EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)
CURSO 2023-2024

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(1)

Convocatoria:	

Instrucciones:
- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Criterios de calificación

A) Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final.

B) En las respuestas se corregirán los desarrollos necesarios y también las explicaciones breves de los mismos.

C) Cada error cometido en una respuesta resta calificación en función de la importancia de dicho error, pero no repercute en lo que se haya hecho después, mientras lo realizado sea coherente con dicho error y tenga sentido matemático.

D) Se penalizará cada notación gravemente incorrecta, que indique desconocimiento de cuestiones importantes (por ejemplo, usar la notación de determinante cuando se trata de una matriz o viceversa, confundir coordenadas de vector o de punto).

E) Cuando sea necesario representar gráficamente una función, dicha representación deberá basarse en características importantes de la misma, que deberá obtener previamente, aunque en el enunciado de la pregunta esto no se haya pedido de forma explícita.

F) Cuando haya que representar gráficamente una región plana, sea limitada por rectas, sea limitada por curvas y rectas, o sea limitada por varias curvas, no sólo habrá que representar correctamente los segmentos o arcos que intervengan (según apartado E), sino que habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida. Se dará cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente.

G) Cuando se piden abscisas basta con la coordenada x. Cuando se piden puntos deben dar las dos coordenadas.

H) Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)

I) En respuestas sobre geometría del espacio, no basta escribir una ecuación pedida (o que se necesite para otro resultado), sino que se requiere una explicación mínima de lo que significa geométricamente y de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficientes. Igualmente, cuando se trata de varias ecuaciones simultáneas (ecuaciones de una recta o ecuaciones paramétricas de un plano).

J) Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta (se observa que algunos alumnos, desde el principio de una respuesta, sustituyen algún valor por una mala aproximación decimal, con la cual operan dando por bueno el resultado final obtenido, que suele estar muy alejado del resultado correcto). Así uno de los objetivos a evaluar es una operatoria adecuada y que conozcan el uso correcto de los números que deben utilizar según el contexto de trabajo.

K) Se exige utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación.

L) En los cálculos de probabilidad donde se proceda a realizar la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal se debe justificar que el procedimiento se puede hacer.

M) En los problemas de probabilidad se debe indicar el teorema que se utiliza para realizar el cálculo de la probabilidad.

N) Los problemas de probabilidad que utilicen la Distribución Binomial, deberán escribir la fórmula de cálculo de la probabilidad.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x)=\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}},x\geq 0$$

donde C(x) son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. 0.5 ptos

b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? 0.5 ptos

c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. 0.75 ptos

d) Calcular: $\int_0^4 C(x)dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. 0.75 ptos

Solución:

a) Las unidades en las que está el modelo son miles de kilos y miles de euros. Por tanto, para averiguar lo que corresponde a 1 kilo será necesario trasladar a miles de kilos: 0.001 mil kilos

$$C(0.001)=\frac{3\cdot 0.001}{5\sqrt{0.001^2+1}}=0.00059\cong 0.0006\;miles\;de\;euros=0.6\;euros$$

El coste de producir 1kg de plátanos es de 0.6 euros.

b) En este caso se pide la tendencia de los costes que presenta el modelo a medida que aumenta la producción de plátanos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}=\frac{\infty}{\infty}\;Indeterminación$$

Para resolver esta indeterminación se puede, o bien, dividir numerador y denominador por x elevada a la mayor potencia o bien, utilizar L'Hopital. Siguiendo el primer procedimiento:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{5\sqrt{x^2+1}}{x}}\lim_{x\to\infty}\frac{3}{5\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3}{5}=0.6\;miles\;de\;euros$$

Por tanto, la tendencia será a un coste de 600 euros como valor en el límite según este modelo.

c) Para comprobar la afirmación del economista debemos estudiar la derivada de la función que será quien nos indique la tendencia del modelo.

$$C'(x)=\frac{3\cdot 5\sqrt{x^2+1}-3x\cdot\frac{5\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(5\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{3\cdot 5(x^2+1)-3x\cdot 5x}{\left(5\sqrt{x^2+1}\right)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{15x^2+15-15x^2}{\left(5\sqrt{x^2+1}\right)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

$$C'(x)=\frac{+15}{\left(5\sqrt{x^2+1}\right)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}>0$$

Por tanto, la función de los costes siempre crece y la afirmación del economista es falsa, porque este crecimiento no depende de la cantidad de kilos producida.

e) La integral que nos piden es:

$$\int_0^4 \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{3}{5}\int_0^4 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{3}{5}\sqrt{x^2+1}\Big]_0^4 = \frac{3}{5}\left(\sqrt{17}-1\right) = \frac{3\sqrt{17}-3}{5} \approx 1.87386$$

Este valor se corresponde con el coste acumulado, es decir, la suma de todos los costes de producción hasta vender cuatro toneladas.

El coste de producir hasta cuatro toneladas será de 1873.86 euros.

1B. Dada la función definida por $f(x) = \frac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 ptos

b) Para el valor $a = 0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 ptos

Solución:

a) Como sabemos que la pendiente vale 1 en la abscisa $x = -1$. Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{\frac{3x+4}{x+2} - (\ln(x+2)+a)\cdot 3}{(3x+4)^2} = \frac{3x+4-(3\ln(x+2)+3a)(x+2)}{(3x+4)^2(x+2)}$$

No es necesario realizar más operaciones, porque nuestro interés es averiguar qué sucede en el valor x=-1, por lo que sustituimos la derivada en ese valor:

$$f'(-1) = \frac{1-(3\ln(1)+3a)(1)}{(-3+4)^2(1)} = \frac{1-3a}{1}$$

Y en ese punto el valor deberá ser 10:

$$f'(-1) = 1-3a = 10; 3a = -9;$$

$$\boxed{a = -3}$$

Por tanto, el valor de a debe ser -3 y la función que cumple la condición dada será:

$$\boxed{f(x) = \frac{\ln(x+2)-3}{3x+4}}$$

c) Estudiamos el dominio y asíntotas de la función: $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{3x+4}$

Dominio:

La función racional tiene problemas cuando el denominador se hace cero. Por tanto, habrá que averiguar si esto sucede para algún valor de x:

$$3x+4 = 0; x = -\frac{4}{3}$$

Por lo que para el valor -4/3 la función no está definida.

Por su parte, el logaritmo tiene problemas cuando se aplica a un valor negativo.

$$x+2 > 0; x > -2$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el dominio de la función será:

$$\boxed{\boldsymbol{Dom\ f(x) = \left(-2, -\frac{4}{3}\right) \bigcup \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)}}$$

Asíntotas:

Horizontal. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\infty}{\infty}\ Indeterminación$

Aplicamos L'Hopital: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{3} = 0$

Hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

Vertical: Habrá una asíntota vertical en el valor que hemos eliminado en el dominio: $x = -2$; $x = -\frac{4}{3}$

Efectivamente,

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\frac{4}{3}} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \infty;$$

Oblicua: Como existe una asíntota horizontal no podrá tener asíntota oblicua.

Cuenta con asíntotas verticales: $\boldsymbol{x = -2;\ x = -\frac{4}{3}}$
Y con la asíntota horizontal $\boldsymbol{y = 0}$

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Resolver el siguiente sistema matricial: 2.5 ptos

$$\left.\begin{array}{l} 5X - 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Solución

$$\left.\begin{array}{r} 5X - 4Y = A \\ 4X - 6Y = B \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 20X - 16Y = 4A \\ -20X + 30Y = -5B \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 20X - 16Y = 4A \\ +14Y = 4A - 5B \end{array}\right\}$$

$$Y = \frac{1}{14}\left[4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}\right]$$

$$Y = \frac{1}{14}\left[\begin{pmatrix} 20 & 24 & -4 \\ 16 & -20 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 30 & -20 & -10 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{14}\left[\begin{pmatrix} 0 & 14 & -14 \\ -14 & 0 & 14 \end{pmatrix}\right]$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} + 4Y\right] = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema de ecuaciones son:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k \in \mathbb{R}$::

$$\left.\begin{matrix} kx + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ kx + y - kz = 1 \end{matrix}\right\}$$

a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k 1.25 ptos

b) Resolver el sistema cuando $k = 4$ 1.25 ptos

Solución:

a) Para realizar la discusión del sistema, pasamos a escribir la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{pmatrix}$ y su ampliada $M = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ k & 1 & -k & 1 \end{array}\right)$

Estudiamos el $rang(A)$:

Para ello calculamos: $|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + 3 + k + 3k - k - k = -k^2 + 2k + 3$

Analizamos cuándo se hace cero:

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \Rightarrow k = 3 \; y \; k = -1$$

Por tanto,

Si $\boldsymbol{k \neq 3 \; y \; k \neq -1} \Rightarrow |A| \neq 0 \;\; \Rightarrow \; rang(A) = rang(M) = 3$ y número de incógnitas es 3.
Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es un **SCD con solución única**.

Si $\boldsymbol{k = 3,}$ $|A| = 0 \;\; \Rightarrow \; rang(A) \neq 3$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y su ampliada $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

Y el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 15 + 12 - 5 - 12 + 3 = -16 \neq 0$$

Por tanto, $rang(A) \leq 2$, $rang(M) = 3$ y Nº de incógnitas =3
Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es un **SI, no tiene solución**.

Si $\boldsymbol{k = -1,}$ $|A| = 0 \;\; \Rightarrow \; rang(A) \neq 3$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su ampliada $M = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Y el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 5 + 12 - 5 + 4 + 3 = 20 \neq 0$$

Por tanto, $rang(A) \leq 2$, $rang(M) = 3$
Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es un **SI, no tiene solución**.

b) En el caso $k=4$, tenemos, según lo discutido anteriormente, que se trata de un SCD con solución única:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y su ampliada } M=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicamos la regla de Cramer para resolverlo:

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-5$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-25}{-5}=5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{15}{-5}=-3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-20}{-5}=4$$

La solución del sistema será: $(x,y,z)=(5,-3,4)$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7,3,4), \quad r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}, \quad \pi: x+2y-5z+5=0$$

a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s. Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P. 1.5 ptos

b) Hallar el ángulo que forma la recta *r* y el plano π 1 ptos

Solución:

a) La recta s viene determinada por pasar por el punto P y ser paralela a la recta r. Como es paralela a la recta s tiene el mismo vector director que r:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1,-1,-1)$$

La ecuación de la recta en paramétrica será:

$$s: \begin{cases} x = -7+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases}$$

Buscamos el punto de la recta s que está en el plano π:

$$x+2y-5z+5 = -7+\lambda+2(3-\lambda)-5(4-\lambda)+5 = 0$$

$$-7+\lambda+6-2\lambda-20+5\lambda+5=0$$

$$4\lambda-16=0 \Rightarrow \lambda = 4$$

El punto de corte será: $\begin{matrix} x=-7+4=-3 \\ y=3-4=-1 \\ z=4-4=0 \end{matrix} \Rightarrow A(-3,-1,0)$

El punto de corte será: $\boldsymbol{A(-3,-1,0)}$

b) Ahora vamos a calcular el ángulo entre la recta r y el plano π.

Calculamos el vector director de la recta *r* y el vector normal del plano:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1,-1,-1)$$

$$\vec{n}_\pi = (1,2,-5)$$

Por tanto: $\alpha = arsen\left(\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right)$=arcsen$\left(\frac{|1-2+5|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+4+25}}\right)$=arcsen$\left(\frac{4}{9.4868}\right) = 24.94°$

$\boldsymbol{\alpha = 24.94°}$

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases} ;\quad s:\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s. 1.5 ptos
b) Encontrar el plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s. 1 ptos

Solución:

a) Para estudiar la posición relativa de las rectas necesitamos un punto de cada recta, con los que construir un vector, y los vectores directores de cada recta.

Recta r:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k} = (1,-5,-7)$$

Para localizar un punto:

Tomamos $x=0$, por lo que $\begin{cases} 2y-z=1 \\ -y+z=-4 \end{cases}$ y donde se obtiene $y=-3$ y $z=-7$.

El punto será $P(0,-3,-7)$.

Recta s:

Punto Q (3,0,1) y $\vec{v}_s = (1,1,1)$

El vector $\overrightarrow{PQ}(3-0, 0-(-3), 1-(-7)) = (3,3,8)$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los tres vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = -21-40+3-8+15+21 = -30 \neq 0$$

Como el Rang (A) = 3, tenemos que son vectores linealmente independientes y, por tanto, son dos rectas que se cruzan.

Las rectas r y s se cruzan

b) Si el plano es paralelo a la recta r y contiene a la recta s, se cumple que los vectores directores de las rectas r y s serán vectores directores del plano. Además, como el plano buscado contiene a la recta s, contendrá cualquier punto de la recta.

Debemos calcular los vectores directores de las rectas r y s y dar un punto de la recta r.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k} = (1,-5,-7)$$

Punto de la recta s puede ser Q (3,0,1) y su vector director es $\vec{v}_s = (1,1,1)$

La ecuación del plano buscado será:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = -2(x-3) + 8y - 6(z-1) = 0$$

$$-2x + 6 + 8y - 6z + 6 = 0$$

$$-2x + 8y - 6z + 12 = 0$$

El plano buscado será:

$$\mathbf{-2x + 8y - 6z + 12 = 0 \equiv -x + 4y - 3z + 6 = 0}$$

O bien:

$$\pi: \begin{cases} x = 3 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - 5\mu \\ z = 1 + \lambda - 7\mu \end{cases}$$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99

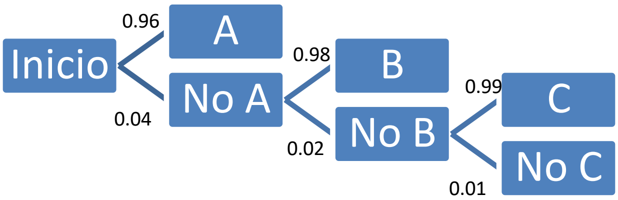
a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos. 0.5 ptos

b) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente. 0.75 ptos

c) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas. 1.25 ptos

Solución:

a) El diagrama de árbol será el siguiente, con la distribución de probabilidades, entendiendo por:



b) La probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione será, según el teorema de la probabilidad total:

$$P(\text{"}Se\ activa\ el\ B\text{"}) = P(No\ A) \cdot P(B|No\ A) = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392$$

La probabilidad de salvarse con el paracaídas B será de 0.0392

c) La probabilidad de salvarse es, según el teorema de la probabilidad total:

$$P(\text{"}Se\ activa\ algún\ paracaídas\text{"}) =$$

$$= P(A) + P(No\ A) \cdot P(B|No\ A) + P(No\ A) \cdot P(NoB|No\ A) \cdot P(C|No\ A\ y\ No\ B)$$

$$P(\text{"}Se\ activa\ algún\ paracaídas\text{"}) = 0.96 + 0.04 \cdot 0.98 + 0.04 \cdot 0.02 \cdot 0.99$$
$$= 0.96 + 0.0392 + 0.000792$$

$$P(\text{"}Se\ activa\ algún\ paracaídas\text{"}) = 0.999992$$

Tiene una probabilidad de salvarse cercana a 1, es decir, casi con toda seguridad.

4B. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

a) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones. 1.25 ptos

b) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que 3/4. Justificar si esta afirmación es cierta o no. 1.25 ptos

Solución:

Las casillas con las que contamos en este juego son las que se muestran a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25					

a) Sea X = número de pares obtenidos, y la probabilidad de par es: $p = \frac{12}{25} = 0.48$

Realizamos 100 lanzamientos, cada uno de los lanzamientos es independiente del resto y en cada tirada sólo hay dos posibles resultados: acierto="sacar número par", error="sacar número impar". Por tanto, la variable X seguirá una distribución binomial:

$$X \sim Bi(100{,}0.48)$$

Como $n \cdot p = 48\ y\ \ n \cdot q = 52 \geq 5$, podemos aproximar esta binomial a una normal de media $\mu = n \cdot p = 48$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 4.99 \approx 5$

$$X \sim N(48{,}5)$$

$$P(X > 50) = P\left(Z > \frac{50-48}{5}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = 0.3446$$

Tendrá una probabilidad de 0.3446 de ganar más de la mitad de las ocasiones.

b) Ahora el juego se repite 200 veces. En este caso tenemos una nueva variable Y= nº de pares obtenidos:

$$Y \sim Bi(200{,}0.48)$$

Como $n \cdot p = 96\ y\ \ n \cdot q = 104 \geq 5$, podemos aproximar esta binomial a una normal de media $\mu = n \cdot p = 96$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 7.07$

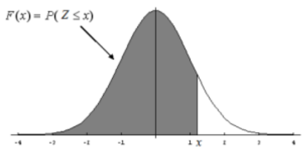
$$Y' \sim N(96{,}7.07)$$

$$\begin{aligned} P(90 < X < 110) &= P\left(\frac{90-96}{7.07} < Z < \frac{110-96}{7.07}\right) = P(-0.85 < Z < 1.98) \\ &= P(Z < 1.98) - P(Z < -0.85) = 0.9761 - \big(1 - P(Z < 0.85)\big) \\ &= 0.9761 - (1 - 0.8023) = 0.7784 \end{aligned}$$

Por tanto, $P(90 < Y < 110) = 0.7784 > 0.75 = \frac{3}{4}$,

con lo que la afirmación **no es correcta**.

Aclaración. Si se utiliza la corrección de Yates la respuesta correcta será considerando el siguiente intervalo: (90.5, 109.5)



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767