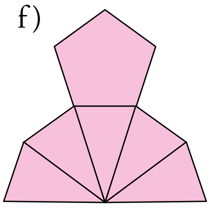
d)



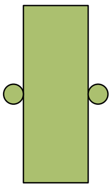
e)



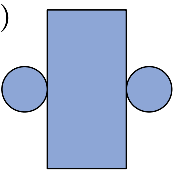
f)



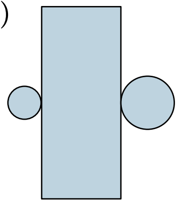
g)



h)



i)



a) Es un ortoedro.

b) Es una pirámide cuadrangular con base rectangular.

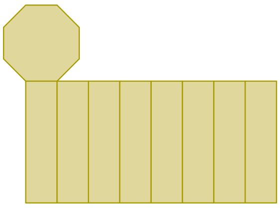
f) Es una pirámide pentagonal.

h) Es un cilindro.

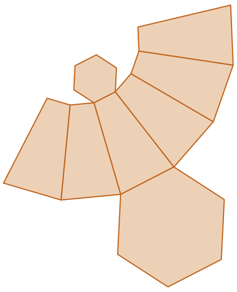
Con c), d), e), g) e i) no se pueden construir ni poliedros ni cuerpos de revolución.

7 **Dibuja de forma aproximada el desarrollo plano de los poliedros de los apartados a), b), c), d), f) y g) del ejercicio 1.**

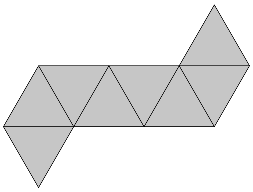
a)



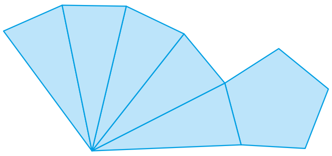
b)



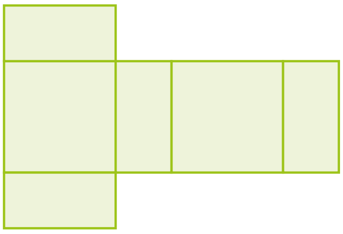
c)



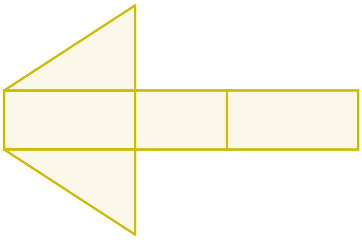
d)



f)



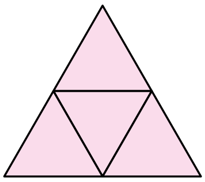
g)



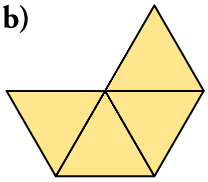
Página 277

8 **¿Cuál, o cuáles, de estas figuras corresponde al desarrollo de un tetraedro regular?**

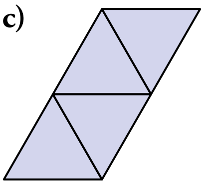
a)



b)



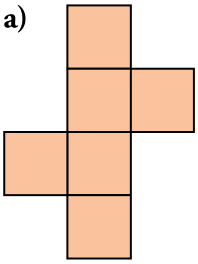
c)



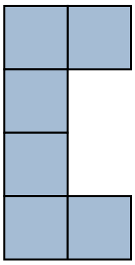
a) y c)

9 ¿Cuál, o cuáles, de estas figuras corresponde al desarrollo de un hexaedro regular?

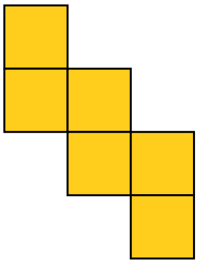
a)



b)

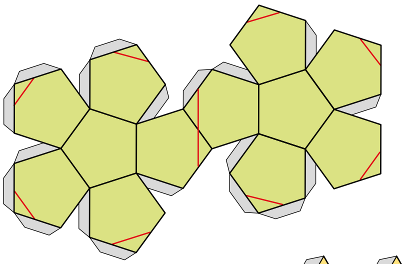


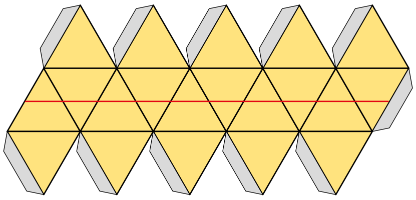
c)



a) y c)

10 **A continuación, puedes ver dos recortables para construir un dodecaedro y un icosaedro. ¿Qué figura formarán las líneas rojas, en cada caso, al montar los poliedros?**





Puedes descargar los recortables en la web y comprobar tu respuesta construyendo los poliedros.

Formarán un polígono de 10 caras en ambos casos.

Áreas de cuerpos geométricos

11 **El área total de un cubo es de 150 dm^2. Halla su diagonal.**

$A = l^2 \cdot 6 = 150 \;\rightarrow\; l^2 = 25 \;\rightarrow\; l = 5$ dm

$d = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ dm

12 **Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3 cm, 4 cm y 12 cm. Halla también la longitud de su diagonal.**

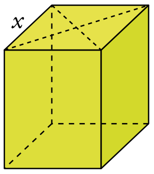
$A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 4 \cdot 2 + 12 \cdot 4 \cdot 2 + 12 \cdot 3 \cdot 2 = 192 \text{ cm}^2$

$d = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$ cm

13 **Una pirámide regular tiene por base un pentágono regular de 2,5 m de lado. La apotema de la pirámide mide 4,2 m. ¿Cuál es su superficie lateral?**

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{2,5 \cdot 4,2}{2} \cdot 5 = 26,25 \text{ m}^2$$

14 **Calcula el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuyas bases son rombos cuyas diagonales miden 16 cm y 12 cm.**

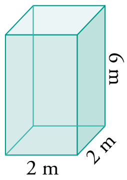


$A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$ $\quad x = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$

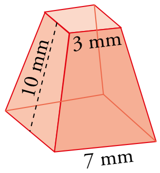
$A_{\text{LATERAL}} = 10 \cdot 15 \cdot 4 = 600 \text{ cm}^2$ $\quad A_{\text{TOTAL}} = 600 + 2 \cdot 96 = 792 \text{ cm}^2$

15 **Calcula el área de cada cuerpo geométrico.**

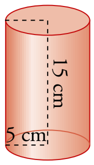
a)



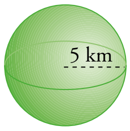
b)



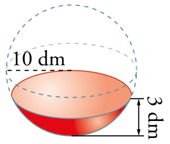
c)



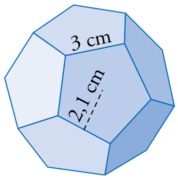
d)



e)



f)



a) $A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 2^2 = 56 \text{ m}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = \dfrac{4 \cdot 7 + 4 \cdot 3}{2} \cdot 10 + 7^2 + 3^2 = 258 \text{ mm}^2$

c) $A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 15 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 628 \text{ cm}^2$

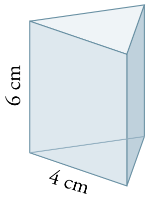
d) $A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 314 \text{ km}^2$

e) $A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 3 = 188,4 \text{ dm}^2$

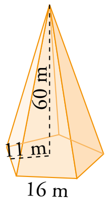
f) $A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 2,1}{2} = 189 \text{ cm}^2$

16 **Calcula el área de cada cuerpo geométrico. Antes, deberás obtener algún dato que falta.**

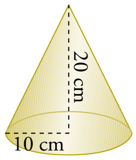
a)



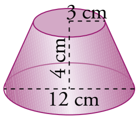
b)



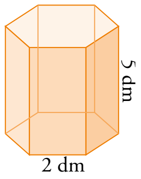
c)



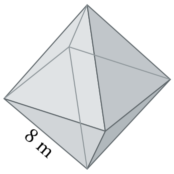
d)



e)



f)



a) $A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot \dfrac{4 \cdot 3,5}{2} = 86 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = \dfrac{5 \cdot 16 \cdot 60}{2} + \dfrac{5 \cdot 16 \cdot 11}{2} = 2\,840 \text{ m}^2$

c) $g = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22,4 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 10 \cdot 22,4 + \pi \cdot 10^2 = 1\,017,36 \text{ cm}^2$

d) $g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot (6 + 3) \cdot 5 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 3^2 = 282,6 \text{ cm}^2$

e) $A_{\text{TOTAL}} = 6 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot \dfrac{6 \cdot 2 \cdot 1,7}{2} = 80,4 \text{ dm}^2$

f) $A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot \dfrac{8 \cdot 6,9}{2} = 220,8 \text{ m}^2$

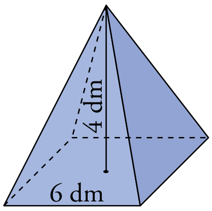
17 **La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado. Su altura es de 4 dm. Calcula su área total.**

Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ dm

$A_{\text{BASE}} = 36 \text{ dm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \text{ dm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 36 + 60 = 96 \text{ dm}^2$



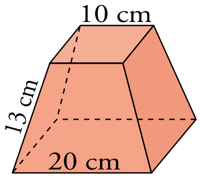
18 **Las bases de un tronco de pirámide regular son cuadrados de 10 cm y 20 cm de lado, respectivamente. Las aristas laterales miden 13 cm. Halla su área total.**

Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

$A_{\text{BASES}} = 20^2 + 10^2 = 500 \text{ cm}^2$

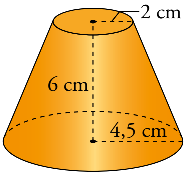
$A_{\text{LATERAL}} = \frac{20 + 10}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 720 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 720 + 500 = 1\,220 \text{ cm}^2$

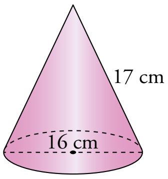


19 **Halla el área total de estos cuerpos:**

a)



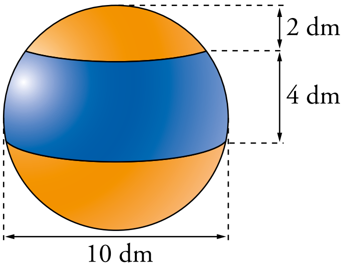
b)



a) $A_{\text{TOTAL}} = \pi(4,5 + 2) \cdot 6,5 + \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 4,5^2 = 208,81 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 8 \cdot 17 + 8^2 \cdot \pi = 628 \text{ cm}^2$

20 **Calcula las superficies del casquete esférico de 2 dm de altura y de una zona esférica de 4 dm de altura contenidos en una esfera de 10 dm de diámetro.**



$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 2 = 62,8 \text{ dm}^2$

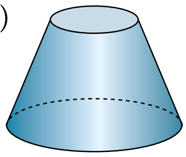
$A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 4 = 125,6 \text{ dm}^2$

Página 278

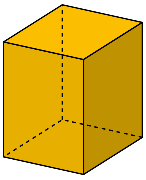
Secciones en los cuerpos geométricos

21 **Busca y dibuja los posibles cortes de un plano con cada uno de estos cuerpos geométricos para obtener un cuadrado, un rectángulo, un trapecio, una circunferencia, una elipse, un pentágono y un hexágono.**

a)



b)



Un cuadrado → En b), planos perpendiculares a la altura.

Un rectángulo → En b), planos perpendiculares a la base.

Un trapecio → En a), planos que corten a las dos bases.

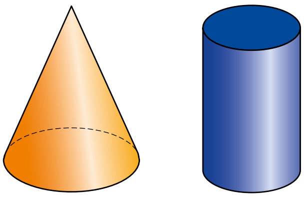
Una circunferencia → En a), planos paralelos a las bases.

Una elipse → En a), planos inclinados que no corten a las bases.

Un pentágono → En b), plano por un vértice y que corte la cara opuesta.

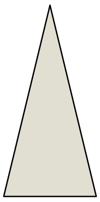
Un hexágono → En b), plano inclinado que corte a las dos bases.

22 **Observa el cono y el cilindro.**

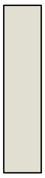


Mediante secciones planas de estos cuerpos geométricos se obtienen las siguientes figuras:

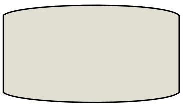
a)



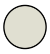
b)



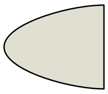
c)



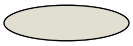
d)



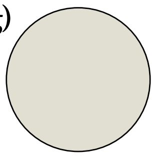
e)



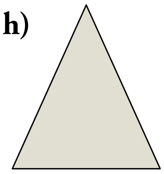
f)



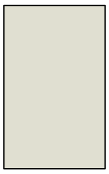
g)



h)



i)



Averigua de qué cuerpo es cada una de las figuras y mediante qué plano se consigue.

a) Plano vertical del cono que pasa por su vértice y no es perpendicular a la base.

b) Plano vertical en el cilindro, perpendicular a la base y que pasa por un lado de la circunferencia, no por el centro.

c) No corresponde.

d) Plano horizontal perpendicular a la base del cono, lo corta por la mitad superior.

e) Plano inclinado en el cono, sin pasar por el vértice.

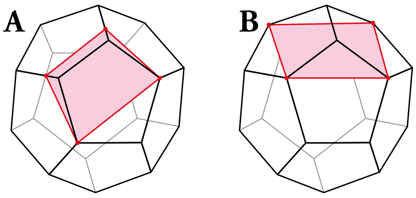
f) Plano inclinado en ambos.

g) Plano horizontal en la base del cono.

h) Plano vertical del cono que pasa por su vértice y es perpendicular a la base.

i) Plano vertical en el cilindro, perpendicular a la base y que pasa por el centro.

23 **Las siguientes secciones del dodecaedro regular son cuadriláteros.**

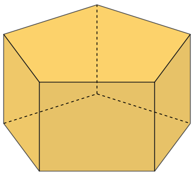


¿Qué tipo de cuadrilátero es cada uno? Justifica tus respuestas.

La primera sección es un trapecio, tiene dos lados paralelos pero uno de ellos es mayor que el otro, y los otros dos son simétricos.

La segunda sección es un cuadrado ya que todos los lados son iguales y paralelos entre sí.

24 **Indica por dónde debe cortar un plano a este prisma para obtener:**



a) Un cuadrado.

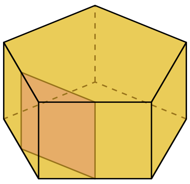
b) Un triángulo equilátero.

c) El rectángulo con la mayor superficie posible.

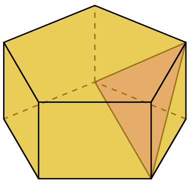
d) Un pentágono regular y uno irregular.

e) El trapecio con mayor área posible.

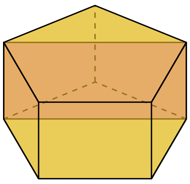
a)



b)



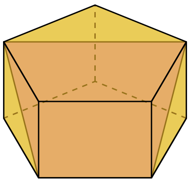
c)



d) Pentágono regular: plano paralelo a las bases.

Pentágono irregular: plano inclinado paralelo a las bases y que corte a las cinco caras laterales.

e)



Resuelve problemas

25 **Deseamos construir con alambres el esqueleto de todos los poliedros regulares, de modo que cada una de las aristas mida 1 dm. ¿Qué cantidad de alambre utilizaremos en cada uno de ellos?**

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
NÚMERO DE ARISTAS	6	12	12	30	30
LONGITUD TOTAL	6 dm	12 dm	12 dm	30 dm	30 dm

26 **¿Cuánto costará forrar un cajón de dimensiones 0,6 m × 0,5 m × 0,4 m con una chapa metálica que sale a 18 €/m^2? ¿Y si, además, queremos cubrir las aristas con un embellecedor de madera de 23 €/m^2?**

$A = 2(0,6 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4) = 1,48 \text{ m}^2$

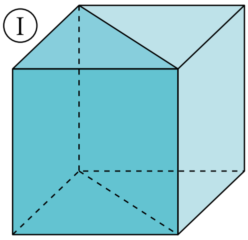
El precio es $1,48 \cdot 18 = 26,64$ €.

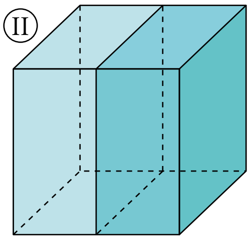
La suma de longitudes de todas las aristas es 6 m.

Hemos de pagar $23 \cdot 6 = 138$ €.

27 **Aníbal quiere forrar un cubo de 4 cm de arista con láminas de oro a 5 €/cm^2. ¿Cuánto le costará?**

Finalmente, decide cortarlo para hacer dos pisapapeles iguales, pero no sabe si hacerlo, para que al forrarlo salga más barato, como indica la figura I o como indica la II. ¿Puedes ayudarlo?





El área total del cubo es $6 \cdot 4^2 = 96 \text{ cm}^2$.

Le costará forrar el cubo $96 \cdot 5 = 480$ €.

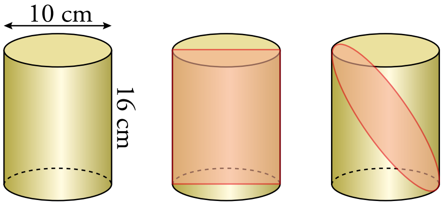
(I) El área de cada mitad es $48 + 4 \cdot 4\sqrt{2} = 70,63 \text{ cm}^2$.

(II) El área de cada mitad es $48 + 4^2 = 64 \text{ cm}^2$.

La opción (II) tiene menor superficie.

Es, por tanto, la opción más barata.

28 **Observa este cilindro y algunas de las secciones que podemos obtener en él.**



a) **Halla las dimensiones del rectángulo y de la elipse.**

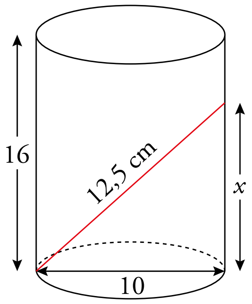
b) **¿Por dónde habría que cortar el cilindro para obtener una elipse cuyos ejes mayor y menor fueran 12,5 cm y 10 cm, respectivamente?**

c) **¿Y para obtener un rectángulo cuya altura fuera el doble que la base?**

a) RECTÁNGULO: largo → 16 cm; ancho → 10 cm

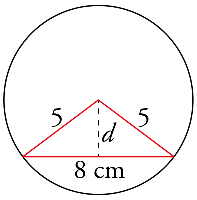
EJES DE LA ELIPSE: mayor → $\sqrt{16^2 + 10^2} = 18{,}87$ cm; menor → 10 cm

b) Para obtener esa elipse habría que cortar el cilindro por un plano inclinado que pasase por un punto de la circunferencia de la base y por un punto a 7,5 cm de altura en una generatriz opuesta.



$$x = \sqrt{12{,}5^2 - 10^2} = 7{,}5 \text{ cm}$$

c) Para obtener ese rectángulo habría que cortar el cilindro por un plano perpendicular a la base, a 3 cm del centro de la misma.



$$d = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$$

Página 279

29 **Las paredes de un pozo de 12 m de profundidad y 1,6 m de diámetro han sido enfoscadas con cemento. El precio del trabajo es de 40 € el metro cuadrado. ¿Cuál ha sido el coste?**

$2\pi r h = 60{,}288$ m^2 → El coste ha sido de 2 411,52 €, aproximadamente.

30 **Una caja en forma de ortoedro tiene 9 dm de largo y 6 dm de ancho. Su superficie total es 228 dm^2. Halla su altura y su diagonal.**

$A_{\text{TOTAL}} = 9 \cdot h \cdot 2 + 9 \cdot 6 \cdot 2 + 6 \cdot h \cdot 2 = 108 + 30h = 228 \rightarrow h = 4$ dm

$d = \sqrt{4^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{133} \approx 11{,}53$ dm

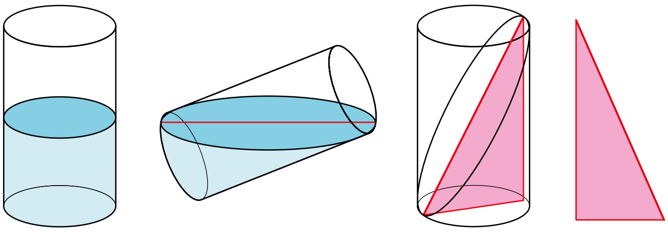
31 **Una verja se compone de 20 barrotes de hierro de 2,5 m de altura y 1,5 cm de diámetro. Hay que darles una mano de minio a razón de 24 €/m^2. ¿Cuál es el coste?**

Superficie de un barrote = $2\pi \cdot 0{,}0075 \cdot 2{,}5 = 0{,}11775$ m^2

Superficie total = $0{,}11775 \cdot 20 = 2{,}355$ m^2

Coste = $2{,}355 \cdot 24 = 56{,}52$ €.

32 **Un vaso cuya base tiene un diámetro de 4 cm se ha llenado de agua hasta la mitad. Lo inclinamos hasta que llegue al borde y se forma una elipse el triple de larga que de ancha. ¿Qué altura tiene el vaso?**

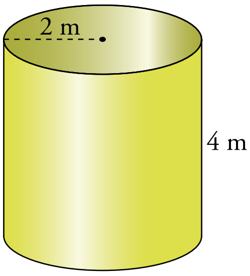


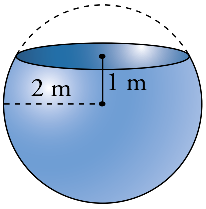
La altura del vaso es: $h = \sqrt{12^2 - 4^2} = 11{,}3$ cm

El volumen del vaso es: $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 11{,}3 \approx 142$ cm^3

Hay 71 cm^3 de agua, aproximadamente.

33 **Un pintor ha cobrado 1 000 € por impermeabilizar el interior del depósito sin tapa de la izquierda. ¿Cuánto deberá cobrar por impermeabilizar el de la derecha, también sin tapa?**





El área de la esfera completa es igual que la del cilindro.

El área del depósito de la derecha, de 3 m de altura, es las $\frac{3}{4}$ parte de la del cilindro.

Por tanto, el coste será $\frac{3}{4} \cdot 1\,000 = 750$ €.

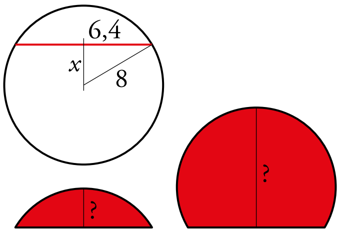
34 Problema resuelto.

35 **Un casquete esférico tiene una altura de 6 cm y el radio de su base mide 12 cm. ¿Cuál es el área de la esfera a la que pertenece el casquete?**

$R^2 = (R-6)^2 + 12^2 \rightarrow R^2 = R^2 - 12R + 36 + 144 \rightarrow 12R = 180 \rightarrow R = 15$

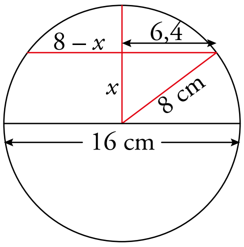
$A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 15^2 \approx 2\,826$ cm^2

36 **María corta un queso de bola de 16 cm de diámetro de tal manera que se obtiene una circunferencia de 6,4 cm de radio. ¿Qué altura tiene cada trozo apoyándolo sobre el corte?**



$8^2 = x^2 + 6{,}4^2 \ \rightarrow \ x = 4{,}8$

El trozo grande tendrá una altura de 4,8 + 8 = 12,8 cm y el trozo pequeño, 8 – 4,8 = 3,2 cm.



37 **Marcos ha cortado una sandía de 15 cm de radio. La zona roja comestible ocupa una superficie de unos 405 cm^2 que corresponde al 90 % de la sección. ¿A qué altura se ha cortado la sandía?**

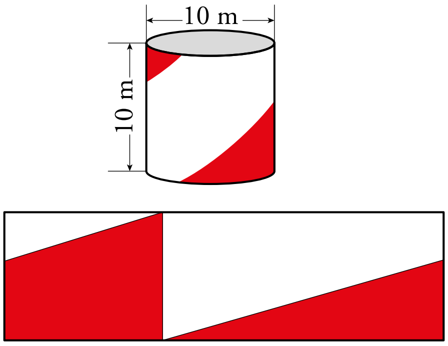
El 100 % de la sección por la que se ha cortado la sandía es $\frac{450}{90} \cdot 100 = 450$ cm^2.

Despejando de la fórmula del área de un círculo, se obtiene que el radio de la sección es de aproximadamente $r = \sqrt{\frac{450}{\pi}} = 12$ cm, por tanto la altura a la que se ha cortado la sandía es a $\text{h} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm del centro.

38 Problema resuelto.

Página 280

39 **Observa este depósito de combustible y calcula el área de la zona coloreada de blanco y la de la zona coloreada de rojo.**



$A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \text{h} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10 = 100\pi = 314 \text{ m}^2$

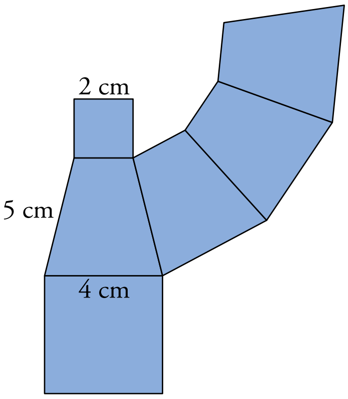
La zona coloreada de roja es la mitad del rectángulo, entonces:

$A_{\text{ZONA ROJA}} = 314 : 2 = 157 \text{ m}^2$

$A_{\text{ZONA BLANCA}} = 314 : 2 = 157 \text{ m}^2$

40 **Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas aristas miden: las de la base mayor, 4 cm; las de la menor, 2 cm, y las laterales, 5 cm.**

Halla su área total. (Las caras laterales son trapecios. Comprueba que su altura es de 4,9 cm.)



Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{5^2 - 1^2} = 4,9$ cm

$$A_{\text{TOTAL}} = 2^2 + 4^2 + 4 \cdot \left(\frac{2+4}{2}\right) \cdot 4,9 = 78,8 \text{ cm}^2$$

Interpreta, describe, exprésate

41 **Estudiando los poliedros regulares:**

a) Cuenta el número de caras del tetraedro, del cubo y del octaedro.

b) Haz lo mismo en el dodecaedro:

- **Cada cara tiene 5 aristas y hay 12 caras: 5 · 12 = 60. Pero cada dos caras comparten una arista común, por lo que el número de aristas es 60 : 2 = 30.**
- **Cada cara tiene 5 vértices: 5 · 12 = 60. Pero cada tres caras comparten un vértice, por lo que el número de vértices es 60 : 3 = 20.**

c) Calcula cuántas aristas y cuántos vértices tiene el icosaedro regular.

d) Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

	CARAS	ARISTAS	VÉRTICES
TETRAEDRO	4		
CUBO	6		
OCTAEDRO	8		
DODECAEDRO	12		
ICOSAEDRO	20		

Comprueba que en todos ellos se cumple que:

CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 2

e) ¿Se cumple la misma relación en otros poliedros?

a) y b) Resueltos en la tabla final.

c) • Número de aristas: Cada cara tiene 3 aristas y hay 20 caras → 3 · 20 = 60

Pero cada dos caras tienen una arista común. Por tanto, el número de aristas es 60 : 2 = 30.

• Número de vértices: Cada cara tiene 3 vértices → 3 · 20 = 60

Pero cada 5 caras comparten un mismo vértice, por lo que el número de vértices es 60 : 5 = 12.

d)

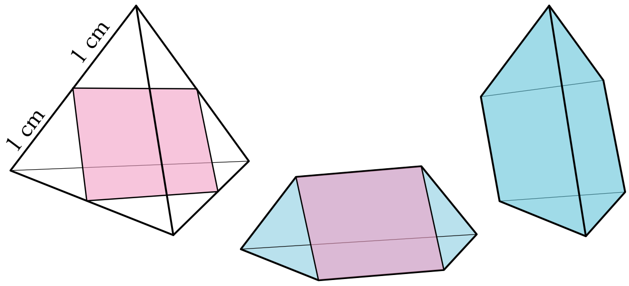
	CARAS	ARISTAS	VÉRTICES
TETRAEDRO	4	6	4
CUBO	6	12	8
OCTAEDRO	8	12	6
DODECAEDRO	12	30	20
ICOSAEDRO	20	30	12

C + V = A + 2

e) Sí, en todos los poliedros convexos.

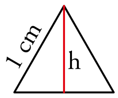
42 **A continuación, se incluyen dos resoluciones del mismo problema. Analízalas y explica sus diferencias.**

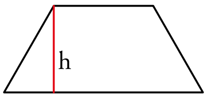
Calcula el área total de cada uno de los cuerpos resultantes al cortar un tetraedro regular por un plano, que pasa por el punto medio de cuatro de sus aristas, según muestra la ilustración.

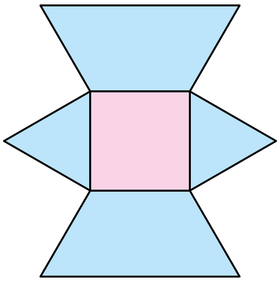


Resolución A

Ambos cuerpos son iguales. Basta calcular el área de uno de ellos:





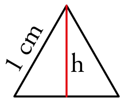


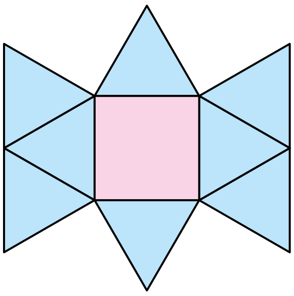
$$\mathbf{h = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87\ cm}$$

$$\mathbf{A = 1^2 + 2 \cdot \frac{(1+2)\cdot h}{2} + 2 \cdot \frac{1 \cdot h}{2} = 1 + 3h + h =}$$

$$\mathbf{= 1 + 4h = 1 + 4 \cdot 0{,}87 = 4{,}48\ cm^2}$$

Resolución B





$$\mathbf{h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0{,}87\ cm}$$

$$\mathbf{A = 1^2 + 8 \cdot \frac{1 \cdot 0{,}87}{2} = 1 + 4 \cdot 0{,}87 = 4{,}48\ cm^2}$$

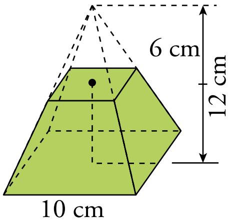
Resolución A: se despliega el cuerpo resultante y se calcula el área como la suma del área del cuadrado, los dos triángulos y los dos trapecios que lo forman. Para ello, es necesario calcular la altura del triángulo, que coincide con la altura del trapecio.

Resolución B: se despliega el cuerpo resultante y se calcula el área como la suma del área del cuadrado y de ocho triángulos, ya que se ve que el trapecio se puede dividir en tres triángulos iguales a los otros dos. Para ello, es necesario calcular la altura del triángulo también.

Página 281

Problemas «+»

43 **Una pirámide regular de base cuadrada de 10 cm de lado y altura 12 cm es cortada por un plano a mitad de su altura. Halla el área total del tronco de pirámide resultante.**

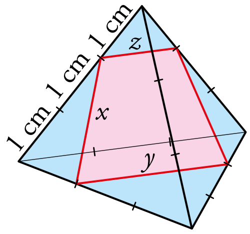


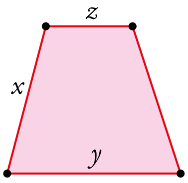
Apotema de la pirámide grande, $ap = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm

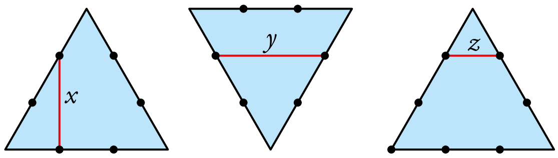
$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{LATERAL PIRÁMIDE GRANDE}} \to A_1 = 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 13}{2} = 260 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LLATERAL PIRÁMIDE PEQUEÑA}} \to A_2 = \dfrac{1}{4} A_1 = \dfrac{1}{4} 260 = 65 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_{\text{LATERAL TRONCO}} \to A = A_1 - A_2 = \\ = 260 - 65 = 195 \text{ cm}^2 \end{array}$$

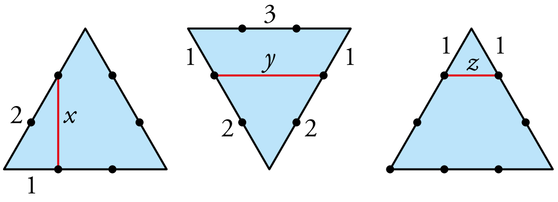
$A_{\text{TOTAL TRONCO}} = 195 + 10^2 + 5^2 = 320 \text{ cm}^2$

44 **Calcula el área de la sección de este tetraedro.**







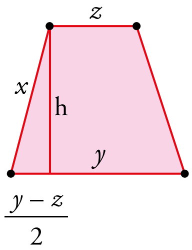


$x = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1,73$

$y = 2$

$z = 1$

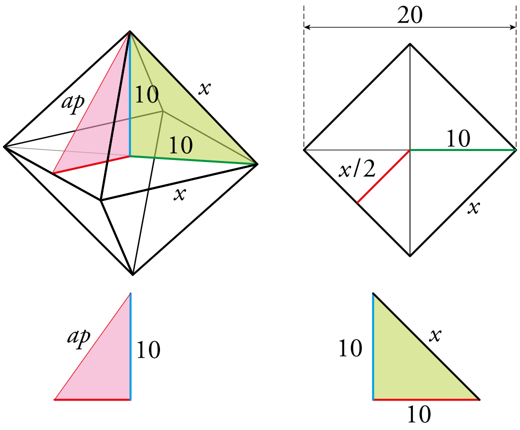
Calculamos el área de la sección, que es un trapecio:



$$x^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{y - z}{2}\right)^2 \to 3 = \text{h}^2 + 0,25 \to \text{h} = 1,66 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TRAPECIO}} = \left(\frac{y - z}{2}\right) \cdot \text{h} = \frac{2 + 1}{2} \cdot 1,66 = 2,49 \text{ cm}^2$$

45 **Halla el área total de un octaedro regular en el que la distancia entre dos vértices no contiguos es 20 cm.**

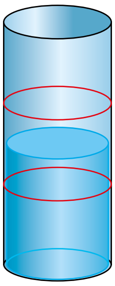


$x^2 + x^2 = 20^2 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = \sqrt{200} \approx 14{,}14$ cm

$ap = \sqrt{14{,}14^2 - 7{,}07^2} = 12{,}25$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot \dfrac{14{,}14 \cdot 12{,}25}{2} = 692{,}86 \text{ cm}^2$

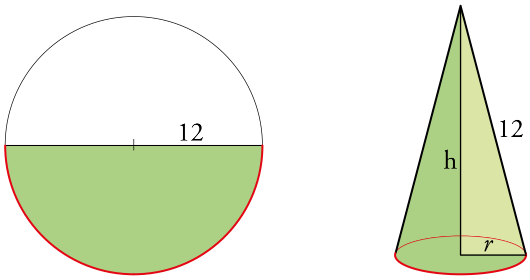
46 **Una probeta cilíndrica, que se ha llenado hasta la mitad, tiene dos marcas que dividen su altura en tres partes iguales. Al inclinarla de modo que el líquido toque una de las marcas, por el lado opuesto tocará la otra. Si la superficie del líquido es una elipse cuyo eje mayor mide 10 cm y cuyo eje menor mide 8 cm, ¿qué altura tiene la probeta?**



Sea $x = \dfrac{1}{3}$ de la altura de la probeta. Entonces: $x = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

La altura de la probeta es 6 · 3 = 18 cm.

47 **El desarrollo lateral de un cono es un semicírculo de radio 12 cm. Halla el radio de su base y su altura.**

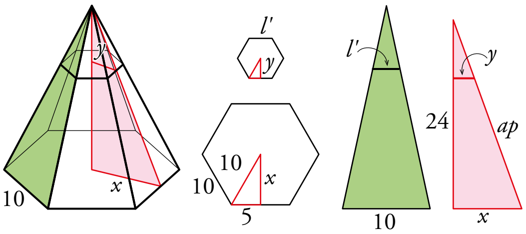


$\dfrac{\mathbf{2 \cdot \pi \cdot 12}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2 \cdot \pi \cdot} \boldsymbol{r}$

$2\pi r = 12\pi \rightarrow r = 6$ cm

$12^2 = 6^2 + \text{h}^2 \rightarrow \text{h} = \sqrt{108} = 10{,}39$ cm

48 **La base de una pirámide regular es un hexágono de 10 cm de lado. Su altura es 24 cm. Se corta por un plano que pasa a 18 cm de la base. Halla el área total del tronco de pirámide que resulta.**



Apotema de la base mayor, $ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8,66$ cm

Calculamos la apotema de la base menor, ap':

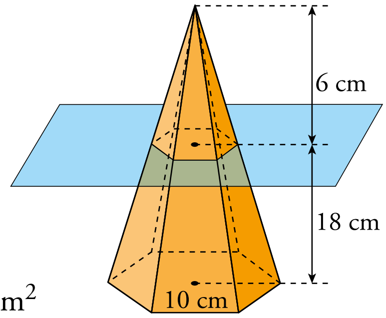
$$\frac{ap'}{6} = \frac{ap}{24} \to ap' = \frac{8,66 \cdot 6}{24} = 2,165 \text{ cm}$$

$$l_{\text{HEXÁGONO MENOR}} = \frac{ap' \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2,5 \text{ cm}$$

Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{18^2 + (ap - ap')^2} = 19,13$ cm

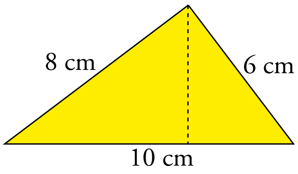
$A_{\text{BASES}} = 3 \cdot 10 \cdot ap + 3 \cdot 2,5 \cdot ap' = 259,8 + 16,238 = 276,038 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 276,038 + (10 + 2,5) \cdot 19,13 \cdot 3 = 276,038 + 717,375 = 993,413 \text{ cm}^2$



49 **Lee, observa y calcula.**

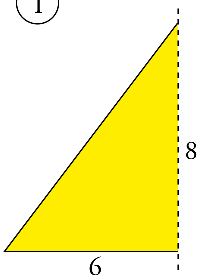
a) Comprueba que el siguiente triángulo es rectángulo y la altura sobre la hipotenusa mide 4,8 cm.



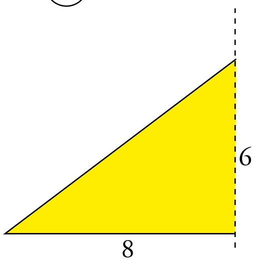
$$A = \frac{\mathbf{10 \cdot h}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{8 \cdot 6}}{\mathbf{2}}$$

b) Halla la superficie total de las figuras engendradas por este triángulo al girar alrededor de cada uno de sus lados.

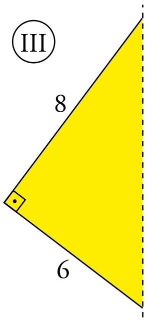
Ⅰ



Ⅱ



Ⅲ



a) $\frac{10 \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} \to h = 4,8$ cm

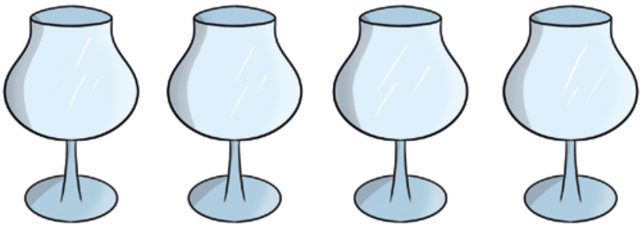
b) Ⅰ $\pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 6^2 = 301,44$

Ⅱ $\pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2 = 452,16$

Ⅲ $\pi \cdot 4,8 \cdot 8 + \pi \cdot 4,8 \cdot 6 = 211$

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

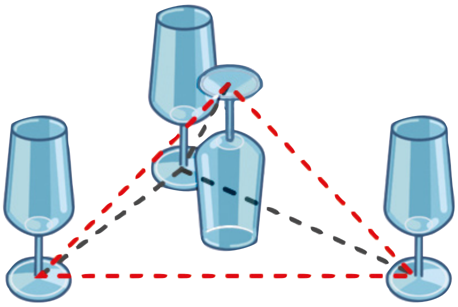
- **Tienes cuatro copas como estas:**



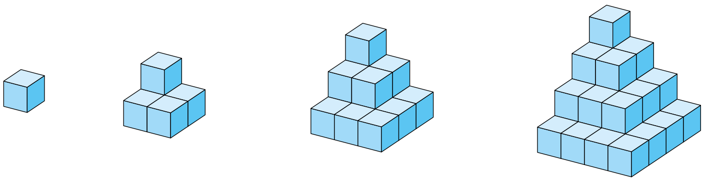
Considerando sus pies como si fueran puntos, ¿cómo las colocarías para que los cuatro pies equidisten?

Piensa en invertir una y también en un tetraedro.

Colocando tres copas formando un triángulo equilátero y, la cuarta, encima para formar la cuarta esquina de un tetraedro.



- **Observa la serie de torres poli-cubo:**



Si el área de la primera es 6:

a) ¿Cuál es el área de cada una de las tres siguientes?

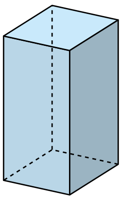
b) ¿Cuál sería el área de una torre de 10 pisos?

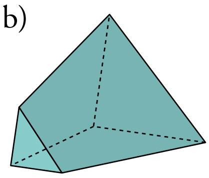
c) ¿Y si fueran n los pisos?

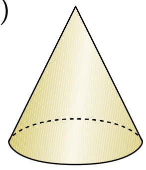
PISOS	1	2	3	4	10	…	n
ÁREA	6	20	42	72	420	…	$2n(1 + 2n)$

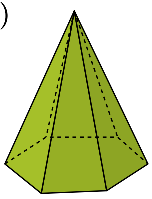
AUTOEVALUACIÓN

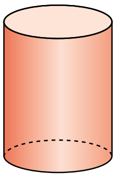
1 **Escribe el nombre de estos cuerpos geométricos:**

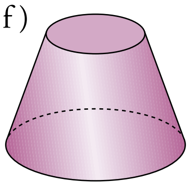
a)


b)


c)


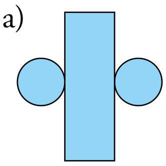
d)


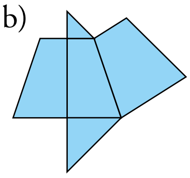
e)


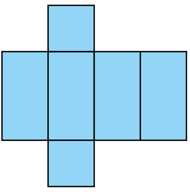
f)


a) Ortoedro
b) Poliedro no catalogable
c) Cono
d) Pirámide hexagonal
e) Cilindro
f) Tronco de cono

2 **Indica a cuáles de los cuerpos geométricos del ejercicio anterior corresponden estos desarrollos:**

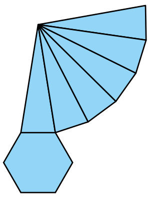
a)


b)


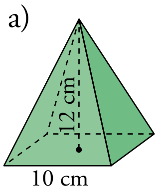
c)


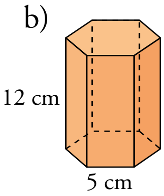
Dibuja en tu cuaderno el desarrollo del poliedro del apartado d) del ejercicio 1.

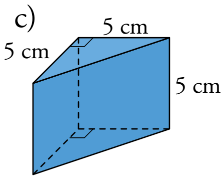
a) Es el desarrollo del cilindro del apartado e).
b) Es el desarrollo de la figura del apartado b).
c) Es el desarrollo del ortoedro del apartado a).



3 **Calcula el área de cada poliedro.**

a)


b)


c)


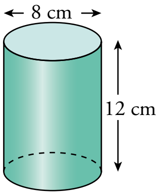
a) h = 13 cm
$A_{TOTAL} = 100 + 4 \cdot 65 = 360 \text{ cm}^2$

b) $ap = \sqrt{18,75} \approx 4,33$ cm
$A_{BASES} = 6 \cdot 5 \cdot 4,33 \approx 130 \text{ cm}^2$
$A_{LATERAL} = 360 \text{ cm}^2$
$A_{TOTAL} = 490 \text{ cm}^2$

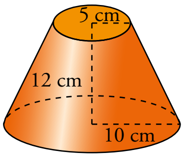
c) $x = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ cm
$A_{BASES} = 2 \cdot 12,5 = 25 \text{ cm}^2$
$A_{LATERAL} = 85,36 \text{ cm}^2$
$A_{TOTAL} = 110,35 \text{ cm}^2$

4 Halla el área de estos cuerpos de revolución:

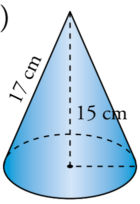
a)



b)



c)



a) $A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 4^2 \cdot \pi + 12 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 = 401{,}92 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = 1\,004{,}8 \text{ cm}^2$

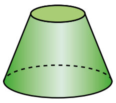
c) $r = 8$ cm

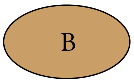
$A_{\text{LATERAL}} = 427{,}04 \text{ cm}^2$

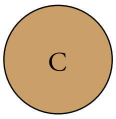
$A_{\text{BASE}} = 200{,}96 \text{ cm}^2$

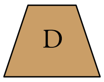
$A_{\text{TOTAL}} = 628 \text{ cm}^2$

5 Copia en tu cuaderno el tronco de cono y dibuja los planos que le deben cortar para obtener cada una de las figuras planas que aparecen al lado.









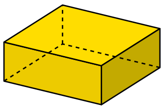
A: plano paralelo a las bases y muy cercano a la base pequeña.

B: plano inclinado que no corte las bases.

C: plano paralelo a las bases y muy cercano a la base grande.

D: plano perpendicular a las bases.

6 Indica qué cortes planos hemos de darle a este poliedro para obtener estos polígonos:



a) Triángulo.
b) Cuadrado.
c) Rectángulo.
d) Trapecio.
e) Rombo.
f) Pentágono.

a) Plano que pasa por un vértice y corte a la base opuesta antes de la diagonal.

b) Plano perpendicular a las bases que corte a las mismas por un segmento de longitud igual a la altura del prisma.

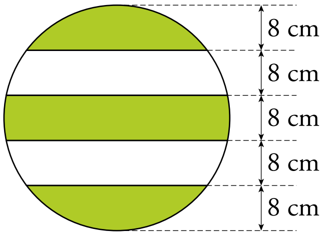
c) Plano perpendicular a cualquiera de las bases.

d) Plano inclinado que corte a ambas bases.

e) Plano que pase por dos vértices opuestos formando 45 grados con las bases.

f) Plano que pase por un vértice y corte a la base opuesta después de la diagonal.

7 **Para un juego, se van a pintar 25 bolas de corcho sintético de 40 cm de diámetro. La pintura blanca sale a 12 €/m^2, y la verde a 15 €/m^2. ¿Cuál será el coste total de la pintura?**



$R = 20$ cm

h = 8 cm

La esfera está dividida en cinco secciones de 8 cm de altura cada una, por lo que todas tendrán la misma superficie:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \text{h} = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 8 = 320\pi = 1\,004{,}8 \text{ cm}^2 = 0{,}10048 \text{ m}^2$$

Cada bola tiene 3 secciones verdes y 2 blancas, calculamos el coste de pintar una bola:

$$\text{Coste}_{1 \text{ BOLA}} = 3 \cdot 0{,}10048 \cdot 15 + 2 \cdot 0{,}10048 \cdot 12 = 6{,}93 \text{ €}$$

Y el coste total de 25 bolas:

$$25 \cdot 6{,}93 = 173{,}25 \text{ €}$$

El coste total de la pintura será de 173,25 €.

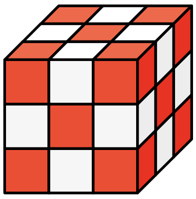
14 MEDIDA DEL VOLUMEN

Página 284

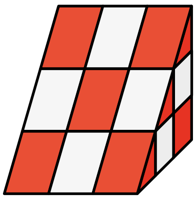
¿Qué es medir el volumen?

1 **¿Cuántas unidades cúbicas ocupa cada una de estas figuras?**

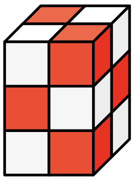
A



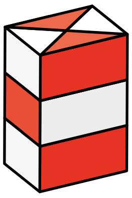
B



C



D

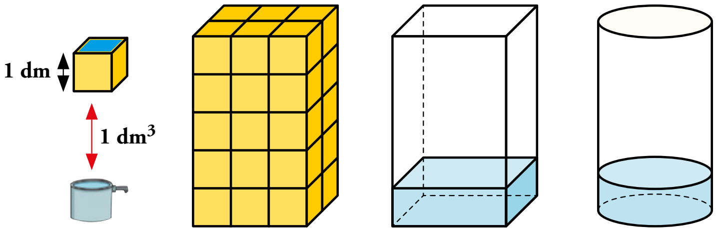


A: $3^3 = 27$ u^3 B: $27 : 2 = 13,5$ u^3 C: $4 \cdot 3 = 12$ u^3 D: $12 : 2 = 6$ u^3

Página 285

Distintas formas de calcular volúmenes

2 **Imagina ahora que tienes un cacillo en el que cabe la misma cantidad de agua que en una unidad cúbica de un decímetro de arista y observa los dos prismas y el cilindro que tienes a continuación:**



a) ¿Cuántos cacillos de agua se han vertido en el segundo prisma, para que el agua alcance un centímetro de altura? ¿Cuántos cacillos caben en total?

b) Sabiendo que la base del cilindro tiene la misma superficie que la del prisma, ¿cuántos cacillos habría que verter en él para que el agua alcance un centímetro de altura? ¿Y para llenarlo?

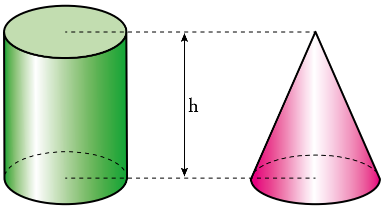
a) Se han vertido 6 cacillos. Caben 30 cacillos en total.

b) Como las bases tienen la misma superficie, por el principio de Cavalieri, sus volúmenes coinciden. Por tanto, la solución es la misma que la del apartado anterior.

3 **En el tomo XII de los elementos, aparece, entre otras, la siguiente proposición:**

Cualquier cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base e igual altura.

Sabiendo que el volumen del siguiente cilindro es de 45 u^3, ¿cuál es el volumen del cono que le acompaña?



$V = 45$ u^3 $V =$ ¿?

$V_{\text{CONO}} = \dfrac{45}{3} = 15$ u^3

1 ▶ UNIDADES DE VOLUMEN

Página 286

Para practicar

1 **Expresa en metros cúbicos.**

a) 2 dam^3 123 m^3 52 dm^3

b) 29 320 000 cm^3

c) (435 cm^3 425 mm^3) · 500 000

d) 37 hm^3 12 dam^3 325 m^3 402 dm^3

a) 2 000 m^3 + 123 m^3 + 0,052 m^3 = 2 123,052 m^3

b) 29,32 m^3

c) 217 500 000 cm^3 + 212 500 000 mm^3 = 217,5 m^3 + 0,2125 m^3 = 217,7125 m^3

d) 37 000 000 m^3 + 12 000 m^3 + 325 m^3 + 0,402 m^3 = 37 012 325,4 m^3

2 **Pasa a forma compleja.**

a) 35 297 853 cm^3

b) (4 253 hm^3) · 2 000

c) 0,00030124 dm^3

d) 34,5832 hm^3

a) 35 m^3 297 dm^3 853 cm^3

b) (4 km^3 253 hm^3) · 2 000 = 8 506 km^3

c) 301,24 mm^3

d) 34 hm^3 583 dam^3 200 m^3

Página 287

Para fijar ideas

1 **Copia y completa en tu cuaderno.**

	m^3			dm^3			cm^3			mm^3			
			kL	hL	daL	L	dL	cL	mL				
7,4 L													→ **… cm^3**
25 hL													→ **… m^3**
75 cm^3													→ **… cL**
0,047 m^3													→ **… L**

	m^3			dm^3			cm^3			mm^3			
			kL	hL	daL	L	dL	cL	mL				
7,4 L						7	4						→ 7 400 cm^3
25 hL			2	5									→ 2,5 m^3
75 cm^3								7	5				→ 7,5 cL
0,047 m^3					4	7							→ 47 L

Para practicar

3 **Cuál sería la unidad adecuada para expresar:**

a) La capacidad de un bote de champú.

b) La capacidad del maletero de un coche.

c) El agua que contiene un embalse.

a) Mililitros

b) Litros

c) Hectómetros cúbicos

4 **Expresa en litros.**

a) 125 m^3 705 dm^3 500 cm^3

b) 590 000 mm^3

c) 0,000317 dam^3

d) 2 700 mm^3

a) 125 705,5 L

b) 0,59 L

c) 317 L

d) 0,0027 L

5 **Copia y completa.**

a) 2 560 L = … m^3

b) 370 cL = … cm^3

c) 520 cL = … dm^3

d) 4,8 mL = … cm^3

e) 0,55 L = … cm^3

f) 1 780 hL = … m^3

a) 2 560 L = 2,56 m^3

b) 370 cL = 3 700 cm^3

c) 520 cL = 5,2 dm^3

d) 4,8 mL = 4,8 m^3

e) 0,55 L = 550 cm^3

f) 1 780 hL = 178 m^3

6 **Si ayer cayeron 120 litros por m^2, ¿a cuántos milímetros de altura corresponden? ¿Cuántos litros por m^2 habrán caído si se alcanzan 48 mm de altura?**

120 L por m^2 corresponden a 120 mm de altura.

Para alcanzar los 48 mm de altura tienen que haber caído 48 L por m^2.

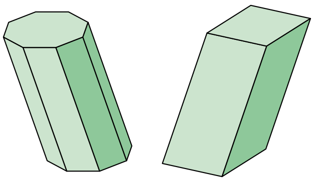
2 PRINCIPIO CAVALIERI

Página 288

Para practicar

1 **¿Verdadero o falso?**

Los volúmenes de estos cuerpos geométricos:



a) Son iguales, porque tienen la misma altura.

b) No son iguales, porque sus bases son polígonos distintos.

c) Son iguales, porque sus bases tienen la misma área.

d) Son iguales, porque tienen la misma altura y las secciones paralelas a sus bases tienen la misma área.

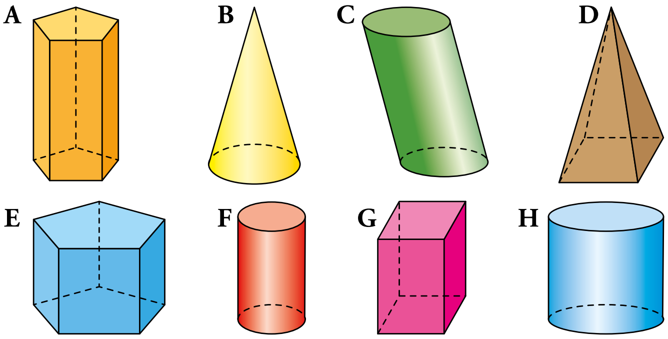
a) Falso.

b) Falso.

c) Falso.

d) Verdadero.

2 **La mitad de estas figuras tienen la misma área en la base y la otra mitad, como puedes observar, la misma altura.**



Empareja las que tienen el mismo volumen.

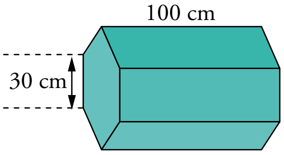
A y C, B y D, E y H, F y G.

3 VOLUMEN DEL PRISMA Y DEL CILINDRO

Página 289

Para fijar ideas

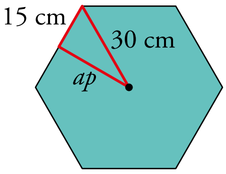
Copia y completa en tu cuaderno.



1 Halla el volumen de un prisma hexagonal regular con 1 m de arista lateral y 30 cm de arista en la base.

En un hexágono regular, el radio y el lado son iguales.

Por tanto, el cateto menor del triángulo rectángulo señalado es 15 cm.



$$\boldsymbol{ap = \sqrt{30^2 - 15^2} \approx 26 \text{ cm}}$$

$$\boldsymbol{A_{\text{BASE}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\dots \cdot \dots \cdot 26}{2} = \dots \text{ cm}^2}$$

$$\boldsymbol{V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \dots \cdot \dots = \dots \text{ cm}^3 = 234 \text{ litros}}$$

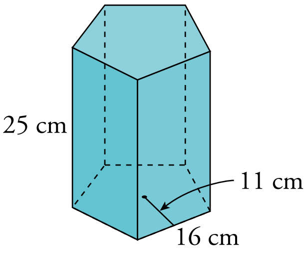
$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{30 \cdot 6 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = 2\,340 \cdot 100 = 234\,000 \text{ cm}^3 = 234 \text{ litros}$$

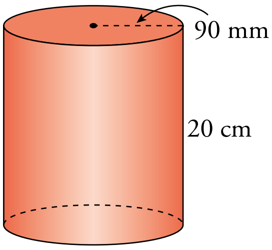
Para practicar

1 Halla el volumen de estos cuerpos geométricos.

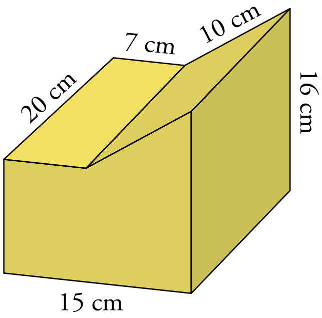
a)



b)



c)



a) $V = \dfrac{16 \cdot 5 \cdot 11}{2} \cdot 25 = 11\,000 \text{ cm}^3 = 11 \text{ dm}^3 = 11 \text{ L}$

b) $V = \pi \cdot 9^2 \cdot 20 = 5\,086{,}8 \text{ cm}^3 = 5{,}0868 \text{ dm}^3 = 5{,}0868 \text{ L}$

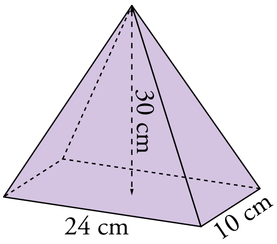
c) $V = 15 \cdot 20 \cdot 10 + \dfrac{8 \cdot 20 \cdot 6}{2} = 3\,000 + 480 = 3\,480 \text{ cm}^3 = 3{,}48 \text{ L}$

4 ▶ VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE Y DEL TRONCO DE PIRÁMIDE

Página 290

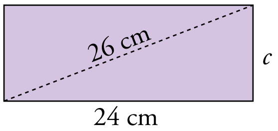
Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.



1 **Una pirámide de 30 cm de altura tiene una base rectangular de 24 cm de largo y 26 cm de diagonal. Halla su volumen.**

El lado (ancho) del rectángulo mide:



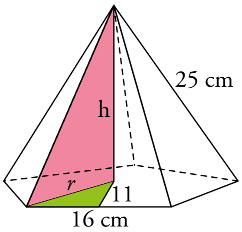
$$\boldsymbol{c = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}}$$

$$\boldsymbol{A_{BASE} = \dots \cdot 10 = \dots \text{ cm}^2}$$

$$\boldsymbol{V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot 30 = 2\,400 \text{ cm}^3}$$

$$A_{BASE} = 24 \cdot 10 = 240 \text{ cm}^2$$

$$V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} \cdot 240 \cdot 30 = 2\,400 \text{ cm}^3$$



2 **Calcula el volumen de una pirámide pentagonal regular con los siguientes datos:**

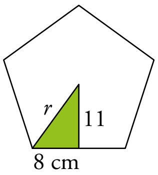
- **Lado de la base → 16 cm**
- **Apotema de la base → 11 cm**
- **Arista lateral → 25 cm**

Calculamos, primero, el radio y después la altura de la pirámide:

$$\boldsymbol{r^2 = 11^2 + 8^2 = 185 \qquad h = \sqrt{25^2 - r^2} = \sqrt{\dots} \approx \dots \text{ cm}}$$

$$\boldsymbol{A_{BASE} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\dots \cdot 5 \cdot \dots}{2} = \dots \text{ cm}}$$

$$\boldsymbol{V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \dots = 3\,080 \text{ cm}^3}$$



$$h = \sqrt{25^2 - r^2} = \sqrt{440} \approx 21 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 11}{2} = 440 \text{ cm}$$

$$V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} \cdot 440 \cdot 21 = 3\,080 \text{ cm}^3$$

Para practicar

1 **La gran pirámide de Keops es cuadrangular regular. El lado de su base mide 230 m y su altura es de 146 m. Halla su volumen en hm³.**

$$V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146 \approx 2\,574\,467 \text{ m}^3 \approx 2{,}574 \text{ hm}^3$$

2 **Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular de 80 cm de altura y 30 cm de lado en la base.**

En un hexágono regular, r = L.

$$ap = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} \approx 26 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{180 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ cm}^2$$

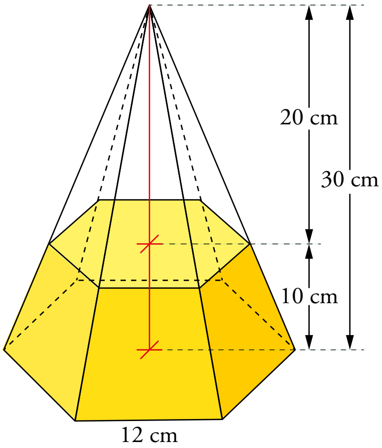
$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\,340 \cdot 80 = 62\,400 \text{ cm}^3 = 62{,}4 \text{ dm}^3 = 62{,}4 \text{ L}$$

Página 291

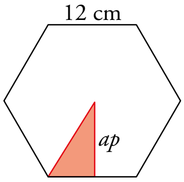
Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

3 **Una pirámide hexagonal regular de 12 cm de lado en la base y 30 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base y a 10 cm de la misma. Calcula el volumen del tronco de pirámide resultante.**



Calculamos la apotema y el área de la base:



$\boldsymbol{ap = \sqrt{12^2 - \ldots^2} = \sqrt{\ldots} \approx \ldots \text{ cm}}$

$\boldsymbol{A_{\text{BASE}} = \dfrac{12 \cdot 6 \cdot \ldots}{2} = 374{,}4 \text{ cm}^2}$

La razón de semejanza entre la pirámide pequeña y la grande es: $\boldsymbol{\dfrac{20}{30} = \dfrac{\ldots}{\ldots}}$

La razón de los volúmenes es: $\boldsymbol{\left(\dfrac{\ldots}{\ldots}\right)^3 = \dfrac{8}{27}}$

$\boldsymbol{V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \dfrac{1}{3} \cdot \ldots \cdot 30 = 3744 \text{ cm}^3}$

$\boldsymbol{V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \dfrac{\ldots}{27} \cdot \ldots \approx 1110 \text{ cm}^3}$

$\boldsymbol{V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 3744 - \ldots = 2634 \text{ cm}^3}$

$ap = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}4 \text{ cm}$

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{12 \cdot 6 \cdot 10{,}4}{2} = 374{,}4 \text{ cm}^2$

La razón de semejanza entre la pirámide pequeña y la grande es: $\dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$

La razón de los volúmenes es: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

$V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{12 \cdot 10{,}4 \cdot 6}{2} \cdot 30 = 3744 \text{ cm}^3$

$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \dfrac{8}{27} \cdot 3744 \approx 1110 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 3744 - 1110 = 2634 \text{ cm}^3$

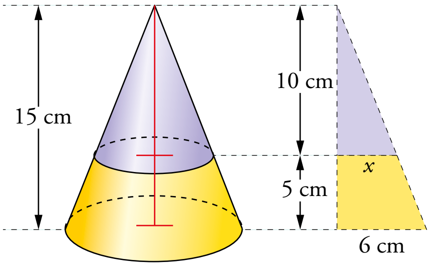
5 VOLUMEN DEL CONO Y DEL TRONCO DE CONO

Página 292

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Un cono recto con 6 cm de radio en la base y 15 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base y a 5 cm de la misma. Calcula el volumen del cono grande, del cono pequeño surgido del corte y del tronco de cono restante.**



El cono grande y el pequeño son semejantes. Calculamos el radio, *x*, de la base del pequeño:

$$\frac{15}{6}=\frac{\dots}{x}\rightarrow x=\frac{\dots\cdot\dots}{\dots}=4\text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\dots^2\cdot\dots=565{,}2\text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\dots^2\cdot\dots\approx167{,}5\text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}}=\dots-\dots=397{,}7\text{ cm}^3$$

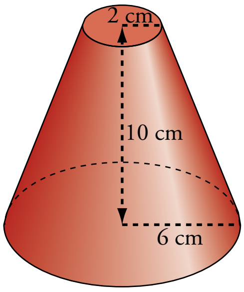
$$\frac{15}{6}=\frac{10}{x}\rightarrow x=\frac{10\cdot6}{15}=4\text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot6^2\cdot15=565{,}2\text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot4^2\cdot10\approx167{,}5\text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}}=565{,}2-167{,}5=397{,}7\text{ cm}^3$$

2 **Halla el volumen de un tronco de cono de 10 cm de altura cuyas bases tienen radios de 6 cm y 2 cm.**



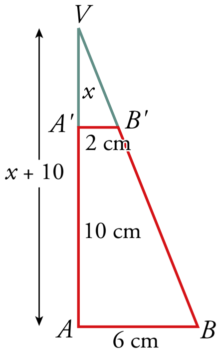
La semejanza de los triángulos *VAB* y *VA'B'* nos permitirá hallar la altura de los dos conos:

$$\frac{x+10}{6}=\frac{x}{2}\rightarrow 2x+20=6x\rightarrow 4x=20\rightarrow x=5\text{ cm}$$

Por tanto, la altura del cono grande es 15 cm, y la del cono pequeño, 5 cm.

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}}=V_{\text{CONO GRANDE}}-V_{\text{CONO PEQUEÑO}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\dots^2\cdot\dots-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\dots^2\cdot\dots\approx544\text{ cm}^3$$



$$V_{\text{TRONCO DE CONO}}=V_{\text{CONO GRANDE}}-V_{\text{CONO PEQUEÑO}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot6^2\cdot15-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot2^2\cdot5\approx544\text{ cm}^3$$

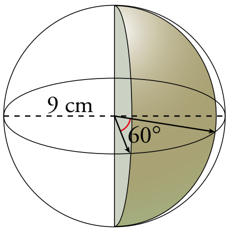
6 VOLUMEN DE LA ESFERA

Página 293

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Se introduce un balón de 30 cm de diámetro en un barreño lleno de agua, y se recoge el líquido desalojado. ¿Cuántos litros se han recogido?**



El volumen de agua desalojada coincide con el volumen de una esfera de radio 15 cm:

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^3 = \ldots \text{ cm}^3 \rightarrow \ldots \text{ cm}^3 : 1\,000 = 14{,}13 \text{ litros}$$

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 = 14\,130 \text{ cm}^3 \longrightarrow 14\,130 \text{ cm}^3 : 1\,000 = 14{,}13 \text{ litros}$$

2 **Halla el volumen de una cuña esférica de 60° correspondiente a una esfera de 9 cm de radio.**

A una cuña de 60° le corresponde $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$ del volumen de la esfera:

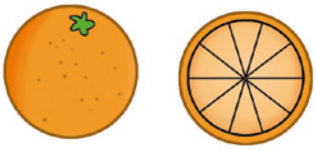
$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^3 \approx \ldots \text{ cm}^3 \rightarrow V_{\text{CUÑA ESFÉRICA}} = \frac{1}{6} \cdot \ldots \approx 509 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 \approx 3\,052 \text{ cm}^3 \longrightarrow V_{\text{CUÑA ESFÉRICA}} = \frac{1}{6} \cdot 3\,052 \approx 509 \text{ cm}^3$$

Página 294

Para practicar

1 **Calcula el volumen de cada uno de los 10 gajos de una naranja cuyo diámetro es de 12 cm, sabiendo que su cáscara tiene 0,8 cm de grosor.**



El volumen de cada gajo es el de una cuña esférica de 36° correspondiente a una esfera de 12 : 2 – 0,8 = 5,2 cm de radio.

$$V_{\text{SECTOR ESFÉRICO}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5{,}2^3 = 58{,}87 \text{ cm}^3$$

El volumen de cada gajo es 0,05887 L.

2 **¿Cuántas bolas de 5 mm de diámetro podremos hacer fundiendo un cable cilíndrico de 3 m de largo y 5 mm de diámetro?**

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{BOLA}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2,5^3 = 65,42 \text{ mm}^3 \\ V_{\text{CABLE}} = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 3 \approx 58\,875 \text{ mm}^3 \end{array}\right\} \text{Se pueden hacer, aproximadamente, } \dfrac{58\,875}{65,42} = 900 \text{ bolas.}$$

3 **Sabiendo que la densidad del acero es 7 850 kg/m³, calcula el peso de una esfera hueca de 20 cm de radio exterior y 1 cm de grosor.**

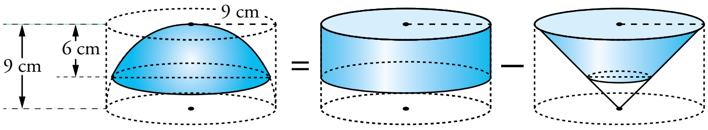
$$V = \frac{4}{3}\pi\ 20^3 - \frac{4}{3}\pi\ 19^3 = 4\,776{,}99 \text{ cm}^3$$

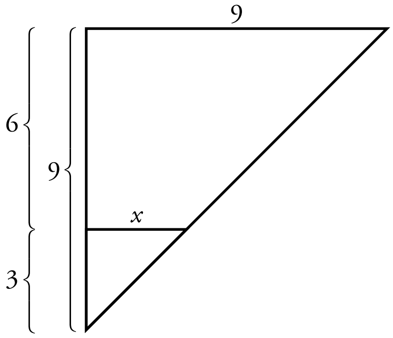
$$\left.\begin{array}{rcl} 7\,850 \text{ kg} & \rightarrow & 10^6 \\ x & \rightarrow & 4\,776,99 \end{array}\right\} \rightarrow x = 37{,}49 \text{ kg}$$

La esfera hueca pesará 37,49 kg.

4 **Calcula el volumen de un casquete esférico de 6 cm de alto, perteneciente a una esfera de 18 cm de diámetro.**

Observa:





$r = 9$ cm

$x = 3$ cm

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot r^2 \cdot 6 = \pi \cdot 9^2 \cdot 6 \approx 1\,526 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 1/3 \cdot \pi \cdot 9^3 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \approx 735 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} \approx 791 \text{ cm}^3$

Página 295

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Unidades de volumen. Operaciones

1 **Transforma en metros cúbicos las siguientes cantidades:**

a) 0,025 hm^3
b) 459 hm^3
c) 45 214 dm^3
d) 0,015 km^3
e) 23 dam^3
f) 58 000 L

a) 25 000 m^3
b) 459 000 000 m^3
c) 45,214 m^3
d) 15 000 000 m^3
e) 23 000 m^3
f) 58 m^3

2 **Transforma en litros.**

a) 400 000 hm^3
b) 0,000047 hm^3
c) 6 dam^3 318 m^3
d) 8 562 m^3 1 749 cm^3
e) 14 350 dL
f) 0,32 hL

a) 400 000 000 000 000 litros
b) 47 000 litros
c) 6 318 000 litros
d) 8 562 001,749 litros
e) 1 435 litros
f) 32 litros

3 **Copia y completa en tu cuaderno las igualdades siguientes:**

a) 0,0037 km^3 = … m^3
b) 0,36 hm^3 = … dm^3
c) 1,8342 dam^3 = … m^3 = … dm^3
d) 0,0007 m^3 = … dm^3 = … cm^3
e) 15 hm^3 13 dam^3 432 m^3 = … m^3
f) 15 hm^3 13 dam^3 432 m^3 = … L

a) 3 700 000 m^3
b) 360 000 000 dm^3
c) 1 834,2 m^3 = 1 834 200 dm^3
d) 0,7 dm^3 = 700 cm^3
e) 15 013 432 m^3
f) 15 013 432 000 litros

4 **Expresa estas cantidades en forma compleja:**

a) 45 125 145 dm^3
b) 0,45124568 km^3
c) 451,14521 dm^3
d) 183 000 dam^3
e) 527 002 045 m^3
f) 183 070 693 002 cm^3

a) 45 dam^3 125 m^3 145 dm^3
b) 451 hm^3 245 dam^3 680 m^3
c) 451 dm^3 145 cm^3 210 mm^3
d) 183 hm^3
e) 527 hm^3 2 dam^3 45 m^3
f) 183 dam^3 70 m^3 693 dm^3 2 cm^3

5 **Copia y completa en tu cuaderno las siguientes igualdades:**

a) 1 hm^3 = … hL
b) 1 dam^3 = … daL
c) 1 m^3 = … L
d) 1 dm^3 = … dL
e) 1 cm^3 = … cL
f) 1 mm^3 = … mL

a) 10^7 hL
b) 10^5 daL
c) 10^3 L
d) 10 dL
e) 10^{-1} cL
f) 10^{-3} mL

6 **Efectúa las operaciones siguientes y expresa el resultado en hectolitros. Para ello, pasa a forma incompleja, expresa todas las cantidades en las mismas unidades y realiza los cálculos.**

a) **$0{,}34\ \text{dam}^3 + 84\ \text{m}^3 + 1\,284\ \text{m}^3$**

b) **$0{,}00035\ \text{km}^3 + 0{,}45\ \text{hm}^3 + 65\ \text{dam}^3$**

c) **$0{,}541\ \text{dam}^3 - 421\ \text{m}^3\ 300\ \text{dm}^3$**

d) **$4\,500\ \text{m}^3 : 25$**

e) **$24\ \text{hm}^3\ 123\ \text{dam}^3\ 128\ \text{m}^3 : 40$**

f) **$568\ \text{kL} - 0{,}508\ \text{dam}^3$**

a) $340 + 84 + 1\,284 = 1\,708\ \text{m}^3 \rightarrow 17\,080\ \text{hL}$

b) $350 + 450 + 65 = 865\ \text{dam}^3 \rightarrow 8\,650\,000\ \text{hL}$

c) $541 - 421{,}3 = 119{,}7\ \text{m}^3 \rightarrow 1\,197\ \text{hL}$

d) $180\ \text{m}^3 \rightarrow 1\,800\ \text{hL}$

e) $603\,078{,}2\ \text{m}^3 \rightarrow 6\,030\,782\ \text{hL}$

f) $60\,000\ l \rightarrow 600\ \text{hL}$

7 **Para cada uno de estos recipientes que se citan a continuación, se dan tres volúmenes. Solo uno de ellos es razonable. Di, en cada caso, cuál es.**

a) **Volumen de un pantano:**

$71\ \text{hm}^3$ $\quad$ $387\,000\ \text{L}$ $\quad$ $4\,000\,000\,000\ \text{cm}^3$

b) **Un depósito de agua en una vivienda:**

$2\ \text{dam}^3$ $\quad$ $0{,}8\ \text{m}^3$ $\quad$ $45\,000\ \text{L}$

c) **Un vaso normal:**

$2\ \text{dm}^3$ $\quad$ $0{,}2\ \text{dm}^3$ $\quad$ $0{,}02\ \text{dm}^3$

d) **Una cucharada de café:**

$3\ \text{dL}$ $\quad$ $3\ \text{cm}^3$ $\quad$ $3\ \text{mm}^3$

a) $71\ \text{hm}^3$

b) $0{,}8\ \text{m}^3$

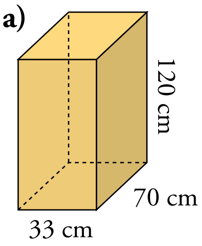
c) $0{,}2\ \text{dm}^3$

d) $3\ \text{cm}^3$

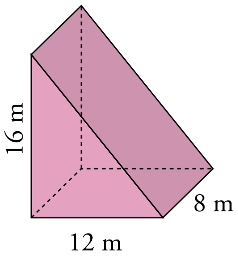
Cálculo de volúmenes

8 **Calcula el volumen de cada uno de estos poliedros. Expresa todos los volúmenes en litros.**

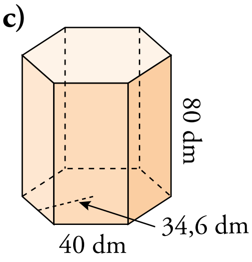
a)



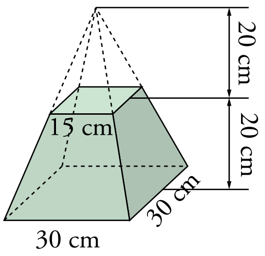
b)



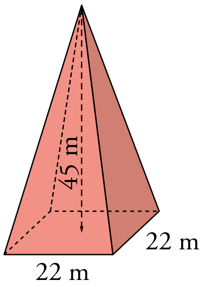
c)



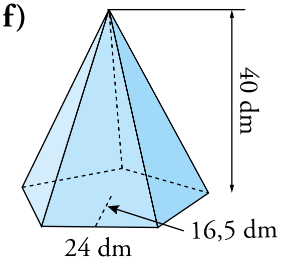
d)



e)



f)



a) $V = 33 \cdot 70 \cdot 120 = 277\,200 \text{ cm}^3 = 277{,}2 \text{ L}$

b) $V = \dfrac{12 \cdot 8 \cdot 16}{2} = 768 \text{ m}^3 = 768\,000 \text{ L}$

c) $V = \dfrac{6 \cdot 40 \cdot 34{,}6}{2} \cdot 80 = 332\,160 \text{ dm}^3 = 332\,160 \text{ L}$

d) $V = \dfrac{1}{3} \cdot 30^2 \cdot 40 - \dfrac{1}{3} \cdot 15^2 \cdot 20 = 12\,000 - 1\,500 = 10\,500 \text{ cm}^3 = 10{,}5 \text{ L}$

e) $V = \dfrac{1}{3} \cdot 22^2 \cdot 45 = 7\,260 \text{ m}^3 = 7\,260\,000 \text{ L}$

f) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5 \cdot 24 \cdot 16{,}5}{2} \cdot 40 = 13\,200 \text{ dm}^3 = 13\,200 \text{ L}$

9 **Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 9 dm × 15 dm × 8 dm.**

$V = 1\,080 \text{ dm}^3 = 1{,}08 \text{ m}^3$

10 **La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 15 cm. La altura del prisma es de 2 dm. Halla su volumen.**

$V = \dfrac{12 \cdot 15}{2} \cdot 20 = 1\,800 \text{ cm}^3 = 1{,}8 \text{ dm}^3 = 1{,}8 \text{ L}$

Página 296

11 **¿Cuál es el volumen de un cubo de 15 cm de arista?**

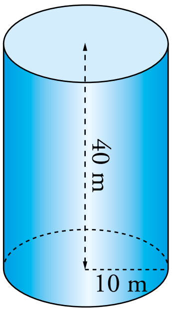
$V = 3\,375 \text{ cm}^3 = 3{,}375 \text{ dm}^3 = 3{,}375 \text{ L}$

12 **Un prisma tiene sus bases en forma de rombo cuyas diagonales miden 40 dm y 28 dm. Su altura es de 1,2 m. Halla su volumen.**

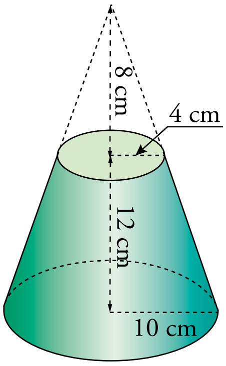
$$V = \frac{40 \cdot 28}{2} \cdot 12 = 6\,720 \text{ dm}^3 = 6{,}720 \text{ m}^3$$

13 **Calcula el volumen y exprésalo en litros.**

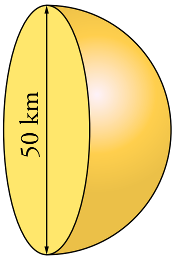
a)



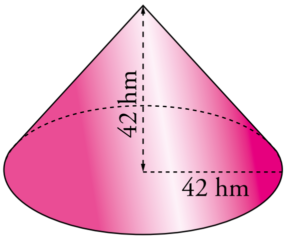
b)



c)



d)



a) $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 40 = 12\,560 \text{ m}^3 = 12\,560\,000 \text{ L}$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 20 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 1\,959{,}36 \text{ cm}^3 = 1{,}95936 \text{ L}$

c) $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 \approx 32\,708{,}33 \text{ km}^3 = 32\,708\,330\,000\,000\,000 \text{ L}$

d) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 42^2 \cdot 42 = 77\,545{,}44 \text{ hm}^3 = 77\,545\,440\,000\,000 \text{ L}$

14 **Halla el volumen de:**

a) Un cilindro de 10 cm de radio y 20 cm de altura.

b) Una esfera de 12 cm de diámetro.

c) Un disco cilíndrico de 6 dm de radio de la base y 15 cm de altura.

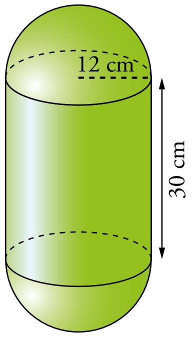
a) $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 6\,280 \text{ cm}^3 = 6{,}280 \text{ dm}^3 = 6{,}28 \text{ L}$

b) $V = \frac{4}{3}\pi\, 12^3 = 904{,}32 \text{ cm}^3$

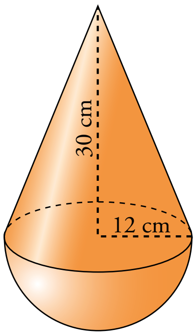
c) $V = \frac{1}{3}\pi\, 6^2 \cdot 1{,}5 = 56{,}52 \text{ dm}^3$

15 **Calcula el volumen y exprésalo en litros.**

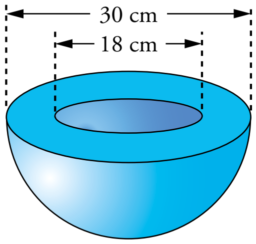
a)



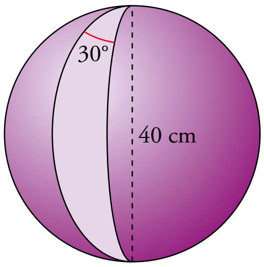
b)



c)



d)



a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 + \pi \cdot 12^2 \cdot 30 = 20\,799{,}36 \text{ cm}^3 = 20{,}79936 \text{ L}$

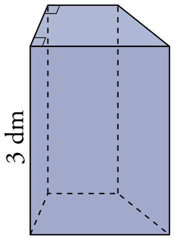
b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 8\,138{,}88 \text{ cm}^3 = 8{,}13888 \text{ L}$

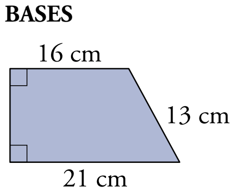
c) $V = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3}{2} = \dfrac{11\,077{,}92}{2} = 5\,538{,}96 \text{ cm}^3 = 5{,}53896 \text{ L}$

d) $V = \frac{11}{12} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 20^3 = 30\,702{,}2 \text{ cm}^3 = 30{,}7022 \text{ L}$

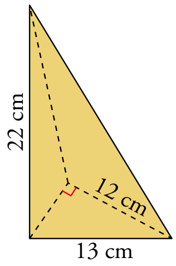
16 **Halla el volumen del prisma y de la pirámide. Deberás calcular, primero, algún dato que falta.**

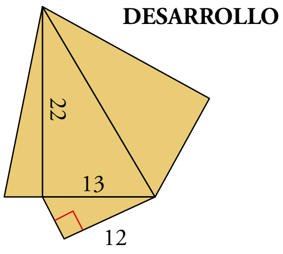
a)





b)



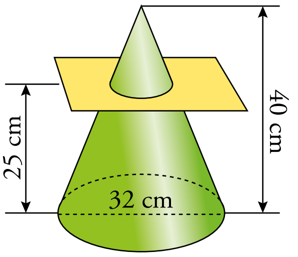


a) $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\sqrt{144} \cdot (16 + 21)}{2} = 222 \text{ cm}^2$

$V = 222 \cdot 30 = 6\,660 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 22 = 220 \text{ cm}^3$

17 **Calcula el volumen de los dos cuerpos geométricos que se generan al cortar un cono por un plano como se muestra en el dibujo.**

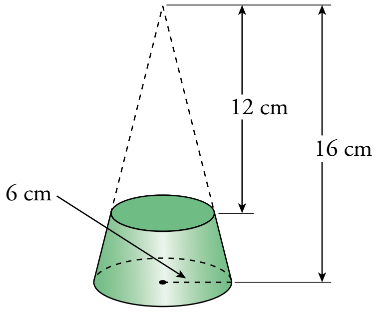


$\frac{40}{16} = \frac{15}{x} \rightarrow x = 6$

$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 \approx 565{,}2 \text{ cm}^3$

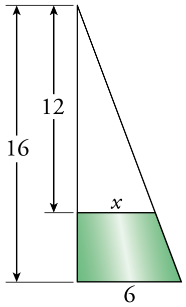
$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16^2 \cdot 40 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 \approx 10\,152{,}67 \text{ cm}^3$

18 **Halla el volumen de este tronco de cono.**



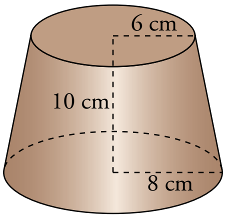
$\frac{x}{12} = \frac{6}{16} \rightarrow x = 4{,}5$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 16 - \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 12 = 348{,}54 \text{ cm}^3$

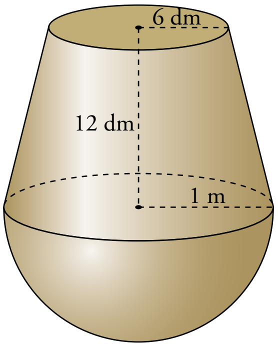


19 **Halla el volumen de estos cuerpos de revolución. Deberás calcular, primero, algún dato que falta.**

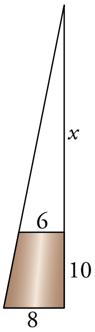
a)



b)



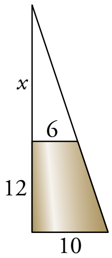
a)



$$\frac{10+x}{8} = \frac{x}{6} \rightarrow x = 30$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40 \cdot 8^2 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 30 \cdot 6^2 = 1\,549{,}1 \text{ cm}^3$$

b)



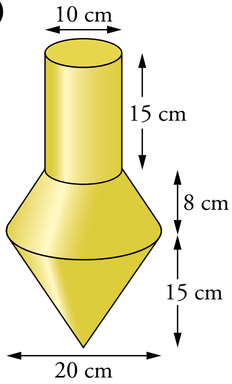
$$\frac{x+12}{10} = \frac{x}{6} \rightarrow x = 18$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 10^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 30 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 18 = 4\,555 \text{ dm}^3$$

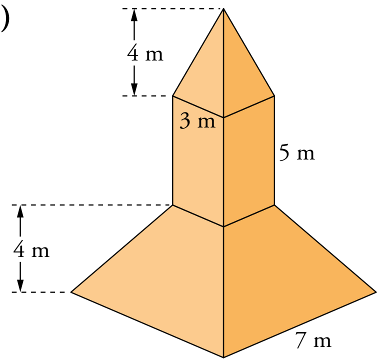
Página 297

20 **Halla el volumen de estos cuerpos geométricos.**

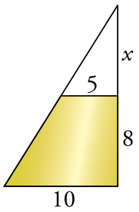
a)



b)



a)



$$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 1\,177{,}5 \text{ cm}^2$$

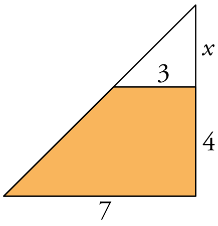
$$\frac{x+8}{10} = \frac{x}{5} \rightarrow x = 8$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (10^2 \cdot 16 - 5^2 \cdot 8) = 1\,465{,}3 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1\,570 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TOTAL}} = 4\,212{,}8 \text{ cm}^3$$

b)



$$V_{\text{PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 4 = 12 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{PARALELEPÍPEDO}} = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45 \text{ m}^3$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x+4}{7} \rightarrow x = 3$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3} \cdot 7^2 \cdot 7 - \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3 = 105{,}33 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{TOTAL}} = 162{,}3 \text{ m}^3$$

Resuelve problemas

21 **¿Cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar con 0,03 dam^3?**

0,03 dam^3 = 30 000 dm^3 = 30 000 L

30 000 : 0,75 = 40 000

Se podrán llenar 40 000 botellas de 3/4 de litro.

22 **Un pantano tiene una capacidad de 0,19 km^3. Si ahora está al 28 % de su capacidad, ¿cuántos litros de agua contiene?**

28 % de 0,19 km^3 = 0,0532 km^3 = 53 200 000 000 L

Contiene 53 200 000 000 L de agua.

23 **La cuenca fluvial cuyas aguas llegan a un pantano es de 62 km^2. En las últimas lluvias han caído 27 L por metro cuadrado. Del agua caída, se recoge en el pantano un 43 %. ¿Cuántos hectómetros cúbicos se han recogido en el pantano como consecuencia de las lluvias?**

62 000 000 m^2 → $1{,}674 \cdot 10^9$ L = $1{,}674 \cdot 10^9$ dm^3

$1{,}674 \cdot 10^6$ m^3 en total, calculamos el 43 %:

$1{,}674 \cdot 10^6 \cdot 0{,}43 = 719\,820$ m^3

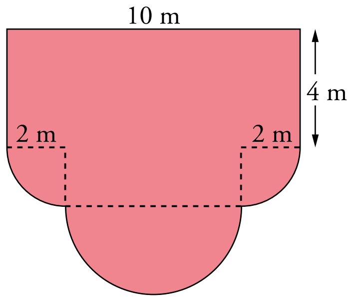
Han recogido 0,71982 hm^3.

24 **Un depósito vacío pesa 27 kg, y lleno de aceite, 625,5 kg. ¿Cuántos litros de aceite contiene? La densidad de ese aceite es 0,95 kg/dm^3.**

$$\frac{625{,}5-27}{0{,}95} = 630 \text{ dm}^3 = 630 \text{ L}$$

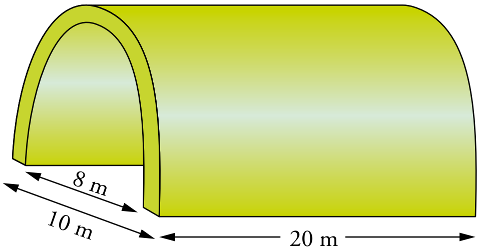
Contiene 630 L de aceite.

25 **Halla el volumen de una habitación de 2,8 m de altura, cuya planta tiene esta forma y dimensiones:**



$$\left.\begin{aligned}
&V_{\text{PARALELOGRAMO GRANDE}} = 4 \cdot 10 \cdot 2{,}8 = 112 \text{ m}^3\\
&V_{\text{SEMICÍRCULO}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 \cdot 2{,}8 = 39{,}6 \text{ m}^3\\
&V_{\text{PARALELOGRAMO PEQUEÑO}} = 2 \cdot 6 \cdot 2{,}8 = 33{,}6 \text{ m}^3\\
&V_{\text{1/2 CIRCUNFERENCIA}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 \cdot 2{,}8 = 17{,}6 \text{ m}^3
\end{aligned}\right\} \; V_{\text{TOTAL}} = 202{,}8 \text{ m}^3$$

26 **Calcula el volumen de hormigón que se ha necesitado para hacer este túnel:**



$$V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 20 - \pi \cdot 4^2 \cdot 20}{2} = 282{,}6 \text{ m}^3$$

27 **Halla el volumen de una habitación con forma de ortoedro de dimensiones 6 m × 3,8 m × 2,6 m. ¿Cuántas duchas podrías darte con el agua que cabe en la habitación suponiendo que gastas 80 L de agua en cada ducha?**

$V = 6 \cdot 3{,}8 \cdot 2{,}6 = 59{,}28 \text{ m}^3 = 59\,280 \text{ L}$

$59\,280 : 80 = 741$

Podrías darte 741 duchas.

28 **Un sótano cuya superficie es de 208 m^2 se ha inundado. El agua llega a 1,65 m de altura. Se extrae el agua con una bomba que saca 6 hL por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarlo?**

$208 \cdot 1{,}65 = 343{,}2 \text{ m}^3$ hay en el sótano.

$$\frac{3\,432 \text{ hL}}{6 \text{ hL/min}} = 572 \text{ min} = 9{,}5\widehat{3} \text{ horas} = 9 \text{ h } 32 \text{ min}$$

Se tardará en vaciarlo 9 horas y 32 minutos.

29 **Con una barra cilíndrica de oro de 15 cm de larga y 5 mm de diámetro se fabrica un hilo de 1/4 mm de diámetro. ¿Cuál es la longitud del hilo?**

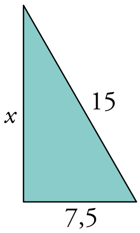
$V_{\text{BARRA}} = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 150 = 2\,943{,}75 \text{ mm}^3$

Dividiéndolo entre la superficie de una circunferencia de 0,25 mm de diámetro nos dará la longitud del hilo:

$2\,943{,}75 : (\pi \cdot 0{,}125^2) = 60\,000 \text{ mm} = 60 \text{ m}$

La longitud del hilo es 60 m.

30 **Una columna de basalto tiene forma de prisma hexagonal regular. El lado de la base mide 15 cm. La altura de la columna es de 2,95 m. Halla su peso sabiendo que 1 m^3 de basalto pesa 2 845 kg.**



$x \approx 13$ $\quad V_{\text{COLUMNA}} = \frac{15 \cdot 6}{2} \cdot 13 \cdot 295 = 172{,}575 \text{ cm}^3$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 \text{ m}^3 & \rightarrow & 2\,845 \text{ kg} \\ 0,172575 \text{ m}^3 & \rightarrow & x \text{ kg} \end{array}\right\} x = 491 \text{ kg}$$

La columna pesará 491 kg.

31 **Para medir el volumen de una piedra pequeña, hacemos lo siguiente: llenamos un vaso cilíndrico hasta la mitad, sumergimos la piedra y comprobamos que el nivel ha subido 22 mm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?**

DATOS DEL VASO

Diámetro exterior: 9 cm

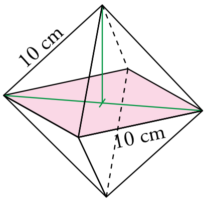
Diámetro interior: 8,4 cm

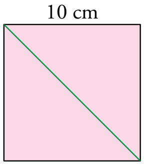
Altura: 15 cm

Usa solo los datos que necesites.

$V = \left(\frac{8,4}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2,2 = 121,86 \text{ cm}^3$ es el volumen de la piedra.

32 **Calcula el volumen de un octaedro regular de 10 cm de arista.**



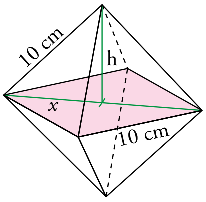


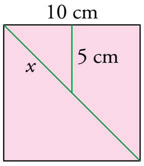
$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{h}$

$x = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$

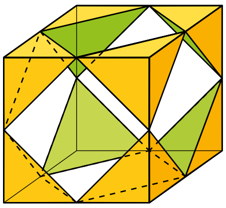
$\text{h} = \sqrt{10^2 - 7,07^2} = 7,07 \text{ cm}$

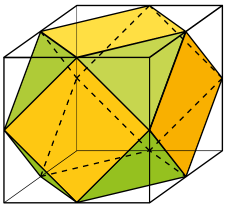
$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{h} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 7,07 = 471,3 \text{ cm}^3$



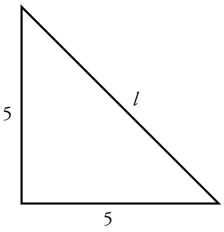


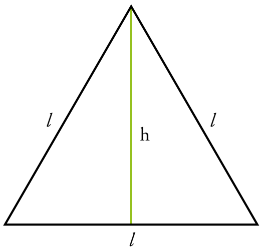
33 **A un cubo de arista 10 cm, se le cortan las esquinas como se muestra a continuación. Calcula el volumen del poliedro resultante.**





Calculamos el volumen de la pirámide naranja cuya base un triángulo equilátero. Buscamos su lado, *l*, y su altura, h:



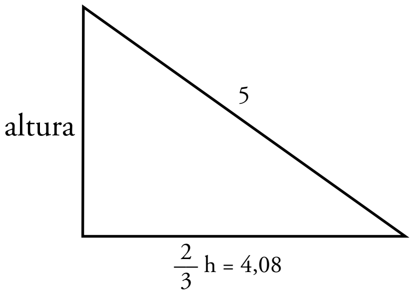


$l = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$

$\text{h}^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow \text{h} = 6,12 \text{ cm}$

$\text{Área de la base} = \frac{7,07 \cdot 6,12}{2} = 21,6 \text{ cm}^2$

Calculamos ahora la altura de la pirámide:



altura = $\sqrt{5^2 - 4,08^2}$ = 2,89 cm

$$V = \frac{\text{Área de la base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{2,16 \cdot \text{altura}}{3} = \frac{2,16 \cdot 2,89}{3} = 20,8 \ \text{cm}^3$$

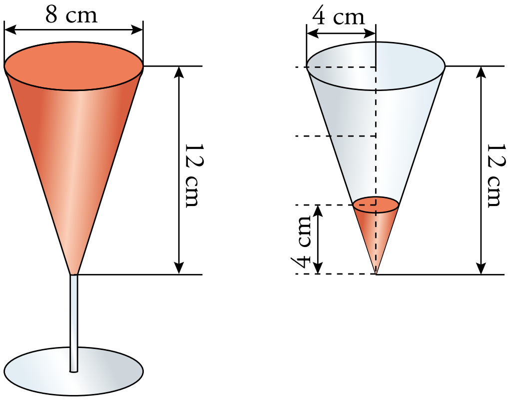
Con cada dos esquinas naranjas del dibujo de la izquierda podemos obtener un cubo de lado 5 cm, entonces:

$$V_{\text{POLIEDRO}} = V_{\text{CUBO}} - 8 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 10^3 - 8 \cdot 20,8 = 833,6 \text{ cm}^3$$

Página 298

34 Problema resuelto.

35 **Ana se ha sentado en una terraza y ha pedido un batido de fresa que le sirven en una copa como la que ves en la ilustración. Tras beber varios sorbos, comprueba que el nivel ha bajado a la tercera parte. ¿Qué fracción del batido le queda?**



Sugerencias:

a) Puedes calcular el volumen del batido inicial, el del batido final y dividir.

b) También puedes seguir el procedimiento empleado en el problema resuelto anterior.

a) $V_{\text{INICIAL}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 200,96 \text{ cm}^3$

Radio del batido que queda:

$\frac{4}{12} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 1,33$

$V_{\text{FINAL}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot 4 = 7,41 \text{ cm}^3$

Dividiendo ambos volúmenes:

$\frac{7,41}{200,96} = 0,037 = \frac{37}{1\,000}$

b) razón de semejanza = $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \rightarrow$ razón de sus volúmenes = $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} = 0,037 \rightarrow \frac{37}{1\,000}$

36 **Lucas quiere construir una pared de 7,5 m por 5,6 m y un grosor de 30 cm. ¿Cuántos ladrillos de 15 cm × 10 cm × 6 cm necesitará si el cemento ocupa un 15 % del volumen?**

$V_{\text{PARED}} = 12{,}6 \text{ m}^3 \rightarrow$ el 15 % es $1{,}89 \text{ m}^3$

Tenemos que rellenar de ladrillo $10{,}71 \text{ m}^3$

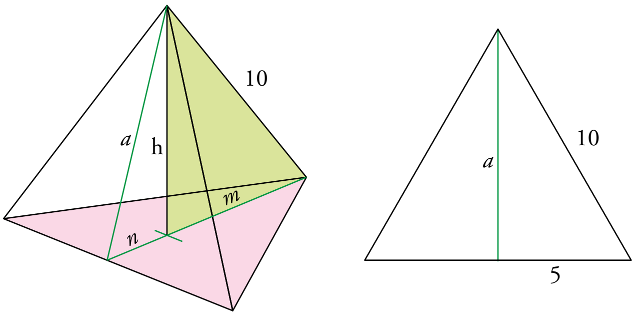
$V_{\text{LADRILLO}} = 900 \text{ cm}^3 = 0{,}9 \text{ dm}^3 = 0{,}0009 \text{ m}^3$

Necesitaremos $\dfrac{10{,}71}{0{,}0009} = 11\,900$ ladrillos.

Interpreta, describe, exprésate

37 **Explica, paso a paso, el proceso que se expone a continuación para calcular el volumen de un tetraedro regular de 10 cm de arista.**

- **La figura:**



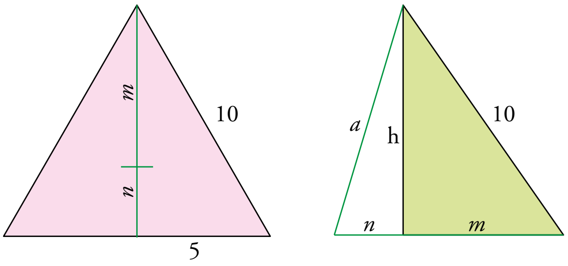
- **Calculamos *a*:**

$\mathbf{a = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8{,}7 \text{ cm}}$

- **Calculamos el área de la base:**

$\mathbf{A_{\text{BASE}} = \dfrac{10 \cdot a}{2} = \dfrac{10 \cdot 8{,}7}{2} = 43{,}5 \text{ cm}^2}$

- **Calculamos *m* y h:**



$\mathbf{a = m + n}$

$\mathbf{m = \dfrac{2}{3} \cdot a = \dfrac{2}{3} \cdot 8{,}7 = 5{,}8 \text{ cm}}$

$\mathbf{h = \sqrt{10^2 - m^2} = \sqrt{10^2 - 5{,}8^2} \approx 8{,}1 \text{ cm}}$

- **Calculamos el volumen del tetraedro:**

$$\mathbf{V_{\text{TETRAEDRO}} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 43{,}5 \cdot 8{,}1 = 117{,}45 \text{ cm}^3}$$

Primero calculamos *a*, la apotema de todos sus lados y altura de la base, para poder calcular el área de la base.

Luego vemos dónde cae la altura de la base, dividiendo la apotema de la base en dos segmentos *m* y *n*.

Como se trata de un tetraedro regular, la apotema queda partida en $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$.

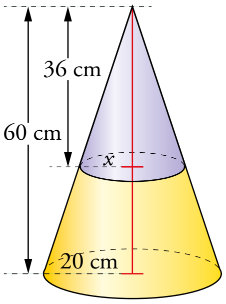
Finalmente, ya podemos calcular la altura del tetraedro y, con ella, su volumen.

Página 299

38 **A continuación, se presenta un problema con dos resoluciones diferentes. Analízalas y describe sus diferencias.**

Un cono de revolución, de 60 cm de altura y 20 cm de radio en la base, se corta por un plano paralelo a la base que dista 36 cm del vértice. Calcula el volumen de tronco de cono que queda por debajo del corte.

Resolución A



$$\frac{60}{20} = \frac{36}{x} \to x = \frac{36 \cdot 20}{60} = 12$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 60 \approx 25\,120 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 36 \approx 5\,426 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 25\,120 - 5\,426 = 19\,694 \text{ cm}^3$$

Resolución B

Razón de semejanza entre los conos: $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

Relación entre los volúmenes: $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 60 \approx 25\,120 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{27}{125} \cdot 25\,120 = 5\,426 \text{ cm}^3$$

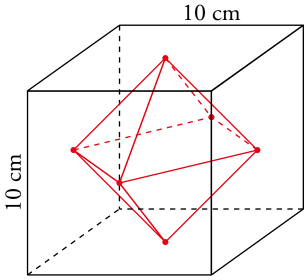
$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 25\,120 - 5\,426 = 19\,694 \text{ cm}^3$$

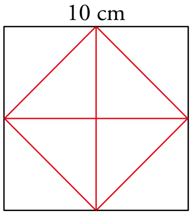
Resolución A: calculamos el radio del cono pequeño para encontrar el volumen del cono menor.

Resolución B: usamos la proporción entre los dos conos para comparar sus volúmenes y encontrar el volumen del cono menor, a partir del cono mayor.

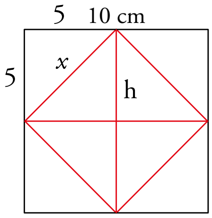
Problemas «+»

39 **Calcula el volumen del octaedro regular cuyos vértices coinciden con los centros de las caras de un cubo de 10 cm de arista.**





$$x = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7{,}07$$

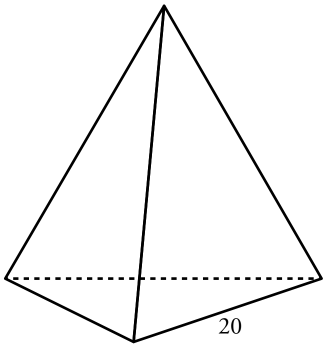


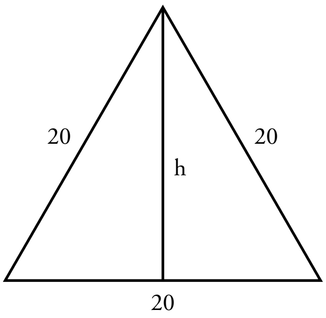
Calculamos el volumen del octaedro a partir de las dos pirámides que lo conforman.

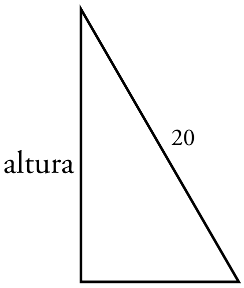
$$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{h} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \text{h} = 2 \cdot \frac{50}{3} \cdot 5 = 166{,}\widehat{6}\ \text{cm}^3$$

40 **Calcula el volumen de un tetraedro regular de 20 cm de arista.**







$$\text{h} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}32\ \text{cm}$$

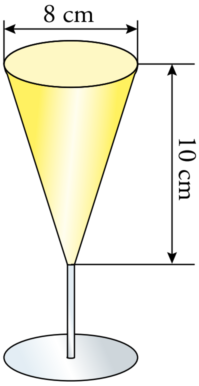
$$\text{Área de la base} = \frac{20 \cdot 17{,}32}{2} = 173{,}2\ \text{m}^2$$

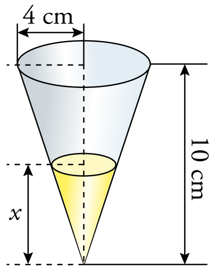
Altura del tetraedro:

$$\text{altura} = \sqrt{20^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 17{,}32\right)^2} = \sqrt{20^2 - (11{,}55)^2} = 16{,}66\ \text{cm}$$

$$V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot 173{,}2 \cdot 16{,}66 = 961{,}8\ \text{cm}^3$$

41 **Un vaso cónico, de 8 cm de diámetro en la parte más ancha y 10 cm de altura, contenía zumo de naranja y se ha vaciado quedando un resto equivalente a la octava parte de su volumen. ¿Qué altura alcanza el líquido que queda?**



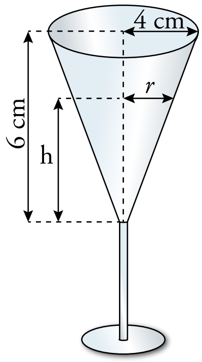


Como la razón de los volúmenes es $\frac{1}{8}$ podemos afirmar que la razón de las alturas es $\frac{1}{2}$, ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Por tanto, la altura de lo que queda es la mitad.

El líquido que queda alcanza los 5 cm de altura.

42 **Una copa cónica de 8 cm de diámetro en la parte más ancha y 6 cm de altura se llena hasta la mitad de su volumen. ¿Qué altura alcanza el líquido?**

$V_{\text{COPA}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 100{,}48 \text{ cm}^3 \rightarrow$ La mitad de su volumen es 50,24 cm^3.



Por semejanza de triángulos:

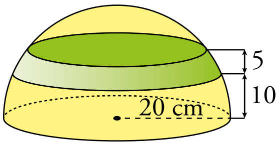
$$\frac{4}{6} = \frac{r}{\text{h}} \rightarrow \text{h} = \frac{6r}{4} = \frac{3r}{2}$$

$$V_{\text{EN LA COPA}} = 50{,}24 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \frac{3r}{2} \rightarrow r^3 = \frac{50{,}24 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\pi} \approx 32 \rightarrow r = \sqrt[3]{32}$$

$r = 3{,}17$ cm

$$\text{h} = \frac{3r}{2} \approx 4{,}76 \text{ cm}$$

43 **Calcula el volumen de esta zona esférica:**



$$V_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \pi \cdot 20^2 \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (15^3 - 10^3) \approx 3\,794{,}17 \text{ cm}^3$$

44 **Al posar sobre el agua de un barreño una pelota de 24 cm de diámetro, comprobamos que se hunde 4 cm. ¿Qué porcentaje del volumen de la pelota queda sumergido bajo la superficie del agua del barreño?**

$V_{\text{PELOTA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 = 7\,234{,}56 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}}$

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot R^2 \cdot \text{h} = \pi \cdot 12^2 \cdot 4 \approx 1\,808{,}64 \text{ m}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 \approx 1\,272{,}9 \text{ cm}^3$

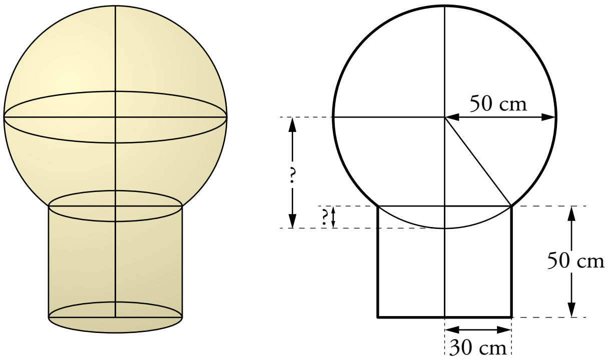
$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = 1\,808{,}64 - 1\,272{,}9 \approx 535{,}74 \text{ cm}^3$

$\frac{535{,}74 \text{ cm}^3}{7\,238{,}23 \text{ cm}^3} \approx 7{,}4\,\%$

Queda sumergido el 7,4 % de la pelota.

45 **Una esfera de 50 cm de radio se corta por un plano horizontal que deja una sección de 30 cm de radio. Tras suprimir el casquete esférico que queda debajo de la sección, se le adosa un cilindro de 50 cm de altura y cuya base superior coincide con la sección señalada en la esfera.**

Calcula el volumen del cuerpo resultante.



Calculamos primero el volumen de la esfera quitando el casquete inferior:

$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 50^3 \approx 523\,333 \text{ cm}^3$

$x = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 \rightarrow$ La altura del casquete es de $50 - 40 = 10$ cm.

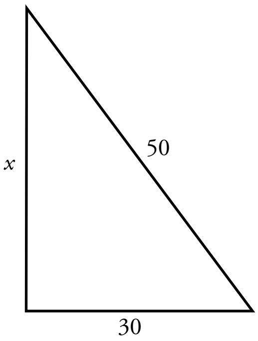
$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}}$

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot R^2 \cdot \text{h} = \pi \cdot 50^2 \cdot 10 \approx 78\,500 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 50^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40^3 \approx 63\,846{,}6 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} \approx 14\,653{,}4 \text{ cm}^3$

$V_{\text{ESFERA}} - V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = 523\,333 - 14\,653{,}4 = 508\,679{,}6 \text{ cm}^3$



Calculamos ahora el volumen del cilindro sobre el que se adosa la esfera:

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 30^2 \cdot 50 = 141\,300 \text{ cm}^3$

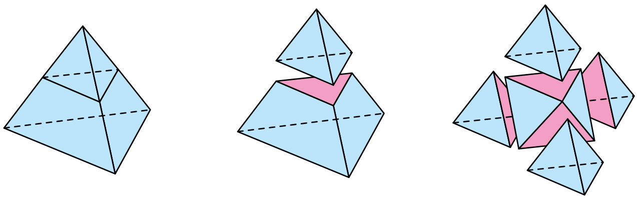
$V_{\text{CUERPO RESULTANTE}} = 508\,679{,}6 + 141\,300 = 649\,979{,}6 \text{ cm}^3$

Página 300

INVESTIGA

¿Sabías que?

Cortando las cuatro esquinas de un tetraedro regular, por planos que pasen por la mitad de las aristas, se obtiene otro poliedro regular. ¿Qué poliedro es?



Se obtiene un octaedro regular.

Página 301

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Echa cuentas

Un rico mercader decidió repartir entre sus numerosas hijas una gran bolsa llena de monedas de oro.

- **A la mayor le dio una moneda, más 1/11 del resto.**
- **A la segunda, dos monedas más 1/11 del resto.**
- **A la tercera, tres monedas más 1/11 del resto.**
- **Así sucesivamente hasta la más pequeña.**

Y resultó que todas recibieron la misma cantidad de monedas. ¿Cuántas eran las hijas y cuántas fueron las monedas repartidas?

Llamamos x al número de monedas.

HIJA	SE LLEVA	QUEDAN
PRIMERA	$1 + \frac{x-1}{11}$	$x - \left(1 + \frac{x-1}{11}\right) = \frac{10x-10}{11}$
SEGUNDA	$2 + \frac{1}{11}\left(\frac{10x-10}{11} - 2\right) = \frac{10x+210}{121}$	

Las dos reciben el mismo número de monedas:

$$1 + \frac{x-1}{11} = \frac{10x-210}{121} \to \frac{110+11x}{121} = \frac{(210+10x)}{121} \to x = 100$$

La primera recibe $1 + \frac{100-1}{11} = 1 + \frac{99}{11} = 10$ y quedan 90.

La segunda recibe $2 + \frac{90-2}{11} = 2 + 8 = 10$ y quedan 80.

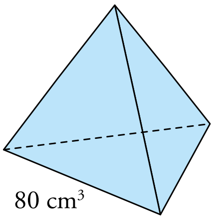
La tercera recibe $3 + \frac{80-3}{11} = 3 + 7 = 10$ y quedan 70.

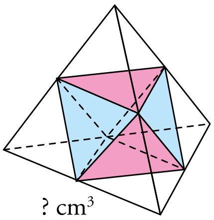
Y, así, hasta la décima, que recibe las 10 últimas monedas.

Eran 10 hijas y 100 las monedas repartidas.

Imagina en el espacio y calcula

El volumen de un tetraedro regular es de 80 cm^3. ¿Cuál es el volumen del poliedro que queda tras cortarle las cuatro esquinas como se ha hecho al final de la página anterior? ¿Puedes resolverlo de cabeza?





Cada una de las esquinas cortada es un tetraedro regular de arista mitad de la arista del tetraedro original. Por tanto, ambas figuras son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

La razón de los volúmenes es $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

El volumen de cada esquina es 80 : 8 = 10 cm^3.

El volumen del octaedro restante es $80 - 10 \cdot 4 = 40$ cm^3.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Transforma en metros cúbicos estas cantidades:**

a) **450 dam^3** **b)** **35 840 dm^3**

c) **500 hL** **d)** **30 000 L**

a) 450 000 m^3 b) 35,84 m^3

c) 50 m^3 d) 30 m^3

2 **Expresa en forma compleja.**

a) **75 427 038 m^3**

b) **32,14962 dm^3**

c) **0,0000084 km^3**

d) **832 000 dam^3**

a) 75 hm^3 427 dam^3 38 m^3

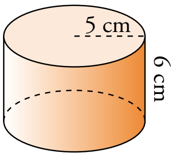
b) 32 dm^3 149 cm^3 620 mm^3

c) 8 dam^3 400 m^3

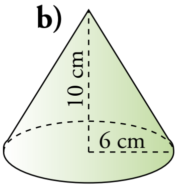
d) 832 hm^3

3 **Halla el volumen de estos cuerpos de revolución.**

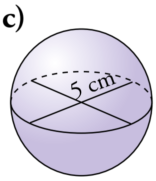
a)



b)



c)



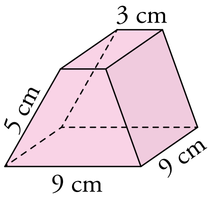
a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 471 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 10 = 376{,}8 \text{ cm}^3$

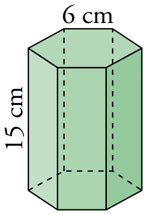
c) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 523{,}3 \text{ cm}^3$

4 **Calcula el volumen de estos poliedros.**

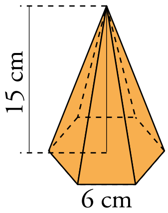
a)



b)



c)



a) $\text{h} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

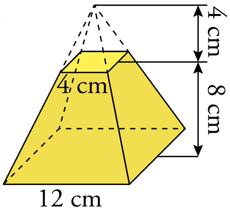
$V = \frac{3 + 9}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 216 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 15 = 1\,404 \text{ cm}^3$

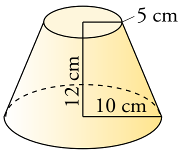
c) $V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 15 = 468 \text{ cm}^3$

5 **Halla el volumen del tronco de pirámide y del tronco de cono.**

a)



b)



a) $V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12 = 576 \text{ cm}^3$

$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = 72 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 576 - 72 = 504 \text{ cm}^3$

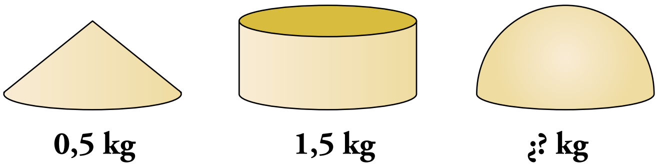
b) $\frac{x + 12}{10} = \frac{x}{5} \to x = 12$

La altura del cono grande es 24 cm, y la del cono pequeño, 12 cm.

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO GRANDE}} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 24 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 2\,512 - 314 = 2\,198 \text{ cm}^3$

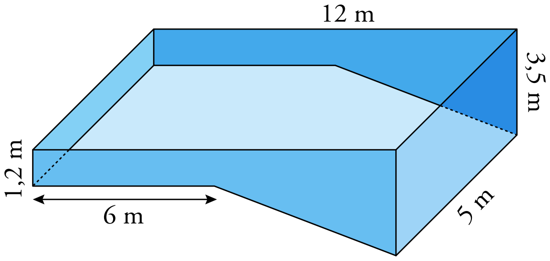
6 **Aquí tienes tres de los quesos que ha hecho Martina con la leche de su granja. Los tres se apoyan en bases idénticas y tienen la misma altura. ¿Cuánto pesará el tercero?**



$V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{CONO}} = V_{\text{CASQUETE}} \to 1{,}5 - 0{,}5 = 1$

Pesará 1 kg.

7 **a) ¿Cuál es la capacidad de esta piscina?**



b) La piscina se empieza a llenar con un grifo que vierte 120 litros por minuto. Al cabo de 9 horas, se cierra. ¿A qué distancia del borde quedará el agua?

a) $V = 6 \cdot 5 \cdot 1{,}2 + \frac{3{,}5 + 1{,}2}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 36 + 70{,}5 = 106{,}5 \text{ m}^3 = 106\,500 \text{ L}$

b) $120 \cdot 60 \cdot 9 = 64\,800$ L ha vertido el grifo durante las horas que ha estado abierto.

$V_{\text{PARTE HONDA}} = \frac{6 \cdot (3{,}5 - 1{,}2) \cdot 5}{2} = 34{,}5 \text{ m}^3 = 34\,500 \text{ L}$

Con el agua que queda, que son $64\,800 - 34\,500 = 30\,300$ L $= 30{,}3$ m^3 llegará el agua hasta:

$30{,}3 = 12 \cdot 5 \cdot x \to x = 0{,}505$

Por lo que el agua queda a $1{,}2 - 0{,}505 = 0{,}695$ m del borde.

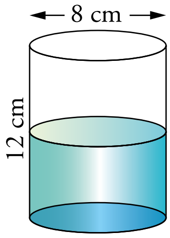
8 **El interior de este vaso mide 8 cm de diámetro y 12 cm de altura.**

Está medio lleno de agua.

Se echan dentro 20 canicas de 3 cm de diámetro.

a) ¿Se derramará el agua? Si no, ¿a qué altura llegará?

b) ¿Y si echamos 22 canicas?



a) Volumen de las 20 canicas: $V = 20 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3 \approx 282{,}6\ \text{cm}^3$

Volumen que ocupa el agua: $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 \approx 301{,}44\ \text{cm}^3$

Volumen del vaso sin agua: $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 \approx 602{,}88\ \text{cm}^3$

Restamos al volumen del vaso el que ocupa el agua y las canicas:

$602{,}88 - 301{,}44 - 282{,}6 = 18{,}84\ \text{cm}^3$

El agua no se derramará porque al introducir las canicas quedan todavía por llenar 18,84 cm^3.

Calculamos ahora qué altura alcanzará el agua:

$584{,}04 = \pi \cdot 4^2 \cdot a \rightarrow a = \frac{584{,}04}{\pi \cdot 4^2} = 11{,}625\ \text{cm}$

Una vez las canicas estén dentro, el agua subirá hasta 11,625 cm.

b) Volumen de las 22 canicas: $V = 22 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3 \approx 310{,}86\ \text{cm}^3$

El volumen del agua y de las canicas sería de $301{,}44 + 310{,}86 = 612{,}3\ \text{cm}^3$, por lo que se derramaría el agua.

15 FUNCIONES

Página 302

Funciones y relaciones numérica

1 **Según cuenta la leyenda, el rey de León, en una partida de caza, compró al conde Fernán González un azor por el precio de un grano de trigo.**

La deuda se doblaría por cada día transcurrido sin ser satisfecha. El rey lo olvidó.

A propósito de esa leyenda, completa la tabla en tu cuaderno.

DÍAS TRANSCURRIDOS	1	2	3	4	5	10	20	*d*
GRANOS DE TRIGO	1	2	4	8	▨	▨	▨	▨

DÍAS TRANSCURRIDOS	1	2	3	4	5	10	20	*d*
GRANOS DE TRIGO	1	2	4	8	16	512	524 288	2^{d-1}

Funciones y relaciones algebraica

2 **Siguiendo con la tabla anterior, llamando G al número de granos y d a los días transcurridos, traduce a una ecuación:**

Número de granos = 2 elevado al número de días menos uno

NOTA: ***Pasado un año, el conde reclamó el pago y resultó que no había trigo suficiente en el mundo. Así consiguió la independencia de Castilla.***

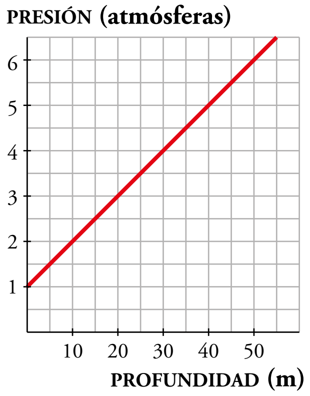
$G = 2^{(d-1)}$

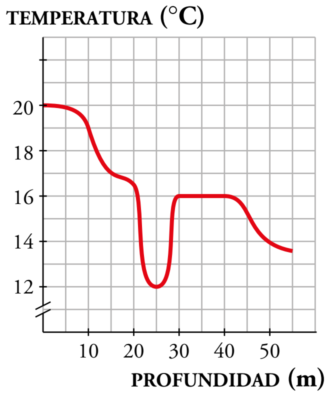
Página 303

Funciones y gráfica

3 **Unos buceadores han medido la presión y la temperatura del agua durante una inmersión a diferentes profundidades.**

Los resultados se dan gráficamente:





a) ¿Cuál es la presión a 25 m de profundidad? ¿Y la temperatura?

b) ¿Se puede decir que a más profundidad más presión? ¿Pasa lo mismo con la temperatura?

c) En cierto momento de la inmersión, los buceadores cruzaron una corriente fría. ¿A qué profundidad? ¿Cuáles eran allí la temperatura y la la presión?

a) La presión a 25 metros es de 3,5 atmósferas, y la temperatura, 12 °C.

b) Al aumentar la profundidad aumenta la presión. Podemos decir que el aumento de profundidad es proporcional al aumento de presión.

Con la temperatura no pasa lo mismo porque puede haber corrientes de agua fría.

c) A 25 metros de profundidad los buceadores encontraron una corriente de agua fría. La temperatura del agua allí era de 12 °C. La presión a los 25 metros era de 3,5 atmósfera.

4 Dadas las siguientes relaciones funcionales:

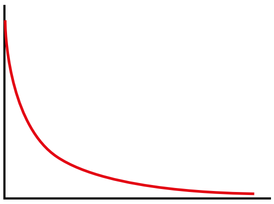
A. Distancia de un caballito del carrusel al eje de giro en función del tiempo.

B. La presión atmosférica en función de la altura a la que subamos.

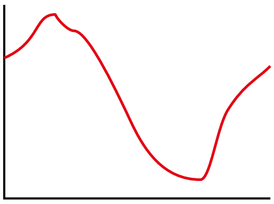
C. Nivel de agua de un pantano en función del mes del año.

Asocia cada enunciado a una de las gráficas que se incluyen debajo:

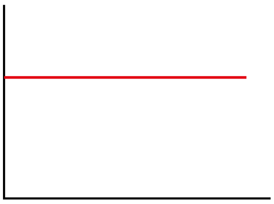
①



②



③



A → 3

B → 1

C → 2

1 COORDENADAS CARTESIANAS

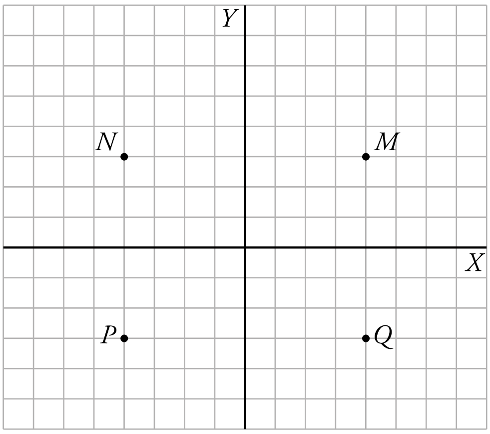
Página 304

Para fijar ideas

1 **Dibuja en unos ejes cartesianos estos cuatro puntos. Observa sus posiciones y di qué tienen en común:**

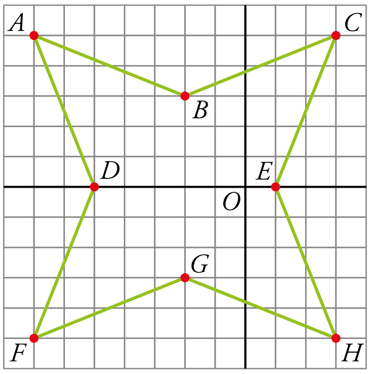
$M(4, 3)$ $N(-4, 3)$ $P(-4, -3)$ $Q(4, -3)$

Todos ellos están a la misma distancia del…



Todos ellos están a la misma distancia del origen de coordenadas.

2 **Observa el gráfico de la derecha e indica las coordenadas de los vértices de la estrella.**

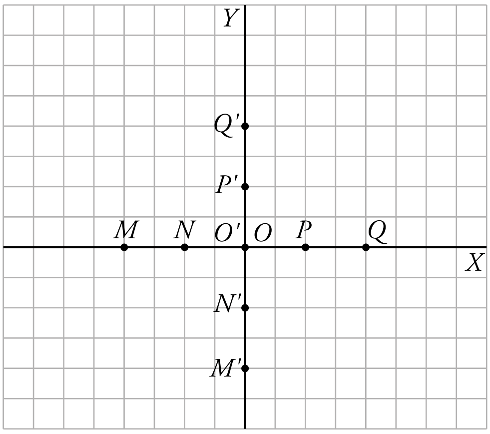


$A(-7, 5)$; $C(3, 5)$; $F(-7, -5)$; $H(3, -5)$

3 **Representa las siguientes series de puntos y contesta. ¿Qué punto tienen en común ambas series? ¿A qué eje pertenece?**

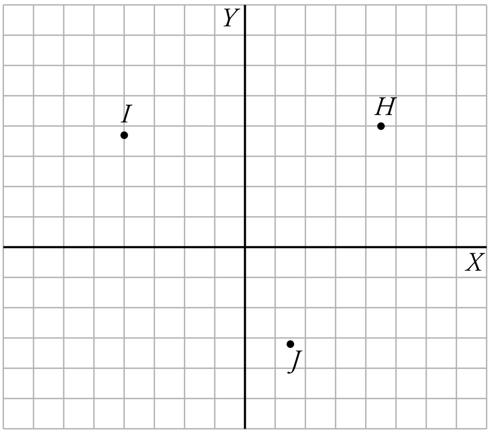
$$M(-4, 0) \rightarrow N(-2, 0) \rightarrow O(0, 0) \rightarrow P(2, 0) \rightarrow Q(4, 0)$$

$$M'(0, -4) \rightarrow N'(0, -2) \rightarrow O'(0, 0) \rightarrow P'(0, 2) \rightarrow Q'(0, 4)$$



Tienen en común el punto (0, 0) que pertenece a los dos ejes.

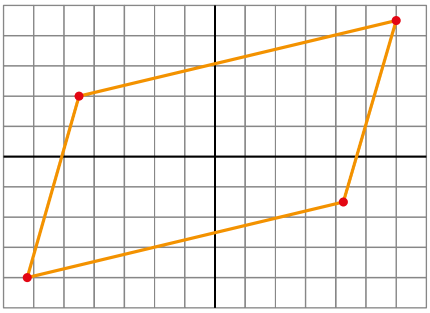
4 **De igual forma que sobre la recta numérica, se pueden representar sobre los ejes cartesianos puntos con coordenadas decimales o fraccionarias. Representa los puntos: *H*(4,5; 4); *I*(– 4; 3,7); *J*(1,5; –3,2).**



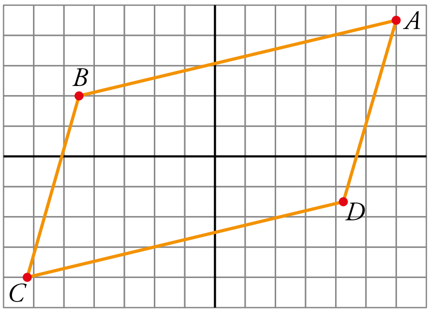
H(4,5; 4); *I*(– 4; 3,7); *J*(1,5; –3,2)

Para practicar

1 **Observa el gráfico y reprodúcelo en tu cuaderno sabiendo que las coordenadas de los vértices son:**



***A*(6; 4,5) *B*(–4,5; 2) *C*(–6,25; –4) *D*(4,25; –1,5)**



2 **Dibuja en tu cuaderno unos ejes de coordenadas.**

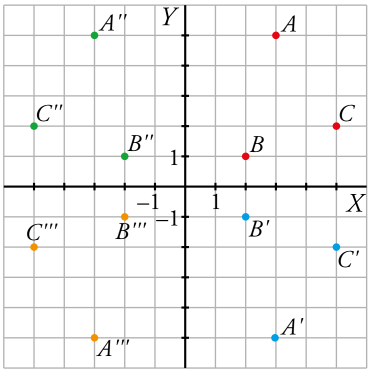
a) Representa los puntos *A*(3, 5), *B*(2, 1) y *C*(5, 2).

b) Halla los simétricos, *A’*, *B’*, *C’*, de *A*, *B* y *C*, respecto del eje *X* y compara sus coordenadas. ¿Qué observas?

c) Halla los simétricos *A”*, *B”* y *C”*, de *A*, *B* y *C*, respecto del eje *Y* y compara sus coordenadas. ¿Qué observas?

d) Halla los simétricos *A’’’*, *B’’’* y *C’’’*, de *A*, *B* y *C*, respecto del origen de coordenadas, *O*, y compara sus coordenadas. ¿Qué observas?

a), b), c) y d)



b) *A*'(3, –5); *B*'(2, –1); *C*'(5, –2)

Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del eje *X* son iguales y sus ordenadas son opuestas.

c) *A*''(–3, 5); *B*''(–2, 1); *C*''(–5, 2)

Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del eje *Y* son opuestas y sus ordenadas son iguales.

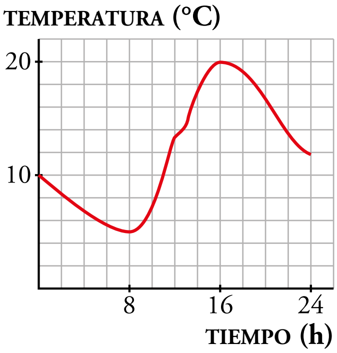
d) Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del origen de coordenadas, *O*, son opuestas y sus ordenadas son opuestas.

2 INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

Página 305

Para fijar ideas

1 **Esta gráfica muestra la temperatura en la estación meteorológica de una ciudad a lo largo de 24 horas. Descríbela con palabras. Después, copia y completa:**



a) **La variable *x* es el … . Cada cuadradito corresponde a … horas.**

La variable *y* es la … . Cada cuadradito representa … °C.

b) **A las 0 horas el termómetro marca … °C. A lo largo de la noche la temperatura va descendiendo hasta las ... de la mañana, llegando a los … °C.**

c) **A esa hora sale el Sol y la temperatura asciende con rapidez hasta las … h. En ese instante el cielo se nubla durante media hora. Después, vuelve a aumentar a mayor velocidad, hasta las … h en que alcanza los … °C.**

d) **El resto del día, como el Sol ya no calienta tanto, la temperatura va descendiendo hasta quedarse en … °C.**

a) La variable *x* es el tiempo. Cada cuadradito corresponde a 2 horas.

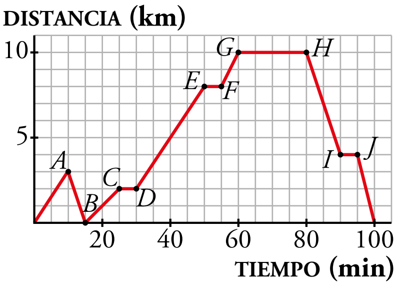
La variable *y* es la temperatura. Cada cuadradito representa 2 °C.

b) A las 0 horas el termómetro marca 10 °C. A lo largo de la noche la temperatura va descendiendo hasta 8 h de la mañana, llegando a los 5 °C.

c) A esa hora sale el Sol y la temperatura asciende con rapidez hasta las 12 h. En ese instante el cielo se nubla durante media hora. Después, vuelve a aumentar mayor velocidad alcanzando los 20 °C.

d) El resto del día, como el Sol ya no calienta tanto, la temperatura va descendiendo hasta quedarse en 12 °C.

2 **Esther sube una montaña en bici. La gráfica informa de la distancia al punto de partida durante el tiempo que dura la excursión.**



a) **Al poco de salir (*A*) se da cuenta de que ha olvidado algo y regresa. ¿Qué distancia llevaba recorrida? ¿Cuánto tiempo le lleva el olvido?**

b) ¿Cuántas paradas hace antes de llegar a la cima? ¿De qué duración?

c) ¿Cuánto tiempo tarda, desde que inicia definitivamente la subida (B), hasta llegar a la cima (G)?

d) ¿Cuánto tiempo se queda en la cima comiendo el bocadillo y descansando?

e) Durante la vuelta tiene un pinchazo (I). ¿A qué distancia de casa ocurre y cuánto tarda en arreglarlo?

f) ¿A qué distancia de casa está la cima de la montaña? ¿Qué distancia ha recorrido en total?

g) ¿Cuánto ha durado la excursión en total?

a) Llevaban recorridos 3 km. El olvido le lleva 15 minutos.

b) Hace dos paradas de 5 minutos.

c) En llegar a la cima tarda 45 minutos.

d) Se quedara descansando 20 minutos.

e) Ocurre a 4 km de casa. Tarda en arreglarlo 5 minutos.

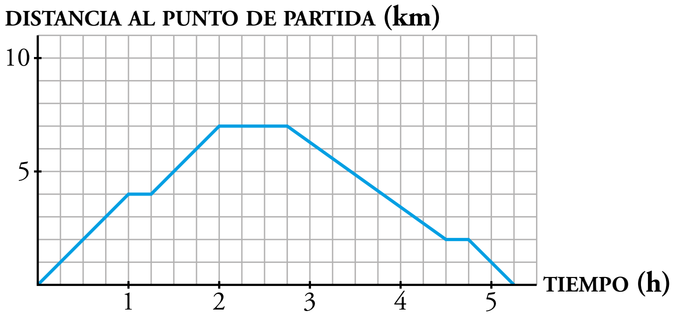
f) La cima de la montaña está a 10 km de casa.

En total ha recorrido 3 + 3 + 10 + 10 = 26 km.

g) La excursión ha durado en total 100 minutos; es decir, 1 h 40 min.

Para practicar

1 **Jimena salió a hacer una ruta por la montaña mientras que Cayetana fue a dar un paseo por un precioso hayedo. Estas son las gráficas de sus recorridos:**



a) ¿Qué gráfica crees que corresponde a cada chica? ¿Por qué?

b) Describe ambas gráficas.

a) La primera gráfica corresponde a Cayetana, puesto que el recorrido es más suave y tarda 2 horas en recorrer los primeros 5 kilómetros. Sin embargo, Jimena en una hora ya ha recorrido 4 kilómetros, lo que indica que está haciendo un ejercicio más duro.

b) En la primera gráfica, Cayetana recorre 3 km en una hora. Se para a descansar un cuarto de hora y continúa su paseo recorriendo 4 km en una hora y media. Descansa media hora y tarda una hora en volver al punto de partida.

En la segunda gráfica, Jimena recorre 4 km en la primera hora, descansa un cuarto de hora y continúa andando 45 minutos recorriendo 3 km. Descansa 45 minutos e inicia el camino de regreso al punto de partida durante una hora y 45 minutos, descansa 15 minutos y en media hora más está en el punto de partida.

3 ▶ CONCEPTO DE FUNCIÓN

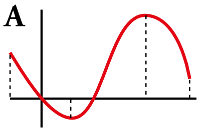
Página 306

Para fijar ideas

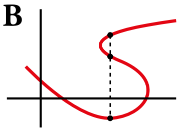
Copia y completa en tu cuaderno.

1 **¿Cuáles de las siguientes gráficas son funciones y cuáles no?**

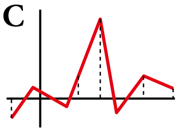
A



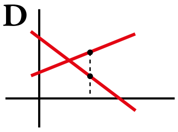
B



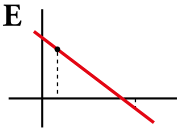
C



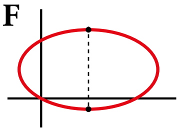
D



E



F



	A	B	C	D	E	F
A cada valor de *x* le corresponde un único de *y*.	✗					
A algunos valores de *x* les corresponden varios de *y*.		✗				
¿Es función?	**Sí**	**No**				

	A	B	C	D	E	F
A cada valor de *x* le corresponde un único de *y*.	✗		✗		✗	
A algunos valores de *x* les corresponden varios de *y*.		✗		✗		✗
¿Es función?	Sí	No	Sí	No	Sí	No

2 **En la gráfica de arriba (temperatura a lo largo del día):**

a) La temperatura mínima fue de … grados centígrados, a las … de la…

b) A las cinco de la tarde hacía … grados.

c) A las … de la mañana la temperatura era de 12 °C.

d) El sol estuvo oculto por las nubes durante una hora, entre las … y las … de la tarde.

a) La temperatura mínima fue de 6 grados centígrados, a las 7 de la mañana.

b) A las cinco de la tarde hacía 23 grados.

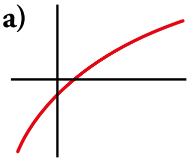
c) A las 11 de la mañana la temperatura era de 12 °C.

d) El sol estuvo oculto por las nubes durante una hora, entre las 14 y las 15 de la tarde.

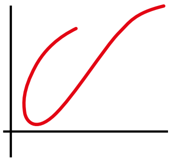
Para practicar

1 **¿Cuáles de las siguientes gráficas son funciones y cuáles no? Justifica tus respuestas.**

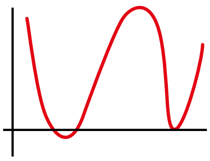
a)



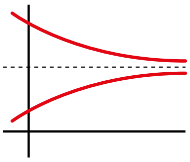
b)



c)



d)



a) y c) son funciones, ya que por cada valor de *x* hay un único valor de *y*.

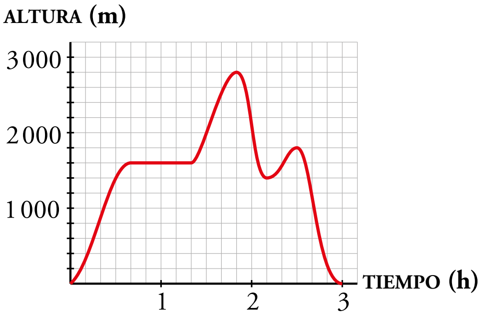
b) y d) no lo son, ya que hay valores de *x* a los que corresponden varios de *y*.

4 CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Página 307

Para practicar

1 **En la gráfica de la derecha puedes ver la altura de una avioneta durante sus tres horas de vuelo.**



a) ¿Cuánto tiempo permanece estable? ¿A qué altura?

b) ¿Cuánto tarda en estabilizar la altura?

c) ¿Cuándo llega al máximo? ¿Qué altura alcanza?

d) Haz un breve resumen de la evolución de la altura de la avioneta desde que despega hasta su aterrizaje.

a) Permanece estable durante 40 minutos a 1 600 m de altura.

b) Tarda 40 minutos.

c) Llega a la máxima altura, 2 800 m, al cabo de una hora y 50 minutos.

d) Primero sube sin parar hasta los 1 600 m, vuela a esa altura durante otros 40 minutos pasados los cuales de nuevo asciende hasta alcanzar los 2 800 m. Luego inicia el descenso, hasta llegar a los 1 400 m y, de nuevo, asciende hasta los 1 800 m para desde ahí descender al suelo.

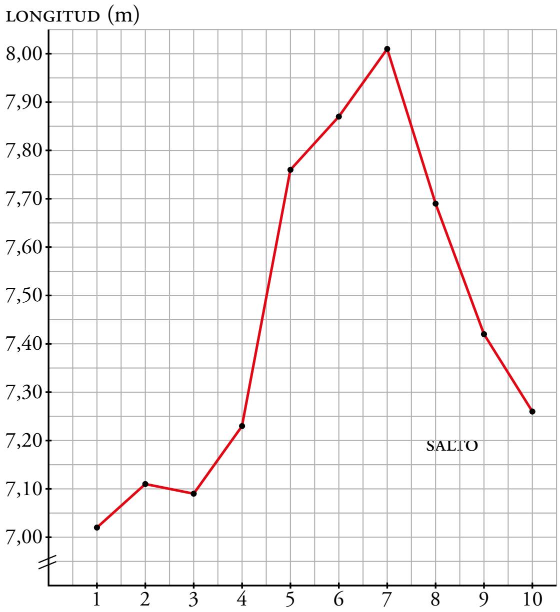
5 ▶ FUNCIONES DADAS POR TABLAS DE VALORES

Página 308

Para practicar

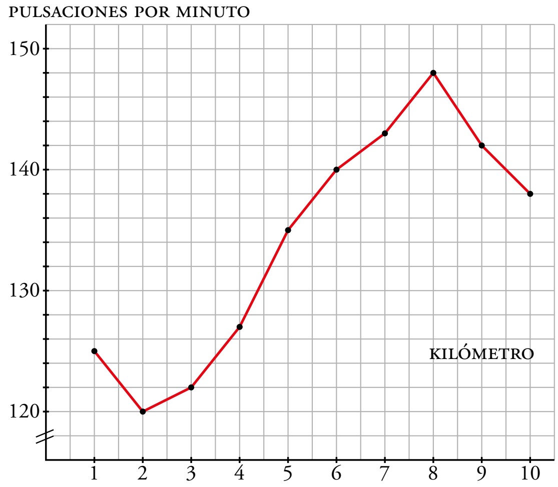
1 **Representa las marcas de otro saltador de longitud como el descrito en el ejemplo 1.**

SALTO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LONGITUD	7,02	7,11	7,09	7,23	7,76	7,87	8,01	7,69	7,42	7,26



2 **Otro corredor de fondo como el del ejemplo 2 se ha medido las pulsaciones. Represéntalas.**

KM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PULS./MIN	125	120	122	127	135	140	143	148	142	138



6 FUNCIONES DADAS POR SU ECUACIÓN

Página 309

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Para la función $y = x^2 - 4x + 4$:**

a) Calcula los valores de y correspondientes a los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 de x.

$x = 0 \rightarrow y = 0 - 0 + 4 = 4$

$x = 1 \rightarrow y = \ldots - \ldots + \ldots = \ldots$

$x = 2 \rightarrow y = 4 - 8 + 4 = 0$

$x = 3 \rightarrow y = 9 - \ldots + \ldots = \ldots$

$x = 4 \rightarrow y = \ldots - \ldots + \ldots = \ldots$

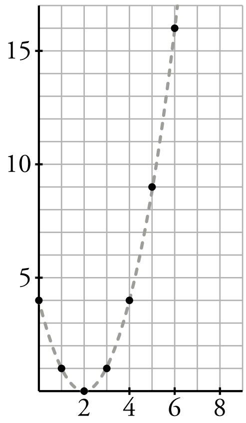
$x = 5 \rightarrow y = 25 - 20 + 4 = 9$

$x = 6 \rightarrow y = \ldots - \ldots + \ldots = \ldots$

b) Completa con ellos la tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	4		0			9	

c) Represéntalos y comprueba que corresponden a la gráfica marcada a la derecha.



a) $x = 0 \rightarrow y = 0 - 0 + 4 = 4$

$x = 1 \rightarrow y = 1 - 4 + 4 = 1$

$x = 2 \rightarrow y = 4 - 8 + 4 = 0$

$x = 3 \rightarrow y = 9 - 12 + 4 = 1$

$x = 4 \rightarrow y = 16 - 16 + 4 = 4$

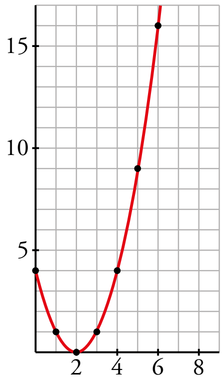
$x = 5 \rightarrow y = 25 - 20 + 4 = 9$

$x = 6 \rightarrow y = 36 - 24 + 4 = 16$

b)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	4	1	0	1	4	9	16

c)



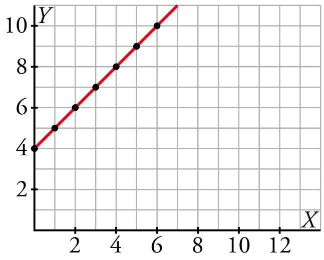
Para practicar

1 **Copia, completa y representa la función:**

$$y = x + 4$$

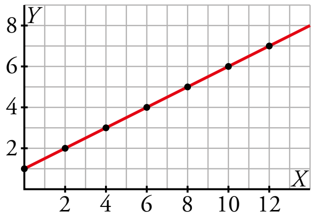
x	0	1	2	3	4	5	6
y	4			7			

x	0	1	2	3	4	5	6
y	4	5	6	7	8	9	10



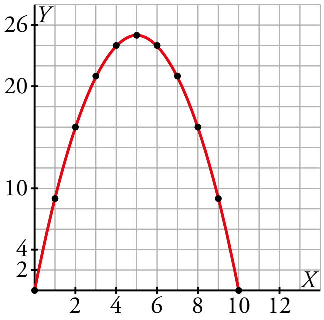
2 **Representa** $y = \frac{x+2}{2}$ **dando a** x **los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.**

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4



3 **Representa** $y = x \cdot (10 - x)$ **dando a** x **los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0



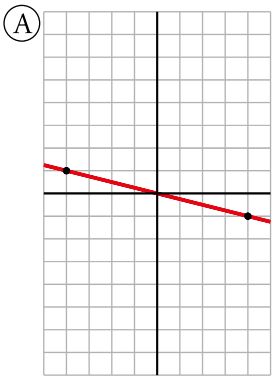
7 ▶ FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD: $y = mx$

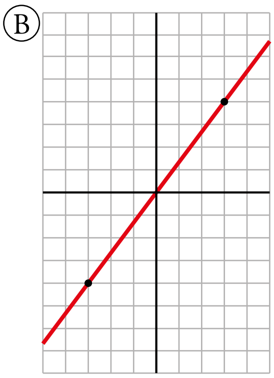
Página 311

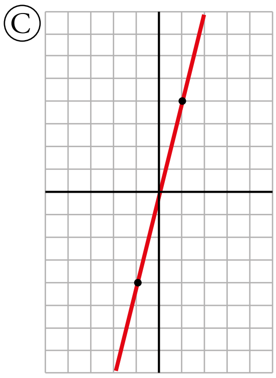
Para practicar

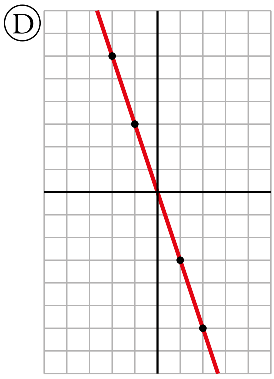
1 **Asocia cada ecuación con la gráfica que le corresponde.**

a) $y = 4x$ **b)** $y = \frac{4}{3}x$ **c)** $y = \frac{-1}{4}x$ **d)** $y = -3x$









a) → Ⓒ

b) → Ⓑ

c) → Ⓐ

d) → Ⓓ

2 **Completa en tu cuaderno la tabla correspondiente a cada una de las siguientes funciones de proporcionalidad y represéntalas gráficamente.**

a) $y = -\frac{1}{2}x$

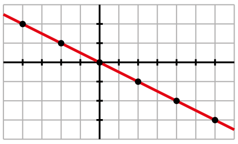
x	0	2	4	6	–2	–4
y				–3		

b) $y = \frac{2}{5}x$

x	0	5	10	15	–5	–10
y				6		

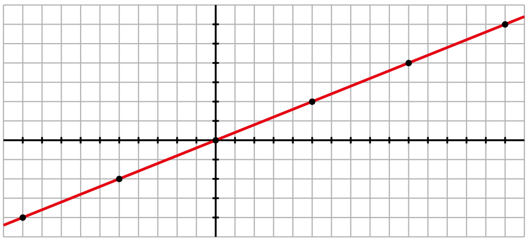
a) $y = -\frac{1}{2}x$

x	0	2	4	6	–2	–4
y	0	–1	–2	–3	1	2



b) $y = \frac{2}{5}x$

x	0	5	10	15	–5	–10
y	0	2	4	6	–2	–4



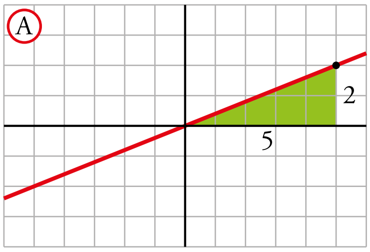
8 PENDIENTE DE UNA RECTA

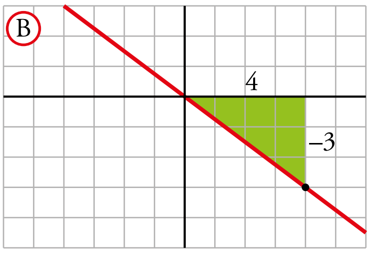
Página 313

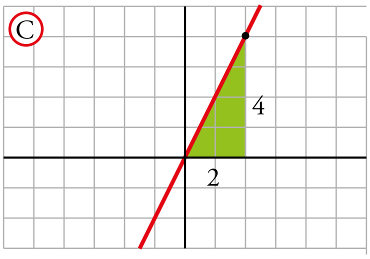
Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Obtén la pendiente y escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:**



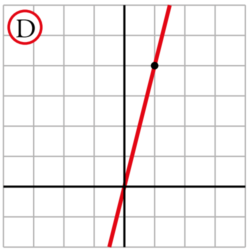


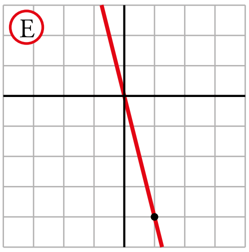


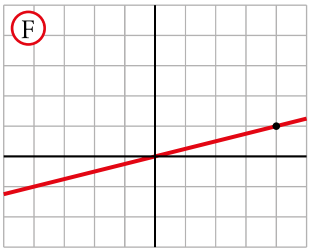
a) $m = \frac{2}{5} \to y = \frac{\square}{\square}x$

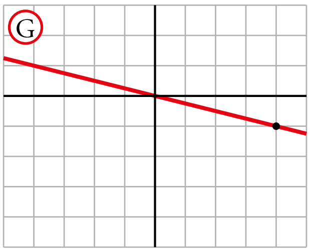
b) $m = \frac{-3}{\square} = -\frac{3}{\square} \to y = -\frac{\square}{\square}x$

c) $m = \frac{4}{2} = \square \to y = \square x$









d) $m = \frac{\square}{1} = \square$

$y = \square x$

e) $m = \frac{-4}{\square} = -\square$

$y = -\square x$

f) $m = \frac{\square}{\square}$

$y = \frac{\square}{\square}x$

g) $m = \frac{-\square}{\square}$

$y = -\frac{\square}{\square}x$

a) $m = \frac{2}{5} \to y = \frac{2}{5}x$

b) $m = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4} \to y = -\frac{3}{4}x$

c) $m = \frac{4}{2} = 2 \to y = 2x$

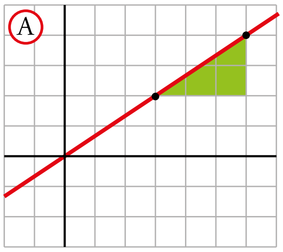
d) $m = \frac{4}{1} = 4 \to y = 4x$

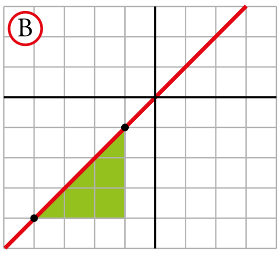
e) $m = \frac{-4}{1} = -4 \to y = -4x$

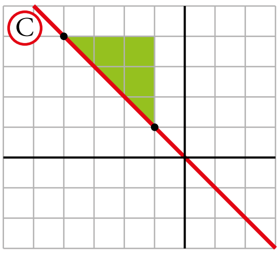
f) $m = \frac{1}{4} \to y = \frac{1}{4}x$

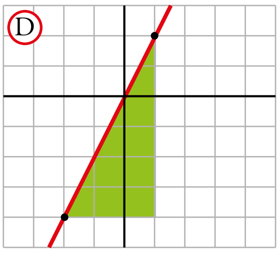
g) $m = -\frac{1}{4} \to y = -\frac{1}{4}x$

2 **Observa las gráficas, obtén la pendiente y escribe la ecuación de cada una de las rectas. Ten en cuenta que la inclinación de una recta es la misma en cualquiera de sus segmentos.**









a) $y = \frac{2}{3}x$

b) $y = \square x$

c) $y = -\square x$

d) $y = \square x$

a) $y = \frac{2}{3}x$

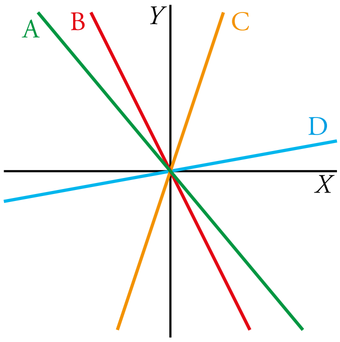
b) $y = x$

c) $y = -x$

d) $y = 2x$

Para practicar

1 **Indica cuál de estas puede ser la pendiente de cada una de las rectas representadas a la derecha.**



a) $m = 3$

b) $m = \frac{1}{4}$

c) $m = -1$

d) $m = \frac{-7}{3}$

a) C

b) D

c) A

d) B

9 ▶ FUNCIONES LINEALES: $y = mx + n$

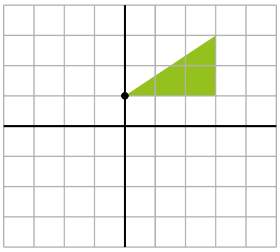
Página 315

Para fijar ideas

Copia y completa los textos y las gráficas en tu cuaderno.

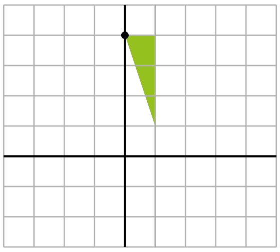
1 **Representa la función** $y = \frac{2}{3}x + 1$**.**

- **La pendiente es** $m = \frac{2}{3}$**. Por cada … que avanza, sube…**
- **La ordenada en el origen es** $n = 1$**. Pasa por el punto (0, …).**
- La pendiente es $m = \frac{2}{3}$. Por cada 3 que avanza, sube 2.
- La ordenada en el origen es $n = 1$. Pasa por el punto (0, 1).



2 **Representa la función** $y = -3x + 4$**.**

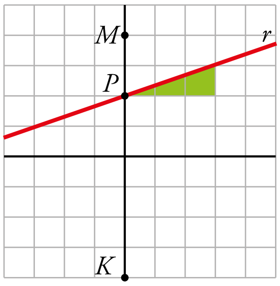
- **La pendiente es** $m = -3 = \frac{-3}{1}$**. Por cada … que avanza, baja…**
- **La ordenada en el origen** $n = 4$**. Pasa por el punto (0, …).**
- La pendiente es $m = -3 = \frac{-3}{1}$. Por cada 1 que avanza, baja 3.
- La ordenada en el origen $n = 4$. Pasa por el punto (0, 4).

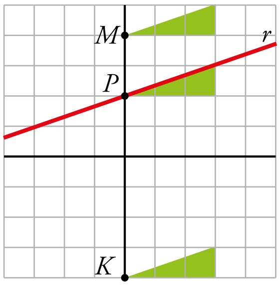


3 **Para los gráficos de la derecha:**

a) Escribe la ecuación de la recta r.

- **Pasa por el punto $P(0, 2) \rightarrow n = \ldots$**
- **Cuando avanza 3, sube… $\rightarrow$ $m = \frac{\ldots}{3}$**
- **Su ecuación es $\rightarrow$ $y = \frac{\ldots}{3}x + \ldots$**





b) Dibuja una paralela a r que pase por el punto $M(0, 4)$ y escribe su ecuación.

- **Pasa por el punto $M(0, 4) \rightarrow n = \ldots$**
- **Tiene la misma pendiente que $r \rightarrow m = \frac{\ldots}{3}$**
- **Su ecuación es $\rightarrow$ $y = \frac{\ldots}{3}x + \ldots$**

c) Dibuja otra paralela a r que pase por $K(0, -4)$ y escribe su ecuación.

- **Pasa por el punto $K(0, -4) \rightarrow n = -\ldots$**
- **Tiene la misma pendiente que $r \rightarrow m = \frac{\ldots}{3}$**
- **Su ecuación es $\rightarrow$ $y = \frac{\ldots}{3}x - \ldots$**

a)
- Pasa por el punto $P(0, 2) \rightarrow n = 2$
- Cuando avanza 3, sube 1 $\rightarrow m = \frac{1}{3}$
- Su ecuación es $\rightarrow y = \frac{1}{3}x + 2$

b)
- Pasa por el punto $M(0, 4) \rightarrow n = 4$
- Tiene la misma pendiente que $r \rightarrow m = \frac{1}{3}$
- Su ecuación es $\rightarrow y = \frac{1}{3}x + 4$

c)
- Pasa por el punto $K(0, -4) \rightarrow n = -4$
- Tiene la misma pendiente que $r \rightarrow m = \frac{1}{3}$
- Su ecuación es $\rightarrow y = \frac{1}{3}x - 4$

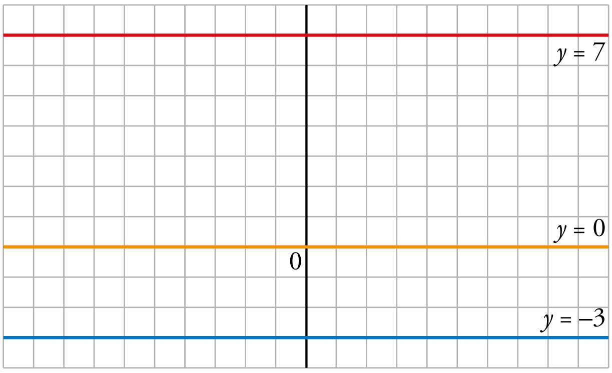
10 ▶ FUNCIONES CONSTANTES: $y = k$

Página 316

Para practicar

1 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 7$ **b)** $y = -3$ **c)** $y = 0$



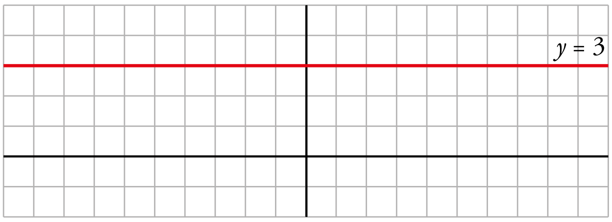
2 **a) Representa la recta que pasa por estos puntos:**

$A(-2, 3)$

$B(5, 3)$

b) Sin hacer ningún cálculo, ¿cuál es su ecuación?

a)

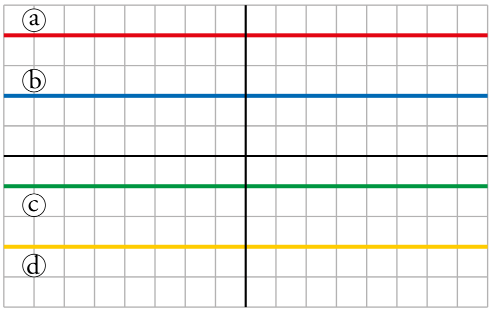


b) Sí, $y = 3$

3 **¿Cuál es la ecuación del eje X?**

$y = 0$

4 **Escribe la ecuación de las siguientes funciones:**



Ⓐ → $y = 4$

Ⓑ → $y = 2$

Ⓒ → $y = -1$

Ⓓ → $y = -3$

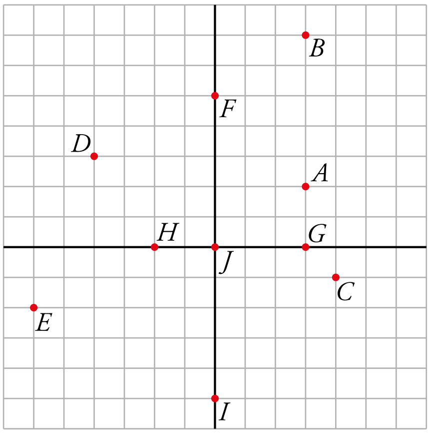
Página 317

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

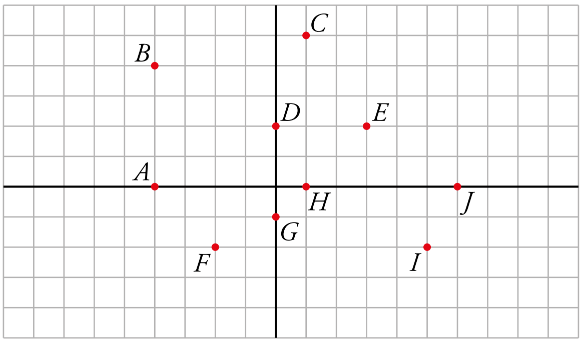
Representación e interpretación de puntos

1 **Dibuja sobre un papel cuadriculado unos ejes coordenados y representa estos puntos:**

$$A(3, 2);\ B(3, 7);\ C(4, -1);\ D(-4, 3);\ E(-6, -2);$$
$$F(0, 5);\ G(3, 0);\ H(-2, 0);\ I(0, -5);\ J(0, 0)$$



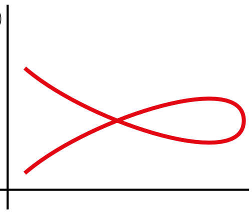
2 **Di las coordenadas de cada punto.**

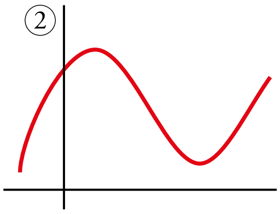


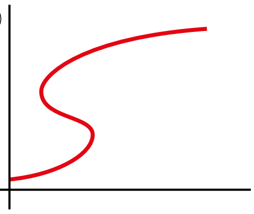
A = (–4, 0)
B = (–4, 4)
C = (1, 5)
D = (0, 2)
E = (3, 2)
F = (–2, –2)
G = (0, –1)
H = (1, 0)
I = (5, –2)
J = (6, 0)

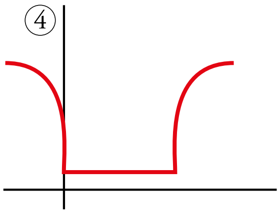
Concepto de función

3 **¿Cuáles de estas gráficas corresponden a una función y cuáles no? Explica por qué.**

①


②


③


④


② es función, pues para cada valor de x hay un único valor de y.

①, ③ y ④ no son funciones. Para algunos valores de x, hay varios de y.

4 **a) ¿Puede una recta vertical, paralela al eje *Y*, ser la representación gráfica de una función?**

b) ¿Y una recta horizontal?

c) ¿Y una circunferencia?

a) No es la representación de una función porque a un valor de x le corresponden más de un valor de y (infinitos).

b) Una recta horizontal sí es la gráfica de una función (función constante).

c) Tampoco es función: hay valores de la x a los que corresponden dos valores de la y.

5 **Indica qué enunciados muestran una función.**

a) Velocidad de una moto en función del tiempo de viaje.

b) Temperatura máxima en función del día.

c) El peso de una persona en función de su altura.

d) Distancia a casa en función de la hora del día.

e) La edad de Ana en función del año actual.

a) Si lo consideramos para un viaje concreto, sí es una función.

Si es para tiempo de viaje en general, no, pues no siempre se tiene por qué ir a la misma velocidad.

b) Sí que muestra una función, pues cada día tiene solo una temperatura máxima.

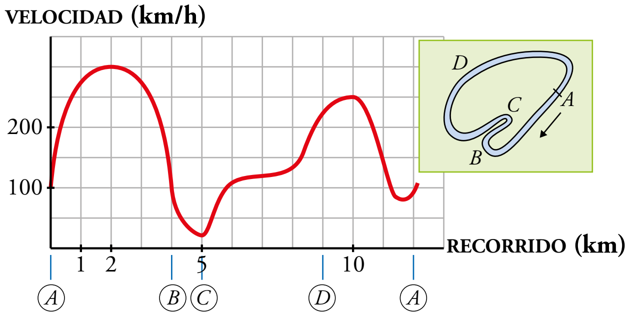
c) No muestra una función, pues dos personas con igual altura pueden tener distintos pesos.

d) Sería una función constante.

e) Solo tendría un valor, para el año actual.

Interpretación de gráficas

6 **Esta gráfica describe la velocidad de un coche de carreras en cada lugar de ese circuito:**



a) Di en qué tramos la velocidad es creciente y en cuáles es decreciente.

b) ¿A qué crees que se deben los aumentos y las disminuciones de velocidad?

c) Señala el máximo y el mínimo de esta función.

a) Crece en (0, 2), en (5, 10) y un poco al final, en (11,5; 12).

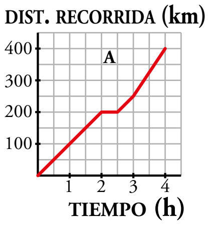
Decrece en (2, 5) y en (10; 11,5).

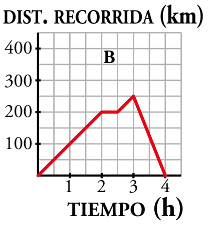
b) En las curvas más cerradas tiene que frenar para no salirse.

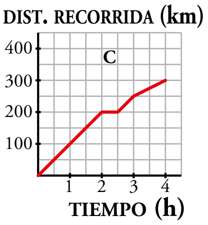
c) El máximo está en $x = 2$ y vale 300 km/h.

El mínimo está en $x = 5$ y vale 25 km/h.

7 **Indica cuál de estas gráficas representa la distancia recorrida por un vehículo a lo largo de 4 h de viaje, sabiendo que a las 2 h para a descansar durante media hora y a las 3 h sube un puerto:**





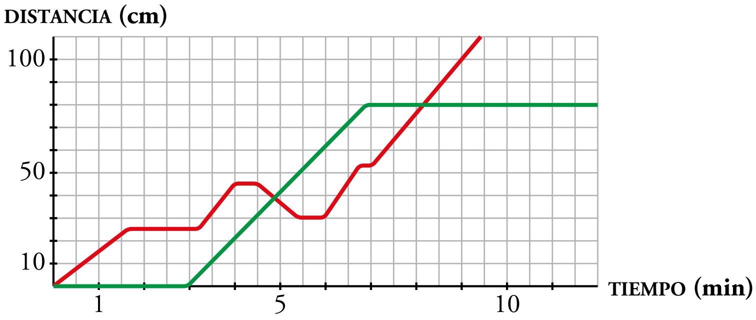


¿Cuánto ha durado el viaje? ¿Cuánto ha recorrido?

La gráfica C.

El viaje ha durado 4 horas y ha recorrido 300 km.

8 **Sara y Daniel ponen a competir, en una carrera, a sus caracoles; uno de ellos lleva una pegatina roja, y otro, una pegatina verde.**



El verde tarda en salir y se para antes de llegar.

a) ¿Cuánto tiempo está parado en cada caso? ¿A qué distancia de la meta se detiene definitivamente?

b) ¿Cuántos centímetros y durante cuánto tiempo marcha el rojo en dirección contraria?

c) Describe la carrera.

a) 3 min al salir y luego 2 min (es lo que tarda el otro caracol en llegar a la meta desde que este se paró).

Se detiene definitivamente como a 30 cm de la meta.

b) 15 cm durante 1 min.

c) El rojo tarda 1,5 min en alcanzar 25 cm, luego se para y a los 3 min sale el verde con velocidad constante. Justo después, el rojo anda un poco más, luego a los 4 min para y vuelve atrás hasta los 6 minutos. Entonces vuelve a retomar la dirección correcta y solo para un momento hasta el final. Mientras, el verde para a los 80 cm y no vuelve a andar.

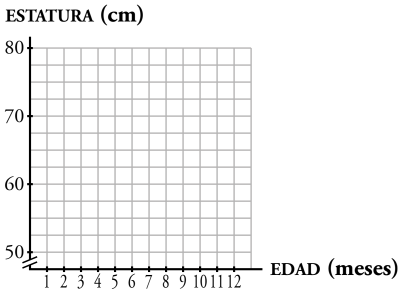
Página 318

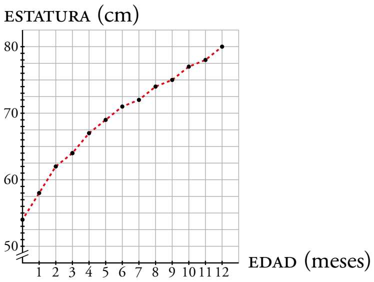
Representación de funciones

9 **Se ha medido, mes a mes, la estatura de un niño desde que nace hasta que tiene un año.**

EDAD (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ESTATURA (cm)	54	58	62	64	67	69	71	72	74	75	77	78	80

Representa los resultados en una gráfica como la de la derecha. Observa que la escala del eje *Y* empieza en 50 y llega a 80, ya que si comenzamos por 0, no se apreciarían bien las pequeñas diferencias de estatura de mes a mes.



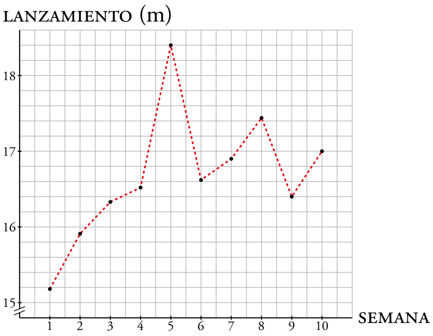


10 **Durante diez semanas seguidas, un lanzador de peso ha anotado su mejor marca obtenida durante sus entrenamientos.**

La tabla de la derecha recoge los resultados logrados.

Representa la función en tu cuaderno tomando los valores del eje *Y* de 15 m a 19 m.

SEMANA	LANZ. (m)
1	15,18
2	15,91
3	16,33
4	16,52
5	18,40
6	16,62
7	16,90
8	17,44
9	16,40
10	17,00



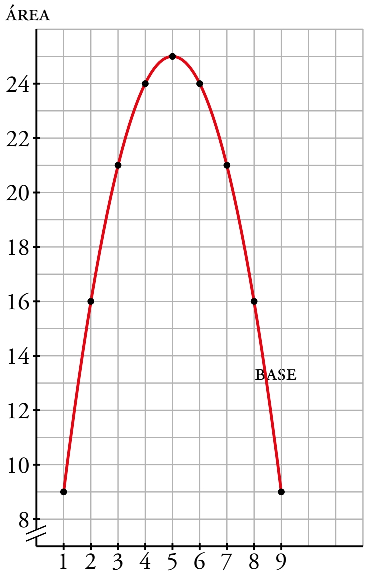
11 **De una familia de rectángulos cuyo perímetro es 20 cm hemos medido su base y su área. Estos son los resultados:**

BASE, en cm, *x*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
ÁREA, en cm^2, *y*	**9**	**16**	**21**	**24**	**25**	**24**	**21**	**16**	**9**

a) Representa la función, empezando con los valores adecuados en el eje *Y* para que se aprecien bien las diferencias de áreas.

b) Comprueba que la ecuación de esta función es: $y = 10x - x^2$

a)



b) $10 \cdot 1 - 1^2 = 9$ $\quad$ $10 \cdot 4 - 4^2 = 24$ $\quad$ $10 \cdot 7 - 7^2 = 21$

$10 \cdot 2 - 2^2 = 16$ $\quad$ $10 \cdot 5 - 5^2 = 25$ $\quad$ $10 \cdot 8 - 8^2 = 16$

$10 \cdot 3 - 3^2 = 21$ $\quad$ $10 \cdot 6 - 6^2 = 24$ $\quad$ $10 \cdot 9 - 9^2 = 9$

Coincide.

12 **Representa las siguientes funciones dando a *x* los valores que se indican en cada caso:**

a) $y = \sqrt{x-7}$ **7, 8, 11, 16, 23, 32**

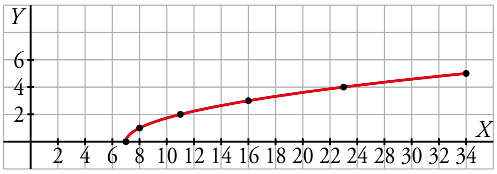
b) $y = \sqrt{25 - x^2}$ **–5, –3, 0, 3, 5**

c) $y = \sqrt{(x-4)^2}$ **–4, –2, 0, 2, 4, 6, 8, 10**

d) $y = 4 - \sqrt{(x-4)^2}$ **–4, –2, 0, 2, 4, 6, 8, 10**

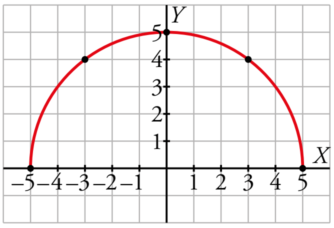
a) $y = \sqrt{x-7}$

x	7	8	11	16	23	32
y	0	1	2	3	4	5



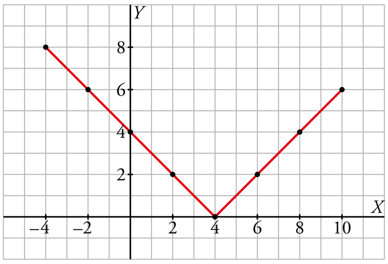
b) $y = \sqrt{25 - x^2}$

x	–5	–3	0	3	5
y	0	4	5	4	0



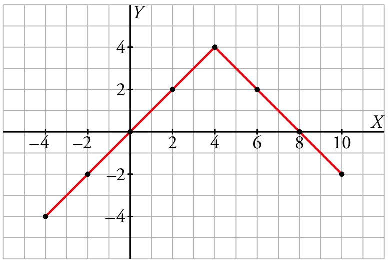
c) $y = \sqrt{(x-4)^2}$

x	–4	–2	0	2	4	6	8	10
y	8	6	4	2	0	2	4	6



d) $y = 4 - \sqrt{(x-4)^2}$

x	–4	–2	0	2	4	6	8	10
y	–4	–2	0	2	4	2	0	–2



13 **Representa en un papel cuadriculado las siguientes funciones dando a x, en cada caso, los valores que se indican:**

① $y = x^2$ –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3

② $y = x^2 - 2$ –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3

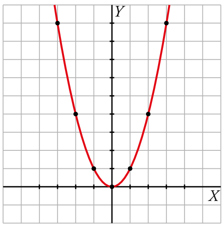
③ $y = (x-3)^2$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

a) ¿Qué observas en cuanto a la forma de todas ellas? ¿Y en cuanto a su posición?

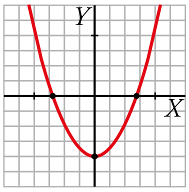
b) Sin necesidad de dar valores, ¿sabrías dibujar las siguientes funciones?

④ $y = x^2 + 2$ ⑤ $y = (x+3)^2$

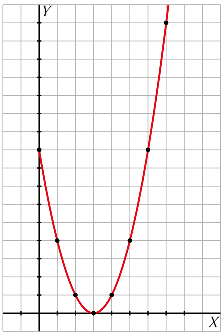
① $y = x^2$



② $y = x^2 - 2$



③ $y = (x-3)^2$



a) Todas son parábolas abiertas por arriba. Tiene distinta posición en el eje de coordenadas.

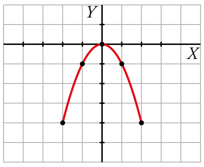
b) ④ $y = x^2 + 2$: es una parábola abierta por arriba con vértice en (0, 2).

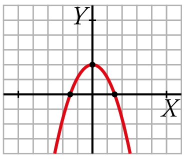
⑤ $y = (x+3)^2$: es una parábola abierta por arriba con vértice en (–3, 0).

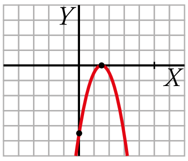
14 **Representa, dando los mismos valores, las funciones que resultan de cambiar el signo a las funciones del ejercicio anterior:**

① $y = -x^2$ ② $y = 2 - x^2$ ③ $y = -(x - 3)^2$

¿Qué observas?

①


②


③


Observamos que son las mismas gráficas abiertas por abajo. Además, 1 y 3 conservan el mismo vértice.

15 Ejercicio resuelto.

Página 319

16 **Representa en tu cuaderno estas parábolas obteniendo en cada caso la tabla de valores adecuados.**

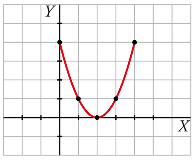
a) $y = (x - 2)^2$

b) $y = -x^2 + 1$

c) $y = x^2 - 4x + 3$

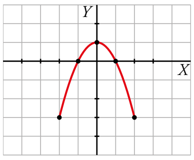
d) $y = -x^2 + 4x$

a) $y = (x - 2)^2$



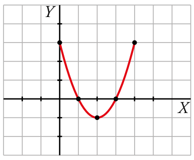
x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

b) $y = -x^2 + 1$



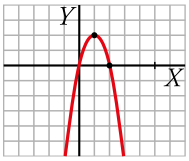
x	–2	–1	0	1	2
y	–3	0	1	0	–3

c) $y = x^2 - 4x + 3$



x	0	1	2	3	4
y	3	0	–1	0	3

d) $y = -x^2 + 4x$



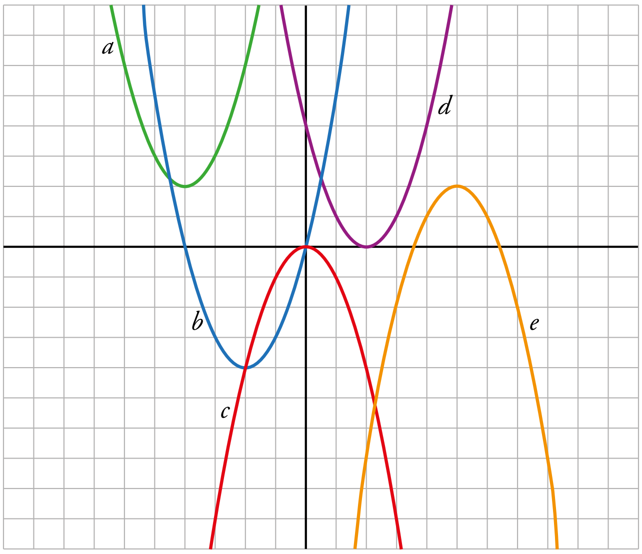
x	0	2	4
y	0	4	0

17 **De las parábolas de la actividad anterior, indica cuáles tienen un máximo, y cuáles, un mínimo. ¿Tiene algo que ver esa característica con el signo de la x^2?**

a) y c) tienen mínimo y el coeficiente de x^2 es positivo.

b) y d) tienen máximo y el coeficiente de x^2 es negativo.

18 **Relaciona cada una de las siguientes parábolas con su correspondiente ecuación:**



Ⓐ $y = x^2 + 8x + 18$ Ⓑ $y = x^2 + 4x$ Ⓒ $y = -x^2$

Ⓓ $y = (x - 2)^2$ Ⓔ $y = -x^2 + 10x - 23$

$a \rightarrow y = x^2 + 8x + 18$

$b \rightarrow y = x^2 + 4x$

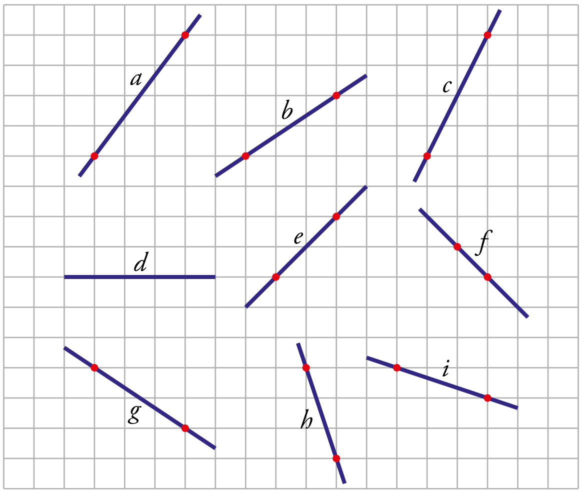
$c \rightarrow y = -x^2$

$d \rightarrow y = (x - 2)^2$

$e \rightarrow y = -x^2 + 10x - 23$

Funciones lineales

19 **Calcula la pendiente de la recta a la que pertenece cada uno de los siguientes segmentos:**



$a \rightarrow \frac{4}{3}$; $b \rightarrow \frac{2}{3}$; $c \rightarrow 2$; $d \rightarrow 0$; $e \rightarrow 1$; $f \rightarrow -1$; $g \rightarrow -\frac{2}{3}$; $h \rightarrow -3$; $i \rightarrow -\frac{1}{3}$

20 **Representa las siguientes funciones sin la ayuda de una tabla de valores:**

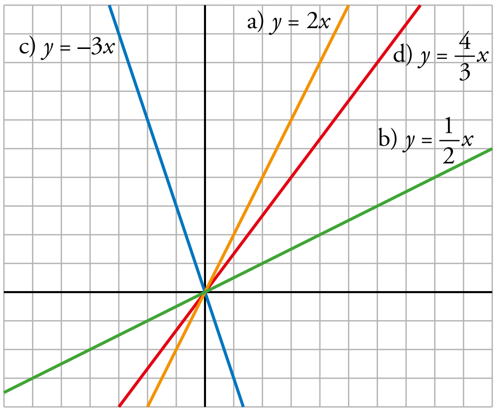
a) $y = 2x$ **b)** $y = \frac{1}{2}x$ **c)** $y = -3x$

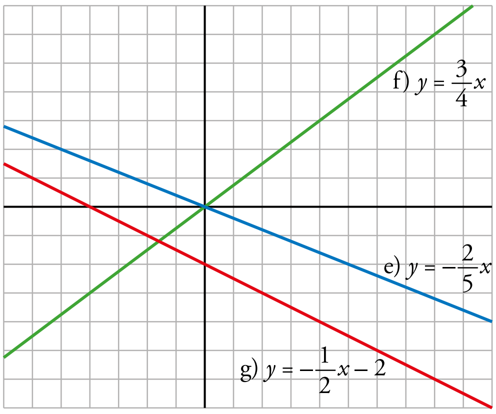
d) $y = \frac{4}{3}x$ **e)** $y = -\frac{2}{5}x$ **f)** $y = \frac{3}{4}x$

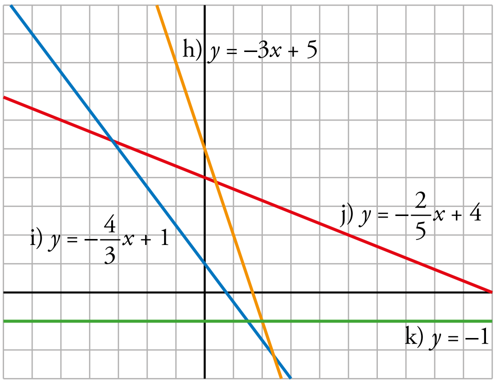
g) $y = -\frac{1}{2}x - 2$ **h)** $y = -3x + 5$ **i)** $y = -\frac{4}{3}x + 1$

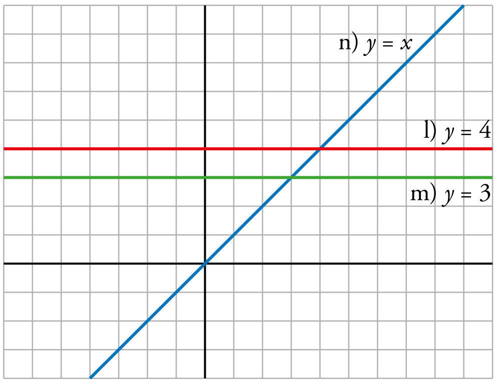
j) $y = -\frac{2}{5}x + 4$ **k)** $y = -1$ **l)** $y = 4$

m) $y = 3$ **n)** $y = x$

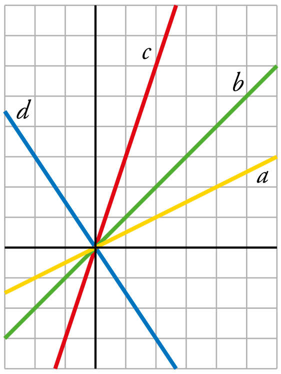


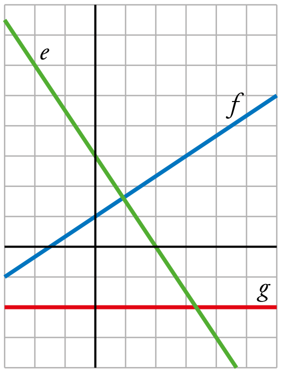






21 **Escribe la ecuación de cada una de las siguientes funciones, fijándote en la pendiente y la ordenada en el origen de cada una:**





$a \to y = \frac{1}{2}x$ $b \to y = x$ $c \to y = 3x$ $d \to y = -\frac{3}{2}x$

$e \to y = -\frac{3}{2}x + 3$ $f \to y = \frac{2}{3}x + 1$ $g \to y = -2$

22 **En un parque hay una tienda donde se alquilan patines, a 0,50 € la hora; monopatines, a 1 €/h, y bicicletas, a 2 €/h.**

0,50 €/h

1 €/h

2 €/h

El coste del monopatín, *y*, en función del tiempo que se utilice, *x*, viene dado por la ecuación $y = x$.

a) Calcula la ecuación que relaciona el coste de los patines en función del tiempo que se utilice.

b) Halla la ecuación que relaciona el coste de la bicicleta en función del tiempo.

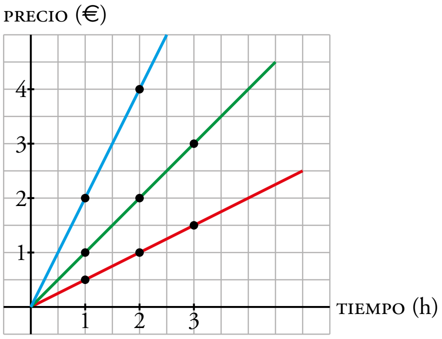
c) Representa en los mismos ejes coordenados las tres funciones de proporcionalidad.

d) ¿Cuáles son las pendientes de las tres rectas? ¿Qué representan en este contexto?

a) $y = 0{,}5x$

b) $y = 2x$

c)



d) La de los patines es $\frac{1}{2}$, la del monopatín es 1 y la de la bici es 2. Representan la diferencia de precios en los alquileres: a más pendiente, más cara la hora de alquiler.

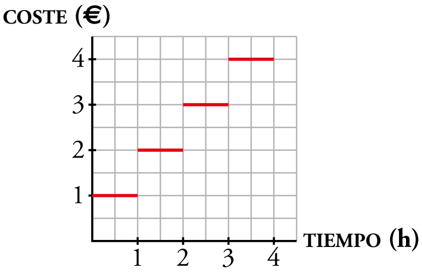
Página 320

Funciones discontinuas

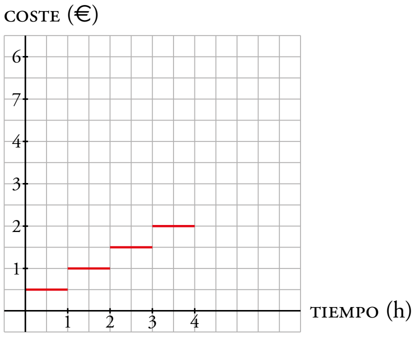
23 **En el ejercicio anterior dimos por hecho que si, por ejemplo, alquilamos un monopatín durante hora y media, nos cobran 1,50 €.**

En general, en estos sitios, y en otros establecimientos similares, cobran por horas; es decir, por una hora y media cobran dos horas y por 45 min cobran 1 h.

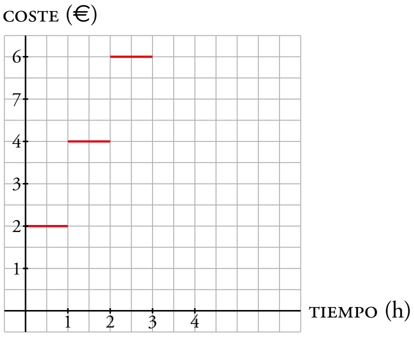
Según esta forma de cobrar, la gráfica para el monopatín del ejercicio anterior sería como la siguiente:



Representa en tu cuaderno cómo serían las gráficas de las funciones correspondientes a la bicicleta y a los patines del ejercicio anterior.



PATINES



BICICLETA

24 **Indica cuáles de estas funciones deben representarse por una gráfica continua, y cuáles, por una discontinua:**

a) Coste del aparcamiento en función del tiempo que se ha permanecido en él.

b) Espacio recorrido en función del tiempo.

c) Temperatura en función de la hora del día.

d) Estatura de una persona en función de su edad.

e) Tiempo que tardo en correr 10 km cada día de un mes en función del día del mes.

a) Discontinua.

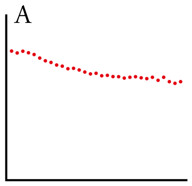
b) Continua.

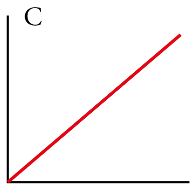
c) Continua.

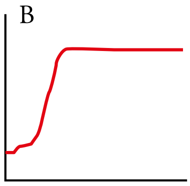
d) Continua.

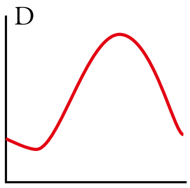
e) Discontinua.

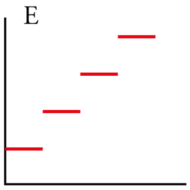
25 **Relaciona estas gráficas con los enunciados del ejercicio anterior:**





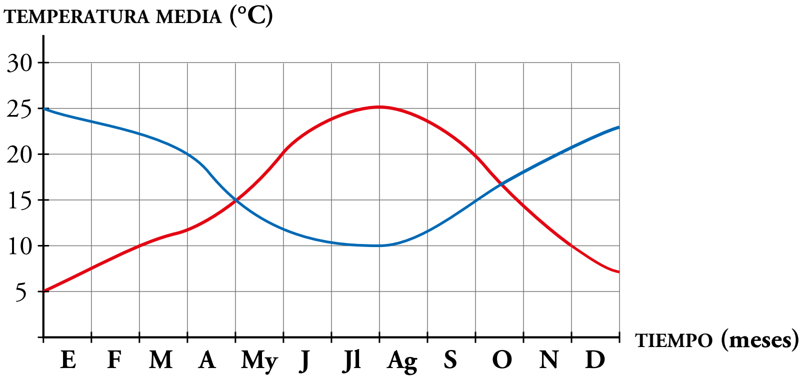






A → e); B → d); C → b); D → c); E → a)

26 **Se han tomado las temperaturas medias en Madrid y Buenos Aires a lo largo de un año. Los resultados están representados en estas gráficas.**



a) ¿A qué ciudad corresponde cada una de las funciones? Razona la respuesta.

b) ¿Cuál es el máximo y cuál el mínimo en cada una?

c) ¿En qué épocas coinciden sus temperaturas? ¿Tiene sentido?

d) Considera la función diferencia de temperatura entre Madrid y Buenos Aires. Represéntala en el tramo del 1 de enero al 30 de abril.

a) La curva roja tiene mayor temperatura en los meses de junio, julio y agosto. Por tanto, la curva roja corresponde a Madrid, y la azul, a Buenos Aires.

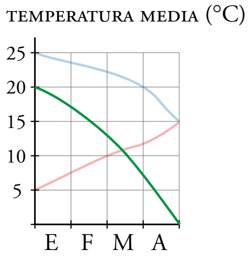
b) Curva roja: el máximo se sitúa a mediados de julio y es 25 °C. El mínimo se sitúa a mediados de diciembre y es 5 °C.

Curva azul: el máximo se sitúa a mediados de diciembre y es 25 °C. El mínimo se sitúa a medidos de julio y es 10 °C.

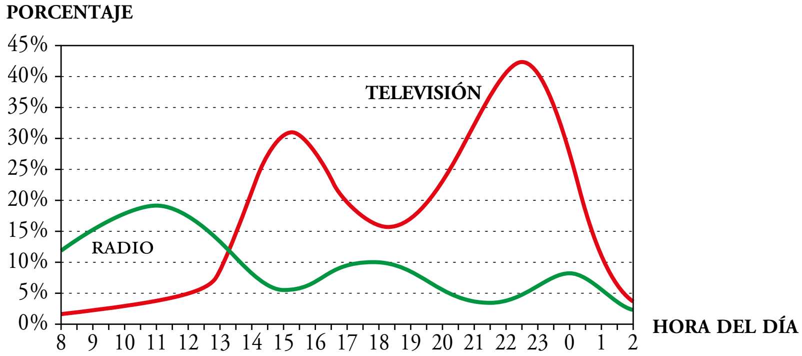
c) Mirando las gráficas vemos que las temperaturas en Buenos Aires y en Madrid coinciden a principios de mayo y a mediados de octubre.

Es lógico, ya que cuando es primavera en una de estas ciudades es otoño en la otra, y viceversa. Ambas son épocas de temperaturas templadas.

d)



27 **Estas gráficas corresponden a los porcentajes de personas que ven la televisión o escuchan la radio a ciertas horas del día.**



a) Describe la curva correspondiente a la televisión: dónde es creciente, dónde es decreciente, máximos, mínimos… Relaciónala con las actividades cotidianas: levantarse, acostarse, comida, cena…

b) Haz lo mismo con la curva de la radio.

c) Representa la función que refleja la diferencia de los porcentajes de audiencia entre radio y televisión a la una del mediodía y a la una de la madrugada.

d) Compara las dos curvas y relaciónalas.

a) Crece desde las 8 de la mañana hasta las 3 y media de la tarde; decrece hasta las 6 y media, donde vuelve a crecer hasta las 10 y media, cuando empieza a caer hasta quedar por debajo del 5 %, a partir de las 2 de la mañana.

Máximo: $x = 22,5$; $y = 42,5$ %

Mínimo: $x = 8$, $y = 2$ %

El máximo se da durante la cena y hay también un buen pico durante la comida. En la hora de la siesta decrece, y por la noche la gente duerme y se alcanza el mínimo.

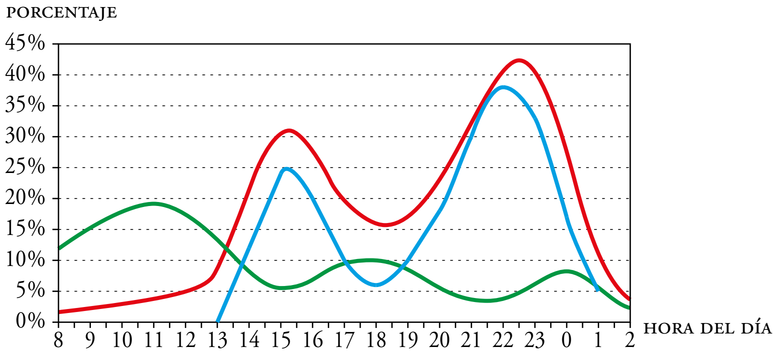
b) La radio crece desde las 8 hasta las 11, cuando empieza a decrecer hasta las 15. Luego pasa lo mismo de 15 a 18 y de 18 a 21 y media, y de nuevo de 21 y media a 0, y de 0 a 2.

Cuando más se escucha es por la mañana, de camino al trabajo y también una vez en él, después, a la hora de la merienda y antes de acostarse.

Máximo: $x = 11$; $y = 19$ %

Mínimo: $x = 2$; $y = 2,5$ %

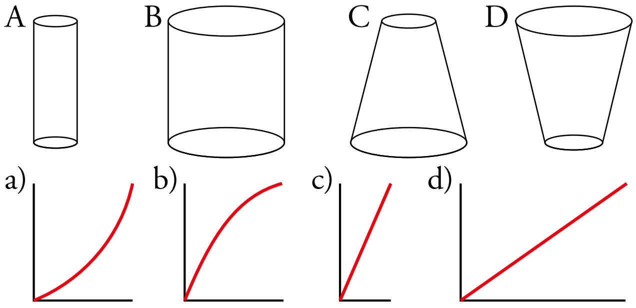
c)



d) Por la mañana, la gente prefiere la radio a la tele. Mientras que a partir de las 13 y media la gente prefiere con gran diferencia la televisión. Cuando a mediodía crecen los aficionados a la tele, bajan los que escuchan la radio. Lo contrario ocurre alrededor de las 6 de la tarde. Después, baja la radio y sube la tele durante la cena. Luego crece un poco la radio antes de dormir y, por último, ambas caen hasta sus mínimos.

Página 321

28 **Un grifo tiene un caudal constante. Estas son las gráficas de la función nivel de agua-tiempo al llenar algunos vasos.**

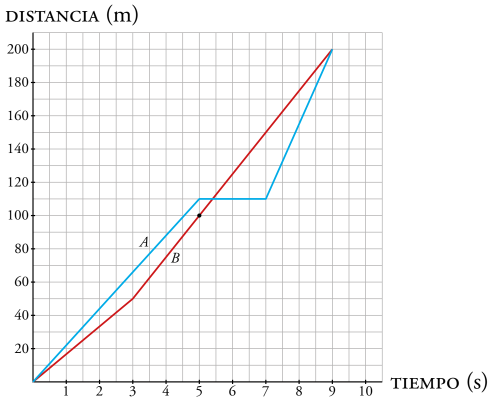


Asocia cada gráfica a su vaso.

A → c); B → d); C → a); D → b)

29 **Representa gráficamente esta carrera en pista de 200 m entre dos corredores:**

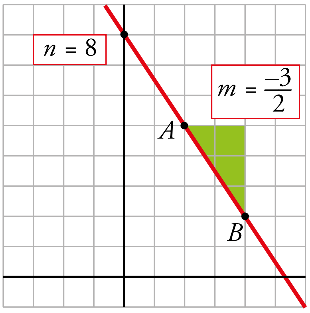
- ***A* sale más rápidamente que *B*, en 5 segundos le saca 10 m de ventaja.**
- ***A* se cae en el instante 5 segundos, y *B* le adelanta. Pero *A* se levanta en 2 segundos, y adelanta a *B* en la misma línea de meta.**



Interpreta, describe, exprésate

30 **A continuación, se incluyen dos resoluciones distintas. Explícalas y valora sus diferencias.**

Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, 5) y B(4, 2).



Resolución 1

$A(2, 5)$; $B(4, 2)$

Observando la gráfica:

$m = \frac{-3}{2}$ $\qquad n = 8$

Solución: $y = \frac{-3}{2}x + 8$

Resolución 2

$A(2, 5)$; $B(4, 2)$

La ecuación tiene la forma $y = mx + n$.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5 = m \cdot 2 + n \\ 2 = m \cdot 4 + n \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} n = 8 \\ m = \dfrac{-3}{2} \end{matrix}$$

Solución: $y = \dfrac{-3}{2}x + 8$

Resolución 1: buscamos su pendiente y el punto de corte con el eje vertical para encontrar la ecuación a partir de *m* y *n*.

Resolución 2: partiendo de la fórmula general de la recta, sustituimos los valores de dos puntos de la gráfica y resolvemos para encontrar *m* y *n*.

Problemas «+»

31 **En una compañía de teléfonos móviles, la tarifa de llamadas al extranjero es 1 € por establecimiento de llamada y 0,50 € por minuto de conversación.**

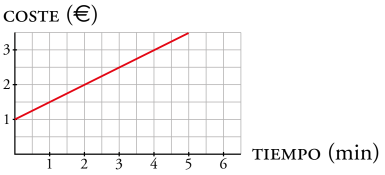
a) Pon la ecuación de la función que relaciona el coste en euros (y) en función de la duración de la llamada en minutos (x).

b) Representa la gráfica de la función.

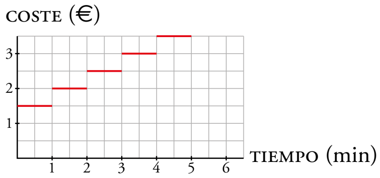
c) Supón que por cualquier fracción de minuto que se hable hay que pagar el minuto entero. Por ejemplo, por hablar medio minuto hay que pagar 1,50 €, como si se hubiera utilizado el minuto entero. Representa la gráfica de la función teniendo esto en cuenta. Ayúdate, para ello, del ejercicio 23.

a) $y = 0{,}5x + 1$

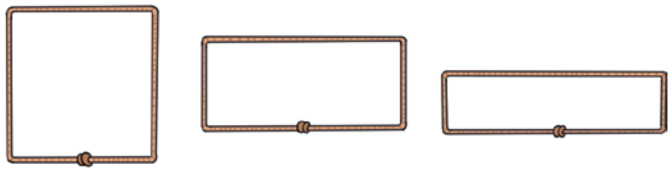
b)



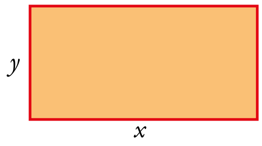
c)



32 **Con un hilo de 16 cm cuyos extremos están atados entre sí formamos rectángulos:**



a) Razona que la relación entre su base, x, y su altura, y, es $y = 8 - x$.



b) Representa la gráfica de la función.

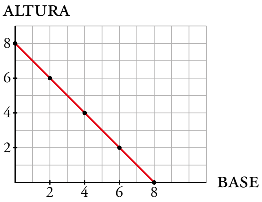
c) Si multiplicamos la base, x, por la altura, $8 - x$, obtenemos el área: $A = x \cdot (8 - x)$. Completa en tu cuaderno una tabla de valores como la siguiente:

x	1	2	3	4	5	6	7
ÁREA	7	12					

a) Tenemos que el perímetro es 16 cm. Si x es la base e y la altura:

$2x + 2y = 16 \rightarrow x + y = 8 \rightarrow y = 8 - x$

b)



c)

x	1	2	3	4	5	6	7
ÁREA	7	12	15	16	15	12	7

33 **Representa en tu cuaderno estas gráficas:**

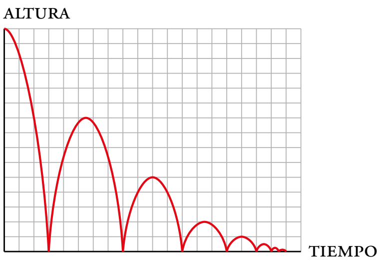
a) **Altura de una pelota que está botando, hasta que se para.**

b) **La temperatura de un plato de sopa que se queda sobre la mesa, sin consumir.**

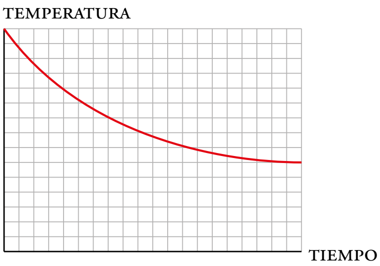
c) **La distancia a la Tierra de un satélite artificial que da vueltas y vueltas.**

d) **La altura a la que se encuentra el asiento de un columpio cuando balancea.**

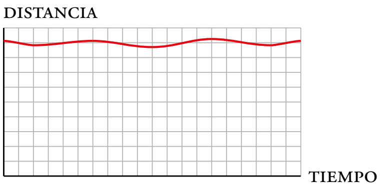
a)



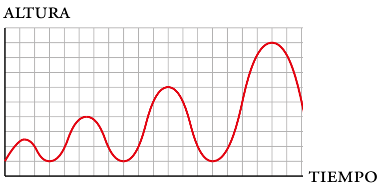
b)



c)



d)



Página 322

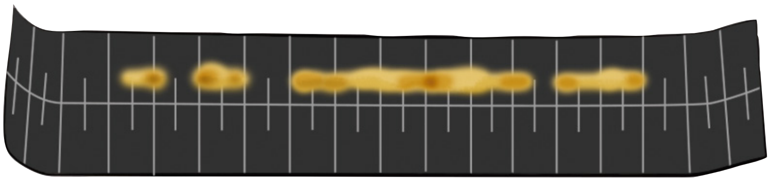
LEE E INFÓRMATE

Función de insolación

Con una bola de cristal y un papel negro, se puede realizar esta hermosa experiencia.

Colocando la bola de modo que recoja los rayos de sol, los concentrará en un punto. El papel se sitúa alrededor de la bola, a una distancia adecuada para que los rayos se concentren en él, de modo que con el paso de los minutos el papel se tuesta.

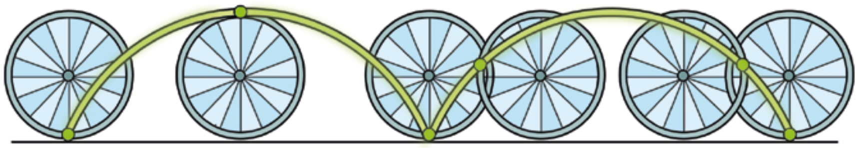
Al moverse el sol, el lugar donde se concentran los rayos va variando, formándose una gráfica de «papel tostado». A mayor insolación, más gruesa será la línea. Si durante unos minutos el sol se oculta tras una nube, la raya se interrumpirá. De este modo se obtiene una *función de insolación.*



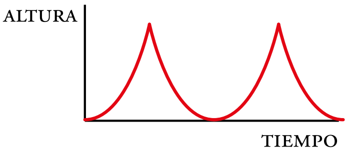
Los estudiantes pueden fabricarse un aparato similar, aunque no tengan una bola de vidrio. Con una bombilla rellena de agua podrán apañarse.

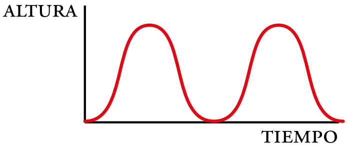
Función en la rueda de una bicicleta

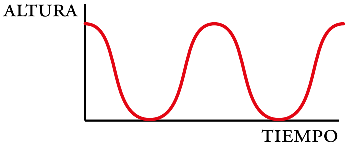
Si adhieres una pegatina fluorescente al lateral de una rueda de bicicleta y la haces rodar en una habitación oscura, verás que la pegatina sube y baja siguiendo una curva muy peculiar, la cicloide.



La cicloide refleja la trayectoria de la pegatina. ¿Podrías identificar, entre las de la derecha, su altura en función del tiempo?







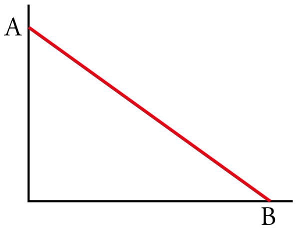
Una bonita curva generada por una rueda a la que se le asocia una función *tiempo-altura.*

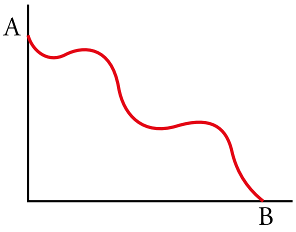
Solución: La función asociada es la segunda.

Carrera de canicas

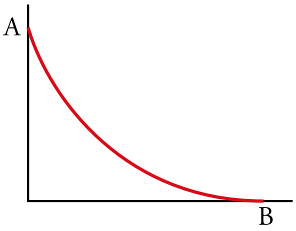
Varias amigas inventan la siguiente competición: se ha de dejar caer una canica desde un punto alto, A, hasta otro lugar bajo, B. Cada una debe construir la rampa de caída que crea preferible para que la canica tarde el mínimo tiempo en llegar a B. Gana la que consiga que la canica llegue antes.

Estas son algunas opciones:



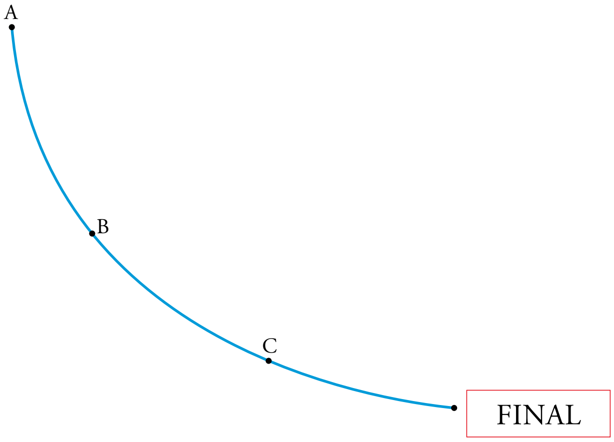


Esta es la opción ganadora. Es una **cicloide invertida.**



Además de esta propiedad (recorrido más rápido), una semicicloide invertida posee esta otra propiedad muy sorprendente:

Si dejamos caer objetos situados en varios puntos cualesquiera de la curva, llegan simultáneamente al final del recorrido.

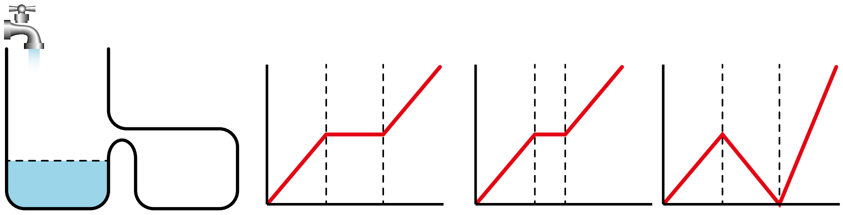


Página 323

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

Imagina

Un grifo arroja un caudal constante. ¿Cuál de las gráficas refleja la altura del agua en función del tiempo transcurrido?

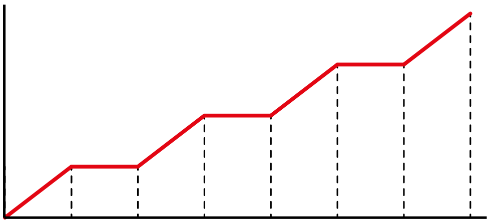


La tercera gráfica indica que, pasado un tiempo la altura del agua, es cero. Por tanto, esa no es la solución.

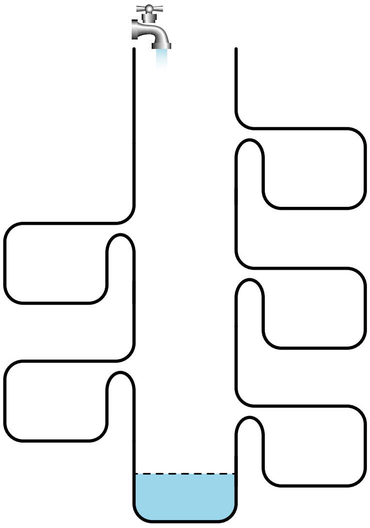
En las otras dos, pasado un tiempo, el nivel deja de subir porque el agua que entra va al depósito adjunto. Al ser ambos depósitos iguales, tardarán el mismo tiempo en llenarse, cosa que se ajusta a la primera gráfica (en la segunda el tiempo es menor). Por tanto, la primera es la solución.

Crea

Diseña un depósito para el que la función de altura-tiempo tenga esta forma:



Por ejemplo:



De lógica

Un matrimonio viaja en su coche acompañado de su hija de 12 años y su hijo de 2. Cada uno se entretiene en el viaje con una actividad diferente: conducir, dormir, leer y comer.

El padre ni duerme ni lee. La madre, si lee, se marea, y jamás come en los viajes. Si el niño está despierto, no deja leer a su hermana. ¿Qué actividad realiza cada uno?

Ni el padre, ni la madre, ni el niño, leen. La que lee es la niña.

Si la niña lee, el niño duerme.

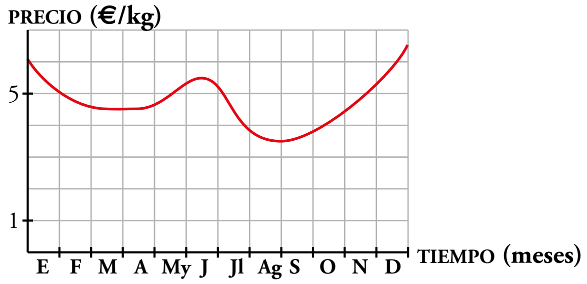
La madre, ni duerme, ni lee ni come, por tanto, conduce.

El padre come.

	CONDUCIR	DORMIR	LEER	COMER
MADRE	▨		✗	✗
PADRE		✗	✗	▨
NIÑA	✗		▨	
NIÑO	✗	▨	✗	

AUTOEVALUACIÓN

1 a) Describe la evolución del precio de la miel a lo largo de un año.



b) ¿En qué tramos la función es creciente y en cuáles es decreciente?

c) ¿Cuándo el precio es mínimo? ¿Cuál es?

a) Empezó costando 6 €. Bajó hasta finales de febrero, cuando se estabiliza sobre los 4,50 € hasta finales de abril que empieza a subir.

En junio llega alrededor de los 5,40 € y a partir de ahí baja hasta alcanzar su mínimo al empezar septiembre, 3,50 € aproximadamente.

A partir de ahí vuelve a subir para acabar diciembre a 6,50 €.

b) Crece de abril a junio y de septiembre a diciembre. Decrece de enero a marzo y de julio a agosto.

c) El mínimo se alcanza al empezar septiembre y ronda los 3,50 €.

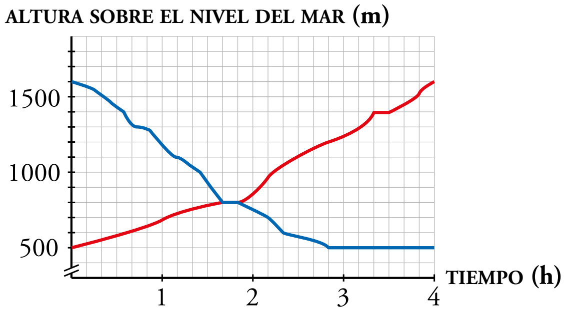
2 Pedro baja de la montaña en el mismo momento en que Chavela empieza a subir por el mismo camino.

a) ¿Desde qué altura sale Chavela y a qué altura llega?

b) ¿Cuánto ha tardado cada uno en hacer su marcha?

c) ¿Cuándo se encuentran? ¿A qué altura están? ¿Cuánto tiempo están juntos?

d) Dibuja en tu cuaderno, en unos ejes iguales, la gráfica de Miguel, que sale con Chavela a ritmo constante, se encuentra con Pedro cuando han pasado una hora y 10 minutos, descansa 20 minutos a esa altura y sigue al mismo ritmo hasta la cima.

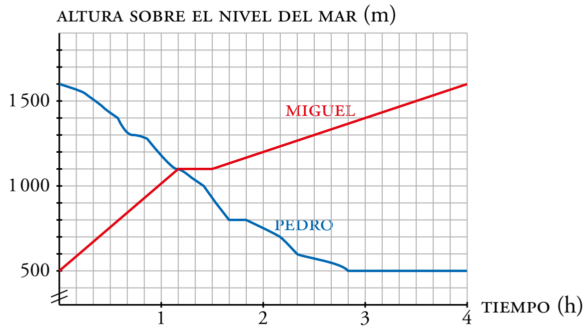


a) Chavela sale de una altura de 500 metros y llega a los 1 600 metros.

b) Los dos han tardado 4 horas.

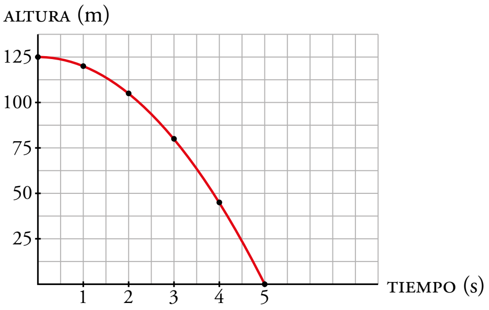
c) Se encuentran al cabo de una hora y 40 minutos y a 800 metros, y están juntos 10 minutos.

d)



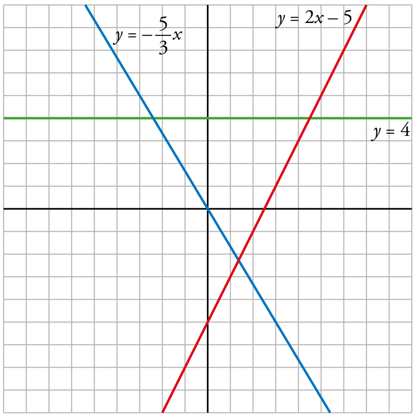
3 **Dejamos caer una piedra desde una altura de 125 m. Representa la función que relaciona la altura de la piedra con el tiempo. Estos son los datos:**

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5
ALTURA (m)	125	120	105	80	45	0

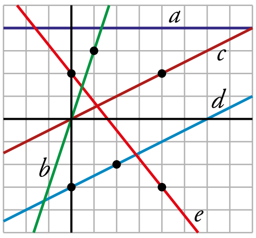


4 **Representa estas funciones:**

a) $y = -\frac{5}{3}x$ **b)** $y = 2x - 5$ **c)** $y = 4$



5 **Escribe la ecuación de cada una de estas funciones:**



$a \rightarrow y = 4$

$b \rightarrow y = 3x$

$c \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

$d \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 3$

$e \rightarrow y = \frac{-5}{4}x + 2$