**Problema 1.** Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & k & 3\\ k & 1/3 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$ donde $k$ es un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro $k$ la matriz $A$ es invertible? *(2 puntos)*
b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de $A$. *(4 puntos)*
c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales $D$ que verifican $A\,D = D\,A$. *(4 puntos)*

*Solución:*
*a) ¿k? / A sea invertible.*
*A es invertible si /A/ ≠ 0.*

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & k & 3\\ k & 1/3 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=-3k+2k-2+k^2=k^2-k-2$$

$$k^2-k-2=0 \quad\rightarrow\quad k=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}k_1=\dfrac{1+3}{2}=2\\[2mm] k_2=\dfrac{1-3}{2}=-1\end{cases}$$

*Por lo tanto,* ***A es invertible si k ≠ – 1 y k ≠ 2****.*

*b) Para k = 0, calcular $A^{-1}$.*
*Como k = 0 (k ≠ – 1 y k ≠ 2) → existe la matriz inversa de A.*
*Cálculo de $A^{-1}$*

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 1/3 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad |A|=\left(k^2-k-2\right)\Big|_{k=0}=-2$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 1/3 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1/3 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1/3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 3\\ 1/3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1/3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3 & -2 & -2/3\\ 3 & -6 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}2/3 & 2 & -2/3\\ -3 & -6 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}2/3 & -3 & -1\\ 2 & -6 & 0\\ -2/3 & 0 & 0\end{pmatrix}.\quad Y\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}2/3 & -3 & -1\\ 2 & -6 & 0\\ -2/3 & 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2/3 & -3 & -1\\ 2 & -6 & 0\\ -2/3 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3 & 3/2 & 1/2\\ -1 & 3 & 0\\ 1/3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

***Solución:*** $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & 3/2 & 1/2\\ -1 & 3 & 0\\ 1/3 & 0 & 0\end{pmatrix}$

*c) Para $k = 0$, calcular las matrices diagonales $D$ que verifican $A D = D A$.*

*Como $A$ es 3x3, para que se puedan efectuar los dos productos la matriz $D$ también es 3x3.*

*D es una matriz diagonal* $\rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$

*Calculemos A D,*

$$A\,D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix}.$$

*Calculemos D A,*

$$D\,A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix}.$$

*Los dos productos deben ser iguales:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3z = 3x \\ y/3 = y/3 \\ z = y \\ 2z = 2z \\ -y = -z \\ -z = -z \end{cases} \text{ eliminando las identidades, } \begin{cases} 3z = 3x \\ z = y \\ -y = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = y \\ y = z \end{cases}$$

*La $2^a$ y $3^a$ ecuaciones son la misma, queda* $\begin{cases} z = x \\ z = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$, *la solución es* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

***Solución: las matrices diagonales buscadas son*** $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \Re.$

**Problema 2.** Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&2&1\\a&0&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real $a$ para los que la ecuación matricial $A^2X=B$ tiene una única solución. *(5 puntos)*

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X=B$, encontrar el valor de $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ dependiendo del parámetro real $a$. *(5 puntos)*

*Solución:*

*a) Calculemos $A^2$,*

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&2&1\\a&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\3&2&1\\a&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a&0&8\\9+a&4&11\\4a&0&2a+9\end{pmatrix}$$

*La ecuación $A^2X=B$ tendrá solución única si existe la inversa de $A^2$, por tanto si $|A^2|\neq 0$*

$$|A^2|=\begin{vmatrix}1+2a&0&8\\9+a&4&11\\4a&0&2a+9\end{vmatrix}=(1+2a)\,4\,(2a+9)-8\cdot4\cdot4a=4[(1+2a)(2a+9)-32a]=4(4a^2+20a+9-32a)=$$

$$=4(4a^2-12a+9).\qquad 4(4a^2-12a+9)=0;\quad 4a^2-12a+9=0$$

$$a=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot4\cdot9}}{2\cdot4}=\frac{12\pm0}{8}=\frac{3}{2}$$

***Solución: la ecuación $A^2X=B$ tiene solución única si*** $a\neq\frac{3}{2}$.

*b)*

*Sabemos que* $\begin{pmatrix}1+2a&0&8\\9+a&4&11\\4a&0&2a+9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}(1+2a)\cdot3+0\cdot(-2)+8\cdot(-1)\\(9+a)\cdot3+4\cdot(-2)+11\cdot(-1)\\4a\cdot3+0\cdot(-2)+(2a+9)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\rightarrow$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}3+6a-8\\27+3a-8-11\\12a-2a-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}6a-5\\3a+8\\10a-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\alpha=6a-5\\\beta=3a+8\\\gamma=10a-9\end{cases}$$

***Solución:*** $\begin{cases}\alpha=6a-5\\\beta=3a+8\\\gamma=10a-9\end{cases}$

**Problema 3.** Se dan las rectas $r: x-1 = y-2 = \dfrac{z-1}{2}$ y $s: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto $P$ de intersección. *(5 puntos)*
b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a $r$ y a $s$. *(5 puntos)*

*Solución:*

*a) Comprobar que r y s se cortan*

*Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.*

$$r: x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,1) \\ \vec{v}_r(1,1,2) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_s(3,3,-1) \\ \vec{v}_s(-2,-1,2) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 3-2\alpha \\ y = 3-\alpha \\ z = -1+2\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \Re$$

*Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s estudiamos el rango de la matriz* $\left[ \vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \overrightarrow{P_rP_s} \right]$*, es decir:* $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

*Rango de M, {M es 3 x 2, luego máximo rango de M es 2}*

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \rightarrow ran(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(M) = 2 \rightarrow r \text{ y } s \left\langle \begin{array}{l} \text{se cortan} \\ \text{o} \\ \text{se cruzan} \end{array} \right.$$

*Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M es 3}.*

*Por el cálculo del rango de M, sabemos que ran (M´)* $\geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2-4+4-4+2+4 = 0 \rightarrow ran(M') = 2$$

*Como ran (M) = ran(M´) = 2,* ***las rectas r y s se cortan.***

*El punto de corte entre r y s lo obtenemos resolviendo el sistema de las rectas a partir de sus ecuaciones paramétricas. Es decir,*

$$\begin{cases} 1+\lambda = 3-2\alpha \\ 2+\lambda = 3-\alpha \\ 1+2\lambda = -1+2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda+2\alpha = 2 \\ \lambda+\alpha = 1 \\ 2\lambda-2\alpha = -2 \end{cases}$$

*De este sistema, según el estudio de rangos anterior, sabemos que rango de la matriz de coeficientes = rango de la matriz ampliada = 2 = nº de incógnitas (*$\lambda$ *y* $\alpha$*).*

*Resolvemos usando 1ª y 2ª ecuación (corresponden al menor de orden 2 no nulo). El sistema a resolver es:*

$$\begin{cases} \lambda+2\alpha = 2 \\ \lambda+\alpha = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \\ (-1)x2^a \end{array} \begin{cases} \lambda+2\alpha = 2 \\ -\lambda-\alpha = -1 \end{cases}$$
$$\alpha = 1$$

*Sustituyendo en la 2ª ecuación:* $\lambda + 1 = 1$; $\lambda = 0$

*Sustituimos los valores de las incógnitas en las ecuaciones de r y s para comprobar que se obtiene el mismo punto. Sólo sería necesario sustituir en una de las rectas.*

En $\quad r:\begin{cases} x=1+0=1 \\ y=2+0=2 \\ z=1+0=1 \end{cases}$ $\qquad$ En $\quad s:\begin{cases} x=3-2\alpha=3-2\cdot 1=1 \\ y=3-\alpha=3-1=2 \\ z=-1+2\alpha=-1+2\cdot 1=1 \end{cases}$

*Por tanto,* ***el punto de corte entre las rectas r y s es P ( 1 , 2 , 1 )***

*b) ¿recta t / $P \in t$ y $t \perp r$ y s ?*

*Como* $t \perp r$ *y* $s \quad \rightarrow \quad \vec{v}_t = \vec{v}_r \otimes \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$

*Por tanto* $\vec{v}_t(4\,,-6\,,1)$. *Como P ( 1 , 2 , 1 ) ∈ t, la ecuación de la recta t será:*

***Ecuación paramétrica*** $t:\begin{cases} x=1+4\beta \\ y=2-6\beta \\ z=1+\beta \end{cases} \quad \beta \in \Re$, ***ecuación continua*** $t: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-1}{1}$.

**Problema 4.** Sea el plano π: $6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

a) Calcular los valores de $d$ para que la distancia del plano al origen sea una unidad. *(2 puntos)*

b) Calcular, en función del parámetro $d$, las coordenadas de los puntos $A$, $B$ y $C$ que resultan de intersectar el plano $\pi$ con los ejes de coordenadas, $X$, $Y$ y $Z$, respectivamente. *(3 puntos)*

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. *(5 puntos)*

*Solución:*

*a) ¿d? / d ( π , (0,0,0) ) = 1.*

$$d(\pi, O) = \frac{|6\cdot 0 + 4\cdot 0 - 3\cdot 0 d|}{\sqrt{6^2+4^2+(-3)^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{61}}$$

*y debe ser* $\frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \ \rightarrow\ |d| = 61 \ \rightarrow\ \left\langle \begin{array}{l} d = \sqrt{61} \\ d = -\sqrt{61} \end{array} \right.$

***Solución:*** $d = \sqrt{61}$ *o* $d = -\sqrt{61}$.

*b) Calculemos los tres puntos A, B y C, intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados.*

*A, corte del plano π con eje X. La ecuación del eje X es:* $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow\ 6x - d = 0 \ \rightarrow\ 6x = d \ \rightarrow\ x = \frac{d}{6} \ \rightarrow\ A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$$

*B, corte del plano π con eje Y. La ecuación del eje Y es:* $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow\ 4y - d = 0 \ \rightarrow\ 4y = d \ \rightarrow\ y = \frac{d}{4} \ \rightarrow\ B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$$

*C, corte del plano π con eje Z. La ecuación del eje Z es:* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow\ -3z - d = 0 \ \rightarrow\ 3z = -d \ \rightarrow\ z = \frac{-d}{3} \ \rightarrow\ B\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$$

***Solución: los puntos son*** $A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$ *y* $C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$.

*c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.*

$$Sea \quad \alpha = \left( \widehat{\vec{AB}\,,\,\vec{AC}} \right)$$

$$\vec{AB} = \left(0\,,\frac{d}{4}\,,0\right) - \left(\frac{d}{6}\,,0\,,0\right) = \left(\frac{-d}{6}\,,\frac{d}{4}\,,0\right)$$

$$\vec{AC} = \left(0\,,0\,,\frac{-d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6}\,,0\,,0\right) = \left(\frac{-d}{6}\,,0\,,\frac{-d}{3}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{AB}.\vec{AC}\right|}{\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AC}\right|} = \frac{\left|\left(\frac{-d}{6}\,,\frac{d}{4}\,,0\right)\cdot\left(\frac{-d}{6}\,,0\,,\frac{-d}{3}\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2+0^2}\ \sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2+0^2+\left(\frac{-d}{3}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{16}}\ \sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{9}}} =$$

$$= \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\sqrt{\frac{52d^2}{576}}\ \sqrt{\frac{45d^2}{324}}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\sqrt{\frac{13d^2}{144}}\ \sqrt{\frac{5d^2}{36}}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\frac{\sqrt{13d^2}}{12}\ \frac{\sqrt{5d^2}}{6}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\frac{\sqrt{65d^4}}{72}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\frac{d^2\sqrt{65}}{72}} =$$

$$\left\{\frac{d^2}{36} > 0 \rightarrow \left|\frac{d^2}{36}\right| = \frac{d^2}{36}\right\} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d^2\sqrt{65}}{72}} = \frac{72\,d^2}{36\,d^2\sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}}$$

$$Entonces, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{65}} \quad \rightarrow \quad \alpha = arc\cos\left(\frac{2}{\sqrt{65}}\right) \cong 75'6367^{\circ} \quad o \quad 1'3201\ rds.$$

***Solución: el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ es 75´6367º o 1´3201 rds.***

**Problema 5.** Se considera la función $h(x) = a\,x + x^2$ donde $a$ es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de $a$ que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abcisa $x = \frac{-3}{4}$. *(3 puntos)*

b) Para el valor de $a$ del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. *(2 puntos)*

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. *(5 puntos)*

*Solución:*

*a) ¿a? / y = h(x) tenga un mínimo relativo en* $x = \frac{-3}{4}$.

$h'(x) = a + 2x;\quad a + 2x = 0;\quad 2x = -a;\quad x = \frac{-a}{2}.$

$h''(x) = 2 \quad \rightarrow \quad h''\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 > 0 \quad \rightarrow$ *en* $x = \frac{-a}{2}$ *hay un mínimo relativo.*

*Por tanto,* $\frac{-a}{2} = \frac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad -a = \frac{-6}{4} \quad \rightarrow \quad a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

***Solución:*** $\boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$.

*b) Para* $a = \frac{3}{2}$ *dibujar las curvas* $y = h(x)$ *e* $y = h'(x)$.

$y = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$

*Polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola.*

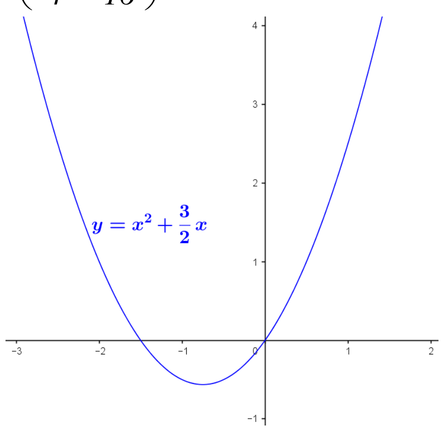
*Corte con ejes coordenados* $(0, 0)$ *y* $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

$y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{3}{2}x = 0; \quad x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \end{array} \right.$

*Por lo estudiado en el apartado a), esta función tiene un mínimo relativo en* $x = \frac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad y = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\,\frac{-3}{4} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = \frac{-9}{16}$

*Mínimo relativo* $\left(\frac{-3}{4}, \frac{-9}{16}\right)$



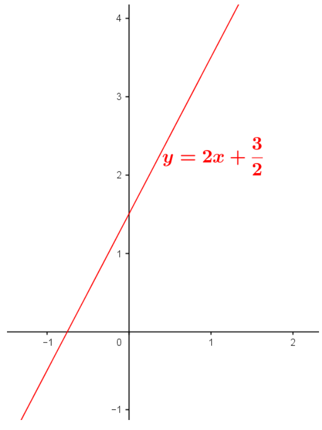

$y = h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$

*Polinomio de 1º grado, gráficamente una recta.*

$x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

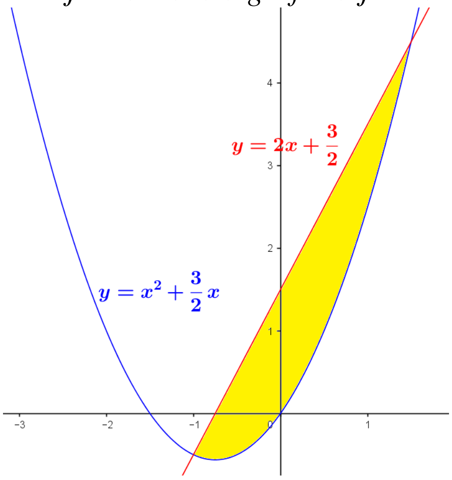
$y = 0 \rightarrow 2x + \frac{3}{2} = 0;\ 2x = \frac{-3}{2};\ x = \frac{-3}{4}$

| x | y |
|---|---|
| $0$ | $\frac{3}{2}$ |
| $\frac{-3}{4}$ | $0$ |



*c) ¿área del plano comprendida entre ambas curvas?*

*Dibujemos las dos gráficas juntas:*




*El área comprendida entre las dos curvas es la zona coloreada.*

*Obtengamos los puntos de corte entre las dos curvas,*

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2}; \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3; \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

*El área pedida la obtendremos a calculando la siguiente integral definida,*

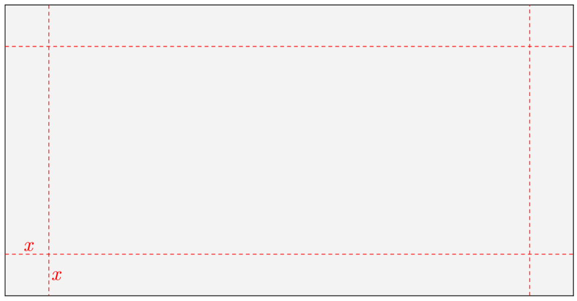
$$A = \int_{-1}^{3/2} \left( 2x + \frac{3}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left( -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} =$$

$$= \left[ -\frac{\left(3/2\right)^3}{3} + \frac{\left(3/2\right)^2}{4} + \frac{3}{2}\left(3/2\right) \right] - \left[ -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \left( -\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$= \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{125}{48} \cong 2'6042$$

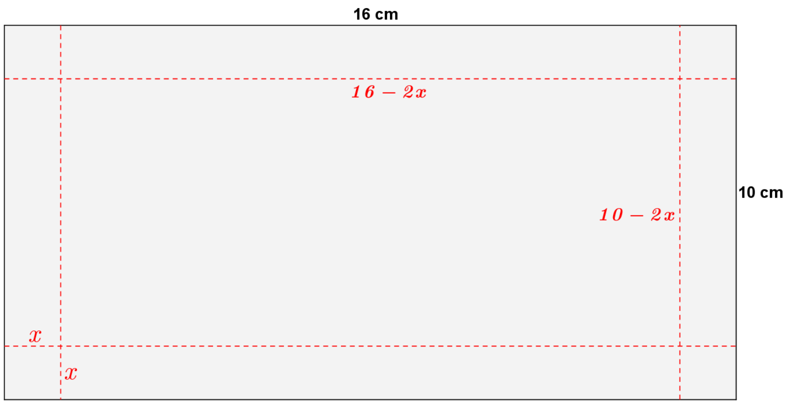
**Solución: el área pedida mide** $\frac{125}{48}$ *u.a.* $\cong 2'6042$ *u.a.*

**Problema 6.** Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud $x$ en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:




a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. *(8 puntos)*
b) Dicho volumen. *(2 puntos)*

*Solución:*
*Completando las dimensiones de la hoja:*




*Las dimensiones, en cm, de la caja de cartón a construir son:*
*largo* $16-2x$,
*ancho* $10-2x$ *y*
*alto* $x$

*Por lo tanto el volumen de la caja será*

$$V(x) = (16-2x)(10-2x)x$$

*Y para que haya caja deberá cumplirse:* $\begin{cases} x>0 \\ 16-2x>0 \ \rightarrow\ 16>2x \ \rightarrow\ 8>x \ \equiv\ x<8, \\ 10-2x>0 \ \rightarrow\ 10>2x \ \rightarrow\ 5>x \ \equiv\ x<5 \end{cases}$ *luego* $0<x<5$

$V(x) = (160-32x-20x+4x^2)x = (4x^2-52x+160)x = 4x^3-52x^2+160x$

*Debemos obtener el máximo de la función* $V(x) = 4x^3-52x^2+160x$ *siendo* $0<x<5$

$V'(x) = 12x^2-104x+160$

$$12x^2-104x+160=0; \quad x=\frac{-(-104)\pm\sqrt{(-104)^2-4\cdot 12\cdot 160}}{2\cdot 12}=\frac{104\pm 56}{24}=\begin{cases} x_1=\dfrac{104+56}{24}=\dfrac{20}{3}>5 \\ x_1=\dfrac{104-56}{24}=2\in(0,5) \end{cases}$$

*Obtengamos el signo de* $V'(x)$ *a la izquierda y derecha de* $x=2$.

$V'(x) = 12x^2-104x+160$

$x=1'5 \ \rightarrow\ V'(1'5)=12(1'5)^2-104(1'5)+160=31>0$ *creciente*

$x=2'5 \ \rightarrow\ V'(2'5)=12(2'5)^2-104(2'5)+160=-25<0$ *decreciente*

*Por tanto, como* $V(x)$ *es creciente a la izquierda de* $2$ *y decreciente a su derecha el máximo relativo es absoluto.*

*Para* $x=2$, *largo* $16-2\cdot 2=12$, *ancho* $10-2\cdot 2=6$; $V(2)=4\cdot 2^3-52\cdot 2^2+160\cdot 2=144$

***Solución:***

***a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible son: 12 cm de largo, 6 cm de ancho y 2 cm de altura.***

***b) El volumen máximo es de 144 cm$^3$.***

**Problema 7.** Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10´25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? *(4 puntos)*

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? *(3 puntos)*

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? *(3 puntos)*

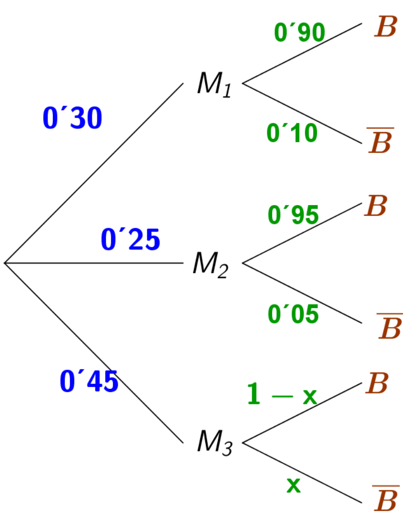
*Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.*

*Solución:*
*Utilizamos los siguientes sucesos:*
$M_1$ = *lata fabricada por la 1ª máquina*
$M_2$ = *lata fabricada por la 2ª máquina*
$M_3$ = *lata fabricada por la 3ª máquina*
$B$ = *lata buena* $\qquad \overline{B}$ = *lata defectuosa*

*De los datos del problema:*
*La máquina* $M_1$ *fabrica el 30% de las latas* $\rightarrow \quad P(M_1)=0´30.$
*La máquina* $M_2$ *fabrica el 25% de las latas* $\rightarrow \quad P(M_2)=0´25.$
*Y el resto ( 100 – 30 – 25 = 45 ) lo fabrica la máquina* $M_3$ $\rightarrow \quad P(M_3)=0´45.$
***En*** $\boldsymbol{M_1}$ *el 10% de las latas fabricadas son defectuosas* $\rightarrow \quad P(\overline{B})=0´10 \quad y \quad P(B)=1-0´10=0´90$
***En*** $\boldsymbol{M_2}$ *el 5% de las latas fabricadas son defectuosas* $\rightarrow \quad P(\overline{B})=0´95 \quad y \quad P(B)=1-0´95=0´05$
***En*** $\boldsymbol{M_3}$ $\rightarrow \quad P(\overline{B})=x \quad y \quad P(B)=1-x$

*El 10´25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas* $\rightarrow \quad P(\overline{B})=0´1025$

*El árbol del problema es:*




$P(\overline{B})=0´1025 \quad y \quad del \;\; árbol$

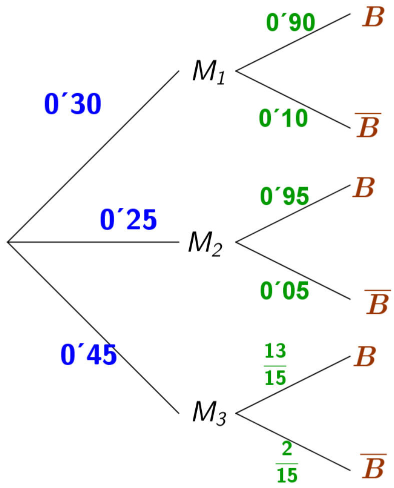
$$P(\overline{B})=0´30\cdot 0´10+0´25\cdot 0´05+0´45\cdot x=$$
$$=0´0425+0´45\cdot x$$

*Por tanto:* $0´0425 + 0´45\,x = 0´1025;$

$0´45\,x = 0´1025 - 0´0425; \quad 0´45\,x = 0´06$

$$x=\frac{0´06}{0{,}45}=\frac{2}{15} \quad y \quad 1-x=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

*Entonce el árbol queda:*




*a) Probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa.*

*La probabilidad pedida es* $P\left(\overline{B}/M_3\right)$

$$P\left(\overline{B}/M_3\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap M_3\right)}{P(M_3)}=\frac{0´45\cdot\frac{2}{15}}{0´45}=\frac{2}{15}\cong 0´1333.$$

*b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?*

*La probabilidad pedida es* $P\left(M_1/B\right)$

$$P\left(M_1/B\right)=\frac{P(M_1\cap B)}{P(B)}=\frac{0´30\cdot 0´90}{1-P\left(\overline{B}\right)}=\frac{0´27}{1-0´1025}=\frac{108}{359}\cong 0´3008.$$

*c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?*

*La probabilidad pedida es* $P\left(M_1/\overline{B}\right)+P\left(M_3/\overline{B}\right)$

$$P\left(M_1/\overline{B}\right)+P\left(M_3/\overline{B}\right)=\frac{P\left(M_1\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}+\frac{P\left(M_3\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{0´30\cdot 0´10}{0´1025}+\frac{0´45\cdot\frac{2}{15}}{0´1025}=\frac{36}{41}\cong 0´8780.$$

**Problema 8.** Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. *(3 puntos)*
b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. *(3 puntos)*
c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. *(4 puntos)*

*Solución:*
*Utilizamos los siguientes sucesos:*
*E = mensaje con emoticonos.* $\overline{E}$ *= mensaje sin emoticonos*
*Como "el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp añade emoticono"* $\rightarrow$

$P(E) = 0'60 \rightarrow P(\overline{E}) = 1 - 0'60 = 0'40$

*Se mandan 10 mensajes, usando la variable X = número de mensajes con emoticonos en 10 mensajes, X es una variable binomial de parámetros* $n = 10$ *y* $p = 0'6$.

*La tabla que tenemos de la binomial no da los resultados para esta variable (es para* $p \leq 0'5$*). Por lo tanto utilizaremos la siguiente variable: Y = número de mensajes sin emoticonos en 10 mensajes* $\rightarrow$ $Y = B(10, 0'4)$ *y la tabla nos da los resultados para Y.*

*La relación entre estas dos variables es:*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Y | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

*a) Probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.*
*"ningún mensaje de los diez tenga emoticonos"* $\equiv X = 0 \equiv Y = 10$
$P(X = 0) = P(Y = 10) = P(Y \leq 10) - P(Y \leq 9) = 1 - 0'9999 = 0'0001$

***La probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos es 0´0001.***

*b) Probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.*
$\frac{2}{5}$ de $10 = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$
*"que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos"* $\equiv X = 4 \equiv Y = 6$
$P(X = 4) = P(Y = 6) = P(Y \leq 6) - P(Y \leq 5) = 0'9452 - 0'8338 = 0'1114$

***La probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos es 0´1114.***

*c) Probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos.*
*"que ocho o más mensajes tengan emoticonos"* $\equiv X \geq 8 \equiv Y \leq 2$
$P(X \geq 8) = P(Y \leq 2) = 0'1673$

***La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos es 0´1673.***