OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Comprobar **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado** que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, es decir que $A\,B = B\,A$, entonces se deduce que $A^2 B^2 = (A\,B)^2$. *(2 puntos).*

b) Que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices de orden 3x3 unidad y nula, *(4 puntos)*, y que una matriz A tal que $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$ tiene matriz inversa. *(2 puntos).*

c) Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, los valores α y β tales que $A^3 = \alpha\,A + \beta\,I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$. *(2 puntos).*

Solución:

a) Debemos comprobar que, si $A\,B = B\,A \;\rightarrow\; A^2 B^2 = (A\,B)^2$

$A^2 B^2 = A\,A\,B\,B =$ *(como el producto de matrices es asociativo)*

$= A\,(\,A\,B\,)\,B =$ *(como* $A\,B = B\,A$ *)*

$= A\,(\,B\,A\,)\,B =$ *(como el producto de matrices es asociativo)*

$= (\,A\,B\,)\,(\,A\,B\,) = (A\,B)^2$ *(como queríamos comprobar)*

b) Calculemos,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)(-4)+10(-3) & (-4)10+10.7 \\ 0 & (-3)(-4)+7(-3) & (-3)10+7.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -30 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto hemos comprobado que $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$

* * *

Si A *es una matriz que cumple* $A^2 - 3\,A + 2\,I = O \;\rightarrow\; \exists\, A^{-1}$

Para comprobar que la matriz A *tiene inversa debemos obtener una expresión del tipo* A *(matriz)* $= I$

Partimos de: $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$, *luego,*

$A^2 - 3\,A = O - 2\,I$

$A^2 - 3\,A = -\,2\,I$, *por la propiedad distributiva del producto respecto de la diferencia de matrices,*

$A\,(\,A - 3\,I\,) = -\,2\,I$, *multiplicando ambos miembros por* $\dfrac{-1}{2}$

$$A\,(A - 3I)\,\frac{-1}{2} = I$$

Hemos obtenido que $A\left[(A-3I)\dfrac{-1}{2}\right] = I$ *, por lo tanto la matriz inversa de* A *es* $\left[(A-3I)\dfrac{-1}{2}\right]$

c) Como $A^2 - 3A + 2I = O$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por la matriz A *por la derecha,*

$A^2 A - 3AA + 2IA = OA$, *operando*

$A^3 - 3A^2 + 2A = O$, *despejando* A^3

$A^3 = 3A^2 - 2A$,

Como $A^2 - 3A + 2I = O$, $A^2 = 3A - 2I$, *por lo tanto*

$A^3 = 3(3A - 2I) - 2A = 9A - 6I - 2A = 7A - 6I$

Hemos obtenido: $A^3 = 7A - 6I$, *por lo tanto los valores de* α *y* β *buscados serán* $\boldsymbol{\alpha = 7}$ ***y*** $\boldsymbol{\beta = -6}$.

Matemáticas II Julio 2014

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del determinante de la matriz $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, *(2 puntos)* y la matriz S^{-1}, que es la matriz inversa de la matriz S. *(2 puntos)*. Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz S sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa S^{-1}. *(1 punto)*.

b) El determinante de la matriz $\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabiendo que T es una matriz cuadrada de 3 filas y que 20 es el valor del determinante de dicha matriz T. *(3 puntos)*.

c) La solución a de la ecuación $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$. *(2 puntos)*.

Solución:

a) Calculamos |S| por la regla de Sarrus,

$$|S|=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=10+3+2+1-6+10=20$$

Como $|S|\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\, S^{-1}$

Calculamos S^{-1} *por el método de los adjuntos,*

$$S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -13 & 11 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 13 & 11 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$S^{-1}=\frac{1}{|S|}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/20 & 13/20 & -3/20 \\ -6/20 & 11/20 & -1/20 \\ 4/20 & -4/20 & 4/20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/10 & 13/20 & -3/20 \\ -3/10 & 11/20 & -1/20 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $S^{-1}=\begin{pmatrix} 1/10 & 13/20 & -3/20 \\ -3/10 & 11/20 & -1/20 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

La relación pedida es: Si S es una matriz cuadrada cuyo determinante es no nulo, entonces admite matriz inversa.

b) Sabemos que T es una matriz 3x3 y que $|T|=20$*, hay que calcular* $\left|\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}\right|$

De las propiedades de los determinantes sabemos que $|M\ N|=|M|\,|N|$*, que si M es n x n* $|\alpha\, M|=\alpha^n\,|M|$ *y que* $|M^{-1}|=\dfrac{1}{|M|}$*. Apliquemos estas propiedades para calcular el determinante pedido,*

$$\left|\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}\right|=\frac{1}{\left|4\left(T^2\right)\right|}=\frac{1}{|4\,T\,T|}=\frac{1}{|4\,T|\,|\,T|}=\frac{1}{4^3|T|\,|\,T|}=\frac{1}{4^3.20.20}=\frac{1}{25600}$$

c) La ecuación matricial planteada da lugar a 9 ecuaciones. Ahora bien, no es necesario escribir las ecuaciones que son identidades, por ejemplo, a = a, – 3 = – 3, etc.
Por lo tanto, el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} a^2-1=a+1 \\ a+1=a^2-1 \\ a^2+4=4a \\ 4a=a^2+4 \end{cases}$$

Como quiera que la primera ecuación es la segunda y lo mismo ocurre con la tercera y cuarta, el sistema queda reducido a:

$$\begin{cases} a^2-1=a+1 \\ a^2+4=4a \end{cases}$$

Como es un sistema de dos ecuaciones con una sola incógnita, resolvemos cada una de las ecuaciones y las soluciones del sistema serán aquellas que cumplan ambas ecuaciones.

$$a^2-1=a+1 \;\rightarrow\; a^2-1-a-1=0 \;\rightarrow\; a^2-a-2=0 \;\rightarrow$$

$$a=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\,.\,1\,.\,(-2)}}{2\,.\,1}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} a_1=\dfrac{1+3}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \\ a_2=\dfrac{1-3}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$

$$a^2+4=4a \;\rightarrow\; a^2-4a+4=0 \;\rightarrow$$

$$a=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\,.\,1\,.\,4}}{2\,.\,1}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=\frac{4}{2}=2$$

La solución que cumple ambas ecuaciones es a = 2, esta es la solución del sistema.

Solución: La solución de la ecuación matricial planteada es a = 2.

Matemáticas II Julio 2015

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de x para los que la matriz B tiene inversa. *(3 puntos)*

b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabiendo que el valor del determinante de la matriz A es 8. *(4 puntos)*

c) Los valores de x, y, z para los cuales $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿x? / $\exists B^{-1}$,

Para que exista B^{-1} debe ser $|B| \neq 0$.

$$|B|=\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1-3x$$

$$-1-3x=0; \qquad -3x=1; \qquad x=\frac{1}{-3}=\frac{-1}{3}$$

Por lo tanto, para $x\neq\frac{-1}{3}$ $\quad \exists B^{-1}$

b) ¿$|A^3|$ si $|A| = 8$?

De las propiedades de los determinantes sabemos que $|M\ N|=|M|\,|N|$, luego

$$|A^3|=|A\ A\ A|=|A|\,|A|\,|A|=|A|^3=8^3=512$$

Solución, ***si $|A| = 8$ entonces $|A^3| = 512$***

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix}=\{sacando\ el\ factor\ 2\ de\ C_1\}=2\begin{vmatrix} x & 5 & -1 \\ y & 10 & 3 \\ z & 5 & 0 \end{vmatrix}=\{sacando\ el\ factor\ 5\ de\ C_2\}=$$

$$=2\,.\,5\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}==10\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}=10\,|A|=10\,.\,8=80$$

Solución, ***si*** $|A| = 8$ ***entonces*** $\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix} = 80$

c) ¿x, y, z? / $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculemos A^2,

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y-z & x+2-1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+4+3 & -y+6 \\ zx+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y-z & x+1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+7 & -y+6 \\ zx+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial a resolver es: $\begin{pmatrix} x^2+y-z & x+1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+7 & -y+6 \\ zx+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto, el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x^2+y-z=0 \\ x+1=0 \\ -x+3=4 \\ xy+2y+3z=3 \\ y+7=7 \\ -y+6=6 \\ zx+y=-1 \\ z+2=3 \\ -z+3=2 \end{cases} \quad \text{Efectuando operaciones:} \quad \begin{cases} x^2+y-z=0 \\ x=-1 \\ x=-1 \\ xy+2y+3z=3 \\ y=0 \\ y=0 \\ zx+y=-1 \\ z=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Comprobemos que los valores de x, y, z obtenidos cumplen las tres ecuaciones que quedan,

¿ $x^2 + y - z = 0$?

$(-1)^2 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$, *se cumple.*

¿ $xy + 2y + 3z = 3$?

$(-1) . 0 + 2 . 0 + 3 . 1 = 3$, *se cumple.*

¿ $zx + y = -1$?

$1 . (-1) + 0 = -1$, *se cumple.*

Solución: $\boldsymbol{x = -1}$ **,** $\boldsymbol{y = 0}$ **,** $\boldsymbol{z = 1}$

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El determinante de las matrices $A\cdot\left(2(B)^2\right)$ $(1{,}5\ puntos)$ y $A\cdot\left(2(B)^2\right)\cdot(3A)^{-1}$ $(1{,}5\ puntos)$

b) Las matrices A^{-1} $(2\ puntos)$ y $\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}$ $(2\ puntos)$

c) La solución de la ecuación matricial $A\,.\,X+B\,.\,X=3\,I.$ *(3 puntos)*

Solución:

En la resolución del problema utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes:

$|A\,.\,B|=|A|\,|B|,\qquad |A^n|=|A|^n,\qquad |A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|},\qquad |n\,A|=\{por\ ser\ A\ 3x3\}=n^3\,|A|$

a) Calculemos, en primer lugar, $|A|$ *y* $|B|$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\{F_2-F_1\}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1-2=-1;\qquad |B|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{vmatrix}=2+1+2=5$$

$$\left|A\cdot\left(2(B)^2\right)\right|=|A|\left|2(B)^2\right|=|A|\left|2\,B^2\right|=|A|\,2^3\left|B^2\right|=|A|\cdot 8\cdot|B|^2=-1\cdot 8\cdot 5^2=-200$$

$$\left|A\cdot\left(2(B)^2\right)\cdot(3A)^{-1}\right|=\left|A\cdot\left(2(B)^2\right)\right|\left|(3A)^{-1}\right|=-200\cdot\left|(3A)^{-1}\right|=-200\cdot\frac{1}{|3\,A|}=-200\cdot\frac{1}{3^3|A|}=$$

$$=-200\cdot\frac{1}{27\,(-1)}=\frac{200}{27}$$

b) Para que exista A^{-1} *debe ser* $|A|\neq 0$*, como hemos calculado en el apartado anterior* $|A|=-1\neq 0$.
Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&1&-1\\3&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

Luego, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$

Para el obtener la siguiente matriz aplicamos la siguiente propiedad $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

$$\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1} = B^{-1}\left((B\cdot A)^{-1}\right)^{-1} = B^{-1}\,(B\cdot A) = B^{-1}\cdot B\cdot A = I\cdot A = A$$

c) ¿X? / A . X + B . X = 3 I .

A . X + B . X = 3 I,

(A + B) X = 3 I, si existe (A + B)$^{-1}$ *entonces multiplicando por la derecha por ella,*

(A + B)$^{-1}$ *(A + B) X = (A + B)*$^{-1}$ *3 I*

I X = (A + B)$^{-1}$ *3 I*

X = (A + B)$^{-1}$ *3 I*

Comprobemos que existe (A + B)$^{-1}$

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&3&3\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\3&3&3\\1&1&0\end{vmatrix}=-6+6+6-3=3\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \exists\,(A+B)^{-1}$$

Calculemos (A + B)$^{-1}$*,*

$$A+B=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&3&3\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&3\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&3\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&3\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&-2\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&-2\\3&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-2\\3&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3&0\\2&2&-1\\12&9&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}$$

$$\begin{pmatrix}-3&3&0\\-2&2&1\\12&-9&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\ (A+B)^{-1}=\frac{1}{|A+B|}\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$X=3(A+B)^{-1}=3\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}$

PROBLEMA A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2\,B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que la matriz A es invertible *(2 puntos)* y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I *(2 puntos)*.

b) Los valores posibles del determinante de B. *(3 puntos)*

c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa *(2 puntos)*.

Solución:

a) ¿A es invertible?

$A^2 = -A - I$ *(despejando I)* $\rightarrow$ $I = -A^2 - A$ *(sacando factor común A)* $\rightarrow$ $I = A\,(-A - I)$

Por tanto, existe A^{-1} *y* $\boldsymbol{A^{-1} = -A - I}$

Cálculo de A^3,

$A^3 = A^2 \,.\, A = (-A - I)\,A = -A^2 - A = I$ *(según lo obtenido anteriormente)*

Por tanto, $\boldsymbol{A^3 = I}$

En la resolución de los siguientes apartados utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes:

$|A\,.\,B| = |A|\,|B|, \quad |A^n| = |A|^n, \quad |n\,A| = \{por\ ser\ A\ 3x3\} = n^3\,|A|$

b) ¿/B/?

Como $B = 2\,B^3 \ \rightarrow\ /B/ = /2\,B^3/ =$ *(como B es 3x3)* $= 2^3\ /\,B^3/ = 8\,/B/^3$

Luego, $/B/ = 8\,/B/^3 \ \rightarrow\ /B/ - 8\,/B/^3 = 0 \ \rightarrow\ /B/\,(\,1 - 8\,/B/^2\,) = 0 \ \rightarrow$

$$\begin{cases} |B| = 0 \\ 1 - 8\,|B|^2 = 0 \ \rightarrow\ 1 = 8\,|B|^2 \ \rightarrow\ \dfrac{1}{8} = |B|^2 \ \rightarrow\ |B| = \pm\sqrt{\dfrac{1}{8}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Por tanto, los posibles valores del determinante de B son: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad 0 \quad y \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) ¿$/B^2/$*? Sabiendo que existe* B^{-1}

Como $B = 2\,B^3$ *y como existe* B^{-1}

Multiplicando por la derecha por B^{-1}

$B\,B^{-1} = 2\,B^3\,B^{-1}$

$B\,B^{-1} = 2\,B^2\,B\,B^{-1}$

$I = 2\,B^2\,I$

$I = 2\,B^2$

$|I| = |2\,B^2|$, *como I es la matriz identidad y B es 3x3*

$1 = 8\,|B^2| \ \rightarrow\ |B^2| = \dfrac{1}{8}$

Por tanto, $\quad |B^2| = \dfrac{1}{8}$

PROBLEMA B.1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}. *(2 + 2 puntos)*

b) La justificación de que $A^4 = I$. *(2 puntos)*

c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}. *(4 puntos)*

Solución:

a) Calculemos, en primer lugar, $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0 \quad\to\quad \exists\, A^{-1}$$

Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\quad\to\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

Luego, $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$

b) ¿ $A^4 = I$ *?.*

Calculemos A^2, $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

Y finalmente, $A^4=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$

Por tanto, ***hemos comprobado que*** $\boldsymbol{A^4 = I}$.

c)

$$A^7 = A^4\ A^3 = I\ A^3 = A^3 = A\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^{30} = \left(A^4\right)^7\ A^2 = I^7\ A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = \left(A^4\right)^{25} = I^{25} = I$$

Por tanto, $\boldsymbol{A^7 = A^{-1}}$, $\boldsymbol{A^{30} = A^2 =} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***y*** $\boldsymbol{A^{100} = I}$

PROBLEMA B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $A\,B = A$ y $B\,A = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$. *(4 puntos)*

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, cumpla que $B^2 = B$ pero $A\,B \neq A$ y $B\,A \neq B$ *(2 puntos)*

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, Obtener razonadamente el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ *(4 puntos)*

Solución:

a) A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $A\,B = A$ y $B\,A = B$, ¿$A^2 = A$? y ¿$B^2 = B$?

Consideramos $A\,B = A$ (1) y $B\,A = B$ (2)

$A^2 = A\,A$ = {por (1)} = $(A\,B)\,A$ = {propiedad asociativa} = $A\,(B\,A)$ = {por (2)} = $A\,B$ = {por (1)} = A

Por tanto, $A^2 = A$

$B^2 = B\,B$ = = {por (2)} = $(B\,A)\,B$ = {propiedad asociativa} = $B\,(A\,B)$ = {por (1)} = $B\,A$ = {por (2)} = B

Por tanto, $B^2 = B$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ¿$a,b \in \Re$ / $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ *cumpla* $B^2 = B,\ AB \neq A$ *y* $BA \neq B$?

$$B^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix}$$

$$Si\ B^2 = B \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a^2 = a \\ b^2 = b \\ a+b = 1 \end{cases}$$

$$a^2 = a \quad \rightarrow \quad a^2 - a = 0 \quad \rightarrow \quad a\,(a-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \\ a-1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1 \end{array} \right.$$

$$b^2 = b \quad \rightarrow \quad b^2 - b = 0 \quad \rightarrow \quad b\,(b-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} b = 0 \\ b-1 = 0 \quad \rightarrow \quad b = 1 \end{array} \right.$$

Como, además, $a + b = 1 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \quad y \quad b = 1 \\ o \\ a = 1 \quad y \quad b = 0 \end{array} \right.$ (m)

Como $A\,B \neq A$,

$$AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0\\1&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad a\neq 1$$

Como $B\,A \neq B$,

$$BA=\begin{bmatrix}a&0\\1&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\1&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}a&0\\1&b\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad b\neq 0$$

De las dos soluciones obtenidas en (m), la que cumple que $a \neq 1$ *y* $b \neq 0$ *es* $a = 0$ *y* $b = 1$.

Solución: los valores de los parámetros buscados son $\boldsymbol{a = 0}$ ***y*** $\boldsymbol{b = 1}$.

$$c)\quad \begin{vmatrix}x&1&0\\y&2&1\\z&3&2\end{vmatrix}=3,$$

Calculemos:

$$\begin{vmatrix}2x&1&0\\2y&2&1\\2z&3&2\end{vmatrix}= \text{El factor 2 que se repite en la } 1^a \text{ columna sale fuera del determinante} =2\begin{vmatrix}x&1&0\\y&2&1\\z&3&2\end{vmatrix}=2\cdot 3=6$$

$$\begin{vmatrix}x+1&1&0\\y+3&2&1\\z+5&3&2\end{vmatrix}= \text{Como la } 1^a \text{ columna es suma de dos, el determinante se calcula como suma de dos determinantes} =\begin{vmatrix}x&1&0\\y&2&1\\z&3&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&0\\3&2&1\\5&3&2\end{vmatrix}=3+\begin{vmatrix}1&1&0\\3&2&1\\5&3&2\end{vmatrix}= \text{En el último determinante } C_1 = C_2 + C_3, \text{ por tanto es nulo} = 3 + 0 = 3$$

Por tanto, $\begin{vmatrix}2x&1&0\\2y&2&1\\2z&3&2\end{vmatrix}=6$ *y* $\begin{vmatrix}x+1&1&0\\y+3&2&1\\z+5&3&2\end{vmatrix}=3$

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $A\,X = \alpha\,X$ solo admite una solución. *(4 puntos)*

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $A\,X = 5\,X$. *(3 puntos)*

c) Comprobar que $X=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A\,X = 2\,X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor de β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿α? / $A\,X = \alpha X$ solo tiene una solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+4y=\alpha x \\ -x+6y=\alpha y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1-\alpha)x+4y=0 \\ -x+(6-\alpha)y=0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo, tendrá solución única (la trivial $x = y = 0$) cuando $|A| \neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix}=(1-\alpha)(6-\alpha)+4=6-\alpha-6\alpha+\alpha^2+4=\alpha^2-7\alpha+10$$

$$\alpha^2-7\alpha+10=0 \rightarrow \alpha=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm 3}{2}= \begin{cases} \alpha_1=\dfrac{7+3}{2}=5 \\ \alpha_2=\dfrac{7-3}{2}=2 \end{cases}$$

Por tanto, ***la ecuación matricial $A\,X = \alpha X$ solo admite una solución cuando $\alpha \in \Re \sim \{2, 5\}$.***

b) Soluciones de $A\,X = 5\,X$

Según lo resuelto anteriormente, el sistema que queda es:

$$\begin{cases} (1-5)x+4y=0 \\ -x+(6-5)y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \text{ simplificando la primera ecuación por 4, } \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$$

Como las dos ecuaciones son iguales, la solución es $-x + y = 0;\ \ y = x$

Por tanto, ***la solución es*** $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \Re$**.**

c) $¿\, A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}?$

Comprobemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1\cdot 4+4\cdot 1 \\ -1\cdot 4+6\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 4 \\ 2\cdot 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c.q.c.$$

$¿\beta?$ / $A^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Sabemos que $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Calculemos $A^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=A\,A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=A\,2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\,A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\cdot 2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Demostremos, por inducción, que $A^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

De los cálculos anteriores hemos comprobado que se cumple para $n = 1$ *y* $n = 2$, *supongamos que se cumple para* n *y comprobemos que se cumple para* $n+1$

$$A^{n+1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=A\,A^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=A\left[A^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right]=A\left[2^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right]=2^n\,A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=2^n\cdot 2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=2^{n+1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\qquad c.q.c$$

Por tanto, para $n = 100$, $A^{100}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=2^{100}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$; *en consecuencia* $\boldsymbol{\beta = 2^{100}}$**.**

PROBLEMA 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. *(3 puntos)*

b) Los valores de b para que la matriz A^TA tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A. *(3 puntos)*

c) La inversa de A^TA, cuando dicha inversa exista. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿b? / ∃ $(AB)^{-1}$ y $(BA)^{-1}$

Calculemos AB,

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$$\exists\,(AB)^{-1} \quad si \quad |AB|\neq 0$$

$$|AB|=\begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix}=-4b^2+12b^2-8b^2=0 \quad\rightarrow\quad no\ \exists\,(AB)^{-1}$$

Calculemos BA,

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\exists\,(BA)^{-1} \quad si \quad |BA|\neq 0$$

$$|BA|=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix}=12-2b^2$$

$$12-2b^2=0;\quad 12=2b^2;\quad b^2=6;\quad b=\pm\sqrt{6}\quad\rightarrow\quad \exists\,(BA)^{-1}\quad si\ \ b\neq\pm\sqrt{6}$$

Finalmente, ***independientemente del valor de b la matriz AB no tiene inversa y la matriz BA tiene inversa cuando*** $b\neq\pm\sqrt{6}$.

b) ¿b? / ∃ $(A^T A)^{-1}$

Calculemos $A^T A$,

$$A^T A=\begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\exists\,(A^T A)^{-1}\quad si\quad |A^T A|\neq 0. \qquad |A^T A|=\begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=8(b^2+2)$$

$$8(b^2+2)=0;\quad b^2+2=0;\quad b^2=-2;\quad b=\pm\sqrt{-2}\ \ no\ \exists$$

Por lo que, ***la inversa de $A^T A$ existe para cualquier valor real del parámetro b.***

c) Cálculo de $(A^T A)^{-1}$.

Sabemos de b) que $\left|A^T A\right| = 8\left(b^2+2\right)$

$$A^T A = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}$$

$$Y\ \left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{8\left(b^2+2\right)} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{8\left(b^2+2\right)} & \dfrac{0}{8\left(b^2+2\right)} \\ \dfrac{0}{8\left(b^2+2\right)} & \dfrac{b^2+2}{8\left(b^2+2\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\forall\, b \in \Re,\ \left(A^T A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$

Problema 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Obtened:

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a. *(3 puntos)*
b) Una matriz C tal que $A\ C = 16\ I$, siendo I la matriz identidad, cuando a = 0. *(4 puntos)*
c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

(3 puntos)

Solución:

a) ¿ran(A) en función de a?

Estudiemos /A/,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{vmatrix}=C_3-3xC_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & a & 4 \\ 1 & a^2-2 & 0 \end{vmatrix}=desarrollando\ por\ la\ 3^a\ columna=$$

$$=-4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a^2-2 \end{vmatrix}=-4(a^2-2-2)=-4(a^2-4)$$

$$-4(a^2-4)=0;\quad a^2-4=0;\quad a^2=4;\quad a=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Por tanto,

Si $a\neq -2$ *y* $2 \;\rightarrow\; /A/\neq 0 \;\rightarrow\; ran(A)=3$

Si $a=-2$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\qquad sabemos\ que\ |A|=0$$

$$como\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=2+6=8\neq 0 \;\rightarrow\; ran(A)=2$$

Si $a=2$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\qquad sabemos\ que\ |A|=0$$

$$como\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2-6=-4\neq 0 \;\rightarrow\; ran(A)=2$$

Finalmente,

Si $\boldsymbol{a\neq -2}$ ***y 2,*** $\boldsymbol{ran(A)=3}$
Si $\boldsymbol{a=-2}$ ***o*** $\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{ran(A)=2}$

b) ¿C? / A C = 16 I para a = 0.

Como $a=0$ $(a\neq -2$ *y* $2)$, $ran(A)=3$ *y existe* A^{-1}.

Sabemos que $|A|=-4\,(a^2-4) \;\rightarrow\; |A|_{a=0}=\left[-4\,(a^2-4)\right]_{a=0}=-4\,(0^2-4)=16$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\1&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\-2&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&1\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&0\\1&-2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\1&-2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3\\-1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4&2\\-12&0&4\\2&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}2&4&2\\12&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}$$

Finalmente, $A^{-1}=\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}$

Obtengamos la matriz C.
A C = 16 I, multiplicando por la izquierda por A^{-1},
$A^{-1}\,A\,C=A^{-1}\,16\,I;\quad I\,C=16\,A^{-1}\,I;\quad C=16\,A^{-1}$

Luego $C=16\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}$. ***Solución:*** $C=\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}$

c) Rango de B

$$B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\2&4&6\end{pmatrix}$$

En esta matriz $F_2=-F_1$ *y* $F_3=2\,.\,F_1$*, tiene una sola fila linealmente independiente, luego* ***ran(B) = 1***.

¿El sistema $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ *tiene solución?*

La matriz ampliada de este sistema es: $M'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\-1&-2&-3&-1\\2&4&6&2\end{array}\right)$

En esta matriz también se cumple que $F_2=-F_1$ *y* $F_3=2\,.\,F_1$*, tiene una sola fila linealmente independiente, luego ran(M) = ran(M´) = 1 < nº de incógnitas. Por tanto el sistema es compatible indeterminado.*
Luego, ***el sistema planteado tiene solución***.

Aunque no se pide, la solución del sistema sería:

De la primera ecuación despejamos x: $x=1-2y-3z\ \rightarrow\ \begin{cases}x=1-2\lambda-3\mu\\y=\lambda\\z=\mu\end{cases}\quad \lambda,\mu\in\Re$

Problema 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(4 puntos)

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4. *(3 puntos)*

c) Calcular $det\,(A^{-50})$ cuando $a^2-b^2\neq 0$ *(3 puntos)*

Solución:

a) Para que exista A^{-1}, $|A|\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{vmatrix}=a^2-b^2\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, A^{-1} \text{ cuando } a^2\neq b^2$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}\overset{menores}{\rightarrow}\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 1 & a+b \end{pmatrix}\overset{adjuntos}{\rightarrow}\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ -1 & a+b \end{pmatrix}\overset{traspuesta}{\rightarrow}\begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$Y,\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a-b}{a^2-b^2} & \frac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \frac{a+b}{a^2-b^2} \end{pmatrix},$$

$$como\ \ a^2-b^2=(a+b)(a-b),:\ A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{a-b}{a^2-b^2} & \frac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \frac{a+b}{a^2-b^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} & \frac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} \end{pmatrix}=$$

$$simplificando;\ A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{(a+b)} & \frac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \frac{1}{(a-b)} \end{pmatrix}$$

$$Debe\ cumplirse\ que\ \begin{pmatrix} \frac{1}{(a+b)} & \frac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \frac{1}{(a-b)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{cases} \frac{1}{(a+b)}=1 \\ \frac{-1}{a^2-b^2}=-1 \\ \frac{1}{(a-b)}=1 \end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases} a+b=1 \\ a^2-b^2=1 \\ a-b=1 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema formado por la primera y tercera ecuaciones, después comprobaremos que la solución cumple la segunda ecuación.

$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=1 \end{cases}$ *sumando ambas ecuaciones,* $2a=2$, $a=1$. *Sustituyendo en la 1ª,* $1+b=1$, $b=0$

Como $1^2-0^2=1$, *cumple la segunda ecuación. Y además* $1^2-0^2\neq 0$

La solución del sistema es $a=1$ *y* $b=0$.

Solución: los valores de los parámetros pedidos son $a=1$ y $b=0$.

b) Para a = 1 y b = 0, calcular A^3 *y* A^4.

Para a = 1 y b = 0, $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Calcular det (A^{-50}) *cuando* $a^2 - b^2 \neq 0$

Como $a^2 - b^2 \neq 0$*, según obtuvimos en el apartado a),* $\exists A^{-1}$

Considerando las propiedades de los determinantes: det (A . B) = det (A) . det (B) y $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$A^{-50} = \left(A^{50}\right)^{-1} \quad \rightarrow \quad \det\left(A^{-50}\right) = \det\left(\left(A^{50}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(A^{50}\right)} = \frac{1}{[\det(A)]^{50}} = \frac{1}{\left(a^2 - b^2\right)^{50}}$$

Solución: $\det\left(A^{-50}\right) = \frac{1}{\left(a^2 - b^2\right)^{50}}$

Problema 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M=(A-\alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. *(6 puntos)*

b) El valor de α, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. *(4 puntos)*

Solución:

a) Calculemos $M=(A-\alpha I)^2$.

$$A-\alpha I=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

$$(A-\alpha I)^2=\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+1-2 & \alpha+\alpha-2 & 2\alpha+2-6+2\alpha \\ \alpha+\alpha-2 & 1+\alpha^2-2 & 2\alpha+2-6+2\alpha \\ -\alpha-1+3-\alpha & -1-\alpha+3-\alpha & -2-2+(3-\alpha)^2 \end{pmatrix}=$$

$$-4+9-6\alpha+\alpha^2=\alpha^2-6\alpha+5$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 2\alpha-2 & 4\alpha-4 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2-1 & 4\alpha-4 \\ -2\alpha+2 & -2\alpha+2 & \alpha^2-6\alpha+5 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Luego},\quad M=\begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 2\alpha-2 & 4\alpha-4 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2-1 & 4\alpha-4 \\ -2\alpha+2 & -2\alpha+2 & \alpha^2-6\alpha+5 \end{pmatrix}$$

b) El valor de α*, si existe, para el cual la matriz* M *es la matriz nula.*

Para que M *sea una matriz nula todos sus elementos deben ser nulos.*

$$\begin{cases} \alpha^2-1=0 & \rightarrow\ \alpha^2=1\ \rightarrow\ \alpha=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \\ 2\alpha-2=0 & \rightarrow\ 2\alpha=2\ \rightarrow\ \alpha=1 \\ 4\alpha-4=0 & \rightarrow\ 4\alpha=4\ \rightarrow\ \alpha=1 \\ -2\alpha+2=0 & \rightarrow\ -2\alpha=-2\ \rightarrow\ \alpha=1 \\ \alpha^2-6\alpha+5=0 & \rightarrow\ \alpha=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\dfrac{6\pm 4}{2}=\begin{cases} \dfrac{6+4}{2}=5 \\ \dfrac{6-4}{2}=1 \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, todos los elemento de la matriz M *son nulos cuando* $\alpha=1$.

Solución: $\boldsymbol{\alpha=1}$.

Problema 1. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? *(2 puntos)*
b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. *(4 puntos)*
c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $A\,D = D\,A$. *(4 puntos)*

Solución:
a) ¿k? / A sea invertible.
A es invertible si /A/ ≠ 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-3k+2k-2+k^2=k^2-k-2$$

$$k^2-k-2=0 \quad \rightarrow \quad k=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} k_1=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ k_2=\dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

Por lo tanto, ***A es invertible si k ≠ – 1 y k ≠ 2****.*

b) Para k = 0, calcular A^{-1}.
Como k = 0 (k ≠ – 1 y k ≠ 2) → existe la matriz inversa de A.
Cálculo de A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A|=\left(k^2-k-2\right)\Big|_{k=0}=-2$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 & -2 & -2/3 \\ 3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 2/3 & 2 & -2/3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Y } A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Para $k = 0$, calcular las matrices diagonales D que verifican $A\,D = D\,A$.

Como A es 3x3, para que se puedan efectuar los dos productos la matriz D también es 3x3.

D es una matriz diagonal $\rightarrow$ $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$

Calculemos A D,

$$A\,D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix}.$$

Calculemos D A,

$$D\,A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix}.$$

Los dos productos deben ser iguales:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3z = 3x \\ y/3 = y/3 \\ z = y \\ 2z = 2z \\ -y = -z \\ -z = -z \end{cases} \text{ eliminando las identidades, } \begin{cases} 3z = 3x \\ z = y \\ -y = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = y \\ y = z \end{cases}$$

La 2^a y 3^a ecuaciones son la misma, queda $\begin{cases} z = x \\ z = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$, *la solución es* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Solución: las matrices diagonales buscadas son $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \Re.$

Problema 2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&2&1\\a&0&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2 X = B$ tiene una única solución. *(5 puntos)*

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2 X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a. *(5 puntos)*

Solución:

a) Calculemos A^2,

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&2&1\\a&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\3&2&1\\a&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a&0&8\\9+a&4&11\\4a&0&2a+9\end{pmatrix}$$

La ecuación $A^2 X = B$ tendrá solución única si existe la inversa de A^2, por tanto si $|A^2|\neq 0$

$$|A^2|=\begin{vmatrix}1+2a&0&8\\9+a&4&11\\4a&0&2a+9\end{vmatrix}=(1+2a)\,4\,(2a+9)-8\cdot 4\cdot 4a=4[(1+2a)(2a+9)-32a]=4(4a^2+20a+9-32a)=$$

$$=4(4a^2-12a+9). \qquad 4(4a^2-12a+9)=0; \quad 4a^2-12a+9=0$$

$$a=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 4\cdot 9}}{2\cdot 4}=\frac{12\pm 0}{8}=\frac{3}{2}$$

Solución: la ecuación $A^2 X = B$ tiene solución única si $a\neq\frac{3}{2}$.

b)

Sabemos que $\begin{pmatrix}1+2a&0&8\\9+a&4&11\\4a&0&2a+9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}(1+2a)\cdot 3+0\cdot(-2)+8\cdot(-1)\\(9+a)\cdot 3+4\cdot(-2)+11\cdot(-1)\\4a\cdot 3+0\cdot(-2)+(2a+9)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\rightarrow$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}3+6a-8\\27+3a-8-11\\12a-2a-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}6a-5\\3a+8\\10a-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\alpha=6a-5\\\beta=3a+8\\\gamma=10a-9\end{cases}$$

Solución: $\begin{cases}\alpha=6a-5\\\beta=3a+8\\\gamma=10a-9\end{cases}$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Para cada terna de números reales (x,y,z), se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{pmatrix}$$

i) Calcular los determinantes de las matrices A y B . (*1 punto*)

ii) Para x=y=z=1, calcular el determinante de la matriz producto A B . (*0,3 puntos*).

iii) Obtener, razonadamente, para que valores de x, y, z, ninguna de las matrices A y B tiene inversa. (*2 puntos*).

Solución:

i)

$$|A|=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}=5x+5z-3y-3z-5y+5x=10x-8y+2z$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{vmatrix}=-2x+z-2x-2y+2z+x=-x-4y+3z$$

ii) Para x = y = z = 1

El determinante de la matriz producto es el producto de los determinantes, luego

det (A . B) = det (A) . det (B) = (10 . 1 – 8 . 1 + 2 . 1) (– 1 – 4 . 1 + 3 . 1) = 4 (– 2) = – 8

iii) Para que A y B no tengan inversa sus determinantes deben ser nulos. Debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 10x-8y+2z=0 \\ -x-4y+3z=0 \end{cases}$$

Como es un sistema homogéneo, será compatible. Veamos el rango de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 10 & -8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=-40-8=-48\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M)=2<n^{o}\ \textit{incógnitas} \quad \rightarrow \quad S.C.\ Inde.$$

Resolvemos el sistema usando x e y como incógnitas principales,

$$\begin{cases} 10x-8y=-2z \\ -x-4y=-3z \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} :2 \\ x(-1) \end{matrix} \begin{cases} 5x-4y=-z \\ x+4y=3z \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: 6 x = 2 z ; x = z/3

Sustituyendo en la 2ª ecuación,

$$\frac{z}{3}+4y=3z \quad \rightarrow \quad 4y=3z-\frac{z}{3} \quad \rightarrow \quad 4y=\frac{8z}{3} \quad \rightarrow \quad y=\frac{2z}{3}$$

Solución: los valores de x, y, z para los que ninguna de las matrices A y B tiene inversa son:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}\lambda \\ y=\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\Re$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Para cada número real $\lambda, M(\lambda)$ es la matriz $M(\lambda)=\begin{pmatrix}4 & 3 & \lambda\\ 2 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda & -1\end{pmatrix}$ Se pide:

i) Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$, y justificar que para cualquier número real λ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$. *(1,3 puntos).*

ii) Calcular la matriz $M(0)^{-1}$ (*1 punto*)

iii) Si A=M(8), B=M(4) y C=M(3), calcúlese, razonadamente el determinante de la matriz producto $A\,B^{-1}\,C^{-1}$. (*1 punto*)

Solución:

i)

$$|M(\lambda)|=\begin{vmatrix}4 & 3 & \lambda\\ 2 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda & -1\end{vmatrix}=-4+2\lambda^2+6\lambda-\lambda^2-8\lambda+6=\lambda^2-2\lambda+2$$

Veamos para que valores de λ $|M(\lambda)|=0$

$$\lambda^2-2\lambda+2=0 \rightarrow \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$ *no tiene soluciones reales*

Es decir que para cualquier valor de $\lambda\in\Re$ $|M(\lambda)|\neq 0$ *por lo que* $\forall\lambda\in\Re \quad \exists\ M(\lambda)^{-1}$

ii)

$$M(0)=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad |M(0)|=0^2-2\,.\,0+2=2$$

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{\alpha_{ij}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 6 & 8 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ij}}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -4 & 0\\ 6 & -8 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ji}}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ 2 & -4 & -8\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\ M(0)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ 2 & -4 & -8\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 3\\ 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

iii)

Aplicando que $|A\,.\,B|=|A|\,|B|$ *y que* $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$

$$\left|A\,.\,B^{-1}\,.\,C^{-1}\right|=|A|\left|B^{-1}\right|\left|C^{-1}\right|=|A|\frac{1}{|B|}\frac{1}{|C|}=|M(8)|\frac{1}{|M(4)|}\frac{1}{|M(3)|}=$$

$$\left(8^2-2\,.\,8+2\right)\frac{1}{4^2-2\,.\,4+2}\,\frac{1}{3^2-2\,.\,3+2}=50\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{5}=1$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. a) Calcular las matrices reales de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 2X+Y=B \\ X-2Y=C \end{cases} \quad \text{donde } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ *(1,8 puntos).*

b) Si X *e* Y son las matrices anteriores, calcular la matriz *(2 X + Y) X – (2 X + Y) (2 Y)* *(1,5 puntos).*

Solución:
a)

Resolvemos el sistema por reducción $\begin{cases} 2X+Y=B \\ X-2Y=C \end{cases}$

$$x\,2 \quad \begin{cases} 4X+2Y=2B \\ X-2Y=C \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$5X=2B+C \quad \rightarrow \quad X=\frac{1}{5}(2B+C)$$

$$\begin{matrix} \\ x\,(-2) \end{matrix} \begin{cases} 2X+Y=B \\ -2X+4Y=-2\,C \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$5Y=B-2\,C \quad \rightarrow \quad Y=\frac{1}{5}(B-2\,C)$$

Calculemos las matrices X e Y.

$$X=\frac{1}{5}\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Y=\frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ -2/5 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular (2 X + Y) X – (2 X + Y) (2 Y), tendremos en cuenta que, según el sistema, 2 X + Y = B
Por lo tanto: (2 X + Y) X – (2 X + Y) (2 Y) = B X – B (2 Y) =

$$=B\,\frac{1}{5}(2B+C)-B\left(2\frac{1}{5}(B-2C)\right)=\frac{2}{5}B^2+\frac{1}{5}BC-\frac{2}{5}B^2+\frac{4}{5}BC=BC=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Determina el valor real de x para que se cumpla la siguiente propiedad:

el determinante de la matriz 2B es 160, siendo B = $\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 2 \end{pmatrix}$ (*3,3 puntos*).

Solución:
En la matriz 2B todos los elementos de la matriz B están multiplicados por 2, es decir, cada uno de los elementos de las filas (o columnas) de la matriz B está multiplicado por 2. B e una matriz 3x3, por la propiedad de los determinantes que nos dice que si multiplicamos los elementos de una fila (o columna) de una matriz por un número el determinante de esa matriz queda multiplicado por ese número obtenemos:

$$|2\,B| = 2\,.\,2\,.\,2\,|B| = 8\,|B|$$

Calculemos el determinante de B,

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 2 \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la regla de Sarrus

$= 8x + (x+1)(2-x^2) + 6x - 4x - 2x\,(2-x^2) - 6\,(x+1) =$
$= 8x + 2x + 2 - x^3 - x^2 + 6x - 4x - 4x + 2x^3 - 6x - 6 =$
$= x^3 - x^2 + 2x - 4$

Por lo tanto, $|2\,B| = 8\,(x^3 - x^2 + 2x - 4)$ *La ecuación a resolver será* $8\,(x^3 - x^2 + 2\,x - 4) = 160$,

$x^3 - x^2 + 2\,x - 4 = 20$

$x^3 - x^2 + 2\,x - 24 = 0$ *, buscamos sus raíces por Ruffini,*

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 2 & -24 \\ 3 & & 3 & 6 & 24 \\ \hline & 1 & 2 & 8 & 0 \end{array}$$

x = 3 es una solución, resolvemos la ecuación $x^2 + 2\,x + 8 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-28}}{2}$$

que no tiene soluciones reales.

Por lo tanto, el valor real de x que cumple la propiedad del enunciado es 3.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Calcular los valores x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases}, \text{ donde } X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

(3,3 puntos)

Solución:

Resolvemos el sistema planteado por reducción, multiplicamos la 2ª ecuación por (– 2)

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ -2AX + 2AY = -2C \end{cases}$$

$$-AY = B - 2C \quad \rightarrow \quad AY = 2C - B \quad \rightarrow \quad (si\ existe\ A^{-1}) \quad Y = A^{-1}(2C - B)$$

multiplicamos la 2ª ecuación por (– 3)

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ -3AX + 3AY = -3C \end{cases}$$

$$-AX = B - 3C \quad \rightarrow \quad AX = 3C - B \quad \rightarrow \quad (si\ existe\ A^{-1}) \quad X = A^{-1}(3C - B)$$

Veamos si existe A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0 \quad luego\ existe\ A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$luego \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos las matrices X e Y

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[3\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -99+95 & -270+265 \\ -33+38 & -90+106 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[2\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48+45 & -180+175 \\ -16+18 & -60+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$x_1 = -4 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 16 \qquad y_1 = -3 \quad y_2 = -5 \quad y_3 = 2 \quad y_4 = 10$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se pide

a) Probar que la matriz T tiene matriz inversa, T^{-1}, y calcular dicha matriz inversa T^{-1} *(1,3 puntos).*

b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A = T^{-1} B T$, calcular el determinante de B *(0,8 puntos).*

c) Obtener los elementos de la matriz B considerada en el apartado b) *(1,2 puntos).*

Solución:

a) La matriz T que es 3x3 tendrá inversa si su determinante es distinto de cero.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+1 = -1 \neq 0$$

Por lo que existe T^{-1}. Calculémosla.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Luego} \quad T^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $A = T^{-1} B T$, ¿$|B|$?

Por las propiedades de los determinantes,

$$|A| = |T^{-1} B T| = |T^{-1}|\,|B|\,|T| = \frac{1}{|T|}|B|\,|T| = |B|$$

$$\textit{Luego} \quad |B| = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_1}{\overset{C_2 - C_1}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

c) $A = T^{-1} B T$, ¿B?

Para obtener la expresión de la matriz B multiplicamos la igualdad dada de la siguiente forma: T por la izquierda y T^{-1} por la derecha,

$T\ A\ T^{-1} = T\ \ T^{-1} B\, T\ \ T^{-1}$

$T\ A\ T^{-1} = I\ B\ I$

$T\ A\ T^{-1} = B$, *calculamos la matriz B efectuando el cálculo matricial que la define.*

$$B=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2.2-4.1+1.2&2.2-4-1+1.4&2.1-4.1+1.3\\-1.2+3.1-1.2&-1.2+3.1-1.4&-1.1+3.1-1.3\\1.2-2.1+1.2&1.2-2.1+1.4&1.1-2.1+1.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\2&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

PROBLEMA A.1. Dadas las matrices cuadradas

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad y \quad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}$$

a) Calcular las matrices $(A – I)^2$ y $A (A – 2 I)$. *(4 puntos)*
b) Justificar razonadamente que
 b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y A – 2 I. *(2 puntos)*
 b.2) No existe la matriz inversa de la matriz A – I. *(2 puntos)*
c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda (A – 2 I)$. *(2 puntos)*

Solución:
a) Cálculo de $(A – I)^2$

$$A-I=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2-3&1+2-3&1+2-3\\2+4-6&2+4-6&2+4-6\\-3-6+9&-3-6+9&-3-6+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(A – I)^2$ es la matriz nula.

Cálculo de $A (A – 2 I)$

$$A-2I=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}$$

$$A(A-2I)=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

b) Para que exista la matriz inversa, el determinante de la matriz debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{vmatrix}=-12-6-6+9+12+4=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists A^{-1}$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{vmatrix}=-6-6+3+8=-1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists (A-2I)^{-1}$$

$$|A-I|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{vmatrix}=(como\ F_2=2F_1)=0$$ *Por lo tanto no existe la inversa de la matriz A – I.*

c) Buscamos el valor de λ / $A^{-1} = \lambda\,(A - 2I)$

Multiplicando la expresión anterior por la matriz A por la izquierda,

$A A^{-1} = A \lambda\,(A - 2I)$

como λ *es un número real,* $A\lambda = \lambda A$

$I = \lambda\, A\,(A - 2I)$

la matriz $A\,(A - 2I)$ *la hemos calculado en el apartado a), planteamos la igualdad matricial:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \lambda = -1$$

PROBLEMA B.1. Se da la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Obtener razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m. *(5 puntos)*

b) Explicar por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$. *(2 puntos)*

c) Obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando m = 1, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. Comprobar que los productos $A\,A^{-1}$ y $A^{-1}A$ dan la matriz unidad. *(3 puntos)*

Solución:

a) Rango de A.

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{vmatrix}=-m(m^2-1)-2m=-m^3+m-2m=-m^3-m$$

$$-m^3-m=0 \;\rightarrow\; -m(m^2+1)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases}-m=0 \;\rightarrow\; m=0\\ m^2+1=0 \;\rightarrow\; m^2=-1;\ \text{sin } solución\end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $m \neq 0$, ran(A) = 3

Si m=0,

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$como \;\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \;\rightarrow\; ran(A)=2$$

b) Para m = 1 sabemos, según lo calculado en el apartado anterior, que $|A| = -1^3-1=-1-1=-2\neq 0$, por lo tanto, cuando m = 1, existe la matriz inversa de A.

c) Cálculo de A^{-1} cuando m = 1

Para m = 1, $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $|A| = -2$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\ \textit{cálculo de los menores:}\ \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ -1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \textit{adjuntos:}\ \begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ +1 & -2 & +1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

traspuesta: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Y finalmente* $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Comprobemos los productos indicados,

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0+0.0+1.1 & -1\frac{-1}{2}+0.1+1\frac{-1}{2} & -1\frac{1}{2}+0.1+1\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

De forma similar obtendríamos el otro producto $A^{-1}\,A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Luego, hemos comprobado que los productos $A\,A^{-1}$ *y* $A^{-1}A$ *dan la matriz unidad.*

PROBLEMA B.1. Obtener **razonadamente**:

a) Todas las soluciones $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(4 puntos).*

b) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación $B^2 = B$. *(3 puntos).*

c) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene cuatro filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sabiendo además que el determinante de A es positivo. *(3 puntos).*

Solución:

a) Veamos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *tiene inversa.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 3 = 0, \text{ luego } \nexists\, A^{-1}$$

La ecuación matricial del enunciado da lugar al siguiente sistema:

$\begin{cases} x \quad + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$, *estudiemos este sistema. Su matriz ampliada es* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Estudiemos el rango de A.

Del cálculo inicial sabemos que $|A| = 0$ *y como* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, *rang(A) = 2*

Estudiemos el rango de A´, como ran(A) = 2 $\rightarrow$ *ran(A´)* ≥ 2. *Ampliamos el menor de orden 2 no nulo de A´, que es el obtenido anteriormente en A, con la cuarta columna y tercera fila:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 + 3 = 0 \qquad \text{Por lo tanto ran}(A') = 2$$

Lo obtenido es: ran(A) = ran(A´) = 2 < 3 = nº incógnitas $\rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado.*
Resolvemos el sistema usando las ecuaciones (1ª y 2ª) e incógnitas (x, y) que han proporcionado este rango.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x \quad + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ x + y = 3 - 3z \end{cases}$

Sustituyendo el valor de x obtenido en la 1ª ecuación en la 2ª:
$1 - 2z + y = 3 - 3z; \quad y = 3 - 1 - 3z + 2z = 2 - z$

Las soluciones del sistema son: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Finalmente, las soluciones de la ecuación matricial inicial serán: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda \\ 2 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \Re$

b) B es una matriz 2x2 / $\exists B^{-1}$ *y* $B^2 = B$. *Debemos obtener* $|B|$ *(determinante de B).*

Como $B^2 = B$

$|B^2| = |B|$, *por la propiedad de los determinantes:* $|A \cdot B| = |A| . |B|$, $|B^2| = |B|\,|B| = |B|^2$

$$|B|^2 = |B|; \quad |B|^2 - |B| = 0; \quad |B|\left(|B| - 1\right) = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} |B| = 0 \\ |B| - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad |B| = 1 \end{cases}$$

Ahora bien, como $\exists B^{-1} \quad \rightarrow \quad |B| \neq 0$

Por lo que concluimos que $|B| = 1$

c) A es una matriz 4x4 / $|A| > 0$ *y* $A^2 - 9\,I = \mathbf{0}$ *(siendo I la matriz identidad y* **0** *la matriz nula ambas de orden 4).*

Debemos obtener $|A|$.

De $A^2 - 9\,I = \mathbf{0}$; $A^2 = \mathbf{0} + 9\,I$; $A^2 = 9\,I$

$|A^2| = |9\,I|$, *por la propiedad de los determinantes aplicada en el apartado anterior:*

$|A|^2 = |9\,I|$, *como I es 4x4 entonces* $|9\,I| = 9^4$, *luego*

$$|A|^2 = 9^4 \quad \rightarrow \quad |A| = \pm\sqrt{9^4} = \pm 9^2 = \pm\, 81$$

Pero como sabemos que $|A| > 0$ *concluimos que* $|A| = 81$.

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, obtener **razonadamente** el valor de los determinantes siguientes, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$. (4 puntos)

b) $|(A+B)^{-1}A|$ y $|A^{-1}(A+B)|$. (3 puntos)

c) $|2ABA^{-1}|$ y $|A^3B^{-1}|$. (3 puntos)

Solución:

a)

$$A+B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=4+20=24$$

Por las propiedades de los determinantes sabemos que $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ *y que si A es n x n* $|\alpha A|=\alpha^n|A|$,

$$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\left(como\ (A+B)^{-1}\ es\ 3x3\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left|(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{8}\frac{1}{|A+B|}=\frac{1}{8}\frac{1}{24}=\frac{1}{192}$$

Solución: $|A+B|=24$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{192}$

b) Ahora utilizamos la propiedad que dice que $|A\ B|=|A|\,|B|$

$$|(A+B)^{-1}A|=|(A+B)^{-1}|\,|A|=\frac{1}{|A+B|}|A|=\frac{1}{24}4=\frac{1}{6}$$

Del apartado anterior sabemos que $|A+B|=24$. *Calculemos* $|A|=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{vmatrix}=4$

$$|A^{-1}(A+B)|=|A^{-1}|\,|A+B|=\frac{1}{|A|}|A+B|=\frac{1}{4}24=6$$

Solución: $|(A+B)^{-1}A|=\frac{1}{6}$ y $|A^{-1}(A+B)|=6$

c) Calculemos $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$$\left|2\ A\ B\ A^{-1}\right| = (como\ \left(A\ B\ A^{-1}\right) es\ 3x3) = 2^3\ |A|\,|B|\,\left|A^{-1}\right| = 8\ |A|\,|B|\ \frac{1}{|A|} = 8\ |B| = 8\ (-4) = -32$$

$$\left|A^3\ B^{-1}\right| = \left|A^3\right|\left|B^{-1}\right| = |A|^3\ \frac{1}{|B|} = 4^3\ \frac{1}{-4} = -16$$

Solución: $\left|2\ A\ B\ A^{-1}\right| = -32$ *y* $\left|A^3\ B^{-1}\right| = -16$

Matemáticas II Junio 2014

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A. *(3 puntos)*

b) La matriz X que es solución de la ecuación $A\,X = B\,C$. *(4 puntos)*

c) El determinante de la matriz $2\,M^3$, siendo M una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale 1/2. *(3 puntos)*

Solución:

a) Calculemos $|A|$ para asegurarnos de que existe A^{-1}.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, A^{-1}$$

Calculamos A^{-1} por el método de los adjuntos,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{menores}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{adjuntos}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Finalmente, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) Obtener la matriz X / $A\,X = B\,C$

En el apartado anterior hemos obtenido la matriz A^{-1}*, multiplicando la ecuación anterior por* A^{-1} *por la izquierda:* $A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B\,C \;\rightarrow\; I\,X = A^{-1}\,B\,C \;\rightarrow\; X = A^{-1}\,B\,C$

Calculemos la matriz X *mediante el producto anterior,*

$$X = A^{-1}\,B\,C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2)+1\,.\,1-2(-1) \\ 0(-2)+1\,.\,1-1(-1) \\ 0(-2)+0\,.\,1+1(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

c) Sabemos que M *es una matriz* $2x2$ *y que* $|M| = \frac{1}{2}$*, hay que calcular* $|2\,M^3|$

De las propiedades de los determinantes sabemos que $|M\;N| = |M|\,|N|$ *y que si* M *es* $n\,x\,n$ $|\alpha\,M| = \alpha^n\,|M|$.

$$|2\,M^3| = |2\,M\;M\;M| = |2\,M\;|\,|M|\,|M| = 2^2\,|M|\,|M|\,|M| = 4\,(|M|)^3 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4\,\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Solución: $|2\,M^3| = \frac{1}{2}$

PROBLEMA A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa de la matriz A. *(2 puntos)*

b) Las matrices X e Y de orden 2 x 2 tales que $X A = B$ y $A Y = B$. *(2 + 2 puntos)*

c) **Justificar razonadamente** que si M una matriz cuadrada tal que $M^2 = I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que M, entonces se verifica la igualdad $M^3 = M^7$. *(4 puntos)*

Solución:

a) A^{-1}?

Comprobemos si existe A^{-1}.

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix} = 2+6 = 8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Finalmente, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/8 & 3/8\\ -2/8 & 1/8\end{pmatrix}$, *simplificando las fracciones:*

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix}1/4 & 3/8\\ -1/4 & 1/8\end{pmatrix}$

b) ¿ X ? / $X\ A = B$

En el apartado anterior hemos obtenido A^{-1}. *Multiplicando por* A^{-1} *por la derecha:*

$X A A^{-1} = B A^{-1} \;\rightarrow\; X I = B A^{-1} \;\rightarrow\; X = B A^{-1}$, *por lo que*

$$X = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/8 & 3/8\\ -2/8 & 1/8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{8}-\frac{6}{8} & \frac{3}{8}+\frac{3}{8}\\ \frac{4}{8}+\frac{4}{8} & \frac{6}{8}-\frac{2}{8}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4/8 & 6/8\\ 8/8 & 4/8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}$$

¿ Y ? / $A\ Y = B$, *multiplicando por* A^{-1} *por la izquierda:*

$A^{-1} A\, Y = A^{-1} B \;\rightarrow\; I\, Y = A^{-1} B \;\rightarrow\; Y = A^{-1} B$, *luego:*

$$Y = \begin{pmatrix}2/8 & 3/8\\ -2/8 & 1/8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{8}+\frac{6}{8} & \frac{6}{8}-\frac{6}{8}\\ \frac{-2}{8}+\frac{2}{8} & \frac{-6}{8}-\frac{2}{8}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/8 & 0\\ 0 & -8/8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}$ *e* $Y = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

c) Sea M una matriz cuadrada / $M^2 = I$, ¿$M^3 = M^7$?

Podemos resolverlo de dos formas diferentes:

**) Calculemos, por separado, M^3 y M^7*

$$\left.\begin{array}{l} M^3 = M^2\, M = (\text{como } M^2 = I) = I\ M = M \\ M^7 = M^2\, M^2\, M^2\ M = I\ I\ I\ M = M \end{array}\right\} \rightarrow \quad M^3 = M^7 \quad c.q.c.$$

***) Veamos si a partir de M^7 llegamos a M^3,*

$$M^7 = M^2\, M^2\, M^3 = I\ I\ M^3 = M^3 \qquad c.q.c.$$

PROBLEMA B.1. Se da la matriz $A=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $A^{-1} = 5^{-1} A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. *(4 puntos)*

b) Los valores del parámetro real λ para los cuales $A - \lambda I$ no es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. *(3 puntos)*

c) El determinante de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que 0 y verifica la ecuación $B^{-1} = B^t$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿ $A^{-1} = 5^{-1} A^t$?

Calculemos A^{-1}. *Comprobemos si existe* A^{-1}.

$$|A|=\begin{vmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=\sqrt{5}+4\sqrt{5}=5\sqrt{5}\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5}\\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5}\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{5} & -2\sqrt{5}\\ 0 & 2\sqrt{5} & \sqrt{5}\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5}\\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5}\end{pmatrix}$$

$$Y,\quad A^{-1}=\frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5}\\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}/5 & 0 & 0\\ 0 & 1/5 & 2/5\\ 0 & -2/5 & 5\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}A^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}/5 & 0 & 0\\ 0 & 1/5 & 2/5\\ 0 & -2/5 & 1/5\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $A^{-1} = 5^{-1} A^t$.

Otra forma de realizar la comprobación es la siguiente:

Partimos de $A^{-1} = 5^{-1} A^t$,

Multiplicamos por la derecha por A, $A^{-1} A = 5^{-1} A^t A$

Como, $A^{-1} A = I$ *(siendo I la matriz identidad de orden 3),* $I = 5^{-1} A^t A \rightarrow A^t A = 5\, I$.

Comprobemos esta última igualdad.

$$A^tA=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=5\,I \quad c.q.c$$

Por tanto, $A^{-1} = 5^{-1} A^t$.

b) ¿ $\lambda \in \Re$? / A – λI no es invertible

Calculemos A – λI,

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -2\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

Para que A – λI no sea invertible, $/A-\lambda I/=0$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -2\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\left(\sqrt{5}-\lambda\right)(1-\lambda)^2+4\left(\sqrt{5}-\lambda\right)=\left(\sqrt{5}-\lambda\right)\left[(1-\lambda)^2+4\right]$$

Resolvamos la ecuación:

$$\left(\sqrt{5}-\lambda\right)\left[(1-\lambda)^2+4\right]=0\quad\left\langle\begin{array}{l}\sqrt{5}-\lambda=0 \;\rightarrow\; \lambda=\sqrt{5}\\ (1-\lambda)^2+4=0 \;\rightarrow\; (1-\lambda)^2=-4 \;\rightarrow\; 1-\lambda=\pm\sqrt{-4}\quad \text{no existe}\end{array}\right.$$

Solución: A – λI no es invertible para $\lambda=\sqrt{5}$.

c) ¿ $/B/$? / B es una matriz cuadrada, / $/B/>0$ y $B^{-1}=B^t$

Como $B^{-1}=B^t \rightarrow /B^{-1}/=/B^t/$

Por las propiedades de los determinantes, $/B^{-1}/=\dfrac{1}{|B|}$ *y* $/B^t/=/B/$

Por tanto, $\dfrac{1}{|B|}=|B| \;\rightarrow\; 1=|B|^2 \;\rightarrow\; |B|=\pm\sqrt{1}=\pm 1$, *pero* $/B/>0$, *por lo que* $/B/=1$.

Solución: $/B/=1$.

PROBLEMA B.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $C^2 = 2\,C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3 x 3, *(2,5 puntos)*
y el valor de la matriz C^4. *(2,5 puntos)*

b) El valor del determinante de la matriz $\left(3\,A^4\right)\left(4\,A^2\right)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1. *(3 puntos)*

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B\,B = B$. *(2 puntos)*

Solución:

a) Comprobemos que $C^2 = 2\,C - I$.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5-4.2-2.\,4 & -5.4+4.1+2.4 & 5.2-4.1-2.1 \\ 2.5-1.2-1.4 & -2.4+1.1+1.4 & 2.2-1.1-1.1 \\ -4.5+4.2+1.4 & 4.4-4.1-1.4 & -4.2+4.1+1.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el mismo resultado; por lo tanto queda comprobado que $\boldsymbol{C^2 = 2\,C - I}$.

Calculemos C^4,

$$C^4 = C^2 \,.\, C^2 = (2\,C - I)\,.\,(2\,C - I) = 2\,C\,2\,C - 2\,C\,I - I\,2\,C + I^2 = 4\,C^2 - 2\,C - 2\,C + I =$$
$$= 4\,C^2 - 4\,C + I = 4\,(2\,C - I) - 4\,C + I = 8\,C - 4\,I - 4\,C + I = 4\,C - 3\,I =$$

$$4C - 3I = 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Luego, $C^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

b) $|A| = -1$ *y* A *es 4x4*

Calculemos $\left| \left(3\,A^4\right)\left(4\,A^2\right)^{-1} \right|$

Considerando las propiedades de los determinantes:

$|A\,B| = |A|\,|B|$, $\quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ $\quad$ *y* $\quad |n\,A| = n^4\,|A|$ $\quad$ *(por ser A 4x4)*

$$\left| \left(3\, A^4\right)\left(4\, A^2\right)^{-1} \right| = \left|3\, A^4\right| \left|\left(4\, A^2\right)^{-1}\right| = 3^4 \left|A^4\right| \frac{1}{\left|\left(4\, A^2\right)\right|} = 3^4 \left|A\right|^4 \frac{1}{4^4 \left|A^2\right|} = 81 \,.\, (-1)^4 \;\frac{1}{256 \left|A^2\right|} = \frac{81}{256 \left|A\right|^2} =$$

$$= \frac{81}{256\,(-1)^2} = \frac{81}{256}$$

Solución: $\left| \left(3\, A^4\right)\left(4\, A^2\right)^{-1} \right| = \frac{81}{256}$**.**

c) ¿ matriz B ? / existe B^{-1} *y* $B\,B = B$

Partimos de $B\,B = B$, *como existe* B^{-1} *multiplicamos la igualdad por* B^{-1} *por la izquierda,*

$B^{-1}\, B\, B = B^{-1}\, B$

$I\, B = I$

$B = I$

Solución: B = I (B es la matriz identidad).

PROBLEMA B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = a\,A + b\,I$. *(3 puntos)*
b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$. *(4 puntos)*
c) El determinante de la matriz $2\,B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinantes es 2. *(3 puntos)*

Solución:
A es una matriz cuadrada / $A^2 + 2A = 3I$. *Comprobemos que existe* A^{-1}

$$A^2 + 2A = 3I \;\rightarrow\; A(A+I) = 3I \;\rightarrow\; A\left[\frac{1}{3}(A+I)\right] = I \;\rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{3}(A+I)$$

a) ¿a, b / $A^{-1} = a\,A + b\,I$?.
Partimos de $A^2 + 2A = 3I$.
multiplicamos por la derecha por A^{-1}, $A^2A^{-1} + 2AA^{-1} = 3IA^{-1} \;\rightarrow\; A(AA^{-1}) + 2AA^{-1} = 3IA^{-1}$

$$AI + 2I = 3A^{-1} \;\rightarrow\; A + 2I = 3A^{-1} \;\rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$$

Por tanto, $a = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$.

b) ¿α, β / $A4 = \alpha A + \beta I$?
Partimos de $A^2 + 2A = 3I \;\rightarrow\; A^2 = 3I - 2A$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (3I - 2A)\cdot(3I - 2A) = 9II - 6IA - 6IA + 4A^2 = 9I - 6A - 6A + 4A^2 =$$
$$= 9I - 12A + 4A^2 = 9I - 12A + 4(3I - 2A) = 9I - 12A + 12I - 8A = -20A + 21\cdot I$$

Por tanto, $\boldsymbol{\alpha = -20}$ ***y*** $\boldsymbol{\beta = 21}$.

c) $|2B^{-1}|$, *sabiendo que B es 3x3 y* $|B| = 2$
Calculemos $|2B^{-1}|$
Considerando las propiedades de los determinantes:

$$|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} \quad y \quad |n\,b| = n^3\,|B| \quad (\text{por ser } B \;\; 3x3)$$

$$|2B^{-1}| = 2^3\,|B^{-1}| = 8\,\frac{1}{|B|} = 8\,\frac{1}{2} = 4$$

Solución: $\boldsymbol{|2B^{-1}| = 4}$

PROBLEMA A.1. Se dan la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$ siendo I la matriz identidad de orden 3. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2\,A^{-1}$ cuando $a = 1$. *(2 + 2 puntos)*

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. *(3 puntos)*

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = m\,B + n\,I$. *(3 puntos)*

Solución:

a) Rango de A.

A es 3x3, su máximo rango es 3.

Estudiamos su menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix}=a(a+1)-2(a-1)a+3a(a+1)=a^2+a-2a^2+2a+3a^2+3a-2a+2=$$

$$=2a^2+4a+2$$

$$2a^2+4a+2=0 \quad\rightarrow\quad a^2+2a+1=0 \quad\rightarrow\quad a=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.1}}{2.1}=\frac{-2}{2}=-1$$

Por lo tanto,

Si $a\neq-1$, $|A|\neq 0 \rightarrow ran(A)=3$

Si $a=-1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

sabemos que $|A|=0$, *como el menor* $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=4\neq 0 \rightarrow ran(A)=2$

Luego, ***si*** $\boldsymbol{a\neq-1}$***,*** $\boldsymbol{ran(A)=3}$ ***y si*** $\boldsymbol{a=-1}$***,*** $\boldsymbol{ran(A)=2}$***.***

Cuando $a=1$, ¿ $|2\,A^{-1}|$?

Si $a=1$ $(a\neq-1)$, *luego* $|A|\neq 0 \rightarrow \exists\, A^{-1}$

Entonces, $|2\,A^{-1}|=(\text{como } A \text{ es } 3x3)\ 2^3\,|A^{-1}|=8\,\frac{1}{|A|}$.

Para $a=1$, $|A|=(2a^2+4a+2)_{a=1}=2.1^2+4.1+2=8$ *y, finalmente,* $|2\,A^{-1}|=8\,\frac{1}{8}=1.$

b) Para $a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

El sistema a resolver es: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

La matriz ampliada de este sistema es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Por lo estudiado en el apartado a), sabemos que $|A| = 0$ *y que* $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$

Calculemos el rango de A´,
al menor de A no nulo le añadimos la 4ª columna de A´ y 1ª fila de A´,

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (F_2 = -2xF_1) = 0 \rightarrow ran(A') = 2$

Luego, ran(A) = ran(A´) = 2 < 3 = nº de incógnitas $\rightarrow$ *Sistema compatible indeterminado.*

Resolvemos el sistema utilizando las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo,

$\begin{cases} -2x = 2 - 2z \\ -3x - 2y = z \end{cases}$ *De la 1ª ecuación,* $x = -1 + z$
Sustituyendo en la 2ª,

$-3(-1+z) - 2y = z; \quad -2y = z + 3(-1+z)$
$-2y = z - 3 + 3z$
$-2y = -3 + 4z$
$y = \frac{-3+4z}{-2} = \frac{3}{2} - 2z$

Por lo que la solución pedida será: $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \frac{3}{2} - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

c) Comprobar que B es invertible.
¿Existe una matriz B^{-1} *de manera que* $B^{-1} . B = I$*?*

Sabemos que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \rightarrow 3B^2 = I - 6B \rightarrow 3B^2 + 6B = I \rightarrow (3B + 6I)B = I$

Por tanto, $B^{-1} = 3B + 6I$

Y además, m = 3 y n = 6

Problema 4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m. *(4 puntos)*
b) Explicad cuando la matriz A es invertible. *(2 puntos)*
c) Resolved la ecuación $X\,A = I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m = 1$. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿ran(A) en función de m?

Estudiemos /A/,

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{vmatrix} = -m(m^2+1) - 2m^2 = -m^3 - m = -m^3 - 2m^2 - m = -m(m^2+2m+1) =$$

$$= -m\,(m+1)^2$$

$$-m\,(m+1)^2 = 0 \begin{cases} -m = 0 \;\rightarrow\; m = 0 \\ (m+1)^2 = 0 \;\rightarrow\; m+1 = 0 \;\rightarrow\; m = -1 \end{cases}$$

Por tanto,

Si $m \neq -1$ *y* $0 \;\rightarrow\; |A| \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 3$

Si $m = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{sabemos que } |A| = 0, \quad \text{como } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$$

Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{sabemos que } |A| = 0, \quad \text{como } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$$

Finalmente,

Si $\boldsymbol{m \neq -1}$ ***y 0,*** $\boldsymbol{ran(A) = 3}$

Si $\boldsymbol{m = -1}$ ***o*** $\boldsymbol{m = 0}$, $\boldsymbol{ran(A) = 2}$

b) La matriz A, una matriz cuadrada, será invertible cuando su determinante sea distinto de 0.

Luego, ***A es invertible para*** $\boldsymbol{m \neq -1}$ ***y 0*** *c) Para $m = 1$, resolved $X A = I$.*

Si $m = 1$ $\{m \neq -1$ y $0\}$, por tanto A es invertible.

Conociendo A^{-1}, la solución de la ecuación $X A = I$ será:

Partimos de la ecuación a resolver: $X A = I$

Multiplicamos por A^{-1} por la derecha: $X A A^{-1} = I A^{-1}$

Como $A A^{-1} = I$, queda: $X = A^{-1}$

$$Si\ m = 1, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $|A| = -m\,(m+1)^2 \quad \rightarrow \quad |A|_{m=1} = \left[-m\,(m+1)^2\right]_{m=1} = -1\,(1+1)^2 = -4$

Calculemos A^{-1},

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Finalmente, \quad A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Solución: $$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide

a) Demostrar que $C - A\,B^T$ tiene inversa y calcularla. *(4 puntos)*
b) Calcular la matriz X que verifica $C\,X = A\,B^T\,X + I$, donde I es la matriz identidad. *(3 puntos)*
c) Justificar que $(A\,B^T)^n = 2^n\,I$ para todo número natural n. *(3 puntos)*

Solución:

a) Cálculo de $C - A\,B^T$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\,B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C - A\,B^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de $C - A\,B^T$

$$\left|C - A\,B^T\right| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \exists\left(C - A\,B^T\right)^{-1}$$

Calculemos la inversa de $C - A\,B^T$

$$C - A\,B^T=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $\left(C - A\,B^T\right)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

Por tanto $\boldsymbol{C - A\,B^T}$ ***tiene inversa y es*** $\begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

b) Matriz X*?* / $C\,X = A\,B^T\,X + I$

$C\,X = A\,B^T\,X + I \rightarrow C\,X - A\,B^T\,X = I \rightarrow (C - A\,B^T)\,X = I$, *por tanto* $X = (C - A\,B^T)^{-1}$

Luego, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

c) Justificar que $(A\,B^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n.

En el apartado a) hemos obtenido que $A\,B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\,I \quad \rightarrow \quad \left(A\,B^T\right)^1 = 2^1\,I.$

Calculemos $\left(A\,B^T\right)^2$

$$\left(A\,B^T\right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I\;2I = 4\,I^2 = 2^2\,I\,,\quad \text{se cumple para } n = 2.$$

Supongamos que se cumple $\left(A\,B^T\right)^n = 2^n\,I$, *comprobemos que también se cumple para $n+1$.*

$\left(A\,B^T\right)^{n+1} = \left(A\,B^T\right)^n\left(A\,B^T\right) = 2^n\,I\;2\,I = 2^{n+1}\,I^2 = 2^{n+1}\,I$, *que es lo que queríamos comprobar.*

Por inducción hemos comprobado que: ***$(A\,B^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n.***

Problema 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. *(4 puntos)*
b) La matriz inversa de A en el caso $m=2$. *(4 puntos)*
c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a **–**8. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿ran(A) en función de m?

Estudiemos /A/,

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix}=m^3-4m^2(m-1)-2m^2=m^3-4m^3+4m^2-2m^2=-3m^3+2m^2=m^2(2-3m)$$

$$m^2(2-3m)=0 \begin{cases} m^2=0 \quad \rightarrow \quad m=0 \\ 2-3m=0 \quad \rightarrow \quad 2=3m \quad \rightarrow \quad m=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto,

Si $m\neq 0$ *y* $\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ $/A/\neq 0$ $\rightarrow$ *ran(A) = 3*

Si $m=\frac{2}{3}$,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}-1 \\ -2\frac{2}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 & 1 \\ 0 & 2\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

sabemos que $|A|=0$

como $\begin{vmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 4/9 \end{vmatrix}=\frac{2}{3}\frac{4}{9}=\frac{8}{27}\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$

Si m = 0,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sabemos que $|A|=0$

Cualquier menor de orden 2 de esta matriz contiene una columna de ceros por lo que los menores de orden dos son nulos.

Como, por ejemplo, $|-1|=-1\neq 0$ $\rightarrow$ *ran(A) = 1*

Finalmente,

Si $m\neq 0$ ***y*** $\frac{2}{3}$, ***ran(A) = 3;*** ***si*** $m=\frac{2}{3}$, ***ran(A) = 2*** ***y*** ***si m = 0, ran(A) = 1***

b) ¿A^{-1}, para m = 2?

Como $2 \neq 0$ y $\dfrac{2}{3}$, por lo calculado en el apartado anterior, $/A/ \neq 0 \;\rightarrow\; \exists\, A^{-1}$

$$Si\ m = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $|A| = m^2(2-3m) \;\rightarrow\; |A|_{m=2} = \left[m^2(2-3m)\right]_{m=2} = 2^2(2-3\cdot 2) = -16$

Calculemos A^{-1},

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -16 \\ -4 & 2 & 8 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Finalmente, \quad A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución: $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) ¿m? // 2 A / = – 8

/ 2 A / = {por se A 3x3} 2^3 /A / = 8 /A / $\rightarrow$ 8 /A / = – 8 $\rightarrow$ /A / = – 1

Como $|A| = m^2(2-3m)$ *debemos resolver:*

$m^2(2-3m) = -1 \;\rightarrow\; 2m^2 - 3m^3 = -1 \;\rightarrow\; -3m^3 + 2m^2 + 1 = 0$

Resolviendo la ecuación por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & & -3 & -1 & -+ \\ \hline & -3 & -1 & -1 & \lfloor 0 \rfloor \end{array}$$

Queda por resolver $-3m^2 - m - 1 = 0; \quad 3m^2 + m + 1 = 0$

$m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-11}}{6}$ sin *soluciones reales*

La única solución es $m = 1$

Por tanto, / 2 A / = – 8 para m = 1.

Problema 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $(A\ B^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. *(6 puntos)*

b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. *(4 puntos)*

Solución:

a) Cálculo de $A\ B^T + I$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A\ B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A\ B^T + I=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de $A\ B^T + I$

$$\left|A\ B^T + I\right|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \rightarrow \exists\left(A\ B^T + I\right)^{-1}$$

Calculemos la inversa de $A\ B^T + I$

$$A\ B^T + I=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $$\left(A\ B^T + I\right)^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$$

Solución: $$\left(A\ B^T + I\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$$

b) ¿ $C^2 = -\alpha^3 I$ *?*

$$C^2=\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix}=-\alpha^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-\alpha^3\ I$$

Comprobado que $\boldsymbol{C^2 = -\alpha^3 I}$

Cálculo de C^{13},

Utilizamos el resultado obtenido antes ($C^2 = -\alpha^3 I$)

$$C^{13}=C^{12}\ C=\left(C^2\right)^6\ C=\left(-\alpha^3\ I\right)^6\ C=\alpha^{18}\ I^6\ C=\alpha^{18}\ I\ C=\alpha^{18}\ C=\alpha^{18}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $$C^{13}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. *(3 puntos)*
b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $A X = B$. *(4 puntos)*
c) Para $m = -1$, calcular A^5. *(3 puntos)*

Solución:
a) Rango de A en función de m.
A es 3x3 por tanto el máximo rango de A es 3.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = \{desarrollando\ por\ la\ 2^{a}\ fila\} = m\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix} = m(m-m^2)$$

$$m(m-m^2)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m=0 \\ m-m^2=0 \quad \rightarrow \quad m(1-m)=0 \begin{cases} m=0 \\ 1-m=0 \rightarrow m=1 \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto,
Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, ran(A) = 3.

Si $m = 0$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad Sabemos\ que\ |A|=0$$

$$como \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$$

Si $m = 1$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad Sabemos\ que\ |A|=0$$

$$como \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$$

Solución:
Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, ran(A) = 3.
Si $m = 0$ o $m = 1$, ran(A) = 2.

b) Para $m = -1$, resolver $A X = B$

Para $m = -1$ ($m \neq 0$ y $m \neq 1$) $\rightarrow$ ran(A) = 3, por lo tanto existe la matriz inversa de A.

Obtendremos X de la siguiente forma: $A X = B$, multiplicando por la izquierda por A^{-1}, $A^{-1} A X = A^{-1} B$, $X = A^{-1} B$

Cálculo de A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = m\left(m - m^2\right)\Big|_{m=-1} = -1(-1-1) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Finalmente } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1.1-3.0-1.0 & 1.0-3.1-1.0 \\ 0.1-2.0-0.0 & 0.0-2.1-0.0 \\ -1.1+1.0-1.0 & -1.0+1.1-1.0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) Para $m = 0$, calcular A^5.

Para $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A^4 = A^2\, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 1.1. Dadas las matrices $B(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $C(y)=\begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

a) Calcular el determinante de la matriz $3B(x)$ y obtener el valor de x para el que dicho determinante vale 162. *(1,8 puntos).*
b) Demostrar que la matriz $C\ (y)$ no tiene inversa para ningún valor real de y. *(1,5 puntos).*

Solución:
a)

$$|3\ B(x)| = 3^3\ |B(x)| = 27 \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \quad \textit{desarrollando por la } 1^a \textit{ columna,}$$

$$= 27\left[(x+2)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - (2x+3)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (4x+4)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \right] = 27\left[(x+2)(18-12)-(2x+3)(24-12)+(4x+4)(24-18)\right]$$

$$= 27\left[(x+2)\ 6-(2x+3)\ 12+(4x+4)\ 6\right] = 27\left[6x+12-24x-36+24x+24\right] = 162x$$

$$162x = 162 \quad \rightarrow \quad x = \frac{162}{162} = 1$$

b) Calculemos su determinante,

$$|C(y)| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (3y+5)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - (2y+3)\begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (3y+4)\begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (3y+5)\ (18-12) - (2y+3)(\ 42-24) + (3y+4)\ (42-36) = (3y+5)\ 6 - (2y+3)\ 18 + (3y+4)\ 6 =$$

$$= 18y+30-36y-54+18y+24 = 0$$

Como el determinante de C(y) es nulo, no existe la matriz inversa de C(y).

Problema 1.2. Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$

Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3. *(1,8 puntos).*

b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3=\alpha\, I+\beta\, A$. *(1,8 puntos).*

Solución:

a)

Cálculo de A^2

$$A^2 = A\,.\,A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\,.\,17-29\,.\,10 & 17\,.\,29-29\,.\,17\\ -10\,.\,17+17\,.\,10 & -10\,.\,29+17\,.\,17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $A^2 = -I$

Cálculo de A^3

$A^3 = A^2\,.\,A = -I\,.\,A = -A$

$$A^3=-A=-\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17 & -29\\ 10 & 17\end{pmatrix}$$

b) Utilizaremos los resultados del anterior apartado $A^2 = -I$ *y* $A^3 = -A$

$$(I+A)^3=(I+A)^2(I+A)$$

$$(I+A)^2=(I+A)(I+A)=I.I+I.A+A.I+A.A=I+A+A+A^2=I+2A-I=2A$$

$$(I+A)^3=2A(I+A)=2AI+2AA=2A+2A^2=2A-2I=-2I+2A$$

por lo que $\alpha=-2$ *y* $\beta=2$

Problema 1.1. Dadas las matrices cuadradas $A=\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}18&48&12\\0&18&12\\0&0&6\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

se pide:

a) Justificar que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} , incluyendo en la respuesta todos los pasos que llevan a la obtención de A^{-1}. *(1,1 puntos).*

b) Calcular, razonadamente, el determinante de la matriz $3\,A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados. *(1,1 puntos).*

a) Obtener razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación $x\,I + y\,A + z\,A^2 = B$. *(1,1 puntos).*

Solución:

a) Justificar que la matriz A tiene inversa.

$$Calculemos \quad |A|=\begin{vmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{vmatrix}=3.3.1=9\neq 0 \quad luego \quad \exists\, A^{-1}$$

Cálculo de A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\alpha_{ij}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&3\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}6&0\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&0\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&6\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}6&0\\3&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&0\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&6\\0&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\6&3&0\\12&6&9\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ij}}$$

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\-6&3&0\\12&-6&9\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ji}}\begin{pmatrix}3&-6&12\\0&3&-6\\0&0&9\end{pmatrix}$$

$$luego \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A_{ji}\right)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-6&12\\0&3&-6\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&4/3\\0&1/3&-2/3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

En el proceso de cálculo de A^{-1} cada uno de los pasos realizados son los siguientes,

α_{ij}	*Formar una matriz con los menores complementarios de cada elemento*
A_{ij}	*Obtener los adjuntos de cada elemento cambiando el signo alternativamente*
A_{ji}	*Trasponer la matriz anterior.*

b) Calcular $|3\,A^{-1}|$

Como A^{-1} es una matriz 3x3, $|3\,A^{-1}| = 3^3\,|A^{-1}| = 27\,|A^{-1}| =$

También sabemos que $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ *luego,*

$$=27\frac{1}{|A|}=27\frac{1}{9}=3$$

c) Resolver $x\,I + y\,A + z\,A^2 = B$

Calculemos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3+6.0+0.0 & 3.6+6.3+0.0 & 3.0+6.2+0.1 \\ 0.3+3.0+2.0 & 0.6+3.3+2.0 & 0.0+3.2+2.1 \\ 0.3+0.0+1.0 & 0.6+0.3+1.0 & 0.0+0.2+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación que debemos resolver es

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

expresión que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x+3y+9z=18 \\ 6y+36z=48 \\ 12z=12 \\ 0=0 \\ x+3y+9z=18 \\ 2y+8z=12 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Eliminando las ecuaciones repetidas y las que no aportan información (0 = 0),

$$\begin{cases} x+3y+9z=18 \\ 6y+36z=48 \\ 12z=12 \\ 2y+8z=12 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Simplificando coeficientes

$$\begin{cases} x+3y+9z=18 \\ y+6z=8 \\ z=1 \\ y+4z=6 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de z que nos aporta la 3ª ecuación en las restantes, el sistema quedará:

$$\begin{cases} x+3y+9.1=18 \\ y+6.1=8 \\ y+4.1=6 \\ x+y+1=6 \end{cases}$$

Efectuando las operaciones pendientes,

$$\begin{cases} x+3y=9 \\ y=2 \\ y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y obtenido en la 2ª y 3ª ecuaciones en las restantes,

$$\begin{cases} x+3.2=9 \\ x+2=5 \end{cases}$$

Efectuando las operaciones pendientes,

$$\begin{cases} x=3 \\ x=3 \end{cases}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación inicial es: x = 3, y = 2, z = 1

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dadas las matrices reales:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

se pide :

a) Calcular la matriz $M = A - 2\,B\,C$. (*1 punto*)

b) Justificar que existe la matriz D^{-1} inversa de D y calcular tal matriz. (*0,9 puntos*)

c) Calcular las matrices X, Y que cumplen $D\,X = M = Y\,D$. (*1,4 puntos*)

Solución:

a) $M = A - 2\,B\,C =$

$$=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2-3-1 & -1+2-4\\ 4+9+2 & -2-6+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 15 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 6\\ -30 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 14\\ -21 & 4\end{pmatrix}$$

b) *La matriz inversa de D existirá si el determinante de D es distinto de cero;*

$$|D|=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-7=-1\neq 0 \quad luego \quad \exists\, D^{-1}$$

Calculemos D^{-1}

$$D=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\alpha_{ij}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ij}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ji}}\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$D^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

c) *D X = M, multiplicando por la izquierda por* D^{-1}

$D^{-1}\,D\,X = D^{-1}\,M$; $\quad I\,X = D^{-1}\,M$; $\quad X = D^{-1}\,M$

$$X=D^{-1}M=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 14\\ -21 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18-147 & -28+28\\ 9+63 & 14-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-165 & 0\\ 72 & 2\end{pmatrix}$$

Y D = M, multiplicando por la derecha por D^{-1}

$Y\,D\,D^{-1} = M\,D^{-1}$; $\quad Y\,I = M\,D^{-1}$; $\quad Y = M\,D^{-1}$

$$Y=MD^{-1}=\begin{pmatrix}9 & 14\\ -21 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18+14 & 63-42\\ 42+4 & -147-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 21\\ 46 & -159\end{pmatrix}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Considerar las matrices: A = $\begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores reales de m es A inversible? Calcular la matriz A^{-1} (*2 puntos*).

b) En la anterior matriz A con m = 0, obtener la matriz real cuadrada X de orden 3 que satisface la igualdad B – A X = A B (*1,3 puntos*).

Solución:

a) *A será inversible si y sólo si* $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{vmatrix} = 3 - 5m + m(m+1) = 3 - 5m + m^2 + m = m^2 - 4m + 3$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \quad \to \quad m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = 1 \end{cases}$$

A es inversible para m ≠ 1 y m ≠ 3

Calculemos A^{-1}

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m+4 & 1 \\ -m^2 - m - 3 & -15 & -5m \\ -m & -3 & -m \end{pmatrix} \to (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & m-4 & 1 \\ m^2 + m + 3 & -15 & 5m \\ -m & 3 & -m \end{pmatrix}$$

$$(A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & m^2 + m + 3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{m^2 - 4m + 3} \begin{pmatrix} 1 & m^2 + m + 3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix} \quad \textit{para} \quad m \neq 1 \quad \textit{y} \quad m \neq 3$$

b) *La matriz A para m = 0 es* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Buscamos una matriz X / B – A X = A B, despejemos X

– A X = – B + A B

A X = B – A B

X = A^{-1}*(B – A B) =* A^{-1} *B –* A^{-1} *A B =* A^{-1} *B – B =(* A^{-1} *– I) B*

calculemos la expresión obtenida finalmente,

$$\textit{Para } m = 0 \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -5 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -5 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -6 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1} - I)B = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -6 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -6 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Luego} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -6 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Se consideran las matrices cuadradas reales de orden 2, P = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y Q = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Calcular: a) La matriz P^{-1} (*1,1 puntos*). b) La matriz real cuadrada X de orden 2, tal que $P^{-1}XP = Q$ (*1,1 puntos*). c) La matriz $(PQP^{-1})^2$ (*1,1 puntos*).

Solución:

a) Como $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, P^{-1}$

Calculemos P^{-1}

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos la matriz X / $P^{-1}X\,P = Q$*, efectuemos las operaciones necesarias para despejar X*

$$P\,P^{-1}X\,P\,P^{-1} = P\,Q\,P^{-1} \;;\; I\,X\,I = P\,Q\,P^{-1} \;; \text{luego } X = P\,Q\,P^{-1}$$

Calculemos la matriz X

$$X = P\,Q\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+12 & 4-6 \\ -12+18 & 8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $$(P\,Q\,P^{-1})^2 = X^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-12 & -12+2 \\ 36-6 & -12+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Para las matrices reales: $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Justificar que existe la matriz A^{-1}, inversa de A, y calcular el determinante de A^{-1} (1,2 puntos).
b) Calcula la matriz B = A (A + 4 I) (0,7 puntos).
c) Determinar los números reales x, y, z, t que cumplen $A^{-1} = x A + y I$, $A^2 = z A + t I$ (1,4 puntos)

Solución:

a) *Como A es una matriz cuadrada de orden 3 tendrá inversa si su determinante es no nulo, calculémoslo:*

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0-6-6-(-10+6)=-12-(-4)=-12+4=-8\neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo existe A^{-1}.

Calculemos $|A^{-1}|$
Sabemos, por definición, que $A \cdot A^{-1} = I$
También sabemos que $|A \cdot B| = |A|\,|B|$ siendo A y B matrices cuadradas de orden n.
Como A y A^{-1} son matrices cuadradas de orden 3,
$|I| = |A \cdot A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$, *como* $|I| = 1$
$|A|\,|A^{-1}| = 1$, *por lo tanto* $|A^{-1}| = 1 / |A|$
En nuestro caso $|A^{-1}|=\dfrac{1}{-8}=\dfrac{-1}{8}$

b) *Calculamos A + 4 I*

$$A+4I=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$B=A(A+4I)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-3+2 & 1+1-2 & -2-6+8\\ 9-15+6 & -3+5-6 & 6-30+24\\ 3-3+0 & -1+1+0 & 2-6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

A partir del resultado anterior podemos decir que B = – 4 I

c) *Para no tener que calcular A^{-1} transformamos la primera condición multiplicándola por la derecha por A,*
$A^{-1} A = x A A + y I A$
$I = x A^2 + y A$
Calculemos la matriz A^2

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3+2 & 1+5-2 & -2-6+0\\ -3-15+6 & -3+25-6 & 6-30+0\\ -1-3+0 & -1+5+0 & 2-6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -8\\ -12 & 16 & -24\\ -4 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

La primera condición expresada matricialmente sería:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0 & 4 & -8\\ -12 & 16 & -24\\ -4 & 4 & -4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1=-y \\ 0=4x-y \\ 0=-8x+2y \\ 0=-12x+3y \\ 1=16x-5y \\ 0=-24x+6y \\ 0=-4x+y \\ 0=4x-y \\ 1=-4x \end{cases}$$

En este sistema se verifica que:
3ª ecuación = -2 . 2ª ecuación,
4ª = -3 . 2ª,
6ª = -6 . 2ª,
7ª = -1 . 2ª,
8ª = 2ª,
luego las ecuaciones 3ª, 4ª, 6ª, 7ª y 8ª son proporcionales a la 2ª ecuación; podemos eliminarlas y el sistema queda reducido a

$$\begin{cases} 1=-y \\ 0=4x-y \\ 1=16x-5y \\ 1=-4x \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos y = - 1
de la última ecuación x = -1/4. Veamos si estos valores de x e y cumplen las otras dos ecuaciones:

$0=4\frac{-1}{4}-(-1)$	$1=16\frac{-1}{4}-5(-1)$
$0=-1+1$	$1=-4+5$
$0=0$	$1=1$
Cumplen 2ª ecuación	*Cumplen 3ª ecuación*

Luego x = -1/4 e y = -1 son solución del sistema.

Estudiemos ahora la 2ª condición $A^2 = z\,A + t\,I$
La expresión matricialmente sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0=-z+t \\ 4=-z \\ -8=2z \\ -12=3z \\ 16=-5z+t \\ -24=6z \\ -4=z \\ 4=-z \\ -4=t \end{cases}$$

En este sistema se verifica que las ecuaciones 2ª, 3ª, 4ª, 6ª, 7ª y 8ª son la misma – 4 = z.
El sistema queda reducido a

$$\begin{cases} 0=-z+t \\ 16=-5z+t \\ -4=z \\ -4=t \end{cases}$$

La tercera y cuarta ecuación indican z = - 4 y t = - 4. Veamos si estos valores de z y t cumplen las otras dos ecuaciones:

0 = -(-4) + (-4)	*16 = -5 (-4) + (-4)*
0 = 4 – 4	*16 = 20 – 4*
0 = 0	*16 = 16*
Cumplen 1ª ecuación	*Cumplen 3ª ecuación*

Luego z = - 4 y t = - 4 son solución del sistema.

Por tanto los valores de x, y, z, t buscados son $x=\frac{-1}{4}$, $y=-1$, $z=-4$, $t=-4$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$,

calcular razonadamente la matriz $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que satisface la ecuación (A B´ + C) X = (A´ D) E,

donde M´ significa la matriz traspuesta de la matriz M *(3,3 puntos)*.

Solución:

Llamamos $M = A\,B' + C = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}$

$$A'D = \begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}=(10)$$

Llamamos $N = (A'D)\,E = (10)\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\50\\30\end{pmatrix}$

La ecuación a resolver es: M X = N, si existe M^{-1} *entonces* $X = M^{-1}N$

$$|M|=\begin{vmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&5&-4\\3&6&-5\end{vmatrix}=7\,(-25-24-24+30+24+20)=7\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \exists\, M^{-1}$$

Cálculo de M^{-1},

$$\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\alpha_{ij}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}5&-4\\6&-5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}14&-4\\21&-5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}14&5\\21&6\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&-2\\6&-5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}7&-2\\21&-5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}7&2\\21&6\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&-2\\5&-4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}7&-2\\14&-4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}7&2\\14&5\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&14&-21\\2&7&0\\2&0&7\end{pmatrix}\xrightarrow{M_{ij}}$$

$$\xrightarrow{M_{ij}}\begin{pmatrix}-1&-14&-21\\-2&7&0\\2&0&7\end{pmatrix}\xrightarrow{M_{ji}}\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-14&7&0\\-21&0&7\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad M^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-14&7&0\\-21&0&7\end{pmatrix}$$

Por lo que $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-14&7&0\\-21&0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\50\\30\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-20-100+60\\-280+350\\-420+210\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-60\\-70\\-210\end{pmatrix}$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. A es una matriz 3× 3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A^3 **(0,5 puntos)** y la matriz inversa de A^3 **(1 punto).**

b) Calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$ **(1,3 puntos).**

c) Calcular la matriz inversa de A **(0,5 puntos).**

Solución:

a)

$$\left|A^3\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3-8+4 = -1 \neq 0 \quad luego \quad \exists \left(A^3\right)^{-1}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{i\,j}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -4 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{i\,j}}$$

$$\xrightarrow{A_{i\,j}} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 4 & -7 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{j\,i}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$luego \quad \left(A^3\right)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos la matriz fila X que cumpla $X\,A^3 = B\,A^2$

Por el apartado anterior sabemos que $\exists \left(A^3\right)^{-1}$, *multiplicando la ecuación anterior por* $\left(A^3\right)^{-1}$ *por la izquierda:*

$$X\ A^3\ \left(A^3\right)^{-1} = B\ A^2\ \left(A^3\right)^{-1}$$

$$X\ I = B\ A^2\ \left(A^3\right)^{-1}$$

$$X = B\ A^2\ \left(A^3\right)^{-1}$$

Por lo que el cálculo de la matriz X será,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(1.2+2(-1)+3(-1) \quad 1.1+2.0+3(-1) \quad 1.0+2.(-1)+3.2 \right) \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-3(-3)-2.6+4.2 \quad -3(-4)-2.7+4.2 \quad -3(-2)-2.4+4.1 \right) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución $X = (5, 6, 2)$

c) Calcular A^{-1}

Conocemos A^2, A^3 *y* $\left(A^3\right)^{-1}$

Empezamos con $A^3 = A\,A^2$

multiplicando por $\left(A^3\right)^{-1}$ *por la derecha*

$A^3\left(A^3\right)^{-1} = A\,A^2\left(A^3\right)^{-1}$

$I = A\,A^2\left(A^3\right)^{-1}$

multiplicando por A^{-1} *por la izquierda*

$A^{-1}I = A^{-1}A\,A^2\left(A^3\right)^{-1}$

$A^{-1} = I\,A^2\left(A^3\right)^{-1} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = A^2\left(A^3\right)^{-1}$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-3)+1.6+0.2 & 2(-4)+1.7+0.2 & 2(-2)+1.4+0.1 \\ -1(-3)+0.6-1.2 & -1(-4)+0.7-1.2 & -1(-2)+0.4-1.1 \\ -1(-3)-1.6+2.2 & -1(-4)-1.7+2.2 & -1(-2)-1.4+2.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA B.1. Dadas las matrices

$$A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B(y)=\begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Obtener razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz A(x) sea 6. *(4 puntos)*
b) Calcular razonadamente el determinante de la matriz 2A(x). *(2 puntos)*
c) Demostrar que la matriz B(y) no tiene matriz inversa para ningún valor real de y. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿x? / $|A(x)| = 6$

$$|A(x)|=\begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2(x+2)-4-6+4(x+2) = 2(x+2)-10 = 2x+4-10 = 2x-6$$

$2x - 6 = 6 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$

Por lo tanto, para que $|A(x)| = 6$ debe ser $x = 6$.

b)

$|2A(x)| = \{$ como $A(x)$ es 3×3 $\} = 2^3\, |A(x)| = 8(2x-6) = 16x-48$

c)

$$|B(y)|=\begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \{como\ F_3 = 2xF_2\} = 0$$

Es decir que, independientemente del valor de y, $|B(y)| = 0$, luego la matriz B(y) no tiene inversa para ningún valor real de y.

PROBLEMA A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2 = M$. Obtener **razonadamente**:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - k\,I$ tiene inversa. *(2 puntos)*

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$. *(2 puntos)*

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha\, A^2 + \beta\, A = -2\, I$. *(4 puntos)*

d) Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M\,P = P\,M$. *(2 puntos, repartidos en 1 punto por cada igualdad)*

Solución:

a) Calculemos la matriz B.

$$B = A - k\,I = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} - k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k & -2\\ 1 & 3-k\end{pmatrix}$$

Para que exista B^{-1} debe ser $|B| \neq 0$.

$$|B| = \begin{vmatrix}-k & -2\\ 1 & 3-k\end{vmatrix} = -k(3-k)+2 = -3k+k^2+2 = k^2-3k+2$$

$$k^2-3k+2=0 \quad\rightarrow\quad k = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4.1.2}}{2.1} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=2\\[2mm] \dfrac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Por lo tanto la matriz B tiene inversa para todos los números reales que sean distintos de 1 y 2, es decir $\forall k \in \Re - \{1,2\}$.

b) Para k = 3, según el resultado del apartado anterior, $\exists B^{-1}$

Para k = 3, $B = \begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *y* $|B| = \begin{vmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 2$

Procedamos al cálculo de B^{-1}. Cálculo de los menores: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$, *adjuntos:* $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, *traspuesta* $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$,

y finalmente $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{-3}{2}\end{pmatrix}$

c)

$$\alpha\, A^2 + \beta\, A = -2\, I$$

$$A = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\alpha & -6\alpha-2\beta\\ 3\alpha+\beta & 7\alpha+3\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

Esta igualdad matricial da lugar al siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases}-2\alpha=-2\\ -6\alpha-2\beta=0\\ 3\alpha+\beta=0\\ 7\alpha+3\beta=-2\end{cases}$

De la primera ecuación obtenemos $\alpha=\dfrac{-2}{-2}=1$*. Sustituyendo este valor en la otras tres ecuaciones:*

$$\begin{cases}-6-2\beta=0\\ 3+\beta=0\\ 7+3\beta=-2\end{cases}$$

De la primera ecuación: $-2\beta=6 \quad\rightarrow\quad \beta=\dfrac{6}{-2}=-3$

De la segunda ecuación: $\beta=-3$

Y de la tercera: $3\beta=-2-7 \quad\rightarrow\quad 3\beta=-9 \quad\rightarrow\quad \beta=\dfrac{-9}{3}=-3$

Como de las tres ecuaciones obtenemos el mismo valor de β, β = – 3

Las constantes reales para las que se verifica la ecuación planteada son: $\alpha = 1$ *y* $\beta = -3$.

d) $P = I - M$ *y* $M / M^2 = M$.

¿$P^2 = P$?

$P^2 = (I - M)(I - M) = I - IM - MI + MM = I - M - M + M^2 = I - 2M + M = I - M = P$

(como I es la matriz identidad: $II = I$, $IM = M$, $MI = M$*)*

¿$MP = PM$?

$MP = M(I - M) = MI - MM = M - M^2 = M - M = 0$ *(M – M es la matriz cero)*

$PM = (I - M)M = IM - MM = M - M^2 = M - M = 0$

Por lo tanto, $MP = PM$

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y T, y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. Calcular **razonadamente** los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2}T$ *(3 puntos)*
b) M^4. *(3 puntos)*
c) $T\,M^3\,T^{-1}$. *(4 puntos)*

Solución:

a) $det\left(\frac{1}{2}T\right) = (como \quad T \quad es \quad 3x3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 det(T) = \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

b) $det\,(M^4) = (\text{ como } det(A.B) = det(A)\,.\,det(B)\,) = [\,det(M)\,]^4$

Calculemos $det(M)$,

$$det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 + F_3 \\ = F_2 + F_3 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} desarrollando \;\; por \\ la \;\; tercera \;\; columna \end{pmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1\,(6-12) = -(-6) = 6$$

Por lo que $det\,(M^4) = 6^4 = 1296$

c) Considerando que $det\left(T^{-1}\right) = \dfrac{1}{det(T)}$ y que $det(A.B) = det(A)\,.\,det(B)$.

$$det\left(T\,M^3\,T^{-1}\right) = det(T)\,det\left(M^3\right)det\left(T^{-1}\right) = det(T)\,[det(M)]^3\,\frac{1}{det(T)} = [det(M)]^3 = 6^3 = 216$$

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B, donde B es una matriz de dos filas y dos columnas que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación $B^2 = -7B + U$.

Obtener **razonadamente**:

a) Los números reales a y b tales que $A^2 = aA + bU$. *(4 puntos).*
b) Los números reales p y q tales que $B^{-1} = pB + qU$ *(2 puntos)*, **justificando** que la matriz B tiene inversa *(2 puntos).*
c) Obtener los valores de x e y para los que se verifica que $B^3 = xB + yU$ *(2 puntos).*

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos a *y* b *tales que* $A^2 = aA + bU$*, luego:* $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*, efectuando operaciones,*

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a \\ a & a+b \end{pmatrix}$ *que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:* $\begin{cases} a+b=0 \\ -a=-2 \\ a=2 \\ a+b=0 \end{cases}$*, en el que la 1ª y 4ª ecuación son iguales, así como la 2ª y 3ª, por lo que queda reducido a* $\begin{cases} a+b=0 \\ a=2 \end{cases}$*, sustituyendo el valor de* a *en la 1ª ecuación:* $2 + b = 0$; $b = -2$.

Los valores de a y b buscados son $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$

b) Como $B^2 = -7B + U$ *(en donde* U *es la matriz identidad de orden 2)*

$B^2 + 7B = U$

$B(B + 7U) = U$*, por lo tanto la matriz* B *tiene inversa que es* $B + 7U$

Obtengamos p *y* q / $B^{-1} = pB + qU$

Sabemos que $B^{-1} = B + 7U$*, por lo que* $\boldsymbol{p = 1}$ ***y*** $\boldsymbol{q = 7}$

c) Como $B^2 = -7B + U$

$B^3 = B^2 . B = (-7B + U) . B = -7B^2 + B = -7(-7B + U) + B = 49B - 7U + B = 50B - 7U$

Como buscamos x *e* y / $B^3 = xB + yU$*, será:*

$50B - 7U = xB + yU$*, por lo tanto* $\boldsymbol{x = 50}$ ***e*** $\boldsymbol{y = -7}$

PROBLEMA 4. Sea $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. *(3 puntos)*
b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + a\,A + b\,I$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica $A^3 - 3\,A^2 + 3\,A - I = 0$ siendo I la matriz identidad. *(3 puntos)*
c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda\,I)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. *(3 puntos)*

Solución:
a) ¿ $\exists\, A^{-1}$?

$$\exists\, A^{-1} \quad si \quad |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y,\ A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) ¿a, b? / $A^{-1} = A^2 + a\,A + b\,I$. *Sabiendo que* $A^3 - 3\,A^2 + 3\,A - I = 0 \quad \{1\}$

Partimos de: $A^{-1} = A^2 + a\,A + b\,I$, *multiplicando por la matriz A por la izquierda,*

$A\,A^{-1} = A\,A^2 + A\,a\,A + A\,b\,I;$

$I = A^3 + a\,A^2 + b\,A;$

$A^3 + a\,A^2 + b\,A - I = 0;$ *comparando esta expresión con la {1}, que sabemos que se cumple, deducimos que* $a = -3$ *y* $b = 3$.

Solución, $\boldsymbol{a = -3}$ ***y*** $\boldsymbol{b = 3}$.

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *tenga infinitas soluciones.*

Calculemos $A - \lambda I$.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}=B$$

Para que el sistema indicado, que es homogéneo, tenga infinitas soluciones debe ser $/B/ = 0$.

$$|B|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^3; \qquad (1-\lambda)^3=0; \quad 1-\lambda=0; \quad \lambda=1$$

Para $\lambda = 1$, el sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2y=0 \\ 2y=0 \end{cases} \rightarrow 2y=0; \quad y=0 \rightarrow \text{Solución del sistema}:\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\beta \end{cases} \quad \alpha,\beta\in\Re$$

Solución: el sistema de este apartado tiene infinitas soluciones para $\lambda = 1$ y para este valor de λ la solución del sistema es $\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\beta \end{cases} \quad \alpha,\beta\in\Re\cdot$

Problema 1.2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial A X = α X. *(1,5 puntos).*
b) Resolver la ecuación matricial *A X* = 2 *X* . *(1,8 puntos).*

Solución:
a)

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = \alpha x \\ -x + y = \alpha y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (6-\alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (1-\alpha)y = 0 \end{cases}$$

para que la única solución del sistema sea la trivial, x = y = 0, deber ser $|A| \neq 0$*, siendo A la matriz de coeficientes del sistema anterior.*
Resolvamos

$$\begin{vmatrix} 6-\alpha & 4 \\ -1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (6-\alpha)(1-\alpha) + 4 = 0 \rightarrow 6 - 7\alpha + \alpha^2 + 4 = 0 \rightarrow \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$$

$$\alpha = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\,.\,1\,.\,10}}{2\,.\,1} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Luego $\alpha^2 - 7\alpha + 10 \neq 0$ *para* $\alpha \neq 2$ *y* $\alpha \neq 5$

Los valores de α *para los que* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *es la única solución de la ecuación matricial A X =* α *X son* $\alpha \in \Re - \{2,5\}$

b) La ecuación A X = 2 X corresponde al sistema planteado en el anterior apartado para $\alpha = 2$.

$$\begin{cases} (6-2)x + 4y = 0 \\ -x + (1-2)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Como se cumple que 1ª ecuación = – 4 . 2ª ecuación el sistema es indeterminado, lo resolvemos, por ejemplo, a partir de la 2ª ecuación.
– x – y = 0; y = – x

la solución será $X = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$ $a \in \Re$

Problema 1.1. Dada la matriz $A(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \alpha-2\\ 4 & 3 & 2\\ \alpha & \alpha & -6\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular, en función de α, el determinante de la matriz $A(\alpha)$, escribiendo los cálculos necesarios. (*1,3 puntos*).

b) Determinar, razonadamente, los números reales α para los que el determinante de la matriz inversa de $A(\alpha)$ es igual a 1/66. (*2 puntos*).

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz por Sarrus,

$$|A(\alpha)|=\begin{vmatrix}1 & 2 & \alpha-2\\ 4 & 3 & 2\\ \alpha & \alpha & -6\end{vmatrix}=-18+4\alpha^2-8\alpha+4\alpha-3\alpha^2+6\alpha-2\alpha+48=\alpha^2+30$$

b) De lo obtenido anteriormente, sabemos que el determinante de la matriz A(α) es distinto de cero (para cualquier valor de α, $\alpha^2+30\neq 0$)

Como el determinante de A(α) es distinto de cero, existe la inversa de la matriz A(α). Y además sabemos que,

$$|A^{-1}(\alpha)|=\frac{1}{|A(\alpha)|}=\frac{1}{\alpha^2+30}$$

buscamos $\alpha \,/\, \frac{1}{\alpha^2+30}=\frac{1}{66} \rightarrow \alpha^2+30=66 \rightarrow \alpha^2=36 \rightarrow \alpha=\pm\sqrt{36} \rightarrow \alpha=\pm 6$

Solución: $\alpha_1=-6$ *ó* $\alpha_2=6$