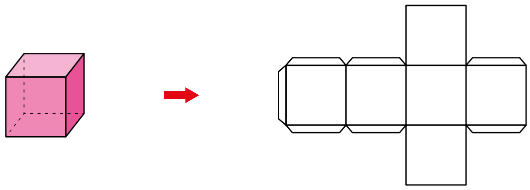
13 CUERPOS GEOMÉTRICOS

Página 256

Investiga, experimenta y aplica lo que sabes

1 **Para construir un cubo de 2 cm de arista, se han necesitado 24 cm^2 de cartulina (sin contar las solapas).**

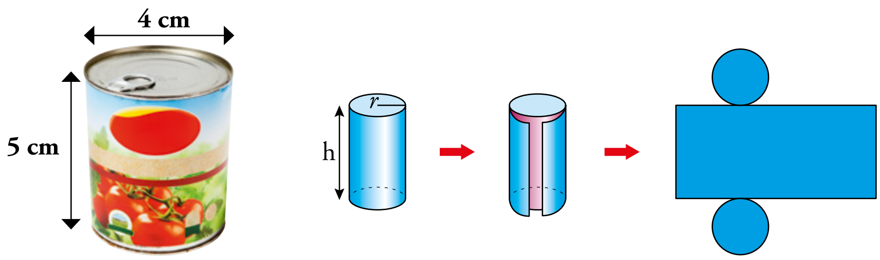


¿Cuál de las siguientes cantidades de cartulina se necesitan para construir otro cubo de 4 cm de arista?

30 cm^2 más | **El doble** | **El cuádruplo** | **30 cm^2 menos**

El cuádruplo, 96 cm^2.

2 **¿Sabrías calcular, en centímetros cuadrados, la cantidad de chapa que lleva este bote de conserva?**



RECUERDA: **Longitud de la circunferencia → $2\pi \cdot r$**

Superficie del círculo → $\pi \cdot r^2$

La superficie del círculo: $\pi \cdot 2^2 = 12{,}56$ cm^2

La superficie del rectángulo: $5 \cdot 2\pi \cdot 2 = 62{,}8$ cm^2

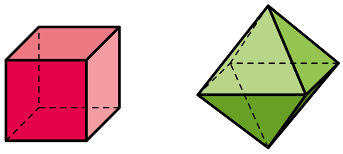
Superficie total: $12{,}56 + 12{,}56 + 62{,}8 = 87{,}92$ cm^2

Lleva 88 cm^2 de chapa, aproximadamente.

Página 257

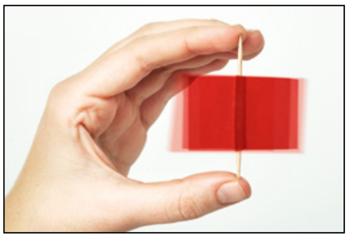
Estudia propiedades de los cuerpos

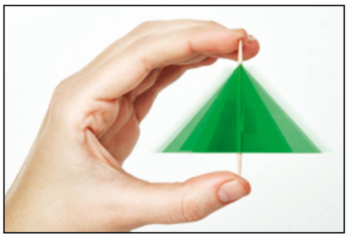
3 **Cuenta y compara las caras, las aristas y los vértices del cubo y del octaedro.**



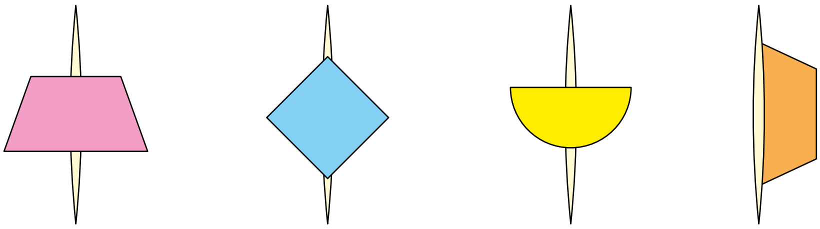
	CUBO	OCTAEDRO
CARAS	6	8
ARISTAS	12	12
VÉRTICES	8	6

4 **Construye, manipula y observa.**





¿Qué cuerpos geométricos se visualizan al hacer girar estas cartulinas tomando como eje el correspondiente palillo?



Tronco de cono.

Dos conos unidos por la base.

Media esfera.

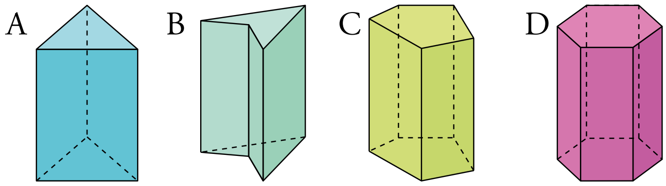
Cilindro con un cono en cada base.

1 ▶ PRISMAS

Página 258

Para practicar

1 Observa los siguientes prismas:



a) Clasifícalos según sea su base.

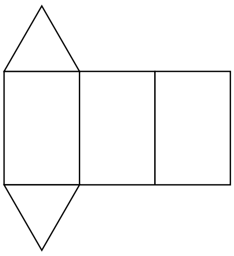
b) Indica cuáles son regulares.

c) Dibuja el desarrollo plano del prisma A.

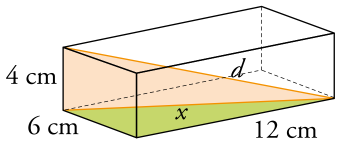
a) A: Triangular
B: Cuadrangular
C: Pentagonal
D: Hexagonal

b) Son regulares el A y el D.

c)



2 Copia y completa para calcular la diagonal de un ortoedro de dimensiones 4 cm, 6 cm y 12 cm.



Los triángulos coloreados son rectángulos. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$\boldsymbol{x^2 = 12^2 + 6^2}$

$\boldsymbol{d^2 = x^2 + 4^2 = \ldots^2 + \ldots^2 + \ldots^2 = \ldots \to d = \sqrt{\ldots} = 14 \text{ cm}}$

***Solución:* La diagonal del ortoedro mide 14 cm.**

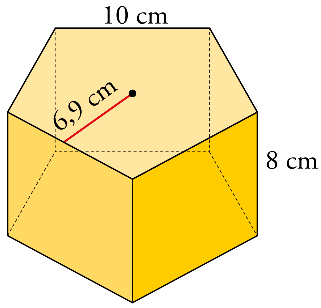
$d^2 = x^2 + 4^2 = 12^2 + 6^2 + 4^2 = 196 \to d = \sqrt{196} = 14$ cm

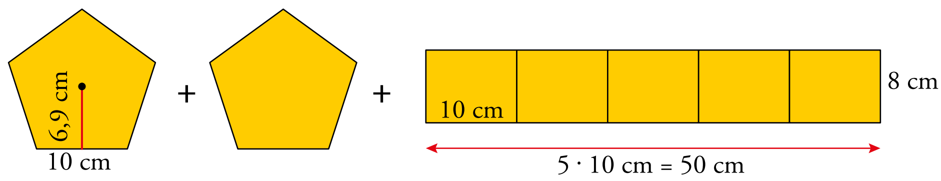
Página 259

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 Calcula el área de este prisma pentagonal regular.



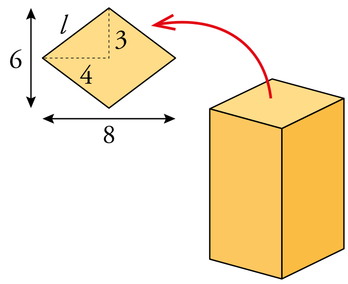


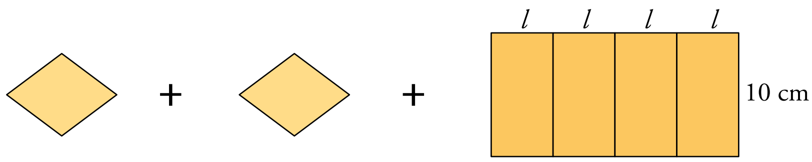
$$\boldsymbol{A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2}$$

$$\boldsymbol{A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = \ldots \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{50 \cdot 6{,}9}{2} = 172{,}5 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = 50 \cdot 8 = 400 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + 2 \cdot A_{\text{BASE}} = \\ = 400 + 2 \cdot 172{,}5 = 745 \text{ cm}^2 \end{array}$$

2 Las bases de un prisma recto son rombos cuyas diagonales miden 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Halla su área total.





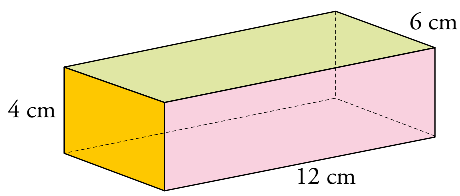
Utilizando el teorema de Pitágoras: $\boldsymbol{l = \sqrt{3^2 + \ldots^2} = \ldots \text{ cm}}$

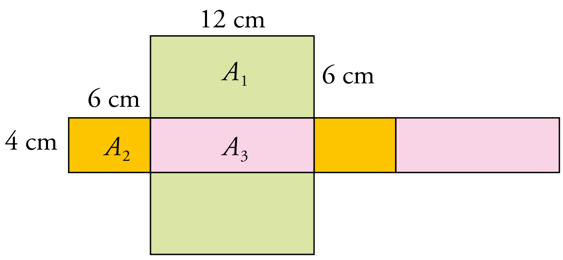
Perímetro de la base: $\boldsymbol{P = 4 \cdot l = \ldots \text{ cm}}$**; Altura: h = … cm**

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{diagonal}_1 \cdot \text{diagonal}_2}{2} = \dfrac{\ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2} \\ \boldsymbol{A_{\text{LATERAL}} = P \cdot \text{h} = \ldots \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^2} \end{array}\right\} \boldsymbol{A_{\text{TOTAL}} = \ldots + 2 \cdot \ldots = 248 \text{ cm}^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{diagonal}_1 \cdot \text{diagonal}_2}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = P \cdot \text{h} = 20 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} A_{\text{TOTAL}} = 200 + 2 \cdot 24 = 248 \text{ cm}^2$$

3 Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 4 cm, 6 cm y 12 cm. Como las caras son iguales dos a dos, podemos actuar de una forma más directa:





$$\boldsymbol{A_1 = 12 \cdot 6 = \ldots \text{ cm}^2}$$
$$\boldsymbol{A_2 = 4 \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^2}$$
$$\boldsymbol{A_3 = \ldots \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^2}$$

$$\boldsymbol{A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (\ldots + \ldots + \ldots) = 288 \text{ cm}^2}$$

$A_1 = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$ $\quad A_2 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$ $\quad A_3 = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (72 + 24 + 48) = 288 \text{ cm}^2$

2 PIRÁMIDES

Página 261

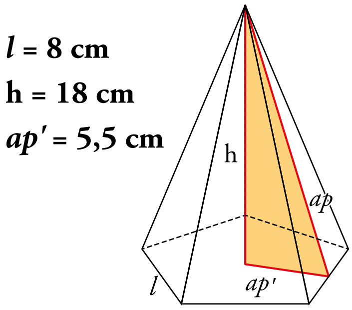
Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Halla el área total de esta pirámide pentagonal regular.**

Empezamos calculando la apotema, *ap*, de la pirámide.

Ten en cuenta que el triángulo coloreado es rectángulo (la hipotenusa es *ap*, y los catetos *ap'* y h).



$$ap = \sqrt{h^2 + (ap')^2} = \sqrt{\ldots + \ldots} = \sqrt{\ldots} \approx \ldots \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \frac{(5 \cdot \ldots) \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{(5 \cdot \ldots) \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \ldots + \ldots = 486 \text{ cm}^2$$

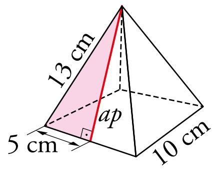
$$ap = \sqrt{h^2 + (ap')^2} = \sqrt{324 + 30,25} = \sqrt{354,25} \approx 18,8 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \frac{(5 \cdot 8) \cdot 5,5}{2} = 110 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{(5 \cdot 8) \cdot 18,8}{2} = 376 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 110 + 376 = 486 \text{ cm}^2$$

2 **Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y su arista lateral mide 13 cm.**



Empezamos calculando la apotema, *ap*, de la pirámide. Ten en cuenta que el triángulo coloreado es rectángulo (la hipotenusa es 13, y los catetos *ap* y 5).

$$ap = \sqrt{13^2 - \ldots^2} = \sqrt{\ldots - \ldots} = \sqrt{\ldots} = \ldots \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \ldots^2 = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{4 \cdot \ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \ldots + \ldots = 340 \text{ cm}^2$$

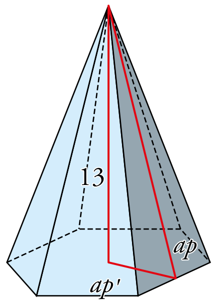
$$ap = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

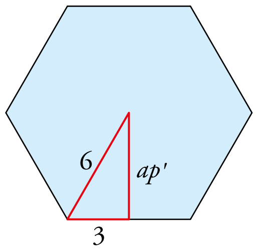
$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 12}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 100 + 240 = 340 \text{ cm}^2$$

3 **Calcula las superficies lateral y total de una pirámide hexagonal regular de 13 cm de altura sabiendo que el radio de su base mide 6 cm.**



Calculamos la apotema de la pirámide, *ap*, y la apotema de la base, *ap'*. Recuerda que en un hexágono regular el radio es igual al lado. Por tanto:



$(ap')^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \rightarrow ap' = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ cm

$ap = \sqrt{\ldots^2 + (ap')^2} = \sqrt{\ldots + 27} = \sqrt{\ldots} = \ldots$ cm

$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \frac{6 \cdot \ldots \cdot \ldots}{2} \approx \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{6 \cdot \ldots \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \ldots + \ldots = 345{,}6 \text{ cm}^2$

$ap = \sqrt{13^2 + (ap')^2} = \sqrt{169 + 27} = \sqrt{197} = 14$ cm

$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap'}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} \approx 93{,}6 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot ap}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 14}{2} = 252 \text{ cm}^2$$

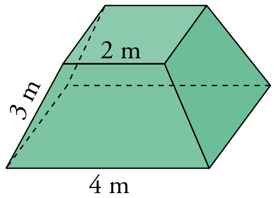
$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 93{,}6 + 252 = 345{,}6 \text{ cm}^2$

3 TRONCOS DE PIRÁMIDE

Página 262

Para fijar ideas

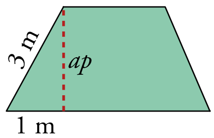
Copia y completa en tu cuaderno.



1 **Halla el área lateral y el área total del tronco de pirámide cuadrangular regular.**

Empezamos calculando la apotema (altura de la cara lateral):

$$ap = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2{,}83 \text{ m}$$



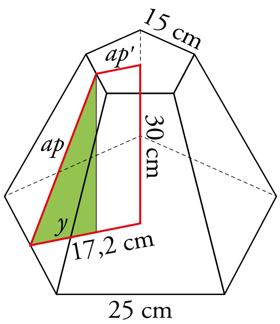
$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{4 \cdot \ldots + 4 \cdot \ldots}{2} \cdot \ldots = 33{,}96 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE MAYOR}} + A_{\text{BASE MENOR}} = \ldots + 4^2 + \ldots^2 = 53{,}96 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{4 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{2} \cdot 2{,}83 = 33{,}96 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE MAYOR}} + A_{\text{BASE MENOR}} = 33{,}96 + 4^2 + 2^2 = 53{,}96 \text{ m}^2$$

2 **Calcula el área lateral del tronco de pirámide que ves en la figura.**



Teniendo en cuenta que ambas bases son polígonos semejantes, calculamos la apotema, *ap'*, de la base menor es:

$$\frac{25}{15} = \frac{17{,}2}{ap'} \to ap' = \frac{15 \cdot 17{,}2}{25} = 10{,}32 \text{ cm}$$

Calculamos la apotema del tronco de pirámide. El triángulo coloreado es rectángulo. La hipotenusa es *ap*, un cateto 30 y el otro $y = 17{,}2 - ap' = \ldots$

$$ap = \sqrt{30^2 + \ldots^2} \approx 30{,}78 \text{ cm} \qquad A_{\text{LATERAL}} = \frac{5 \cdot \ldots + 5 \cdot \ldots}{2} \cdot \ldots = 3\,078 \text{ cm}^2$$

$$y = 17{,}2 - ap' = 6{,}9$$

$$ap = \sqrt{30^2 + 6{,}9^2} \approx 30{,}78 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{5 \cdot 25 + 5 \cdot 15}{2} \cdot 30 = 3\,078 \text{ cm}^2$$

Página 263

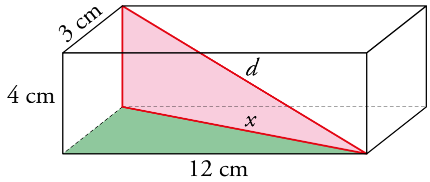
Para practicar

1 **Halla el área total de un cubo de 10 cm de arista.**

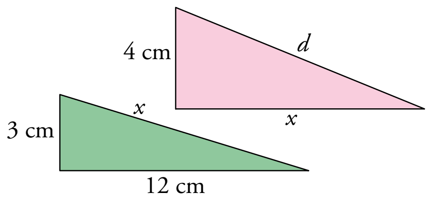
Cada cara: $A = 100 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 600 \text{ cm}^2$

2 **Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 3 cm y 12 cm. Halla el área total y la longitud de la diagonal.**



Observa que los dos triángulos coloreados son rectángulos. Si calculas primero x, después puedes calcular d.



$x^2 = 3^2 + 12^2$

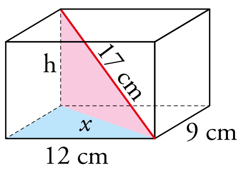
$d^2 = x^2 + 4^2 = 3^2 + 12^2 + 4^2 = 169 \rightarrow d = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$

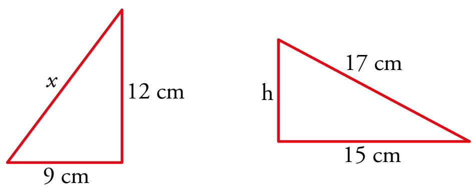
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 12) = 192 \text{ cm}^2$

3 **La base de un ortoedro es un rectángulo de lados 9 cm y 12 cm. La diagonal del ortoedro mide 17 cm. Calcula la altura del ortoedro y su área total.**

$\mathbf{x^2 = \ldots^2 + \ldots^2}$

$\mathbf{h^2 = 17^2 - x^2}$





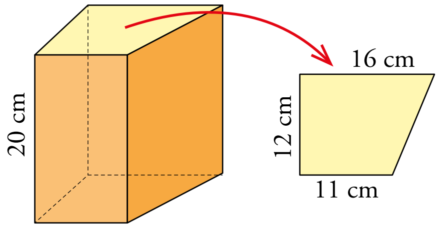
$x = 15 \text{ cm}$

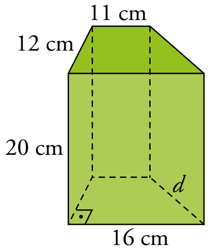
$\text{h} = 8 \text{ cm}$

La altura es 8 cm.

$A_{\text{TOTAL}} = 2(9 \cdot 12 + 9 \cdot 8 + 8 \cdot 12) = 552 \text{ cm}^2$

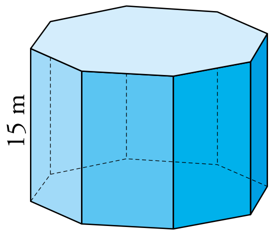
4 **La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios rectángulos cuyas bases miden 11 cm y 16 cm, respectivamente, y la altura, 12 cm. Halla el área total del prisma.**

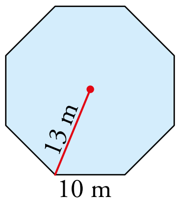




$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{LATERAL}} = 1\,040 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{BASE}} = 162 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Su área total es de } 1\,364 \text{ cm}^2.$$

5 **La altura de un prisma octogonal regular mide 15 m, el lado de la base 10 m y el radio de la misma 13 m. Calcula su área total.**





Para encontrar el área de la base debemos encontrar el área de los 8 triángulos isósceles que la forman, de lados iguales 13 m y lado desigual 10 m. Para ello, calculamos su altura, *ap'*:

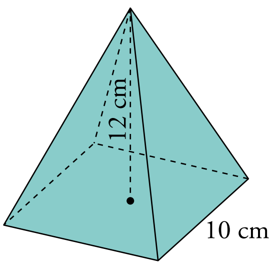
$$ap' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$$

$$A_{\text{BASE}} = 8 \cdot A_{\text{TRIÁNGULO}} = 8 \cdot \frac{10 \cdot 12}{2} = 480 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{LATERAL}} = 8 \cdot A_{\text{RECTÁNGULO}} = 8 \cdot 10 \cdot 15 = 1\,200 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 480 + 1\,200 = 2\,160 \text{ m}^2$$

6 **Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y cuya altura es de 12 cm.**

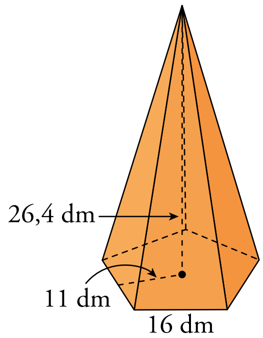


$a' = 5$ cm

Apotema de la pirámide, $ap = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm

$$A_{\text{TOTAL}} = 100 + \frac{40 \cdot 13}{2} = 360 \text{ cm}^2$$

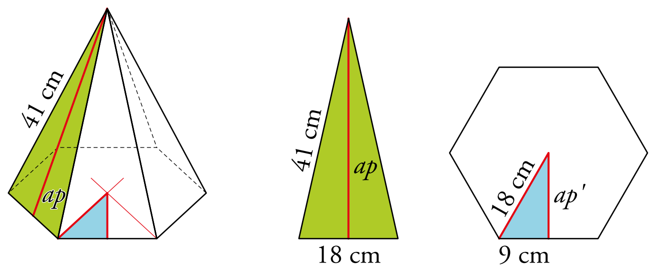
7 **La base de una pirámide regular es un pentágono de 16 dm de lado y 11 dm de apotema. La altura de la pirámide es de 26,4 dm. Halla su área total.**



Apotema, $ap = \sqrt{26,4^2 + 11^2} = 28,6$ dm

$A_{\text{TOTAL}} = \dfrac{16 \cdot 5 \cdot 11}{2} + \dfrac{16 \cdot 5 \cdot 28,6}{2} = 1\,584 \text{ dm}^2$

8 **Calcula el área total de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el lado de la base mide 18 cm y la arista lateral 41 cm.**



$ap' = \sqrt{18^2 - 9^2} = 15,6$ cm

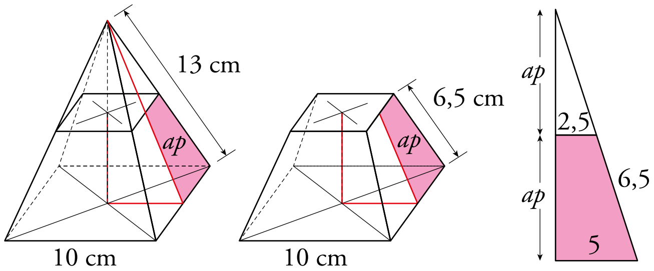
$A_{\text{BASE}} = 6 \cdot \dfrac{18 \cdot 15,6}{2} = 6 \cdot 140,4 = 842,4 \text{ cm}^2$

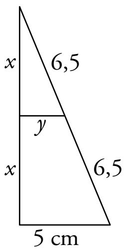
$ap = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \dfrac{18 \cdot 40}{2} = 2\,160 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 842,4 + 2\,160 = 3\,002,4 \text{ cm}^2$

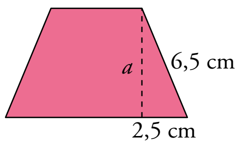
9 **Una pirámide regular de base cuadrada, de 10 cm de lado y arista lateral de 13 cm, se corta por un plano a mitad de su altura. Halla el área total del tronco de pirámide resultante.**





$$\frac{5}{y} = \frac{13}{6,5} \rightarrow y = 2,5$$

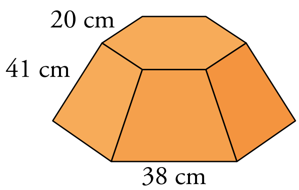
$$x = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ cm}$$

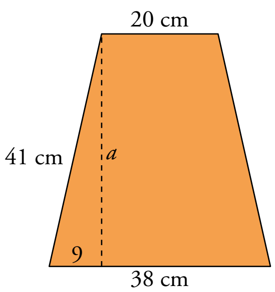


$$a = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE MENOR}} = 25 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{BASE MAYOR}} = 100 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \left(\dfrac{10+5}{2}\right) \cdot 6 = 180 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} A_{\text{TOTAL}} = 25 + 100 + 180 = 305 \text{ cm}^2$$

10 **Halla el área lateral de un tronco de pirámide hexagonal regular cuyas dimensiones son las del dibujo.**





$$a = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{6 \cdot 20 + 6 \cdot 38}{2} \cdot 40 = 6\,960 \text{ cm}^2$$

4 ▶ POLIEDROS REGULARES

Página 264

Para practicar

1 Considerando la suma de los ángulos que coinciden en cada vértice, justifica por qué no se puede construir un poliedro en los siguientes casos:

a) Con 6 triángulos equiláteros en cada vértice.

b) Con 4 cuadrados en cada vértice.

c) Con 4 pentágonos regulares en cada vértice.

d) Con hexágonos regulares o polígonos regulares de más lados.

a) Sumarían 360° y eso es plano, no se puede torcer.

b) También suman 360°, y es plano.

c) Miden 432° y eso es más que un plano. Se superpondrían.

d) Con tres hexágonos suman 360°, es un plano; y con solo dos no se puede formar. Los poliedros regulares de más lados tienen ángulos mayores que 360° y, por tanto, no podemos, puesto que se superpondrían.

Página 265

Para practicar

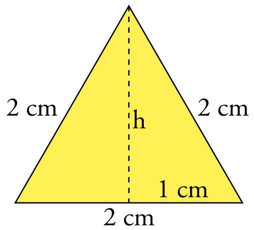
2 Halla el área de:

a) Un triángulo equilátero de lado 2 cm.

b) Un cuadrado de lado 2 cm.

c) Un pentágono regular de lado 2 cm y apotema 1,38 cm.

a)



$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1,73 \text{ cm}$$

$$A = \frac{2 \cdot 1,73}{2} = 1,73 \text{ cm}^2$$

b) $A = 4 \text{ cm}^2$

c) $A = \dfrac{(5 \cdot 2) \cdot 1,38}{2} = 6,9 \text{ cm}^2$

3 Con los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, halla el área de:

a) Un tetraedro.

b) Un cubo.

c) Un octaedro.

d) Un dodecaedro.

e) Un icosaedro.

Todos ellos de arista 2 cm.

Tomamos los datos obtenidos en el ejercicio anterior.

a) $A = 4 \cdot 1,73 = 6,9 \text{ cm}^2$

b) $A = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$

c) $A = 8 \cdot 1,73 = 13,84 \text{ cm}^2$

d) $A = 12 \cdot 6,9 = 82,8 \text{ cm}^2$

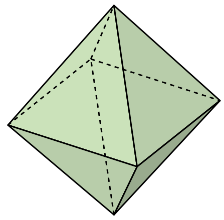
e) $A = 20 \cdot 1,73 = 34,6 \text{ cm}^2$

5 SECCIONES PLANAS DE POLIEDROS

Página 267

Para practicar

1 **Indica por dónde hay que cortar este octaedro regular para obtener:**



a) Un cuadrado.

b) El cuadrado más grande posible.

c) Un trapecio.

d) Un trapezoide.

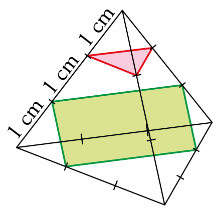
a) Por un plano perpendicular a su diagonal.

b) Por un plano perpendicular a la diagonal en la mitad de la misma, esto es, por el centro del octaedro.

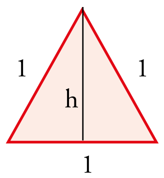
c) El plano del apartado b) lo inclinamos tomando como eje sobre el que gira una de las aristas del cuadrado.

d) El plano del apartado c) lo inclinamos para que no sea paralelo a las aristas del octaedro.

2 **Observa dos secciones de un tetraedro regular de 3 cm de arista. La roja es paralela a la base, y la verde, paralela a una de las aristas. Calcula el área de cada una.**



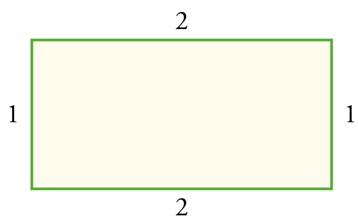
El área de la sección roja, que es un triángulo equilátero de lado 1 cm:



$$h = \sqrt{1 - 0,5^2} = 0,9$$

$$A_{\text{ROJA}} = \frac{1 \cdot h}{2} = \frac{0,9}{2} = 0,45 \text{ cm}^2$$

El área de la sección verde, que es un rectángulo:

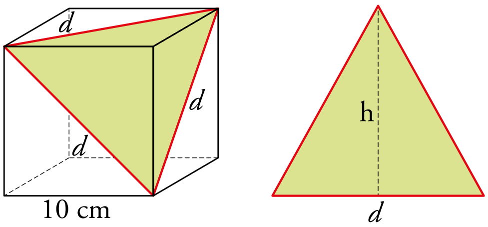


$$A_{\text{VERDE}} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ cm}^2$$

3 **La sección que ves en la imagen es el mayor triángulo equilátero que se puede obtener cortando el cubo.**

a) Calcula el lado, *d*, y la altura, h.

b) Calcula el área.



a) Encontramos *d* a partir del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 10 cm y *d* es su hipotenusa, aplicando el teorema de Pitágoras:

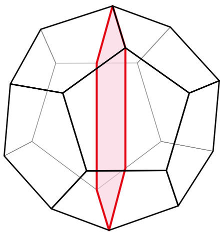
$$d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ cm}$$

Buscamos ahora h aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo dibujado:

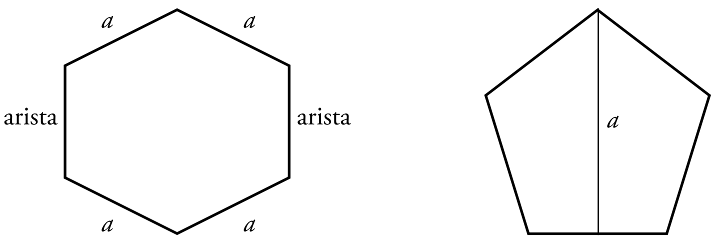
$$\text{h} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{196 - 50} = 12{,}08 \text{ cm}$$

b) $A = \dfrac{d \cdot \text{h}}{2} = 85{,}41 \text{ cm}^2$

4 **¿Qué polígono se obtiene al cortar un dodecaedro en dos mitades iguales por un plano que contiene a dos aristas opuestas? ¿Es un polígono regular? Justifica tu respuesta.**



Obtendremos un hexágono irregular, solamente dos lados serán aristas del dodecaedro, y los otros cuatro serán iguales a *a:*

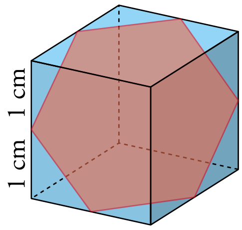


5 **Cortando un cubo de esta forma se obtiene un hexágono regular.**

a) ¿Cuánto mide el lado? ¿Y la apotema?

b) Calcula su área.

c) ¿Qué volumen tiene cada una de las partes en que queda dividido?

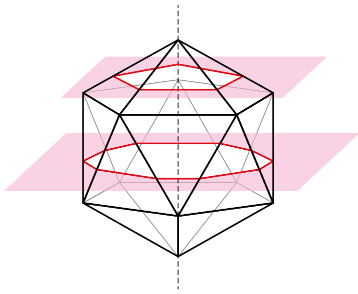


a) El lado mide $\sqrt{2}$ = 1,41 cm y la apotema 1,22 cm.

b) El área mide $\frac{6 \cdot 1,41 \cdot 1,22}{2}$ = 5,16 cm^2.

c) Cada parte tendrá la mitad del volumen del cubo, puesto que el corte divide al cubo en dos partes iguales, así que el volumen de cada parte será de 4 cm^3.

6 **¿Qué polígonos se obtienen al cortar un icosaedro por un plano perpendicular al eje que une dos vértices opuestos? ¿Son regulares?**



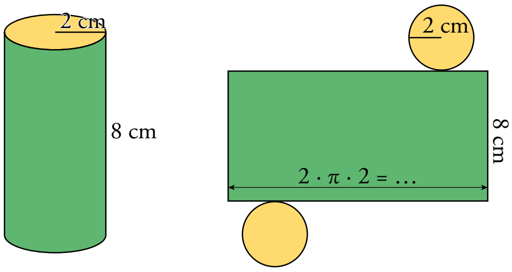
El resultado será un pentágono regular cuyo lado son las aristas del icosaedro, pasando por los vértices marcados en rojo.

6 CILINDROS

Página 268

Para fijar ideas

1 **Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 2 cm de radio y cuya altura es de 8 cm.**



Copia y completa:

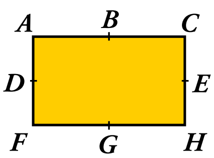
- **La superficie lateral es un…**
- **La base mide: $b = 2\pi \cdot \ldots = \ldots$ cm**
- **Y la altura: h = … cm**
- La superficie lateral es un rectángulo.
- La base mide: $b = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ cm
- Y la altura: h = 8 cm

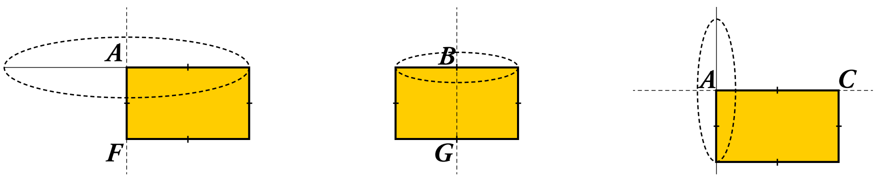
2 **Dibuja en tu cuaderno los cilindros que se generan al hacer girar este rectángulo alrededor de:**

a) ***AF***

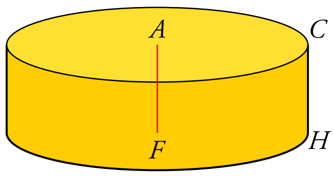
b) ***BG***

c) ***AC***

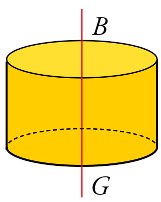




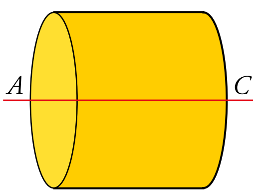
a)



b)



c)

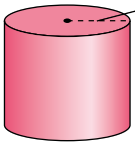


3 **Halla el área lateral y el área total de un cilindro de revolución de 5 dm de altura y 3 dm de radio de la base. Copia y completa:**

$\boldsymbol{A_{LATERAL} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot \ldots \cdot \ldots = \ldots\ dm^2}$

$\boldsymbol{A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot \ldots^2 = \pi \cdot \ldots = \ldots\ dm^2}$

$\boldsymbol{A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE} = \ldots + \ldots = 150{,}72\ dm^2}$



$A_{LATERAL} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}2\ dm^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 9 = 28{,}26\ dm^2$

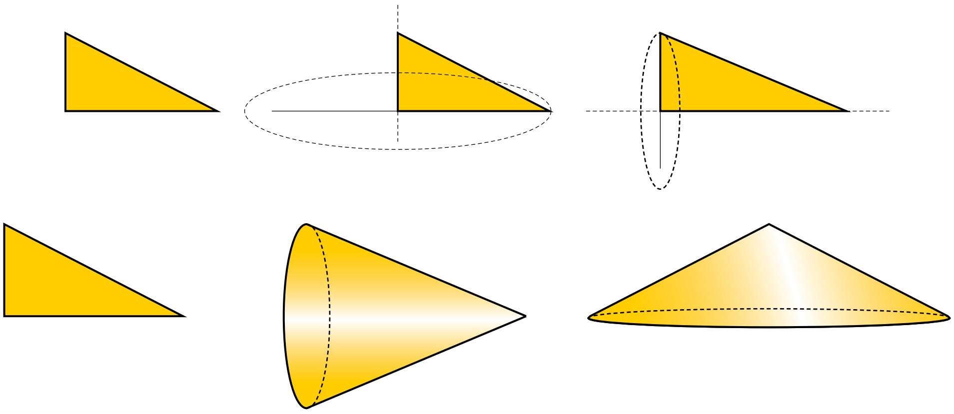
$A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2 \cdot A_{BASE} = 94{,}2 + 56{,}52 = 150{,}72\ dm^2$

7 ▶ CONOS

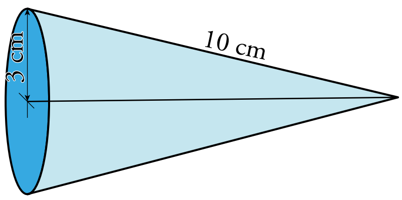
Página 269

Para fijar ideas

1 **Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo. Después, dibuja el cono que se genera al hacerlo girar alrededor de cada cateto.**



2 **La generatriz de un cono mide 10 cm y el radio de la base 3 cm. Calcula el área lateral y el área total. Copia y completa.**



$\boldsymbol{A_{LATERAL} = \pi r g = \pi \cdot \ldots \cdot \ldots = \ldots\ cm^2}$

$\boldsymbol{A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot \ldots^2 = \pi \cdot \ldots = \ldots\ cm^2}$

$\boldsymbol{A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + A_{BASE} = \ldots + \ldots = 122{,}46\ cm^2}$

$A_{LATERAL} = \pi r g = \pi \cdot 3 \cdot 10 = 94{,}2\ cm^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 9 = 28{,}26\ cm^2$

$A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + A_{BASE} = 94{,}2 + 28{,}26 = 122{,}46\ cm^2$

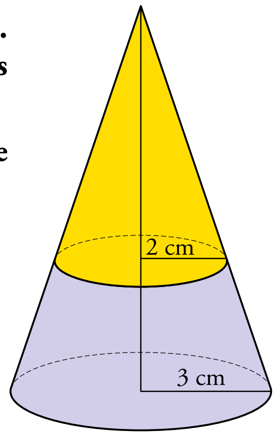
8 TRONCOS DE CONO

Página 270

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Un cono recto tiene un radio de 3 cm en la base y una superficie lateral de 90 cm². Un plano paralelo a la base lo corta dando una sección de 2 cm de radio. ¿Cuál es la superficie lateral del tronco de cono resultante del corte?**



Tras el corte, tenemos dos conos semejantes: el original y el que ves coloreado de amarillo, más pequeño.

La razón de semejanza es $k = \frac{r'}{r} = \frac{2}{3}$**. Y la razón de sus áreas es** $k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$**.**

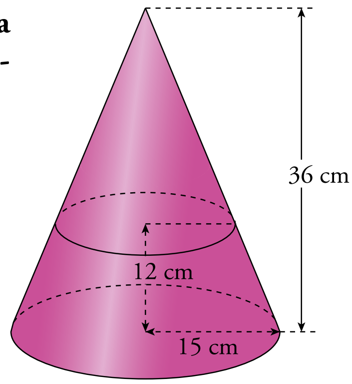
$$A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{4}{9} \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRONCO DE CONO}} = A_{\text{CONO GRANDE}} - A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \ldots - \ldots = 50 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{4}{9} \cdot 90 = 40 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRONCO DE CONO}} = A_{\text{CONO GRANDE}} - A_{\text{CONO PEQUEÑO}} = 90 - 40 = 50 \text{ cm}^2$$

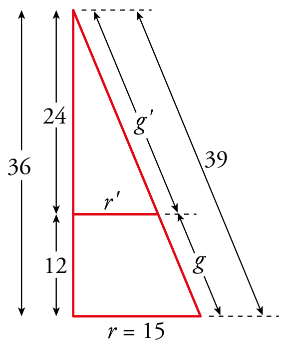
2 **Un cono, cuya base tiene 15 cm de radio y cuya altura es de 36 cm, se corta por un plano paralelo a la base y a 12 cm de la misma. Calcula las dimensiones y el área lateral del tronco de cono resultante.**



Calculamos la generatriz del cono con el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \sqrt{\ldots} = 39 \text{ cm}$$

Y recurrimos a la semejanza para calcular las medidas del tronco de cono:



$$\frac{r'}{24} = \frac{15}{\ldots} \to r' = \frac{24 \cdot \ldots}{\ldots} = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{g'}{24} = \frac{39}{\ldots} \to g' = \frac{24 \cdot \ldots}{\ldots} = 26 \text{ cm}$$

$$g = 39 - g' = 39 - 26 = 13 \text{ cm}$$

El área lateral del tronco de cono es el área lateral del cono de altura 36 cm menos la del cono de altura 24 cm:

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 15 \cdot 39 - \pi \cdot \ldots \cdot \ldots = 325\pi \approx 1\,021 \text{ cm}^2$$

$$\sqrt{36^2 + 15^2} = \sqrt{1521} = 39 \text{ cm}$$

$$\frac{r'}{24} = \frac{15}{36} \to r' = \frac{24 \cdot 15}{36} = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{g'}{24} = \frac{39}{36} \to g' = \frac{24 \cdot 39}{36} = 26 \text{ cm}$$

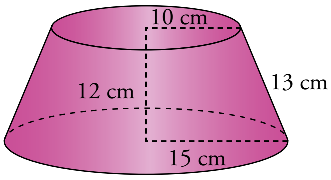
$$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 15 \cdot 39 - \pi \cdot 10 \cdot 26 = 325\pi \approx 1\,021 \text{ cm}^2$$

Página 271

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

3 **Calcula, aplicando las fórmulas anteriores, el área del tronco de cono visto en el último ejercicio de la página anterior.**



Atendiendo a las fórmulas, solo necesitamos tres datos:

$r = 15$ **cm**

$r' = 10$ **cm**

$g = 13$ **cm**

Entonces:

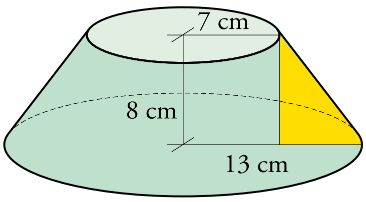
$A_{LATERAL} = \pi(r + r')g = \pi(\ldots + \ldots) \cdot \ldots = \ldots\pi \approx \ldots \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = \ldots + \pi \cdot 15^2 + \pi \cdot \ldots^2 \approx 2\,042 \text{ cm}^2$

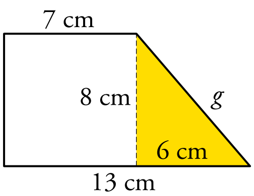
$A_{LATERAL} = \pi(r + r')g = \pi(15 + 10) \cdot 13 = 325\pi \approx 1\,021 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = 1\,021 + \pi \cdot 15^2 + \pi \cdot 10^2 \approx 2\,042 \text{ cm}^2$

4 **Calcula el área del tronco de cono.**



Conocemos r y r'. Solo nos falta la generatriz, g, que obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo coloreado:



$g = \sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \sqrt{\ldots} = 10$ **cm**

Tenemos por tanto:

$r = 13$ **cm** $\quad r' = 7$ **cm** $\quad g = 10$ **cm**

$A_{LATERAL} = \pi(r + r')g = \pi(\ldots + \ldots) \cdot \ldots = \ldots\pi \approx \ldots \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = \ldots + \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot \ldots^2 \approx 1\,313 \text{ cm}^2$

$g = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

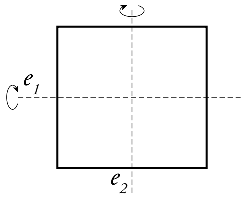
$A_{LATERAL} = \pi(r + r')g = \pi(13 + 7) \cdot 10 = 200\pi \approx 628 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = \pi(r + r')g + \pi r^2 + \pi r'^2 = 628 + \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot 7^2 \approx 1\,313 \text{ cm}^2$

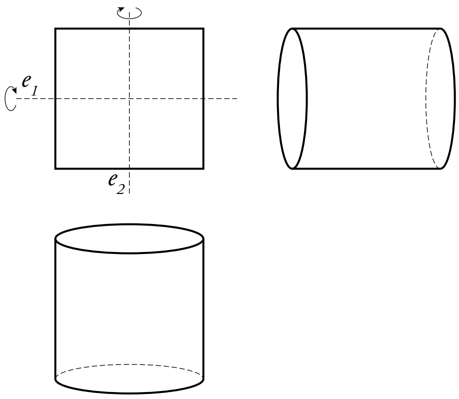
Página 272

Para practicar

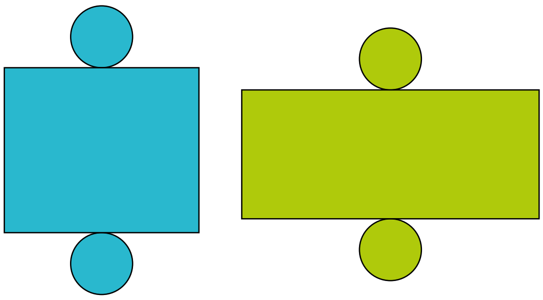
1 **Dibuja en tu cuaderno un cuadrado y traza los ejes de simetría paralelos a los lados.**



Dibuja los cilindros que se generan al girar el cuadrado alrededor de cada uno de esos ejes.

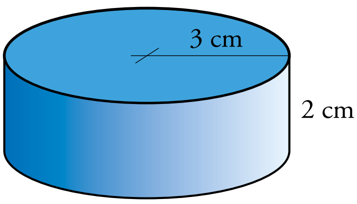


2 **Toma algunas medidas y decide cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cilindro.**

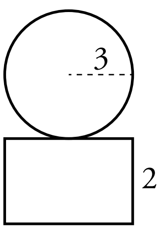


El primero.

3 **Dibuja el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 3 cm de radio y la altura es de 2 cm.**



Calcula el área lateral y el área total.



$A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 2 = 37{,}68 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 37{,}68 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 37{,}68 + 56{,}52 = 94{,}2 \text{ cm}^2$

4 **¿Qué cantidad de chapa se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 0,6 m de radio de la base y 1,8 m de altura?**

$2 \cdot \pi \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot \pi \cdot 0{,}6^2 = 2{,}16\pi + 0{,}72\pi = 9{,}0432$

Se necesitan 9,0432 m^2 de chapa.

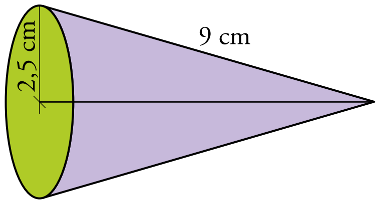
5 **Se han de impermeabilizar el suelo y las paredes interiores de un aljibe cilíndrico abierto por arriba. El radio de su base mide 4 m, y la altura, 5 m. Si cuesta 18 € impermeabilizar 1 m^2, ¿cuál es el coste de toda la obra?**

$A_{\text{ALJIBE}} = 2\pi \cdot 4 \cdot 5 + \pi \cdot 16 = 56\pi = 175{,}84 \text{ m}^2$

$175{,}84 \text{ m}^2 \cdot 18 \text{ €/m}^2 = 3\,165{,}12 \text{ €}$

El coste será de 3 165,12 €.

6 **Calcula el área lateral y el área total de este cono.**

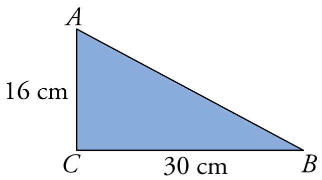


$A_{\text{LATERAL}} = \pi r g = \pi \cdot 2{,}5 \cdot 9 = 70{,}65 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 2{,}5^2 = \pi \cdot 6{,}25 = 19{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE}} = 70{,}65 + 19{,}6 = 90{,}25 \text{ cm}^2$

7 **Dibuja los conos que se obtienen al hacer girar este triángulo rectángulo:**

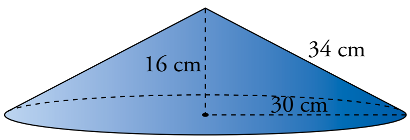


a) Alrededor de *AC*.

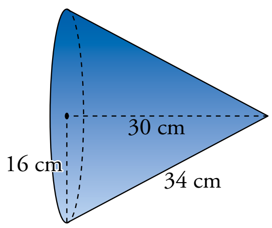
b) Alrededor de *BC*.

c) Calcula el área total de ambos.

a)



b)



c) $A_{\text{LATERAL}} = 30 \cdot \pi \cdot 34 = 3\,202{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 16 \cdot \pi \cdot 34 = 1\,708{,}16 \text{ cm}^2$

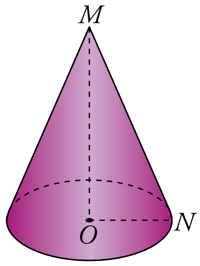
$A_{\text{TOTAL}} = 3\,202{,}8 + 2\,826 = 6\,028{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 1\,708{,}16 + 803{,}84 = 2\,512 \text{ cm}^2$

8 **Calcula el área lateral y el área total de este cono, sabiendo que:**

$$\overline{MO} = 84 \text{ cm}$$

$$\overline{MN} = 85 \text{ cm}$$

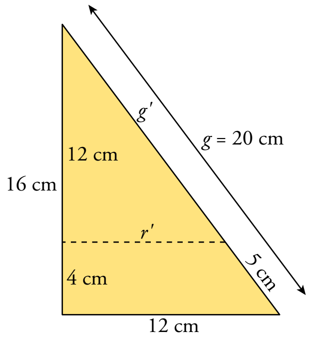


$\overline{ON} = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 13 \cdot 85 = 3\,469{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 3\,469{,}7 + 530{,}66 = 4\,000{,}36 \text{ cm}^2$

9 **El cono cuya base tiene un radio de 12 cm y cuya altura es de 16 cm es cortado por un plano perpendicular a su eje que pasa a 4 cm de la base. Halla las dimensiones, el área lateral y el área total del tronco de cono que se forma.**



$\dfrac{r'}{12} = \dfrac{12}{16} \rightarrow r' = 9$ cm

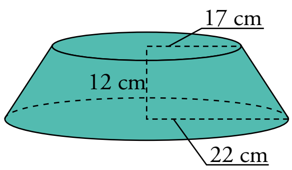
$\dfrac{g'}{12} = \dfrac{20}{16} \rightarrow g' = 15$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = 12 \cdot \pi \cdot 20 - 9 \cdot \pi \cdot 15 = 329{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} + B_{\text{INF}} = 329{,}7 + \pi \cdot 12^2 = 781{,}86 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 781{,}86 + \pi \cdot 9^2 = 1\,036{,}2 \text{ cm}^2$

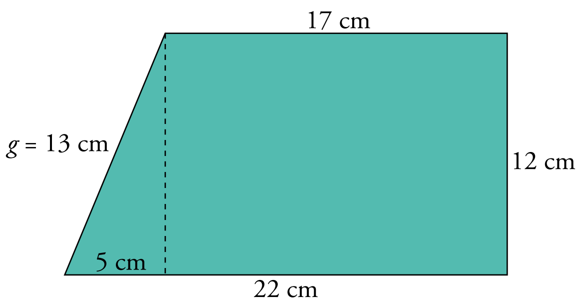
10 **Observa este tronco de cono cuyas bases tienen radios de 17 cm y 22 cm, y cuya altura es de 12 cm.**



a) Halla su generatriz.

b) Calcula su área lateral.

c) Halla el área total.

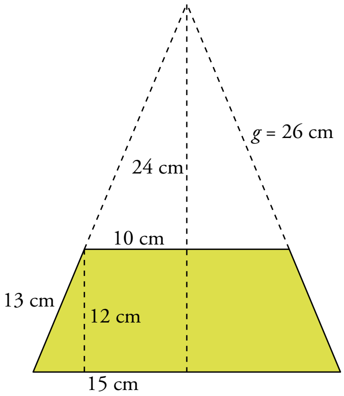


a) $g = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm

b) $A_{\text{LATERAL}} = \pi(r + r') \cdot g = 1\,591{,}98 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{TOTAL}} = 1\,591{,}98 + 907{,}46 + 1\,519{,}76 = 4\,019{,}2 \text{ cm}^2$

11 **Halla la superficie de una flanera abierta por arriba, con las siguientes medidas: radio de las bases, 10 cm y 15 cm; generatriz, 13 cm.**



$$\frac{g}{10} = \frac{13 + g}{15} \to g = 26 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = 15 \cdot \pi \cdot 39 - 10 \cdot \pi \cdot 26 = 1\,020{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 1\,020{,}5 + \pi \cdot 10^2 = 1\,334{,}5 \text{ cm}^2$$

12 **En nuestro jardín tenemos 32 macetones con forma de tronco de cono. Los radios de sus bases miden 14 cm y 20 cm, respectivamente, y su generatriz, 38 cm. Calcula cuánto cuesta pintarlos (solo la parte exterior) a razón de 40 € por metro cuadrado.**

$A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot (14 + 20) \cdot 38 = 4\,056{,}88 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL TODOS}} = 4\,056{,}88 \cdot 32 = 129\,820{,}16 \text{ cm}^2 = 12{,}982016 \text{ m}^2 \approx 13 \text{ m}^2$

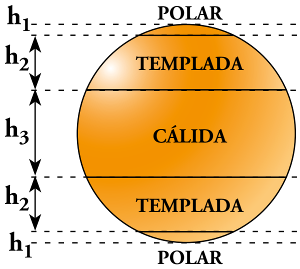
Costará, aproximadamente, 520 €.

9 ESFERAS

Página 273

Para fijar ideas

1 **En una esfera terrestre escolar de 20 cm de radio están señaladas las zonas climáticas. Sabemos que cada casquete polar tiene 2 cm de altura, y cada zona templada, 10 cm de altura. Calcula y completa en tu cuaderno.**



a) La superficie de la esfera: $A_{ESFERA} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \ldots^2 \approx \ldots \text{ cm}^2$

b) La superficie de cada zona. Comprueba que la suma de todas ellas es igual a la superficie de la esfera.

$R = 20$ cm $\quad h_1 = 2$ cm $\quad h_2 = 10$ cm $\quad h_3 = 40 - 2 \cdot (2 + 10) = \ldots$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{CASQUETE POLAR}} = 2\pi R\, h_1 = 2\pi \cdot \ldots \cdot \ldots \approx 251{,}2 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{ZONA TEMPLADA}} = 2\pi R\, h_2 = 2\pi \cdot \ldots \cdot \ldots \approx 1\,256 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{ZONA CÁLIDA}} = 2\pi R\, h_3 = 2\pi \cdot \ldots \cdot \ldots \approx 2\,009{,}6 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} 2 \cdot 251{,}2 + 2 \cdot \ldots + \ldots = \ldots \text{ cm}^2$$

a) $A_{ESFERA} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 20^2 \approx 5\,024 \text{ cm}^2$

b) $h_3 = 40 - 2 \cdot (2 + 10) = 16$ cm

$A_{\text{CASQUETE POLAR}} = 2\pi R\, h_1 = 2\pi \cdot 20 \cdot 2 \approx 251{,}2 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ZONA TEMPLADA}} = 2\pi R\, h_2 = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 \approx 1\,256 \text{ cm}^2$

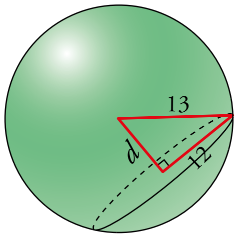
$A_{\text{ZONA CÁLIDA}} = 2\pi R\, h_3 = 2\pi \cdot 20 \cdot 16 \approx 2\,009{,}6 \text{ cm}^2$

$2 \cdot 251{,}2 + 2 \cdot 1\,256 + 2\,009{,}6 = 5\,024 \text{ cm}^2$

10 SECCIONES DE ESFERAS, CILINDROS Y CONOS

Página 274

Para fijar ideas



Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Una esfera de 13 cm de radio es cortada por un plano que determina en ella una circunferencia de 12 cm de radio.**

Calcula la distancia del centro de la esfera al plano.

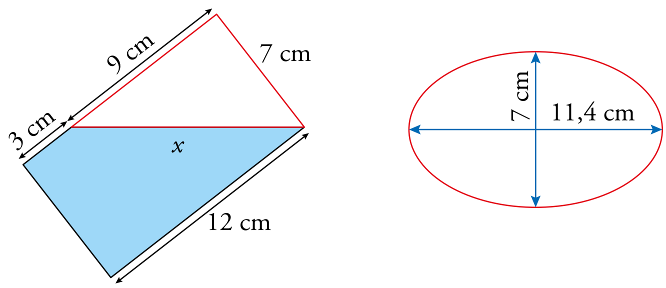
Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo señalado en rojo:

$$d^2 = \ldots^2 - 12^2 = \ldots \rightarrow d = \sqrt{\ldots} = \ldots \text{ cm}$$

Solución: **El plano dista 5 cm del centro de la esfera.**

$d^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \rightarrow d = \sqrt{25} = 5$ cm

2 **Un vaso cilíndrico de 7 cm de diámetro y 12 cm de altura con agua se inclina hasta que el agua llega al borde.**



Por la otra parte, el agua queda a 3 cm del fondo del vaso.

¿Cuánto miden los dos ejes de la elipse que forma la superficie del agua?

Hacemos un esquema del vaso de agua y observamos que el eje mayor de la elipse corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos conocemos. Lo calculamos:

$$x = \sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \sqrt{\ldots} = \ldots \text{ cm}$$

Solución: **El eje menor tiene una longitud igual al diámetro del vaso, 7 cm, y el eje mayor mide 11,4 cm.**

$x = \sqrt{9^2 + 7^2} = \sqrt{130} = 11,4$ cm

Página 275

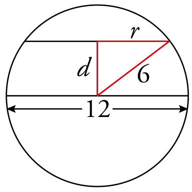
Para practicar

1 **Una esfera de 12 cm de diámetro se corta por un plano obteniendo una sección circular cuya superficie es 72,3456 cm². Calcula la distancia del plano al centro de la esfera.**

Toma el valor de π como 3,14.

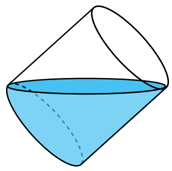
$S = \pi \cdot r^2 = 72{,}3456 \text{ cm}^2 \rightarrow r = 4{,}8 \text{ cm}$

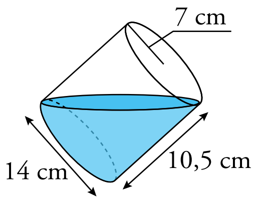
$d = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = 3{,}6 \text{ cm}$



2 **Un cubo cilíndrico de 10,5 cm de altura cuya base mide 7 cm de radio está lleno de agua. Lo inclinamos para vaciar la mitad de su contenido.**

¿Cuánto miden los dos ejes de la elipse que forma la superficie del agua?





El eje mayor mide: $x = \sqrt{14^2 + 10{,}5^2} = 17{,}5$ cm

El eje menor mide lo mismo que el diámetro del cubo, 14 cm.

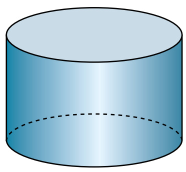
3 **Indica por dónde debe cortar un plano al cilindro para obtener:**

a) Un rectángulo.

b) El mayor rectángulo posible.

c) Un cuadrado.

d) La elipse con el eje mayor más grande posible.



a) Por un plano perpendicular a las bases.

b) Por un plano perpendicular a las bases que pase por cualquier diámetro de esas bases.

c) Por un plano perpendicular a las bases que pase por una cuerda de la circunferencia de la base que mida lo mismo que la altura del cilindro.

d) Este eje mayor tendrá de longitud la diagonal del cilindro (segmento que va de un punto de la base superior al opuesto de la base inferior). El plano es el mismo que aparece en el dibujo del ejercicio 2 formado por la superficie del agua.

4 **Si el cilindro de la actividad anterior tuviera una altura mayor que el diámetro de su base, ¿sería posible obtener un cuadrado? Explica por qué.**

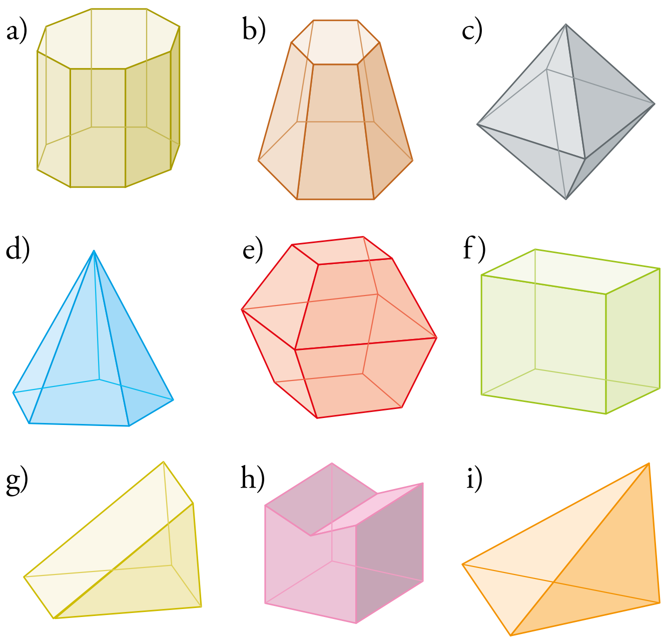
No sería posible, pues dos de los lados del cuadrado serían esa altura, y la longitud mayor posible para los otros dos lados sería justo esa diagonal de la base que me están diciendo que es menor que la altura.

Página 276

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Tipos de cuerpos geométricos

1 **Indica cuáles de estos poliedros no son catalogables entre los conocidos (prisma, pirámide, tronco de pirámide, poliedro regular). Cataloga los demás.**



a) Prisma octogonal recto

b) Tronco de pirámide hexagonal

c) Octaedro

d) Pirámide pentagonal recta

e) No catalogable

f) Ortoedro

g) Prisma triangular recto

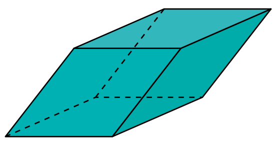
h) No catalogable

i) Pirámide triangular

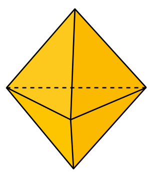
2 **Explica por qué estos poliedros no son regulares.**

a) Pirámide cuadrangular regular.

b) Este poliedro cuyas caras son rombos iguales:



c) Este poliedro formado por seis triángulos equiláteros:



a) Porque no todas sus caras son polígonos regulares iguales.

b) Porque sus caras no son polígonos regulares.

c) Porque en algunos vértices concurren tres caras y en otros, cuatro. Para que fuera regular deberían concurrir el mismo número de caras en todos los vértices.

3 **¿Cuáles de estas figuras son cuerpos de revolución? Identifica las que reconozcas.**

a)

b)

c)

d)

e)


f)

g)

h)


Son todas cuerpos de revolución menos e).

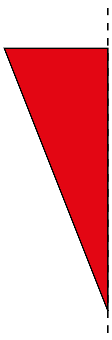
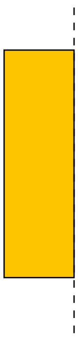
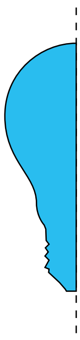
Las conocidas son:

b) Cono

f) Cilindro

h) Esfera

4 **Dibuja los cuerpos de revolución generados al girar cada una de estas figuras alrededor del eje.**

a)

b)

c)


Relaciona cada una de las figuras que has dibujado con una del ejercicio anterior.

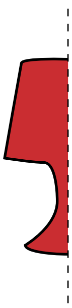
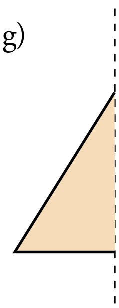
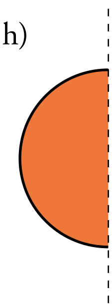
a) Al dibujar esta figura, sale un cono como el de la figura b) del ejercicio anterior.

b) Al dibujar esta figura, sale un cilindro como el de la figura f) del ejercicio anterior.

c) Al dibujar esta figura, sale una bombilla como la figura c) del ejercicio anterior.

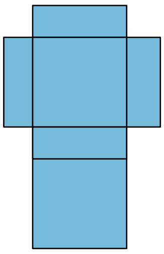
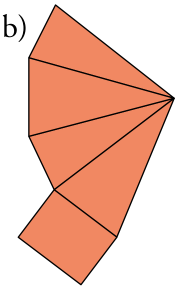
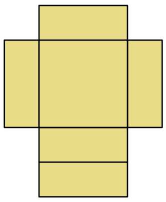
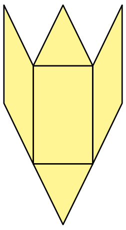
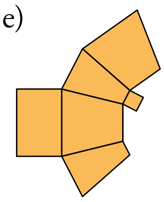
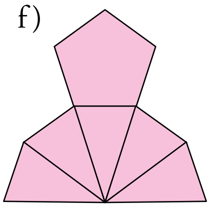
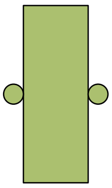
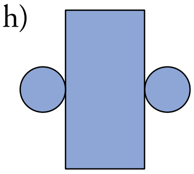
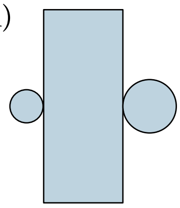
5 **Dibuja en tu cuaderno la figura y el eje sobre el que debe girar para generar los objetos de los apartados a), d), g) y h) del ejercicio 3.**

a)

d)

g)

h)


Desarrollo de cuerpos geométricos

6 **¿Con cuáles de estos desarrollos se pueden completar un poliedro o un cuerpo de revolución? Cataloga aquellos que se puedan completar.**

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

i)


a) Es un ortoedro.

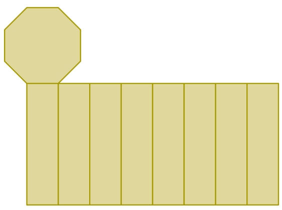
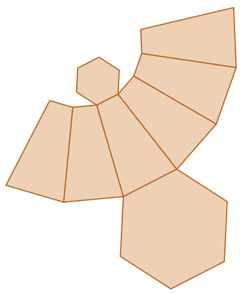
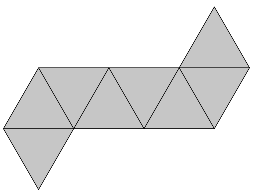
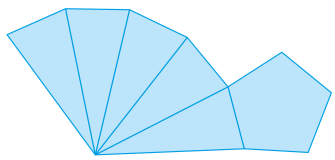
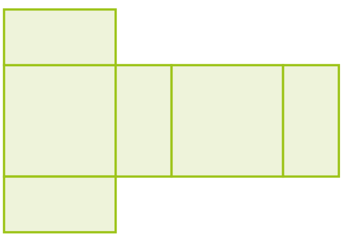
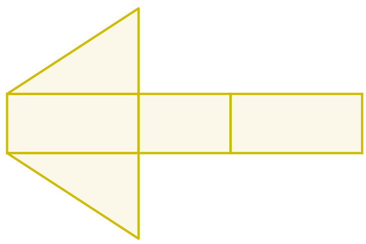
b) Es una pirámide cuadrangular con base rectangular.

f) Es una pirámide pentagonal.

h) Es un cilindro.

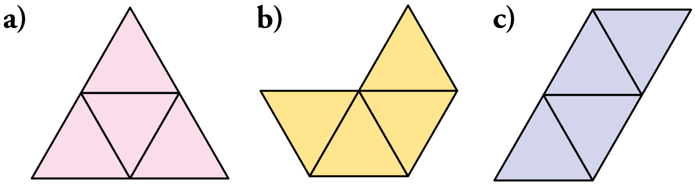
Con c), d), e), g) e i) no se pueden construir ni poliedros ni cuerpos de revolución.

7 **Dibuja de forma aproximada el desarrollo plano de los poliedros de los apartados a), b), c), d), f) y g) del ejercicio 1.**

a)

b)

c)

d)

f)

g)


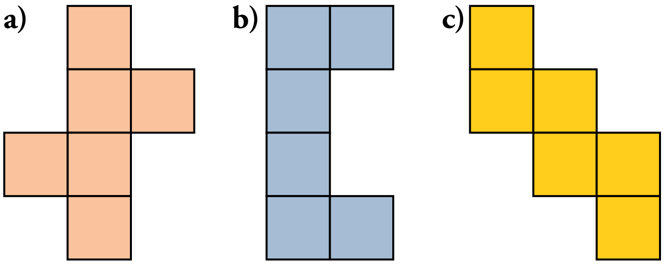
Página 277

8 **¿Cuál, o cuáles, de estas figuras corresponde al desarrollo de un tetraedro regular?**



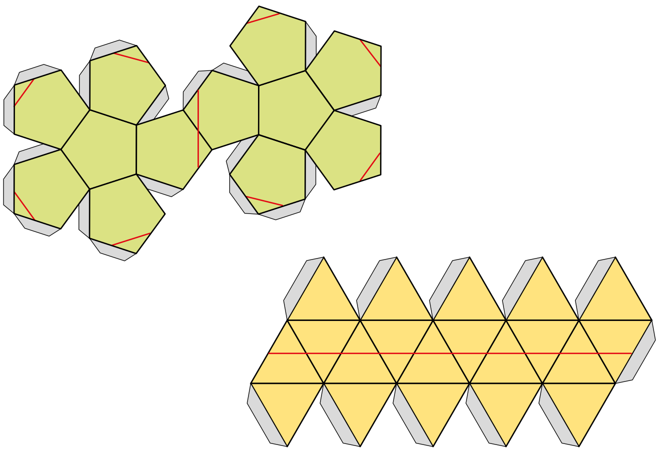
a) y c)

9 ¿Cuál, o cuáles, de estas figuras corresponde al desarrollo de un hexaedro regular?



a) y c)

10 **A continuación, puedes ver dos recortables para construir un dodecaedro y un icosaedro. ¿Qué figura formarán las líneas rojas, en cada caso, al montar los poliedros?**



Puedes descargar los recortables en la web y comprobar tu respuesta construyendo los poliedros.

Formarán un polígono de 10 caras en ambos casos.

Áreas de cuerpos geométricos

11 **El área total de un cubo es de 150 dm^2. Halla su diagonal.**

$A = l^2 \cdot 6 = 150 \rightarrow l^2 = 25 \rightarrow l = 5$ dm

$d = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ dm

12 **Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3 cm, 4 cm y 12 cm. Halla también la longitud de su diagonal.**

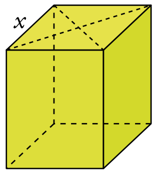
$A_{TOTAL} = 3 \cdot 4 \cdot 2 + 12 \cdot 4 \cdot 2 + 12 \cdot 3 \cdot 2 = 192$ cm^2

$d = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$ cm

13 **Una pirámide regular tiene por base un pentágono regular de 2,5 m de lado. La apotema de la pirámide mide 4,2 m. ¿Cuál es su superficie lateral?**

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{2,5 \cdot 4,2}{2} \cdot 5 = 26,25 \text{ m}^2$$

14 **Calcula el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuyas bases son rombos cuyas diagonales miden 16 cm y 12 cm.**

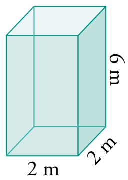


$$A_{\text{ROMBO}} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2 \qquad x = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$$

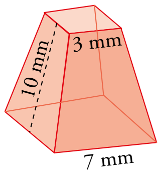
$$A_{\text{LATERAL}} = 10 \cdot 15 \cdot 4 = 600 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{TOTAL}} = 600 + 2 \cdot 96 = 792 \text{ cm}^2$$

15 **Calcula el área de cada cuerpo geométrico.**

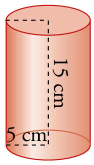
a)



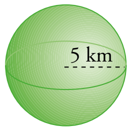
b)



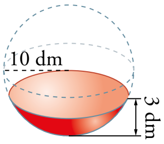
c)



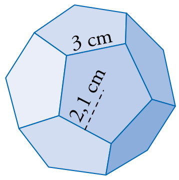
d)



e)



f)



a) $A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 2^2 = 56 \text{ m}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = \dfrac{4 \cdot 7 + 4 \cdot 3}{2} \cdot 10 + 7^2 + 3^2 = 258 \text{ mm}^2$

c) $A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 15 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 628 \text{ cm}^2$

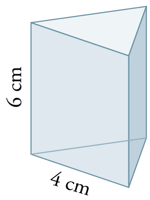
d) $A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 314 \text{ km}^2$

e) $A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 3 = 188,4 \text{ dm}^2$

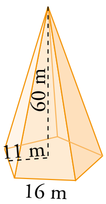
f) $A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 2,1}{2} = 189 \text{ cm}^2$

16 **Calcula el área de cada cuerpo geométrico. Antes, deberás obtener algún dato que falta.**

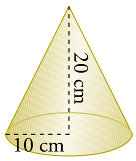
a)



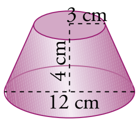
b)



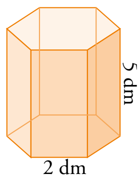
c)



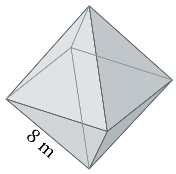
d)



e)



f)



a) $A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot \dfrac{4 \cdot 3,5}{2} = 86 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = \dfrac{5 \cdot 16 \cdot 60}{2} + \dfrac{5 \cdot 16 \cdot 11}{2} = 2\,840 \text{ m}^2$

c) $g = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22,4 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 10 \cdot 22,4 + \pi \cdot 10^2 = 1\,017,36 \text{ cm}^2$

d) $g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot (6 + 3) \cdot 5 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 3^2 = 282,6 \text{ cm}^2$

e) $A_{\text{TOTAL}} = 6 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot \dfrac{6 \cdot 2 \cdot 1,7}{2} = 80,4 \text{ dm}^2$

f) $A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot \dfrac{8 \cdot 6,9}{2} = 220,8 \text{ m}^2$

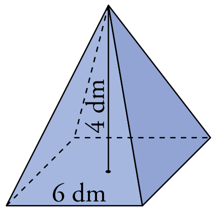
17 **La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado. Su altura es de 4 dm. Calcula su área total.**

Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ dm

$A_{\text{BASE}} = 36 \text{ dm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \text{ dm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 36 + 60 = 96 \text{ dm}^2$



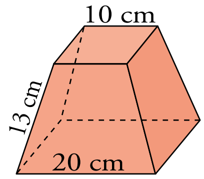
18 **Las bases de un tronco de pirámide regular son cuadrados de 10 cm y 20 cm de lado, respectivamente. Las aristas laterales miden 13 cm. Halla su área total.**

Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

$A_{\text{BASES}} = 20^2 + 10^2 = 500 \text{ cm}^2$

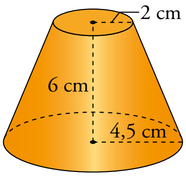
$A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{20 + 10}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 720 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 720 + 500 = 1\,220 \text{ cm}^2$

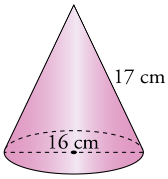


19 **Halla el área total de estos cuerpos:**

a)



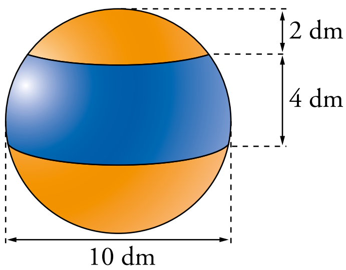
b)



a) $A_{\text{TOTAL}} = \pi(4,5 + 2) \cdot 6,5 + \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 4,5^2 = 208,81 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 8 \cdot 17 + 8^2 \cdot \pi = 628 \text{ cm}^2$

20 **Calcula las superficies del casquete esférico de 2 dm de altura y de una zona esférica de 4 dm de altura contenidos en una esfera de 10 dm de diámetro.**



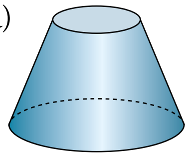
$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 2 = 62,8 \text{ dm}^2$

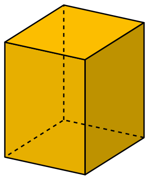
$A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 4 = 125,6 \text{ dm}^2$

Página 278

Secciones en los cuerpos geométricos

21 **Busca y dibuja los posibles cortes de un plano con cada uno de estos cuerpos geométricos para obtener un cuadrado, un rectángulo, un trapecio, una circunferencia, una elipse, un pentágono y un hexágono.**

a) 

b) 

Un cuadrado → En b), planos perpendiculares a la altura.

Un rectángulo → En b), planos perpendiculares a la base.

Un trapecio → En a), planos que corten a las dos bases.

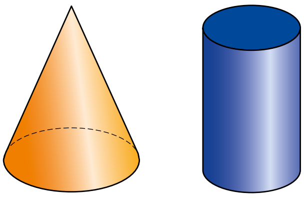
Una circunferencia → En a), planos paralelos a las bases.

Una elipse → En a), planos inclinados que no corten a las bases.

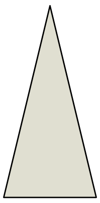
Un pentágono → En b), plano por un vértice y que corte la cara opuesta.

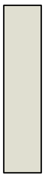
Un hexágono → En b), plano inclinado que corte a las dos bases.

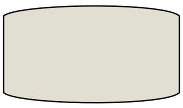
22 **Observa el cono y el cilindro.**

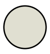


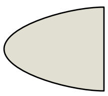
Mediante secciones planas de estos cuerpos geométricos se obtienen las siguientes figuras:

a) 

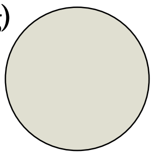
b) 

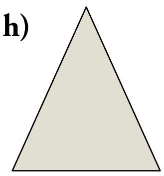
c) 

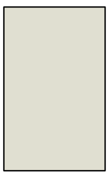
d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

Averigua de qué cuerpo es cada una de las figuras y mediante qué plano se consigue.

a) Plano vertical del cono que pasa por su vértice y no es perpendicular a la base.

b) Plano vertical en el cilindro, perpendicular a la base y que pasa por un lado de la circunferencia, no por el centro.

c) No corresponde.

d) Plano horizontal perpendicular a la base del cono, lo corta por la mitad superior.

e) Plano inclinado en el cono, sin pasar por el vértice.

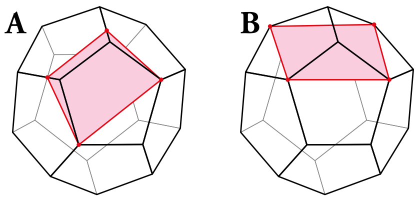
f) Plano inclinado en ambos.

g) Plano horizontal en la base del cono.

h) Plano vertical del cono que pasa por su vértice y es perpendicular a la base.

i) Plano vertical en el cilindro, perpendicular a la base y que pasa por el centro.

23 **Las siguientes secciones del dodecaedro regular son cuadriláteros.**

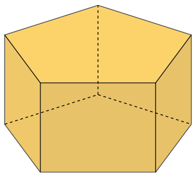


¿Qué tipo de cuadrilátero es cada uno? Justifica tus respuestas.

La primera sección es un trapecio, tiene dos lados paralelos pero uno de ellos es mayor que el otro, y los otros dos son simétricos.

La segunda sección es un cuadrado ya que todos los lados son iguales y paralelos entre sí.

24 **Indica por dónde debe cortar un plano a este prisma para obtener:**



a) Un cuadrado.

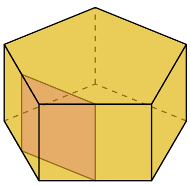
b) Un triángulo equilátero.

c) El rectángulo con la mayor superficie posible.

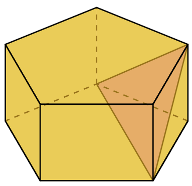
d) Un pentágono regular y uno irregular.

e) El trapecio con mayor área posible.

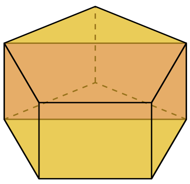
a)



b)



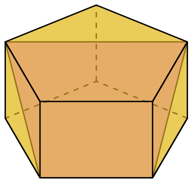
c)



d) Pentágono regular: plano paralelo a las bases.

Pentágono irregular: plano inclinado paralelo a las bases y que corte a las cinco caras laterales.

e)



Resuelve problemas

25 **Deseamos construir con alambres el esqueleto de todos los poliedros regulares, de modo que cada una de las aristas mida 1 dm. ¿Qué cantidad de alambre utilizaremos en cada uno de ellos?**

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
NÚMERO DE ARISTAS	6	12	12	30	30
LONGITUD TOTAL	6 dm	12 dm	12 dm	30 dm	30 dm

26 **¿Cuánto costará forrar un cajón de dimensiones 0,6 m × 0,5 m × 0,4 m con una chapa metálica que sale a 18 €/m²? ¿Y si, además, queremos cubrir las aristas con un embellecedor de madera de 23 €/m²?**

$A = 2(0,6 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4) = 1,48 \text{ m}^2$

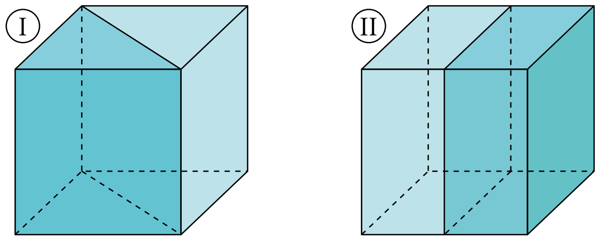
El precio es $1,48 \cdot 18 = 26,64$ €.

La suma de longitudes de todas las aristas es 6 m.

Hemos de pagar $23 \cdot 6 = 138$ €.

27 **Aníbal quiere forrar un cubo de 4 cm de arista con láminas de oro a 5 €/cm². ¿Cuánto le costará?**

Finalmente, decide cortarlo para hacer dos pisapapeles iguales, pero no sabe si hacerlo, para que al forrarlo salga más barato, como indica la figura I o como indica la II. ¿Puedes ayudarlo?



El área total del cubo es $6 \cdot 4^2 = 96 \text{ cm}^2$.

Le costará forrar el cubo $96 \cdot 5 = 480$ €.

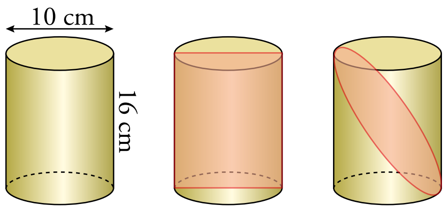
I El área de cada mitad es $48 + 4 \cdot 4\sqrt{2} = 70,63 \text{ cm}^2$.

II El área de cada mitad es $48 + 4^2 = 64 \text{ cm}^2$.

La opción II tiene menor superficie.

Es, por tanto, la opción más barata.

28 **Observa este cilindro y algunas de las secciones que podemos obtener en él.**



a) Halla las dimensiones del rectángulo y de la elipse.

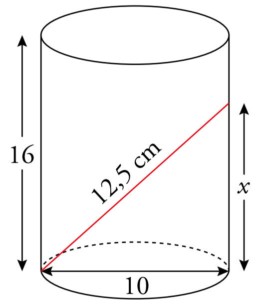
b) ¿Por dónde habría que cortar el cilindro para obtener una elipse cuyos ejes mayor y menor fueran 12,5 cm y 10 cm, respectivamente?

c) ¿Y para obtener un rectángulo cuya altura fuera el doble que la base?

a) RECTÁNGULO: largo $\to$ 16 cm; ancho $\to$ 10 cm

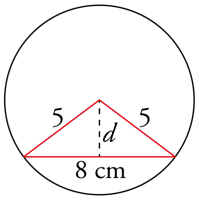
EJES DE LA ELIPSE: mayor $\to$ $\sqrt{16^2 + 10^2} = 18{,}87$ cm; menor $\to$ 10 cm

b) Para obtener esa elipse habría que cortar el cilindro por un plano inclinado que pasase por un punto de la circunferencia de la base y por un punto a 7,5 cm de altura en una generatriz opuesta.



$$x = \sqrt{12{,}5^2 - 10^2} = 7{,}5 \text{ cm}$$

c) Para obtener ese rectángulo habría que cortar el cilindro por un plano perpendicular a la base, a 3 cm del centro de la misma.



$$d = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$$

Página 279

29 **Las paredes de un pozo de 12 m de profundidad y 1,6 m de diámetro han sido enfoscadas con cemento. El precio del trabajo es de 40 € el metro cuadrado. ¿Cuál ha sido el coste?**

$2\pi r h = 60{,}288 \text{ m}^2 \to$ El coste ha sido de 2 411,52 €, aproximadamente.

30 **Una caja en forma de ortoedro tiene 9 dm de largo y 6 dm de ancho. Su superficie total es 228 dm^2. Halla su altura y su diagonal.**

$A_{\text{TOTAL}} = 9 \cdot h \cdot 2 + 9 \cdot 6 \cdot 2 + 6 \cdot h \cdot 2 = 108 + 30h = 228 \to h = 4$ dm

$d = \sqrt{4^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{133} \approx 11{,}53$ dm

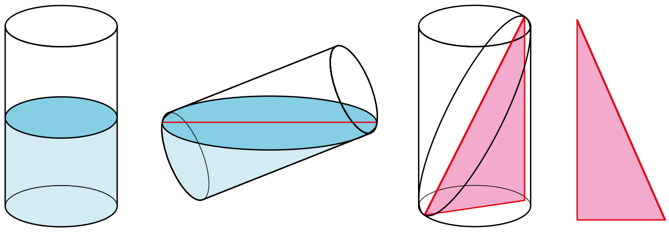
31 **Una verja se compone de 20 barrotes de hierro de 2,5 m de altura y 1,5 cm de diámetro. Hay que darles una mano de minio a razón de 24 €/m^2. ¿Cuál es el coste?**

Superficie de un barrote $= 2\pi \cdot 0{,}0075 \cdot 2{,}5 = 0{,}11775 \text{ m}^2$

Superficie total $= 0{,}11775 \cdot 20 = 2{,}355 \text{ m}^2$

Coste $= 2{,}355 \cdot 24 = 56{,}52$ €.

32 **Un vaso cuya base tiene un diámetro de 4 cm se ha llenado de agua hasta la mitad. Lo inclinamos hasta que llegue al borde y se forma una elipse el triple de larga que de ancha. ¿Qué altura tiene el vaso?**

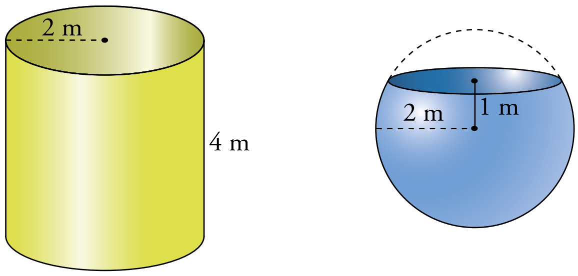


La altura del vaso es: $h = \sqrt{12^2 - 4^2} = 11{,}3$ cm

El volumen del vaso es: $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 11{,}3 \approx 142 \text{ cm}^3$

Hay 71 cm^3 de agua, aproximadamente.

33 **Un pintor ha cobrado 1 000 € por impermeabilizar el interior del depósito sin tapa de la izquierda. ¿Cuánto deberá cobrar por impermeabilizar el de la derecha, también sin tapa?**



El área de la esfera completa es igual que la del cilindro.

El área del depósito de la derecha, de 3 m de altura, es las $\frac{3}{4}$ parte de la del cilindro.

Por tanto, el coste será $\frac{3}{4} \cdot 1\,000 = 750$ €.

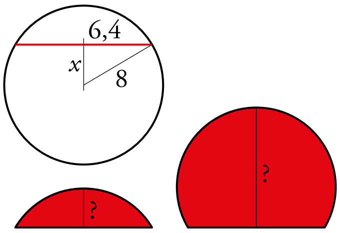
34 Problema resuelto.

35 **Un casquete esférico tiene una altura de 6 cm y el radio de su base mide 12 cm. ¿Cuál es el área de la esfera a la que pertenece el casquete?**

$R^2 = (R - 6)^2 + 12^2 \to R^2 = R^2 - 12R + 36 + 144 \to 12R = 180 \to R = 15$

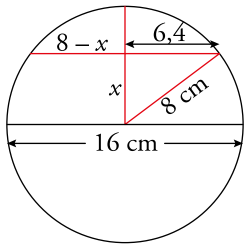
$A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 15^2 \approx 2\,826 \text{ cm}^2$

36 **María corta un queso de bola de 16 cm de diámetro de tal manera que se obtiene una circunferencia de 6,4 cm de radio. ¿Qué altura tiene cada trozo apoyándolo sobre el corte?**



$8^2 = x^2 + 6{,}4^2 \rightarrow x = 4{,}8$

El trozo grande tendrá una altura de 4,8 + 8 = 12,8 cm y el trozo pequeño, 8 – 4,8 = 3,2 cm.



37 **Marcos ha cortado una sandía de 15 cm de radio. La zona roja comestible ocupa una superficie de unos 405 cm² que corresponde al 90 % de la sección. ¿A qué altura se ha cortado la sandía?**

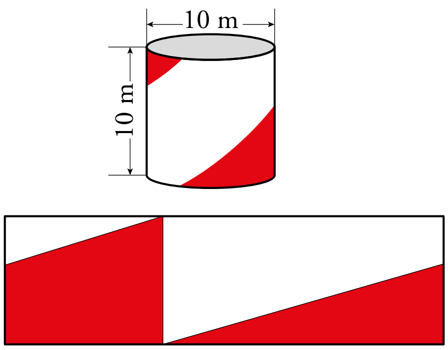
El 100 % de la sección por la que se ha cortado la sandía es $\frac{450}{90} \cdot 100 = 450$ cm².

Despejando de la fórmula del área de un círculo, se obtiene que el radio de la sección es de aproximadamente $r = \sqrt{\frac{450}{\pi}} = 12$ cm, por tanto la altura a la que se ha cortado la sandía es a $h = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm del centro.

38 Problema resuelto.

Página 280

39 **Observa este depósito de combustible y calcula el área de la zona coloreada de blanco y la de la zona coloreada de rojo.**



$A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10 = 100\pi = 314$ m²

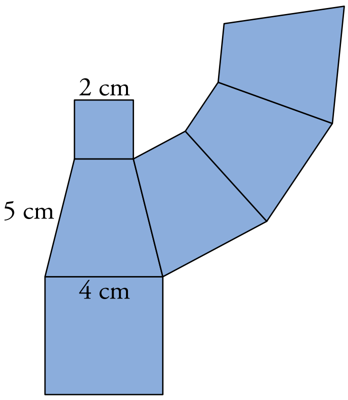
La zona coloreada de roja es la mitad del rectángulo, entonces:

$A_{\text{ZONA ROJA}} = 314 : 2 = 157$ m²

$A_{\text{ZONA BLANCA}} = 314 : 2 = 157$ m²

40 **Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas aristas miden: las de la base mayor, 4 cm; las de la menor, 2 cm, y las laterales, 5 cm.**

Halla su área total. (Las caras laterales son trapecios. Comprueba que su altura es de 4,9 cm.)



Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{5^2 - 1^2} = 4{,}9$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = 2^2 + 4^2 + 4 \cdot \left(\frac{2+4}{2}\right) \cdot 4{,}9 = 78{,}8 \text{ cm}^2$

Interpreta, describe, exprésate

41 **Estudiando los poliedros regulares:**

a) Cuenta el número de caras del tetraedro, del cubo y del octaedro.

b) Haz lo mismo en el dodecaedro:

- **Cada cara tiene 5 aristas y hay 12 caras: 5 · 12 = 60. Pero cada dos caras comparten una arista común, por lo que el número de aristas es 60 : 2 = 30.**
- **Cada cara tiene 5 vértices: 5 · 12 = 60. Pero cada tres caras comparten un vértice, por lo que el número de vértices es 60 : 3 = 20.**

c) Calcula cuántas aristas y cuántos vértices tiene el icosaedro regular.

d) Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

	CARAS	ARISTAS	VÉRTICES
TETRAEDRO	4		
CUBO	6		
OCTAEDRO	8		
DODECAEDRO	12		
ICOSAEDRO	20		

Comprueba que en todos ellos se cumple que:

CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 2

e) ¿Se cumple la misma relación en otros poliedros?

a) y b) Resueltos en la tabla final.

c) • Número de aristas: Cada cara tiene 3 aristas y hay 20 caras → 3 · 20 = 60

Pero cada dos caras tienen una arista común. Por tanto, el número de aristas es 60 : 2 = 30.

• Número de vértices: Cada cara tiene 3 vértices → 3 · 20 = 60

Pero cada 5 caras comparten un mismo vértice, por lo que el número de vértices es 60 : 5 = 12.

d)

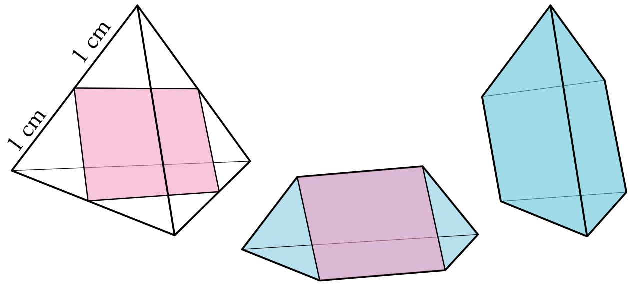
	CARAS	ARISTAS	VÉRTICES
TETRAEDRO	4	6	4
CUBO	6	12	8
OCTAEDRO	8	12	6
DODECAEDRO	12	30	20
ICOSAEDRO	20	30	12

C + V = A + 2

e) Sí, en todos los poliedros convexos.

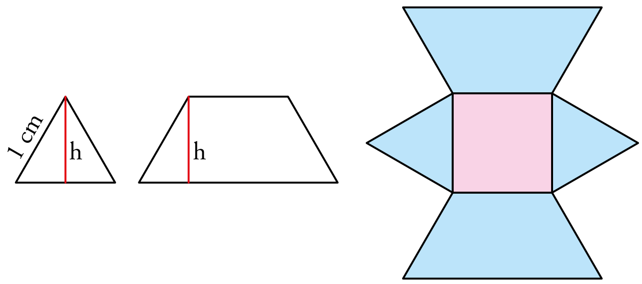
42 **A continuación, se incluyen dos resoluciones del mismo problema. Analízalas y explica sus diferencias.**

Calcula el área total de cada uno de los cuerpos resultantes al cortar un tetraedro regular por un plano, que pasa por el punto medio de cuatro de sus aristas, según muestra la ilustración.



Resolución A

Ambos cuerpos son iguales. Basta calcular el área de uno de ellos:

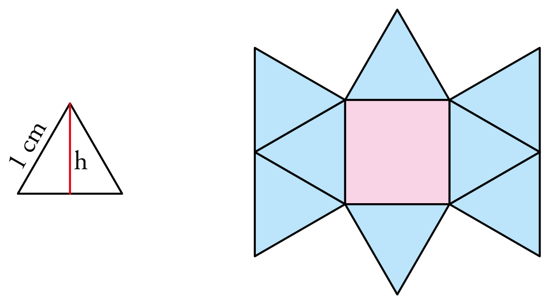


$$h = \sqrt{1^2 - 0,5^2} = \sqrt{0,75} \approx 0,87 \text{ cm}$$

$$A = 1^2 + 2 \cdot \frac{(1+2) \cdot h}{2} + 2 \cdot \frac{1 \cdot h}{2} = 1 + 3h + h =$$

$$= 1 + 4h = 1 + 4 \cdot 0,87 = 4,48 \text{ cm}^2$$

Resolución B



$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,87 \text{ cm}$$

$$A = 1^2 + 8 \cdot \frac{1 \cdot 0,87}{2} = 1 + 4 \cdot 0,87 = 4,48 \text{ cm}^2$$

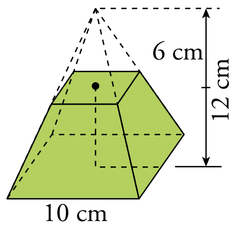
Resolución A: se despliega el cuerpo resultante y se calcula el área como la suma del área del cuadrado, los dos triángulos y los dos trapecios que lo forman. Para ello, es necesario calcular la altura del triángulo, que coincide con la altura del trapecio.

Resolución B: se despliega el cuerpo resultante y se calcula el área como la suma del área del cuadrado y de ocho triángulos, ya que se ve que el trapecio se puede dividir en tres triángulos iguales a los otros dos. Para ello, es necesario calcular la altura del triángulo también.

Página 281

Problemas «+»

43 **Una pirámide regular de base cuadrada de 10 cm de lado y altura 12 cm es cortada por un plano a mitad de su altura. Halla el área total del tronco de pirámide resultante.**

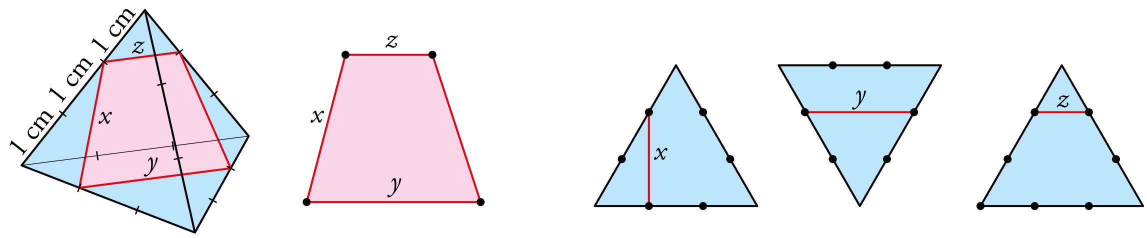


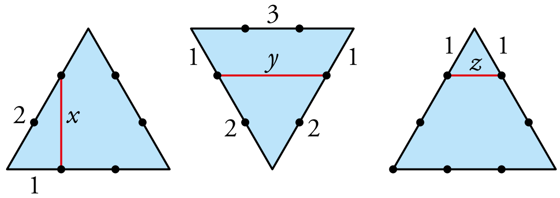
Apotema de la pirámide grande, $ap = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{LATERAL PIRÁMIDE GRANDE}} \to A_1 = 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 13}{2} = 260 \text{ cm}^2 \\[2ex] A_{\text{LLATERAL PIRÁMIDE PEQUEÑA}} \to A_2 = \dfrac{1}{4}A_1 = \dfrac{1}{4}260 = 65 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_{\text{LATERAL TRONCO}} \to A = A_1 - A_2 = \\ = 260 - 65 = 195 \text{ cm}^2 \end{array}$$

$$A_{\text{TOTAL TRONCO}} = 195 + 10^2 + 5^2 = 320 \text{ cm}^2$$

44 **Calcula el área de la sección de este tetraedro.**



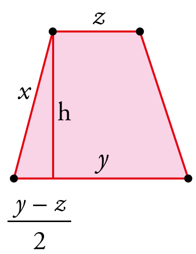


$x = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1,73$

$y = 2$

$z = 1$

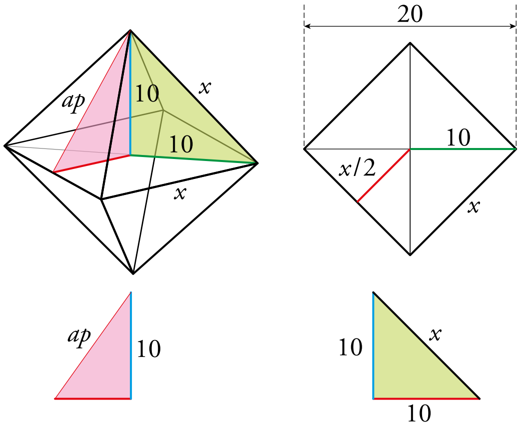
Calculamos el área de la sección, que es un trapecio:



$$x^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{y-z}{2}\right)^2 \to 3 = \text{h}^2 + 0,25 \to \text{h} = 1,66 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TRAPECIO}} = \left(\frac{y-z}{2}\right) \cdot \text{h} = \frac{2+1}{2} \cdot 1,66 = 2,49 \text{ cm}^2$$

45 **Halla el área total de un octaedro regular en el que la distancia entre dos vértices no contiguos es 20 cm.**

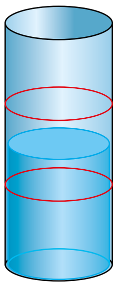


$x^2 + x^2 = 20^2 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = \sqrt{200} \approx 14{,}14$ cm

$ap = \sqrt{14{,}14^2 - 7{,}07^2} = 12{,}25$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot \dfrac{14{,}14 \cdot 12{,}25}{2} = 692{,}86\ \text{cm}^2$

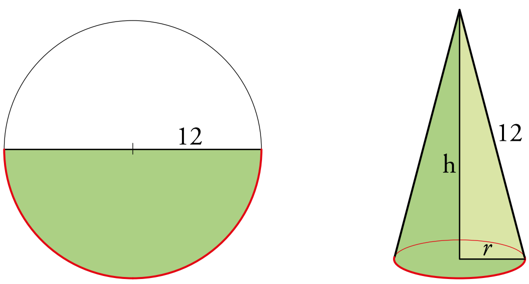
46 **Una probeta cilíndrica, que se ha llenado hasta la mitad, tiene dos marcas que dividen su altura en tres partes iguales. Al inclinarla de modo que el líquido toque una de las marcas, por el lado opuesto tocará la otra. Si la superficie del líquido es una elipse cuyo eje mayor mide 10 cm y cuyo eje menor mide 8 cm, ¿qué altura tiene la probeta?**



Sea $x = \dfrac{1}{3}$ de la altura de la probeta. Entonces: $x = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

La altura de la probeta es $6 \cdot 3 = 18$ cm.

47 **El desarrollo lateral de un cono es un semicírculo de radio 12 cm. Halla el radio de su base y su altura.**

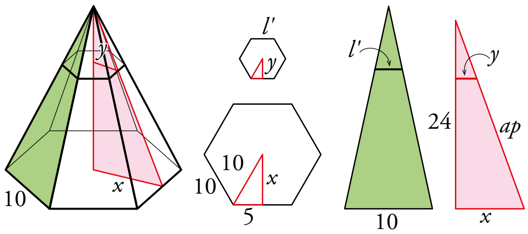


$\dfrac{\mathbf{2 \cdot \pi \cdot 12}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2 \cdot \pi \cdot} \boldsymbol{r}$

$2\pi r = 12\pi \rightarrow r = 6$ cm

$12^2 = 6^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{108} = 10{,}39$ cm

48 **La base de una pirámide regular es un hexágono de 10 cm de lado. Su altura es 24 cm. Se corta por un plano que pasa a 18 cm de la base. Halla el área total del tronco de pirámide que resulta.**

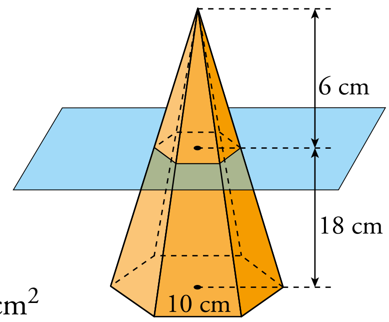


Apotema de la base mayor, $ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

Calculamos la apotema de la base menor, ap':

$$\frac{ap'}{6} = \frac{ap}{24} \to ap' = \frac{8{,}66 \cdot 6}{24} = 2{,}165 \text{ cm}$$

$$l_{\text{HEXÁGONO MENOR}} = \frac{ap' \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2{,}5 \text{ cm}$$



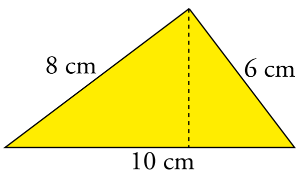
Altura de una cara lateral, $h = \sqrt{18^2 + (ap - ap')^2} = 19{,}13$ cm

$A_{\text{BASES}} = 3 \cdot 10 \cdot ap + 3 \cdot 2{,}5 \cdot ap' = 259{,}8 + 16{,}238 = 276{,}038 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 276{,}038 + (10 + 2{,}5) \cdot 19{,}13 \cdot 3 = 276{,}038 + 717{,}375 = 993{,}413 \text{ cm}^2$

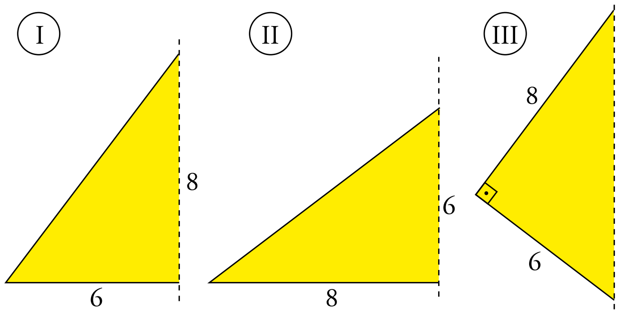
49 **Lee, observa y calcula.**

a) Comprueba que el siguiente triángulo es rectángulo y la altura sobre la hipotenusa mide 4,8 cm.



$$A = \frac{\mathbf{10 \cdot h}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{8 \cdot 6}}{\mathbf{2}}$$

b) Halla la superficie total de las figuras engendradas por este triángulo al girar alrededor de cada uno de sus lados.



a) $\dfrac{10 \cdot h}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} \to h = 4{,}8$ cm

b) I $\pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 6^2 = 301{,}44$

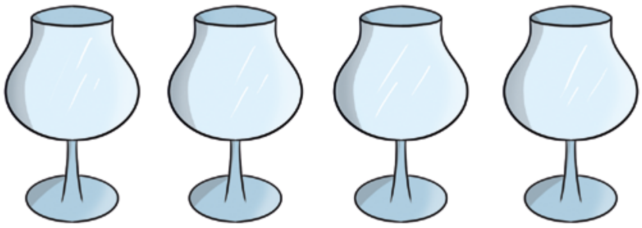
II $\pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2 = 452{,}16$

III $\pi \cdot 4{,}8 \cdot 8 + \pi \cdot 4{,}8 \cdot 6 = 211$

Página 283

ENTRÉNATE RESOLVIENDO OTROS PROBLEMAS

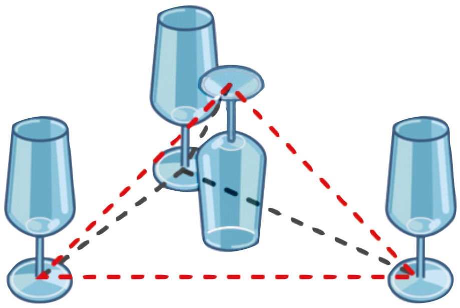
- **Tienes cuatro copas como estas:**



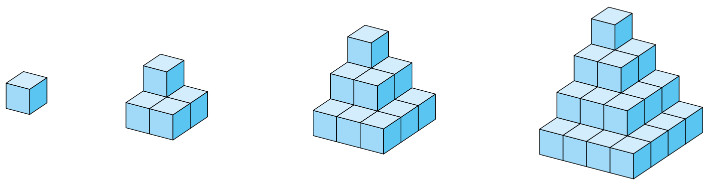
Considerando sus pies como si fueran puntos, ¿cómo las colocarías para que los cuatro pies equidisten?

Piensa en invertir una y también en un tetraedro.

Colocando tres copas formando un triángulo equilátero y, la cuarta, encima para formar la cuarta esquina de un tetraedro.



- **Observa la serie de torres poli-cubo:**



Si el área de la primera es 6:

a) ¿Cuál es el área de cada una de las tres siguientes?

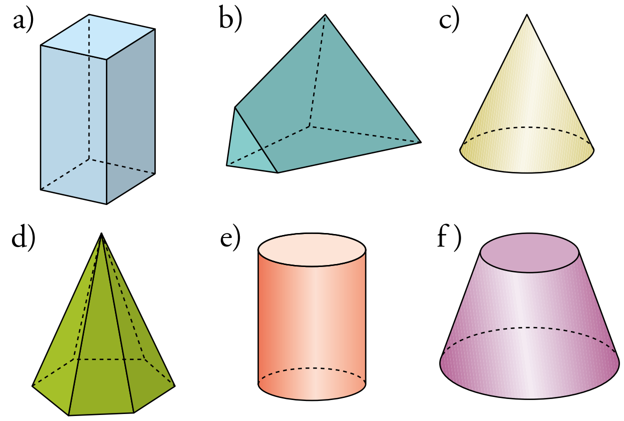
b) ¿Cuál sería el área de una torre de 10 pisos?

c) ¿Y si fueran n los pisos?

PISOS	1	2	3	4	10	…	n
ÁREA	6	20	42	72	420	…	$2n(1 + 2n)$

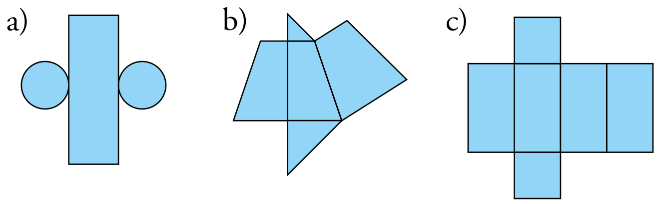
AUTOEVALUACIÓN

1 Escribe el nombre de estos cuerpos geométricos:



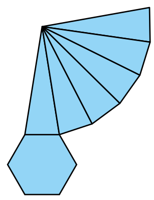
a) Ortoedro
b) Poliedro no catalogable
c) Cono
d) Pirámide hexagonal
e) Cilindro
f) Tronco de cono

2 Indica a cuáles de los cuerpos geométricos del ejercicio anterior corresponden estos desarrollos:

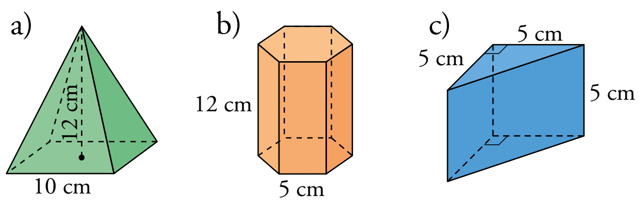


Dibuja en tu cuaderno el desarrollo del poliedro del apartado d) del ejercicio 1.

a) Es el desarrollo del cilindro del apartado e).
b) Es el desarrollo de la figura del apartado b).
c) Es el desarrollo del ortoedro del apartado a).



3 Calcula el área de cada poliedro.



a) h = 13 cm

$A_{TOTAL} = 100 + 4 \cdot 65 = 360 \text{ cm}^2$

b) $ap = \sqrt{18,75} \approx 4,33$ cm

$A_{BASES} = 6 \cdot 5 \cdot 4,33 \approx 130 \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL} = 360 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = 490 \text{ cm}^2$

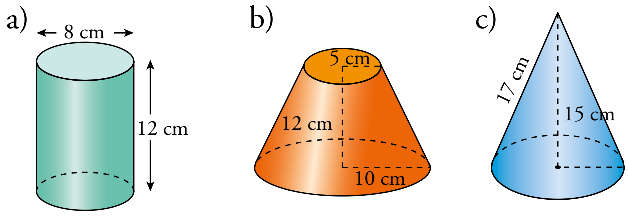
c) $x = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ cm

$A_{BASES} = 2 \cdot 12,5 = 25 \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL} = 85,36 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = 110,35 \text{ cm}^2$

4 **Halla el área de estos cuerpos de revolución:**



a) $A_{TOTAL} = 2 \cdot 4^2 \cdot \pi + 12 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 = 401{,}92\ \text{cm}^2$

b) $A_{TOTAL} = 1\,004{,}8\ \text{cm}^2$

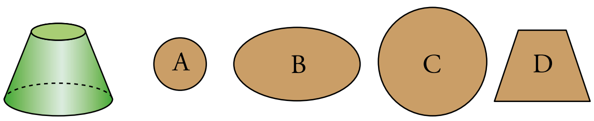
c) $r = 8$ cm

$A_{LATERAL} = 427{,}04\ \text{cm}^2$

$A_{BASE} = 200{,}96\ \text{cm}^2$

$A_{TOTAL} = 628\ \text{cm}^2$

5 **Copia en tu cuaderno el tronco de cono y dibuja los planos que le deben cortar para obtener cada una de las figuras planas que aparecen al lado.**



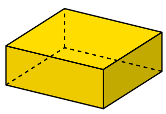
A: plano paralelo a las bases y muy cercano a la base pequeña.

B: plano inclinado que no corte las bases.

C: plano paralelo a las bases y muy cercano a la base grande.

D: plano perpendicular a las bases.

6 **Indica qué cortes planos hemos de darle a este poliedro para obtener estos polígonos:**



a) Triángulo.	**b) Cuadrado.**
c) Rectángulo.	**d) Trapecio.**
e) Rombo.	**f) Pentágono.**

a) Plano que pasa por un vértice y corte a la base opuesta antes de la diagonal.

b) Plano perpendicular a las bases que corte a las mismas por un segmento de longitud igual a la altura del prisma.

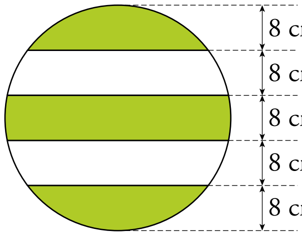
c) Plano perpendicular a cualquiera de las bases.

d) Plano inclinado que corte a ambas bases.

e) Plano que pase por dos vértices opuestos formando 45 grados con las bases.

f) Plano que pase por un vértice y corte a la base opuesta después de la diagonal.

7 **Para un juego, se van a pintar 25 bolas de corcho sintético de 40 cm de diámetro.**
La pintura blanca sale a 12 €/m², y la verde a 15 €/m². ¿Cuál será el coste total de la pintura?



R = 20 cm

h = 8 cm

La esfera está dividida en cinco secciones de 8 cm de altura cada una, por lo que todas tendrán la misma superficie:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \text{h} = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 8 = 320\pi = 1\,004{,}8 \text{ cm}^2 = 0{,}10048 \text{ m}^2$$

Cada bola tiene 3 secciones verdes y 2 blancas, calculamos el coste de pintar una bola:

$$\text{Coste}_{1 \text{ BOLA}} = 3 \cdot 0{,}10048 \cdot 15 + 2 \cdot 0{,}10048 \cdot 12 = 6{,}93 \text{ €}$$

Y el coste total de 25 bolas:

$$25 \cdot 6{,}93 = 173{,}25 \text{ €}$$

El coste total de la pintura será de 173,25 €.