Matemáticas II Julio 2013

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 7$. *(4 puntos).*
b) Los valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado. *(3 puntos).*
c) Los valores de α para los que el sistema es compatible determinado. *(3 puntos).*

Solución:

Estudiemos el sistema $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$. *Su matriz ampliada, A´, es* $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3x3 por lo que su máximo rango posible será 3.
A´ es 3x4 por lo que su máximo rango posible será 3.

Empezamos estudiando el rango de A,

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 5 + 3 - 3\alpha - 5\alpha - 1 = \alpha^2 - 8\alpha + 7$$

$$\alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.7}}{2.1} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{14}{2} = 7 \\ \alpha_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Para $\alpha \neq 1, 7$ $\rightarrow$ *ran (A) = 3 = ran(A´) = nº de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

Para $\alpha = 7$,

$$A´ = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad y \ \text{sabemos que} \ |A| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A) \leq 2$$

Calculemos el rango de A,

$$\left.\begin{array}{l} |7| = 7 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 49 - 1 = 48 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran\,(A) = 2$$

Calculemos el rango de A´,

Sólo nos falta por estudiar el menor de orden 3 que se obtiene al añadir al orlar el menor de orden 2 no nulo anterior con la tercera fila y la cuarta columna de A´,

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = |A| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A´) = 2$$

Por lo que, ran (A) = ran (A´) = 2 < nº de incógnitas. Para $\alpha = 7$ *el sistema es compatible indeterminado.*

Para α = 1,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right),$$ *esta matriz tiene la 1ª y 2ª filas iguales, a efectos de cálculo de rango podemos eliminar una de ellas, por lo tanto el máximo rango de A y A´ será 2.*

Calculemos el rango de A,

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran\,(A) = 2$$

Luego ran (A) = ran (A´) = 2 < nº de incógnitas. Para α = 1 el sistema es compatible indeterminado.

Procedamos a resolver los apartados.

a) Para α = 7 sabemos que el sistema es compatible indeterminado
Por el estudio realizado anteriormente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y las incógnitas principales son x e y:

$$\begin{cases} 7z + y = 1 - z \\ x + 7y = 1 - z \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 1-z & 7 \end{vmatrix}}{48} = \dfrac{7 - 7z - 1 + z}{48} = \dfrac{6 - 6z}{48} = \dfrac{1-z}{8} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 1-z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{48} = \dfrac{7 - 7z - 1 + z}{48} = \dfrac{6 - 6z}{48} = \dfrac{1-z}{8} \end{array}$$

Para α = 7, la solución es: $\begin{cases} x = \dfrac{1-\lambda}{8} \\ y = \dfrac{1-\lambda}{8} \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

b) Del estudio inicial, ***el sistema es compatible indeterminado para α = 1 y α = 7****.*

c) Del estudio inicial, ***el sistema es compatible determinado para α ≠ 1 y 7, es decir,*** $\alpha \in \Re - \{1,7\}$.

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se da el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (1-\alpha)\,x + 2\,y + z = 4 \\ x + y - 2\,z = -4 \\ x + 4\,y - (\alpha+1)\,z = -2\alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es incompatible. *(3 puntos).*

b) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. *(3 puntos).*

c) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 2$. *(4 puntos).*

Solución:

La matriz ampliada, A´, de este sistema es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -(\alpha+1) & -2\alpha \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3x3 por lo que su máximo rango posible será 3.
A´ es 3x4 por lo que su máximo rango posible será 3.

Empezamos estudiando el rango de A,

$|1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -(\alpha+1) \end{vmatrix} = -(\alpha+1)(1-\alpha) + 4 - 4 - 1 + 8(1-\alpha) + 2(\alpha+1) = -(1-\alpha^2) - 1 + 8 - 8\alpha + 2\alpha + 2 =$$

$$= -1 + \alpha^2 - 1 + 10 - 6\alpha = \alpha^2 - 6\alpha + 8$$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \alpha_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Para $\alpha \neq 2$ *y* $\alpha \neq 4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ *ran (A) = 3 y como el máximo rango de A´ es 3, obtenemos que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

Para $\alpha = 2$,

$A´ = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right)$ *y sabemos que* $|A| = 0$ *y que ran (A) = 2.*

Calculemos el rango de A´, añadiendo al menor de orden 2 no nulo la 1ª fila y la 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\,.\,0 = 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A´) = 2$$

Para $\alpha = 2$, *ran (A) = ran (A´) = 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.*

Para α = 4,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & -8 \end{array}\right)$$

Como hemos hecho en el caso anterior,

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 4\,.\,(-16+15) = -4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 3$$

Luego ran (A) =2 ≠ 3 = ran (A´). Para α = 4 el sistema es incompatible.

El estudio realizado anteriormente nos facilita la respuesta a cada uno de los apartados.

*a) **El sistema es incompatible para α = 4**.*

*b) **El sistema es compatible y determinado para α ≠ 2 y α ≠ 4, es decir,*** $\alpha \in \Re - \{2,4\}$.

c) Para α = 2 sabemos que el sistema es compatible indeterminado.
Por el estudio realizado anteriormente, el menor de orden 2 no nulo nos indica las ecuaciones e incógnitas principales que son la 2ª y 3ª ecuaciones y las incógnitas x e y. El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = -4 + 2z \\ x + 4y = -4 + 3z \end{cases}$$ *y podemos resolverlo por Cramer ya que en el estudio inicial obtuvimos* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4+2z & 1 \\ -4+3z & 4 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-16+8z+4-3z}{3} = \frac{-12+5z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4+2z \\ 1 & -4+3z \end{vmatrix}}{3} = \frac{-4+3z+4-2z}{3} = \frac{z}{3}$$

Para α = 2, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-12+5\lambda}{3} \\ y = \dfrac{\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$$

PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha + 3 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. *(3 puntos)*
b) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 0$. *(3 puntos)*
c) El valor de α para el que el sistema es incompatible. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Solución para $\alpha = -1$?

Para $\alpha = -1$ el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

La matriz ampliada de este sistema es: $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de M,

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 6 - 2 + 1 + 3 = 6 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(M) = 3$$

El último menor de orden 3 estudiado también lo es de M´ y como el máximo rango de M´ es 3 entonces ran(M´) = 3

Luego, ran (M) = ran (M´) = 3 = nº incógnitas → Es un sistema compatible determinado.

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{1 - 1 + 3 - 1 - 1 + 3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-1 + 1 - 2 - 2 - 1 - 1}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{1 + 1 + 6 + 2 + 1 - 3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Finalmente, ***para*** $\alpha = -1$ ***la solución del sistema es:*** $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -1 \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

b) Para $\alpha = 0$ *el sistema a resolver es:*

$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $N' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de N,

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N) \geq 2 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(N) = 2$$

Calculemos el rango de N´,

Considerando el estudio realizado anteriormente ran(N´) ≥ 2*, el menor de orden 3 de N´ por estudiar es:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad ran(N') = 2$$

Luego, ran (N) = 2 = ran (N´) < nº de incógnitas = 3 $\rightarrow$ *Es un sistema compatible indeterminado*

Para resolver el sistema utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo. Es decir, 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas x e y.

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x + 3y = -z \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -z & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{-z-3}{-2} = \dfrac{3+z}{2} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{1+z}{-2} = \dfrac{-1-z}{2} \end{array} \rightarrow \quad Soluciones: \begin{cases} x = \dfrac{3+\lambda}{2} \\ y = \dfrac{-1-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

c) ¿Valores de α *para los que es S.I.?*

$\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha + 3 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 & 2\alpha + 3 \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3 x 3, por tanto el máximo rango de A es 3

La matriz ampliada, A´, es 3 x 4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = -1 + \alpha - 6\alpha - 2 + \alpha^2 + 3 = \alpha^2 - 5\alpha$$

$$\alpha^2 - 5\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha(\alpha - 5) = 0 \left\langle \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 5 \end{array} \right.$$

Por tanto:

- *si* $\alpha \neq 0,\ 5$ *ran(A) = 3, como ran(A´) ≥ ran(A) y ran(A´) ≤ 3, también ran (A´) = 3; es decir, ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema compatible determinado.*
- *si* $\alpha = 0$*, por el apartado b) sabemos que es Sistema compatible indeterminado.*
- *si* $\alpha = 5$*,*

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 13 \end{array}\right) \quad y \text{ sabemos que } |A| = 0$$

  En A, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2$

  En A´, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 13 + 25 + 6 - 10 - 5 - 39 = -10 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$

  Por lo tanto, ran(A) = 2 ≠ 3 = ran(A´) $\rightarrow$ *Sistema incompatible*

Finalmente, ***el sistema es incompatible para*** $\boldsymbol{\alpha = 5}$***.***

PROBLEMA A.1. Se da el sistema $\begin{cases} x+\ \ y+2\ z=\ 2 \\ -3x+2y+3\ z\ =-2 \\ 2x+\alpha\ y-5z\ \ =-4 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = 0$. *(3 puntos)*

b) El valor de α para el que el sistema es incompatible. *(3 puntos)*

c) Los valores del parámetro para los que el sistema es compatible y determinado *(2 puntos)*

y obtener la solución del sistema en función del parámetro α. *(2 puntos)*

Solución:

Estudiemos el sistema. La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & \alpha & -5 & -4 \end{array}\right)$$

A es 3x3, máximo rango de A es 3.

A´ es 3x4, máximo rango de A´es 3

Empezamos estudiando el rango de A,

$$|1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3+6 = 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & -5 \end{vmatrix} = -10-6\alpha+6-8-3\alpha-15 = -9\alpha-27$$

$$-9\alpha-27 = 0 \quad \rightarrow \quad -9\alpha = 27 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{27}{-9} = -3$$

Por tanto, para $\alpha \neq -3 \rightarrow$ *ran(A) = 3 y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A´) = 3*

Para $\alpha = -3 \rightarrow$ *ran(A) = 2, veamos que ocurre con el rango de A´.*

Falta por calcular el menor de orden 3 de A´ que se obtiene a partir del menor de orden 2 anterior no nulo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ F_2+F_1 \\ F_3+2F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\,(2-20) = -36 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Luego,

para $\alpha \neq -3 \rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado.*

para $\alpha = -3 \rightarrow$ *ran(A) = 2 ≠3 = ran(A´)* $\rightarrow$ *Sistema Incompatible.*

Resolvamos cada uno de los apartados.

a) ¿Solución para $\alpha = 0$*?*

$\alpha = 0 \neq -3 \rightarrow$ *el sistema es compatible y determinado.*

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+\ \ y+2\ z=\ 2 \\ -3x+2y+3\ z\ =-2 \\ 2x\qquad -5z\ \ =-4 \end{cases}$ $\quad |A| = -9\alpha-27\big|_{\alpha=0} = -27$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 3\\ -4 & 0 & -5\end{vmatrix}}{-27}=\frac{-20-12+16-10}{-27}=\frac{-26}{-27}=\frac{26}{27}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -3 & -2 & 3\\ 2 & -4 & -5\end{vmatrix}}{-27}=\frac{10+24+12+8+12-30}{-27}=\frac{36}{-27}=\frac{-4}{3}$$

$$z==\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}}{-27}=\frac{-8-4-8-12}{-27}=\frac{-32}{-27}=\frac{32}{27}$$

Finalmente, ***para*** $\alpha = 0$ ***la solución del sistema es:*** $\begin{cases} x=\dfrac{26}{27} \\ y=\dfrac{-4}{3} \\ z=\dfrac{32}{27}\end{cases}$

b) Según lo estudiado al principio, ***el sistema es incompatible para*** $\alpha = -3$**.**

c) Según lo estudiado inicialmente, el sistema es compatible y determinado para $\alpha \neq -3$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+\ y+2\ z=\ 2 \\ -3x+2y+3\ z\ =-2 \\ 2x+\alpha\ y-5z\ =-4\end{cases}$ $|A|=-9\alpha-27$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 3\\ -4 & \alpha & -5\end{vmatrix}}{-9\alpha-27}=\frac{-20-4\alpha-12+16-6\alpha-10}{-9\alpha-27}=\frac{-26-10\alpha}{-9\alpha-27}=\frac{10\alpha+26}{9\alpha+27}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -3 & -2 & 3\\ 2 & -4 & -5\end{vmatrix}}{-9\alpha-27}=(\text{obtenido en a}))=\frac{36}{-9\alpha-27}=\frac{36}{-9(\alpha+3)}=\frac{-4}{\alpha+3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}}{-9\alpha-27}=\frac{-8-6\alpha-4-8+2\alpha-12}{-9\alpha-27}=\frac{-32-4\alpha}{-9\alpha-27}=\frac{4\alpha+32}{9\alpha+27}$$

Finalmente, ***para*** $\boldsymbol{\alpha \neq -3}$ ***la solución del sistema es:*** $\begin{cases} x = \dfrac{10\alpha + 26}{9\alpha + 27} \\ y = \dfrac{-4}{\alpha + 3} \\ z = \dfrac{4\alpha + 32}{9\alpha + 27} \end{cases}$

PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + a\,y + (a-1)\,z = a \end{cases}$

donde a es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible. *(5 puntos)*
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$. *(3 puntos)*
c) Las soluciones del sistema cuando $a = 0$. *(4 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + 1 - a = a^2 - 2a + 1 + 1 - a = a^2 - 3a + 2$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad Por\ Ruffini, \quad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \underline{|0} \\ 2 & & 2 & \\ \hline & 1 & \underline{|0} & \end{array} \qquad Soluciones: \ a = 1 \quad y \quad a = 2$$

Entonces,

para a ≠ 1, 2**, $/A/ \neq 0$ $\rightarrow$ ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas $\rightarrow$ **Sistema Compatible Determinado

***para a = 1**, $/A/ = 0$ $\rightarrow$ ran(A) ≤ 2*

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) $\rightarrow$ ran(A´) = 2

*Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas $\rightarrow$ **Sistema Compatible Indeterminado.***

para a = 2 , $/A/ = 0 \;\rightarrow\; ran(A) \le 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de A, sabemos que /A/ =0 (el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \ge 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \ge 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) $\rightarrow$ *ran(A´) = 2*

Calculemos el rango de A´, añadiendo al menor anterior de orden 2 no nulo la 3ª fila y la 4ª columna de A´,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por tanto, ran(A) $\neq$ *ran(A´)* $\rightarrow$ ***Sistema Incompatible.***

Respondamos a las preguntas,

a) ***El sistema es compatible para a*** $\neq$ ***2.***
(para a $\neq$ *1, 2 es compatible determinado y para a = 1 es compatible indeterminado)*

b) Soluciones para a = 1
Según lo estudiado inicialmente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales z e y. Es decir,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

c) Soluciones para a = 0
Si a = 0, a $\neq$ *1, 2, el sistema es compatible determinado.*
El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y \qquad = 1 \\ \quad - y + z = 0 \\ x \qquad - z = 0 \end{cases} , \quad |A| = a^2 - 3a + 2 \;\Big|_{a=0} = 2. \quad Por\ Cramer:$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}$$

Para a = 0 la solución del sistema es: x = y = z = ½.

PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x \qquad +3z=\alpha \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5\,z=\alpha+1 \end{cases}$

donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. *(4 puntos)*

b) Las soluciones del sistema cuando $\alpha = -1$. *(3 puntos)*

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución *(x, y, z)* que verifique $x + y + z = 0$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿α? / el sistema sea compatible y determinado

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20-3+18+4 = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=3$$

Entonces, ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3,
luego ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

Por tanto, ***el sistema es compatible y determinado*** $\forall\, \alpha \in \Re$.

b) Las soluciones del sistema cuando $\alpha = -1$

Según lo estudiado anteriormente, el sistema es compatible y determinado. Lo resolveremos por Cramer.

La matriz ampliada del sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$ *y* $|A|$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{10-2-15}{-1} = \frac{-7}{-1} = 7 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{50-6-45+5}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1-6+10}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

Cuando $\boldsymbol{\alpha = -1}$ ***la solución del sistema es:*** $\boldsymbol{x = 7,\ y = -4,\ z = -5.}$

c) Habrá que estudiar el sistema formado por las tres ecuaciones iniciales y la ecuación de la condición.

Es decir, el sistema a estudiar es: $\begin{cases} 2x \quad\quad +3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \\ x \quad + y \quad + z = 0 \end{cases}$

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

A es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 4x4, por tanto el máximo rango de A´ es 4.

Empezamos estudiando el rango de A´,

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 - C_2 \\ C_3 - C_2 \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{desarrollando por la } 4^a \text{ fila}\} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & \alpha+1 \end{vmatrix} = -2(\alpha+1) + 6\alpha + 20 + 4\alpha - 20 - 3(\alpha+1) = -2\alpha - 2 + 10\alpha - 3\alpha - 3 = 5\alpha - 5$$

$5\alpha - 5 = 0; \quad 5\alpha = 5; \quad \alpha = 1$

Si $\alpha \neq 1$, *ran(A´) = 4 y como el máximo rango de A es 3, el sistema sería incompatible.*

Si $\alpha = 1$, *ran(A´)* ≤ 3

el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 3 + 18 + 4 = -1 \neq 0$ *y este menor es de A y A´, por tanto*

ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado.*

Para que el sistema tenga una solución que verifique x + y + z = 0 debe ser $\boldsymbol{\alpha = 1}$.

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+\ \ y+a\,z=1 \\ x+a\,y+z=1 \\ a\,x+y+z=-2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a. *(5 puntos)*
b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$. *(3 puntos)*
c) La solución del sistema cuando $a = 0$. *(2 puntos)*

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2$$

$$-a^3+3a-2=0$$

Resolvemos esta ecuación por el método de Ruffini,

	-1	0	3	-2
1		-1	-1	2
	-1	-1	2	0
1		-1	-2	
	-1	-2	0	
-2		2		
	-1	0		

Soluciones: $a = -2$ y $a = 1$

Para $a \neq -2$ y 1

$|A| \neq 0 \rightarrow$ ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 $\rightarrow$ ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $a = -2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos los rangos de A y A´,

$$\text{En A, } \left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-1=-3 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \{como\ C_1 = C_2\} = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A´) = 2$

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Obtenemos las soluciones para responder al apartado b).
El sistema a sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo. Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y.

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2z \\ x - 2y = 1 - z \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1+2z & 1 \\ 1-z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2-4z-1+z}{-3} = \frac{-3-3z}{-3} = 1+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1-z-1-2z}{-3} = \frac{-3z}{-3} = z$$

La solución del sistema: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

Para a = 1

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Sabemos que /A/ = 0, estudiemos los rangos de A y A´,

En A, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *las tres filas son iguales y* $|1| = 1 \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 1*

En A´, el menor de orden dos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A´) = 2$

Por lo tanto, ran(A) ≠ ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Respondamos las cuestiones,

a) ***Si a ≠ – 2 y 1, Sistema Compatible Determinado***
Si a = – 2, Sistema Compatible Indeterminado
Si a = –1, Sistema Incompatible

b) ***Si a = – 2, la solución del sistema es:*** $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

c) Si a = 0, a ≠ – 2 y 1, el sistema será compatible determinado. Resolvámoslo,

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$$|A| = \left(-a^3 + 3a - 2\right)\Big|_{a=0} = -0^3 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$$

Resolviendo por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2-1-1}{-2}=2; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{1+2-1}{-2}=-1; \qquad x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}}{-2}=\frac{1-1+2}{-2}=-1$$

Para a = 0, la solución es: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. *(4 puntos)*
b) La solución del sistema cuando $m = 1$. *(3 puntos)*
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. *(3 puntos)*

Solución:
a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2m - 4 - 15 - 5 + 24 + m = 3m$$

$3m = 0; \quad m = 0$

Para $m \neq 0$

$|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.*

Para $m = 0$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sería un sistema homogéneo luego compatible {ran(A) = ran(A´)}.

Sabemos que $|A| = 0$*, estudiemos el rango de A,*

$$\text{En A,} \quad \left.\begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 = ran(A´) < nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, ***el sistema es compatible determinado para m ≠ 0 y compatible indeterminado para m = 0.***

b) Si m = 1 (m ≠ 0), el sistema es compatible determinado.

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = (3m)|_{m=1} = 3 \cdot 1 = 3$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1-3-1+12}{3} = 3; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1+15-6-1}{3} = 3; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2-4-5+1}{3} = -2$$

Si m = 1, la solución es: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$

c) Soluciones cuando el sistema es compatible indeterminado.

El sistema es compatible indeterminado para m = 0.

El sistema a sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado a). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = -z \\ x + y = -3z \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ -3z & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-z-3z}{3} = \frac{-4z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & -3z \end{vmatrix}}{3} = \frac{-6z+z}{3} = \frac{-5z}{3}$$

Cuando el sistema es compatible indeterminado su solución es: $\begin{cases} x = \dfrac{-4\lambda}{3} \\ y = \dfrac{-5\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a\,x+y=1 \\ x+z=1 \\ x+a\;y+(a-1)\;z=a \end{cases}$.

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a. *(5 puntos)*
b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. *(5 puntos)*

Solución:
a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = 1-a^2-a+1=-a^2-a+2$$

$$-a^2-a+2=0; \quad a=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases} \dfrac{1+3}{-2}=-2 \\ \dfrac{1-3}{-2}=1 \end{cases}$$

Si $a \neq -2$ *y* 1

|A| ≠ 0 → ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 → ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a=-2$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Sabemos que |A| = 0, estudiemos el rango de A,

$$\text{En A, } \left.\begin{array}{l} |1|=1\neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A)=2$$

$$\text{En A´, } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2+2+3=3\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A')=3$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 ≠ 3 = ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Si $a=1$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que |A| = 0, estudiemos el rango de A,

$$\text{En } A,\quad \left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\text{En } A',\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{F_1 = F_3\} = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 = ran(A´), luego el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, ***si a ≠ – 2 y 1, el sistema es compatible determinado;***
si a = – 2, el sistema es incompatible;
si a = 1, el sistema es compatible indeterminado.

b) El sistema es compatible en dos casos. Obtengamos la solución en cada caso.
Si a ≠ – 2 y 1, S. C. D.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 2$$ *(calculado anteriormente y como las raíces de este polinomio son 1 y – 2)*

$= -(a - 1)(a + 2)$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{a - a - a + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-a + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{a^2 - a + 1 - a^2 - a + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-2a + 2}{-a^2 - a + 2} = \frac{-2(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{2}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{a + 1 - a^2 - a}{-a^2 - a + 2} = \frac{1 - a^2}{-a^2 - a + 2} = \frac{(1-a)(1+a)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)(a+2)} = \frac{a+1}{a+2}$$

Si a ≠ – 2 y 1, la solución es: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2} \\ y = \dfrac{2}{a+2} \\ z = \dfrac{a+1}{a+2} \end{cases}$

Si a = 1, S. C. I.

El sistema a sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado a). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales y z.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=1-x \end{cases} \rightarrow \textit{Solución} \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z=1-\lambda \end{cases}$$

Si a = 1 la solución es: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z=1-\lambda \end{cases}$

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del parámetro a. *(6 puntos)*

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. *(4 puntos)*

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = 2a(a+2) + 1 + 2(a+1) - a - (a+1)(a+2) - 4 =$$

$$= 2a^2 + 4a + 1 + 2a + 2 - a - \left(a^2 + 3a + 2\right) - 4 = 2a^2 + 5a - 1 - a^2 - 3a - 2 = a^2 + 2a - 3$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0; \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ \dfrac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Si $a \neq -3$ *y* 1

/A /≠0 → ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 → ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que /A / = 0, estudiemos el rango de A,

$$\text{En } A, \quad \left.\begin{array}{l} |-2| = -2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\text{En } A', \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 2 + 4 = 11 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 ≠3 = ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Si $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A,

$$\text{En A,} \quad \left.\begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \to ran(A) = 2$$

$$\text{En } A', \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 + 1 + 2 - 6 - 2 = 0 \quad \to \quad ran(A') = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < 3(nº de incógnitas), luego el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, ***si $a \neq -3$ y 1, el sistema es compatible determinado;***
si $a = -3$, el sistema es incompatible;
si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

b) El sistema es compatible indeterminado para $a = 1$ y el menor de orden 2 no nulo de A corresponde a las ecuaciones 1^a y 2^a y a las incógnitas y z.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} 2y + z = -1 - 2x \\ y + 2z = 1 - x \end{cases}$. *Sabemos que* $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

Resolviendo por Cramer,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1-2x & 1 \\ 1-x & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2-4x-1+x}{3} = \frac{-3-3x}{3} = -1 - x$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1-2x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}}{3} = \frac{2-2x+1+2x}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Las soluciones del sistema cuando es compatible indeterminado son: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 1 \end{cases}$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$, dependiente del parámetro real λ,

se pide :

a) Determinar para qué valores de λ el sistema es: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible (*1,3 puntos*).
b) Obtener las soluciones en los casos compatible determinado y compatible indeterminado (*2 puntos*).

Solución:
a) La matriz ampliada de este sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \lambda \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Tanto la matriz de coeficientes (A) como la ampliada A´ tienen como máximo rango 3; empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Veamos para que valores del parámetro el determinante es nulo, resolvemos la ecuación

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda+1) = 0 \quad \rightarrow \left\langle \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1 \end{matrix} \right.$$

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ *hay un menor de orden 3 no nulo,*
luego rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incognitas
Sistema compatible determinado

Para $\lambda = 0$ *el menor de orden 3 de A es nulo, el rango de A será como máximo 2, estudiemos los rangos de A y A´*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ *Estudiemos el siguiente menor de A* $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ *luego rang(A)=2 y el rang(A´) será al menos 2.*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$ *En esta matriz se observa que $F_1 = -2F_2$ por lo que rang (A´) = 2*

luego rang(A) = rang(A´) = 2 < nº de incognitas
Sistema compatible indeterminado

Para $\lambda = -1$ *igual que en el caso anterior el menor de orden 3 de A es nulo. Estudiemos los rangos de A y A´.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ *Estudiemos el siguiente menor de A* $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ *luego rang(A)=2 y el rang(A´) será al menos 2.*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$ *orlando el menor anterior con la 4ª columna y 3ª fila* $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0$ *luego rang(A´)=3*

luego rang(A)=2 y rang(A´)=3, es decir rang(A) ≠ rang(A´)
Sistema incompatible

En resumen, para $\lambda = -1$ *Sistema Incompatible,*
para $\lambda = 0$ *Sistema Compatible Indeterminado,*
para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ *Sistema Compatible Determinado.*

b) Para $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda \neq -1$ *Sistema Compatible Determinado.*

Lo resolvemos por Cramer, $|A|$ *ya lo calculamos en el apartado a)* $|A| = \lambda^2 + \lambda$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6\lambda - 10\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{-4\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{-4\lambda}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{-4}{\lambda+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 5\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\lambda^2 + 3\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\lambda(\lambda+3)}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{\lambda+3}{\lambda+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5\lambda^2 - 3\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2\lambda^2}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$$

En los cálculo anteriores como $\lambda \neq 0$ *al final podemos simplificar por* λ

Para $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda \neq -1$ *la solución del sistema es* $x = \frac{-4}{\lambda+1}$ $\quad y = \frac{\lambda+3}{\lambda+1}$ $\quad z = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$

Para $\lambda = 0$ *Sistema Compatible Indeterminado.*

Para este valor de λ*, del menor de orden 2 no nulo obtenido en el apartado a) escogemos las ecuaciones e incógnitas principales, es decir, tomamos la 2ª y 3ª ecuación:*

$- z = 0$

$x + 3y + z = 5$

las incógnitas principales son z e y, pasamos x al término independiente y el sistema a resolver es,

$\begin{cases} -z = 0 \\ 3y + z = 5 - x \end{cases}$ *sustituyendo el valor de z en la 2ª ecuación* $3y + 0 = 5 - x$ $\quad y = \frac{5-x}{3}$

La solución del sistema será:

Solución $\begin{cases} x = \mu \\ y = \dfrac{5-\mu}{5} \\ z = 0 \end{cases} \quad , \mu \in \Re$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - 3 = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases}$$

con λ parámetro real, se pide:

a) Determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. *(1,3 puntos)*

b) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible determinado. *(1 punto)*

c) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado. *(1 punto)*

Solución:

a) La matriz ampliada de este sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Tanto la matriz de coeficientes (A) como la ampliada A´ tienen como rango máximo 3; empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = -4 + \lambda^2 + 2 - 4 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda - 6$$

Veamos para que valores del parámetro el determinante es nulo, resolvemos la ecuación

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \lambda_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Para $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *hay un menor de orden 3 no nulo,*
luego rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incognitas
Sistema compatible determinado

Para $\lambda = 3$ *el menor de orden 3 de A es nulo, el rango de A será como máximo 2, estudiemos los rangos de A y A´*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Estudiemos el siguiente menor de A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$ *luego rang(A)=2 y el rang(A´) será al menos 2.*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

En esta matriz se observa que $F_2 - F_3 = F_1$ *por lo que rang (A´) = 2*

luego rang(A) = rang(A´) = 2 < nº de incognitas
Sistema compatible indeterminado

Para $\lambda = -2$ *igual que en el caso anterior el menor de orden 3 de A es nulo. Estudiemos los rangos de A y A´.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Estudiemos el siguiente menor de A $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$ *luego rang(A)=2 y el rang(A´) será al menos 2.*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{array}\right)$$ *orlando el menor anterior con la 4ª columna y 3ª fila* $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -6-8-12-4-12+12 = -30 \neq 0$$ *luego rang(A´)=3*

luego rang(A)=2 y rang(A´)=3, es decir rang(A) $\neq$ rang(A´)
Sistema incompatible

En resumen, *para* $\lambda = -2$ *Sistema Incompatible,*
para $\lambda = 3$ *Sistema Compatible Indeterminado,*
para $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *Sistema Compatible Determinado.*

b) Para $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *Sistema Compatible Determinado.*

Lo resolvemos por Cramer, $|A|$ *ya lo calculamos en el apartado a)* $|A| = \lambda^2 - \lambda - 6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6 & \lambda & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4\lambda + 3\lambda^2 + 6 - 12 + \lambda^2 - 6\lambda}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{4\lambda^2 - 10\lambda - 6}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{(\lambda-3)(4\lambda+2)}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{4\lambda+2}{\lambda+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3\lambda & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6\lambda + 6\lambda - 2\lambda - 6\lambda + 6 + 2\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{2\lambda^2 - 8\lambda + 6}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{(\lambda-3)(2\lambda-2)}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{2\lambda-2}{\lambda+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12 + \lambda^3 - 6\lambda - 4\lambda - 3\lambda^2 + 6\lambda}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+2)}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \lambda - 2$$

En los cálculo anteriores como $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *podemos simplificar por* $\lambda - 3$ *y* $\lambda + 2$

Para $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *la solución del sistema es* $x = \dfrac{4\lambda+2}{\lambda+2}$ $y = \dfrac{2\lambda-2}{\lambda+2}$ $z = \lambda - 2$

c) Para $\lambda = 3$ *Sistema Compatible Indeterminado.*
Para este valor de λ*, del menor de orden 2 no nulo obtenido en el apartado a) escogemos las ecuaciones e incógnitas principales, es decir, tomamos la 1ª y 2ª ecuación:*

$x - y + z = 3$
$3x + 2y - z = 9$

las incógnitas principales son x e y, pasamos z al término independiente y el sistema a resolver es,

$$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{cases}$$ *el determinante de la matriz de coeficientes es 5, calculado en el apartado a), obtenemos las soluciones por Cramer,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 9+z & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6 - 2z + 9 + z}{5} = \frac{15-z}{5} = 3 - \frac{z}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 3 & 9+z \end{vmatrix}}{5} = \frac{9 + z - 9 + 3z}{5} = \frac{4z}{5}$$

Solución $$\begin{cases} x = 3 - \dfrac{\mu}{5} \\ y = \dfrac{4\mu}{5} \\ z = \mu \end{cases}, \mu \in \Re$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+\alpha\, y+\alpha^2\, z=1 \\ x+\alpha\, y+\alpha\, z=\alpha \\ x+\alpha^2\, y+\alpha^2\, z=\alpha^2 \end{cases}$ depende del parámetro real α.

Discutir para que valores de α es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado *(2 puntos),* y resolverlo en las casos compatibles *(1,3 puntos).*

Solución:

a) La matriz ampliada de este sistema es

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Tanto la matriz de coeficientes (A) como la ampliada A´ tienen como rango máximo 3; empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^3+\alpha^4+\alpha^2-\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3=\alpha^4-2\alpha^3+\alpha^2$$

Veamos para que valores del parámetro el determinante es nulo, resolvemos la ecuación

$$\alpha^4-2\alpha^3+\alpha^2=0 \;\rightarrow\; \alpha^2\left(\alpha^2-2\,\alpha+1\right)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \alpha^2=0 \;\rightarrow\; \alpha=0 \\ \alpha^2-2\,\alpha+1=0 \;\rightarrow\; (\alpha-1)^2=0 \;\rightarrow\; \alpha-1=0 \;\rightarrow\; \alpha=1 \end{cases}$$

Para $\alpha\neq 0$ *y* $\alpha\neq 1$ *hay un menor de orden 3 no nulo,*
luego rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incognitas
Sistema compatible determinado.

Para $\alpha=0$ *el menor de orden 3 de A es nulo, el rango de A será como máximo 2, estudiemos los rangos de A y A´*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ *Como las tres filas de A son iguales, rang(A)=1*

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ *Consideramos el menor* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0$ *por lo que rang (A´) = 2*

luego rang(A) ≠ rang(A´) Sistema incompatible.

Para $\alpha=1$ *igual que en el caso anterior el menor de orden 3 de A es nulo. Estudiemos los rangos de A y A´.*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ *Como las tres filas de A son iguales, rang(A)=1*

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ *Como las tres filas de A´ son iguales, rang(A´)=1*

luego rang(A)= rang(A´)=1 < nº de incognitas, Sistema compatible indeterminado

En resumen, para $\alpha=0$ *Sistema Incompatible,*
para $\alpha=1$ *Sistema Compatible Indeterminado,*
para $\alpha\neq 0$ *y* $\alpha\neq 1$ *Sistema Compatible Determinado.*

Resolución

Para $\alpha \neq 0 \ y \ \alpha \neq 1$ *Sistema Compatible Determinado.*

Lo resolvemos por Cramer, $|A|$ *ya lo calculamos en el apartado a)* $|A| = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2(\alpha-1)^2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^3\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{0}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\left(\alpha^2 + \alpha^3 + 1 - \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\right)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\left(\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1\right)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha(\alpha-1)^2(\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = (\alpha-1)(\alpha^2-1) = (\alpha-1)(\alpha-1)(\alpha+1) = (\alpha-1)^2(\alpha+1)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\left(\alpha^2 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha^2\right)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\left(-\alpha^2 + 2\,\alpha - 1\right)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{-\alpha(\alpha-1)^2}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{-1}{\alpha}$$

En los cálculos anteriores como $\alpha \neq 0 \ y \ \alpha \neq 1$ *podemos simplificar por* $\alpha \ y \ \alpha - 1$

Para $\alpha \neq 0 \ y \ \alpha \neq 1$ *la solución del sistema es* $x = 0$ $\quad y = \dfrac{\alpha+1}{\alpha}$ $\quad z = \dfrac{-1}{\alpha}$

Para $\alpha = 1$ *Sistema Compatible Indeterminado.*

Para este valor de α*, el sistema queda reducido a la ecuación:*

$x + y + z = 1$

Podemos despejar cualquiera de las incógnitas, despejando x quedará $x = 1 - y - z$

Solución $\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \Re$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas *x , y, z,* $\begin{cases} x+2y-3z=\alpha \\ 2x+6y-11z=2 \\ x-2y+7z=1 \end{cases}$

se pide:

a) Determinar razonadamente el valor de α para el cual el sistema es compatible *(1,2 puntos).*

b) Para ese valor obtenido en a) de α, calcular el conjunto de soluciones del sistema *(1,3 puntos).*

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α *(0,8 puntos).*

Solución:

a)

La matriz ampliada del sistema es

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes, M. En la matriz M tenemos el siguiente menor de orden 2, 1ª y 2ª filas con 1º y 2ª columnas,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6-4=2\neq 0 \quad , luego \quad ran(M)\geq 2$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 42+12-22+18-22-28=72-72=0$$

Por lo tanto ran(M) = 2

Estudiemos el rango de la matriz ampliada, M'. Orlamos el menor de orden 2 no nulo de M con la 4ª columna y 3ª fila de M',

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6-4\alpha+4-6\alpha+4-4=10-10\alpha$$

$$10-10\alpha=0 \quad \to \quad \alpha=1$$

$$Luego \begin{cases} Para \quad \alpha=1 \qquad ran(M')=2 \\ Para \quad \alpha\neq 1 \qquad ran(M')=3 \end{cases}$$

El sistema será compatible cuando ran(M) = ran(M'), es decir, para α = 1.

b)

Resolvamos el sistema anterior para α = 1.

Según obtuvimos en el anterior apartado el menor no nulo de orden 2 de M era el formado por la 1ª y 2ª fila y la 1ª y 2ª columna de M. Luego el sistema que debemos resolver estará formado por las dos primeras ecuaciones y las incógnitas principales serán x e y. Es decir, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+6y-11z=2 \end{cases} \quad x \;\; e \;\; y \quad incóg.\ princ. \quad \to \quad \begin{cases} x+2y=1+3z \\ 2x+6y=2+11z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+3z & 2 \\ 2+11z & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{6+18z-4-2z}{2} = \frac{2-4z}{2} = 1-2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+3z \\ 2 & 2+11z \end{vmatrix}}{2} = \frac{2+11z-2-6z}{2} = \frac{5z}{2}$$

Para α = 1 el conjunto de soluciones es:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \dfrac{5}{2}\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

c)

Para $\alpha \neq 1$

ran(M) = 2 y ran(M')=3, sistema incompatible, los tres planos no tienen un corte común.
Considerando los planos dos a dos,
De lo estudiado en el apartado a), el primer y segundo planos no son paralelos porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$$

Veamos el 2º y 3^er^ planos,

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10 \neq 0$$

no son paralelos.

Con el 1^er^ y 3^er^ planos sería,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

no son paralelos.

Luego los tres planos se cortan dos a dos pero no tienen ningún corte común.

Para $\alpha = 1$

ran(M) = 2 y ran(M')=2, como hay tres incógnitas: sistema compatible indeterminado.
La solución de este sistema la hemos obtenido en el apartado b). Esta solución corresponde a la ecuación de una recta.
En este caso los tres planos se cortan en una recta.

PROBLEMA B.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros a, b y c

$$\begin{cases} 2ax + by + z & = 3c \\ 3x - 2by - 2cz & = a \\ 5ax - 2y + cz & = -4b \end{cases}$$

se pide:

a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros a = 0, b = – 1 y c = 2 el sistema es incompatible. *(3 puntos)*

b) Determinar razonadamente los valores de los parámetros a, b y c, para los que se verifica que (x, y, z) = (1, 2, 3) es solución del sistema. *(4 puntos)*

c) Justificar si la solución (x, y, z) = (1, 2, 3) del sistema del apartado b) es, o no, única. *(3 puntos)*

Solución:

a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros a = 0, b = – 1 y c = 2 el sistema es incompatible.

Para estos valores de los parámetros el sistema queda:

$$\begin{cases} -y + z = 6 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$$

Ahora podemos proceder a estudiar este sistema o fijarnos en la primera y tercera ecuaciones que tienen proporcionales los coeficientes de las incógnitas pero no los términos independientes. Veámoslo,

$$\begin{cases} -y + z = 6 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0 \\ |2| = 2 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad rang(A) = 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A') = 2 \end{array}\right\} \text{Sistema Incompatible}$$

Por lo tanto, como la 1ª y 3ª ecuaciones son incompatible el sistema inicial también es incompatible.

b) ¿a, b y c? / (x , y , z) = (1 , 2 , 3) sea solución del sistema.

Dando a las incógnitas los valores indicados, el sistema queda:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$$

Estudiemos este nuevo sistema cuyas incógnitas son a, b y c.

La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -4 & -6 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes, A. A es una matriz 3x3, luego su máximo rango posible es 3.

$$|2| = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 12 - 60 - 60 + 48 + 6 = -78 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 3$$

Como el máximo rango posible de A´ (que es 3x4) es también 3, entonces rang(A´) = 3
Por lo que rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incógnitas → Sistema Compatible Determinado.
La solución del sistema será:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & -6 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{36 + 36 - 48 - 48 - 72 + 18}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-18 + 12 + 90 - 45 + 48 - 9}{-78} = \frac{78}{-78} = -1$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-32 + 12 - 30 - 60 + 8 + 24}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

Finalmente, (x , y , z) = (1 , 2 , 3) es solución del sistema para a = 1 , b = – 1 y c = 1.

c) Estudiemos el sistema para estos valores de los parámetros a = 1 , b = – 1 y c = 1 obtenidos anteriormente.

El sistema que queda es: $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x - 2y + z = 4 \end{cases}$

La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes, A. A es matriz 3x3, luego su máximo rango posible es 3.

$$|2| = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_3 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 + 3) = -7 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 3$$

Como el máximo rango posible de A´ (A´ es 3x4) es 3, entonces rang(A´) = 3
Por lo que rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incógnitas → Sistema Compatible Determinado.

Por tanto la solución (x , y , z) = (1 , 2 , 3) es única.

PROBLEMA A.1. Sea el sistema de ecuaciones

$$S:\begin{cases} x+y+z=m \\ 2x+3z=2m+1 \\ x+3y+(m-2)z=m-1 \end{cases}$$

donde m es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Todas las soluciones del sistema S cuando $m=2$. *(4 puntos)*

b) Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única. *(2 puntos)*

c) El valor de m para el que el sistema S admite la solución (x,y,z) = $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ *(4 puntos)*

Solución:

a) Para m = 2 el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3z=5 \\ x+3y=1 \end{cases}$$ *de este sistema, sus matriz ampliada es,* $$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de A

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6+3-9=0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A)=2$$

Estudiemos el rango de A′, como ran(A) = 2 → ran(A′) ≥ 2. Ampliamos el menor de orden 2 no nulo de A′, que es el obtenido anteriormente en A, con la cuarta columna y tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12+5-15-2=0$$ *Por lo tanto ran(A′) = 2*

Lo obtenido es: ran(A) = ran(A′) = 2 < 3 = nº incógnitas → Sistema compatible indeterminado.
Resolvemos el sistema usando las ecuaciones (1^a y 2^a) e incógnitas (x, y) que han proporcionado este rango.

El sistema a resolver es: $$\begin{cases} x+y=2-z \\ 2x=5-3z \end{cases}$$

Resolviéndolo por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ 5-3z & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-5+3z}{-2} = \frac{5}{2}-\frac{3}{2}z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 2 & 5-3z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1(5-3z)-2(2-z)}{-2} = \frac{5-3z-4+2z}{-2} = \frac{1-z}{-2} = \frac{-1+z}{2} = \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}z$$

Finalmente, para m = 2 las soluciones del sistema S son: $$\begin{cases} x=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\lambda \\ y=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \quad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$$

b) Como el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas tendrá solución única cuando sea un sistema compatible determinado. Calculemos los valores de m.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{array}\right)$$

A es 3x3, luego el máximo rango de A es 3; A´ es 3x4, luego el máximo rango de A´ es 3. Por lo tanto empezamos estudiando el rango de A.

Estudiamos el menor de orden 3 de A,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 6+3-9-2(m-2) = -2m+4$$

$$-2m+4=0 \quad \rightarrow \quad -2m=-4 \quad \rightarrow \quad m=\frac{-4}{-2}=2$$

Luego, para $m \neq 2$ $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ ran(A) =3 y como el máximo rango posible de A´ es 3, ran(A´) = 3, luego: para $m \neq 2$, ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado

Finalmente, el sistema tiene solución única cuando $m \neq 2$

c) Para (x,y,z) = $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ *el sistema quedará*

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right) + 0 = m \\ 2\,\frac{3}{2} + 3\,.\,0 = 2m+1 \\ \frac{3}{2} + 3\left(\frac{-1}{2}\right) + (m-2)\,0 = m-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1=m \\ 3=2m+1 \\ 0=m-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1=m \\ 2=2m \\ 1=m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1=m \\ 1=m \\ 1=m \end{cases} \rightarrow \quad m=1$$

El sistema S admite la solución (x, y, z) = $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ *para m = 1.*

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones S: $\begin{cases} 2x + \quad\quad \alpha^2 z = 5 \\ x + (1-\alpha)\, y + z = 1 \\ x + 2y \quad + \alpha^2 z = 1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando α = 0. *(3 puntos)*
b) Todas las soluciones del sistema S cuando α = – 1. *(4 puntos)*
c) El valor de α para el que el sistema S es incompatible. *(3 puntos)*

Solución:
Los apartados a) y b) podemos resolverlos directamente sustituyendo en el sistema S el valor de α por su valor, pero para resolver el apartado c) hay que estudiar el sistema. Empezamos estudiando el sistema.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ *y la matriz ampliada* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha^2 & 5 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 & 1 \end{array}\right)$.

Como A es 3x3, su máximo rango es 3. Como A´ es 3x4, su máximo rango también es 3. Por lo que empezamos estudiando la matriz A.
Estudiemos el determinante de orden 3 de A,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\alpha^2 + (1-\alpha)\alpha^2 - 4 = 2\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^3 - 4 = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4$$

Resolvamos la ecuación: $-\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4 = 0$, *por Ruffini:*

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 3 & 0 & -4 \\ -1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & -1 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & & -2 & 4 & \\ \hline & -1 & 2 & 0 & \\ 2 & & -2 & & \\ \hline & -1 & 0 & & \end{array}$$

Llas soluciones de la ecuación son:
$\alpha = -1$ *y* $\alpha = 2$

Es decir, que $|A| = 0$ *para* $\alpha = -1$ *y* $\alpha = 2$

Por lo tanto, sobre el sistema S podemos afirmar:

Para $\alpha \neq -1, 2$
rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incognitas, S es sistema compatible y determinado.

Para $\alpha = -1$

La matriz ampliada es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$, *ya sabemos que* $|A| = 0$. *Obtengamos los rangos de A y A´*

Calculemos el rango de A, como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 2$

Calculemos el rango de A´, al menor no nulo anterior le orlamos la cuarta columna y la tercera fila de A´,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\text{ como } F_2 = F_3 \text{ }) = 0, \text{ por lo tanto } rang(A') = 2$$

Luego, rang(A) = rang(A´) = 2 < nº de incógnitas, S es sistema compatible indeterminado.

Para resolver el sistema utilizamos las ecuaciones e incógnitas que nos indica el menor no nulo de orden 2 anterior, es decir: $\begin{cases} 2x = 5 - z \\ x + 2y = 1 - z \end{cases}$

De la primera ecuación $x = \dfrac{5-z}{2}$

Sustituyendo este valor de x en la segunda ecuación:

$$\frac{5-z}{2} + 2y = 1 - z; \qquad 5 - z + 4y = 2 - 2z; \qquad 4y = -3 - z; \qquad y = \frac{-3-z}{4}$$

Luego la solución del sistema S será: $\begin{cases} x = \dfrac{5-\lambda}{2} \\ y = \dfrac{-3-\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Para α = 2

La matriz ampliada es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$*, ya sabemos que* $|A| = 0$*. Obtengamos los rangos de A y A´*

Calculemos el rango de A, como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow rang(A) = 2$

Calculemos el rango de A´, procediendo como en el apartado anterior,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 10 + 5 - 4 = 9 \neq 0 \rightarrow rang(A') = 3$$

Como rang(A) ≠ rang(A´), el sistema S es incompatible.

Respondamos a cada uno de los apartados del problema.

a) Para α = 0, (≠ − 1 y 2) el sistema S es compatible determinado.

La matriz ampliada es, $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ y $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{5-2}{-4} = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$$

Resolviendo por Cramer,

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{2+10-5-4}{-4} = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$$

Finalmente, para α = 0 la solución del sistema S es: $x = \dfrac{5}{2}, \quad y = \dfrac{-3}{4}, \quad z = \dfrac{-3}{4}$

b) Para α = – 1, como hemos obtenido anteriormente, la solución del sistema S es: $\begin{cases} x = \dfrac{5-\lambda}{2} \\ y = \dfrac{-3-\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

c) El sistema S es incompatible, como hemos obtenido anteriormente, para α = 2.

Matemáticas II Junio 2013

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$,donde a, b y c son tres números reales. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación que deben verificar los números *a, b* y *c* para que el sistema sea compatible. *(4 puntos)*

b) La solución del sistema cuando $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$. *(2 puntos)*

c) La solución del sistema cuando los números *a*, *b* y *c* verifican la relación $a = c = -2b$. *(4 puntos)*

Solución:

Del sistema $\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$ *obtenemos la matriz de coeficientes* $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *y la matriz ampliada* $A'=\begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$

a) Para que el sistema sea compatible, ran(A) = ran(A´)

Calculemos el rango de A.

Como A es 3x2, el máximo rango de A será 2.

$|2| = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -8+5=-3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$ *por lo tanto ran(A) = 2*

Para que ran(A´) = 2, debe cumplirse que $\begin{vmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 0$,

$-8c - a + 10b + 8a - 2b + 5c = 0$

$7a + 8b - 3c = 0$

Finalmente, ***para que el sistema se compatible la relación entre a, b y c debe ser $7a + 8b - 3c = 0$***

b) Para $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$.

Comprobemos que es sistema es compatible, $7(-1) + 8 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -7 + 16 - 9 = 0$, por lo tanto el sistema es compatible.

Para resolver el sistema usamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado anterior. Es decir, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 2x+5y=-1 \\ -x-4y=2 \end{cases} \rightarrow \quad x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{4-10}{-3}=\frac{-6}{-3}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{4-1}{-3}=\frac{3}{-3}=-1$$

Para $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$, la solución del sistema es $x = 2$ e $y = -1$

c) Si a = c = – 2 b, veamos si cumplen la relación 7 a + 8 b – 3 c = 0.
7 (– 2 b) + 8 b – 3 (– 2 b) = – 14 b + 8 b + 6 b = 0, la cumple. Luego el sistema será compatible

Según lo realizado en el apartado anterior, el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} 2x+5y=-2b \\ -x-4y=b \end{cases} \rightarrow \quad x=\frac{\begin{vmatrix} -2b & 5 \\ b & -4 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{8b-5b}{-3}=\frac{3b}{-3}=-b$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2b \\ -1 & b \end{vmatrix}}{-3}=\frac{2b-2b}{-3}=\frac{0}{-3}=0$$

Si a = c = – 2 b, la solución del sistema es x = – b   e   y = 0.

Matemáticas II Junio 2014

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=k-2 \\ x+k^2y+3z=2k \end{cases}$, donde k es un parámetro real.

a) Discutir **razonadamente** el sistema según los valores de k. *(4 puntos)*
b) Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, todas las soluciones del sistema cuando $k=-1$. *(3 puntos)*
c) Resolver **razonadamente** el sistema cuando $k=0$. *(3 puntos)*

Solución:

Estudiemos el sistema $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=k-2 \\ x+k^2y+3z=2k \end{cases}$ *Su matriz ampliada, A´, es* $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & k-2 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3x3 por lo que su máximo rango posible será 3.
A´ es 3x4 por lo que su máximo rango posible será 3.

Empezamos estudiando el rango de A,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix} = 12+4k^2+15-8-5k^2-18=-k^2+1$$

$$-k^2+1=0 \;\rightarrow\; k^2=1 \;\rightarrow\; k=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Procedamos a responder a los tres apartados.

a) De los cálculos realizados anteriormente deducimos,

Para k ≠ – 1 , 1 *→ /A/ ≠ 0 → ran (A) = 3 y como el máximo rango de A´ también es 3,*
ran (A) = 3 = ran(A´) = nº de incógnitas → ***Sistema compatible determinado***

Para k = – 1,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad y \;\; sabemos\ que \;\; |A|=0 \;\rightarrow\; ran\,(A)\le 2$$

Calculemos el rango de A,

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-6=-2\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \; ran\,(A)=2$$

Calculemos el rango de A´,

Sólo nos falta por estudiar el menor de orden 3 que se obtiene al orlar el menor de orden 2 no nulo anterior con la tercera fila y la cuarta columna de A´,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8-2-9+4+3+12=-19+19=0 \;\rightarrow\; ran\,(A')=2$$

Luego, ran (A) = ran (A´) = 2 < nº de incógnitas. ***Para k = – 1 el sistema es compatible indeterminado****.*

Para k = 1,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que /A/ = 0 y considerando el cálculo del rango de A realizado en el caso anterior, ran(A) =2.
Calculemos el rango de A´, (ran (A´) ≥ ran (A) =2)

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

al orlar el menor de orden 2 no nulo anterior con la tercera fila y la cuarta columna de A´

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 3 + 4 + 1 - 12 = 13 - 17 = -4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 3$$

Luego, ran (A) = 2 ≠ ran (A´) = 3 , sistema incompatible. ***Para k = 1 el sistema es incompatible.***

Resumiendo, ***Para k ≠ – 1 , 1 el sistema es compatible determinado***
Para k = – 1 el sistema es compatible indeterminado
Para k = 1 el sistema es incompatible

b) Para k = – 1 sabemos que el sistema es compatible indeterminado
Por el estudio realizado anteriormente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y las incógnitas principales son x e y:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 - 2z \\ 2x + 4y = -3 - 5z \end{cases} \rightarrow \text{Por Cramer} \rightarrow$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-2z & 3 \\ -3-5z & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4 - 8z + 9 + 15z}{-2} = \frac{5 + 7z}{-2} = \frac{-5 - 7z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-2z \\ 2 & -3-5z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3 - 5z + 2 + 4z}{-2} = \frac{-1 - z}{-2} = \frac{1 + z}{2}$$

Para k = – 1, la solución es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5 - 7\lambda}{2} \\ y = \dfrac{1 + \lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$$

c) Para k = 0, como es distinto de – 1 y 1, del estudio del apartado a) sabemos que el sistema es compatible determinado

El sistema a resolver es $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-2 \\ x \qquad +3z=0 \end{cases}$

De este sistema sabemos que $|A| = -k^2+1\Big|_{k=0} = 1$. *Resolviendo por Cramer,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -12+18 = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -6-5+4+6 = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = -6+4 = -2$$

Finalmente, para k = 0 la solución del sistema es x = 6, y = – 1, z = – 2.

PROBLEMA B.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (1-\alpha)\,x+(2\alpha+1)\,y+(2\alpha+2)\,z=\alpha \\ \alpha\,x+\quad \alpha\,y \quad =2\alpha+2 \\ 2x+\quad (\alpha+1)\,y+(\alpha-1)\,z \;=\alpha^2-2\,\alpha+9 \end{cases}$

Donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha=1$. *(3 puntos)*

b) **La justificación razonada** de si el sistema es compatible o incompatible cuando $\alpha=2$. *(3 puntos)*

c) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Soluciones para $\alpha = 1$?

Para $\alpha = 1$ el sistema a resolver es:

$\begin{cases} 3\,y+4\,z=1 \\ x+y \quad =4 \\ 2x+2\,y \quad =8 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de M,

$$\left.\begin{array}{l} |4|=4\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M)\geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M)\geq 2 \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(F_3=2\,.\,F_2)=0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(M)=2$$

Calculemos el rango de M´,

Considerando el estudio realizado anteriormente ran(M´) ≥ 2, el menor de orden 3 de M´ por estudiar es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}=(F_3=2\,.\,F_2)=0 \quad \rightarrow \quad ran(M')=2$$

Luego, ran (M) = ran (M´) = 2 < 3 = nº incógnitas → Es un sistema compatible indeterminado.

Para resolver el sistema utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo. Es decir, 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas z e y.

El sistema a resolver será:

$\begin{cases} 3\,y+4\,z=1 \\ y \quad =4-x \end{cases}$ *sustituyendo el valor de y que da la 2ª ecuación en la 1ª,*

$3\,(4-x)+4\,z=1;\quad 12-3\,x+4\,z=1;\quad 4\,z=1-12+3\,x;\quad 4\,z=-11+3\,x;\quad z=\dfrac{-11+3x}{4}$

Finalmente, ***para*** $\boldsymbol{\alpha = 1}$ ***las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \dfrac{-11 + 3\lambda}{4} \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

b) Para $\alpha = 2$ *el sistema a resolver es:*

$\begin{cases} -x + 5y + 6z = 2 \\ 2x + 2y \qquad = 6 \\ 2x + 3y + z \ = 9 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $N' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{array} \right)$

Calculemos el rango de N,

$$\left.\begin{array}{l} \left|-1\right| = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N) \geq 1 \\[2ex] \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 10 = -12 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N) \geq 2 \\[2ex] \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 36 - 24 - 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(N) = 2$$

Calculemos el rango de N´,

Considerando el estudio realizado anteriormente ran(N´) $\geq$ *2, el menor de orden 3 de N´ por estudiar es:*

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -18 + 12 + 60 - 8 + 18 - 90 = -26 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N') = 3$$

Luego, ran (N) = 2 $\neq$ *3 = ran (N´)* $\rightarrow$ *Es un sistema incompatible.*

Para $\boldsymbol{\alpha = 2}$ ***el sistema es incompatible.***

c) ¿Valores de α *para los que es S.C.D.?*

$\begin{cases} (1-\alpha)\,x + (2\alpha + 1)\,y + (2\alpha + 2)\,z = \alpha \\ \quad \alpha\, x + \qquad \alpha\, y \qquad\qquad = 2\alpha + 2 \\ \quad 2x + \ \ (\alpha + 1)y + (\alpha - 1)\,z \ = \alpha^2 - 2\,\alpha + 9 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2\alpha + 1 & 2\alpha + 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha + 2 \\ 2 & \alpha + 1 & \alpha - 1 & \alpha^2 - 2\alpha + 9 \end{array} \right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3 x 3, por tanto el máximo rango de A es 3
La matriz ampliada, A´, es 3 x 4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 2\alpha + 1 & 2\alpha + 2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha + 1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = (desarrollando \ por \ F_2) = -\alpha \begin{vmatrix} 2\alpha + 1 & 2\alpha + 2 \\ \alpha + 1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 1-\alpha & 2\alpha + 2 \\ 2 & \alpha - 1 \end{vmatrix} =$$

(multiplicamos los binomios correspondientes),

$$\left\{ \begin{array}{rrr} \begin{array}{rrr} & 2\alpha & +1 \\ & \alpha & -1 \\ \hline & -2\alpha & -1 \\ 2\alpha^2 & +\alpha & \\ \hline 2\alpha^2 & -\alpha & -1 \end{array} & \begin{array}{rrr} & 2\alpha & +2 \\ & \alpha & +1 \\ \hline & +2\alpha & +2 \\ 2\alpha^2 & +2\alpha & \\ \hline 2\alpha^2 & +4\alpha & +2 \end{array} & \begin{array}{rrr} & \alpha & -1 \\ & -\alpha & +1 \\ \hline & +\alpha & -1 \\ -\alpha^2 & +\alpha & \\ \hline -\alpha^2 & +2\alpha & -1 \end{array} \end{array} \right\}$$

$$= -\alpha\left(2\alpha^2 - \alpha - 1 - 2\alpha^2 - 4\alpha - 2\right) + \alpha\left(-\alpha^2 + 2\alpha - 1 - 4\alpha - 4\right) = -\alpha\left(-5\alpha - 3\right) + \alpha\left(-\alpha^2 - 2\alpha - 5\right) =$$
$$= \alpha\left(5\alpha + 3 - \alpha^2 - 2\alpha - 5\right) = \alpha\left(-\alpha^2 + 3\alpha - 2\right)$$

$$\alpha\left(-\alpha^2 + 3\alpha - 2\right) = 0 \left\langle \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ -\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado por Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & 2 \\ \hline & -1 & 2 & 0 \\ 2 & & -2 & \\ \hline & -1 & 0 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 1 \quad y \quad \alpha_2 = 2$$

Luego, para $\alpha \neq 0, 1, 2$ ran(A) = 3, como ran(A´) ≥ ran(A) y ran(A´) ≤ 3, también ran (A´) = 3; es decir, ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas → Sistema compatible determinado.

Sabemos que para $\alpha = 0, 1, 2$ el sistema no será compatible determinado, aunque es fácilmente justificable:

- *Para $\alpha = 1$, visto en apartado a), S. C. Indeterminado*
- *Para $\alpha = 2$, visto en apartado b), S. Incompatible*
- *Para $\alpha = 0$*

$$A' = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right) \quad F_2 \text{ es la ecuación } 0 = 2 \text{ (Falso), luego S. Incompatible}$$

Finalmente, ***el sistema es compatible y determinado para*** $\alpha \in \Re - \{0, 1, 2\}$

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a\,x \quad\quad -z=a \\ 2\,x+a\ \ y+z=1 \\ 2x \quad\quad +z=2 \end{cases}$

Donde a es un parámetro real. Obtener <u>**razonadamente**</u>**,** <u>**escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**</u>:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es incompatible *(4 puntos)*
b) Todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible indeterminado. *(3 puntos)*
c) La solución del sistema cuando $a = -1$. *(3 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & -1 & a \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a$$

$$a^2 + 2a = 0 \quad \rightarrow \quad a(a+2) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a+2=0 \quad \rightarrow \quad a=-2 \end{cases}$$

Entonces,

para $\boldsymbol{a \neq -2}$ ***y 0****,* $/A/ \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas* $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Determinado***

para a = – 2*,* $/A/ = 0 \rightarrow$ *ran(A)* ≤ 2

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Como $F_3 = -F_1$*, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.*

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |-2| = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) $\rightarrow$ *ran(A´) = 2*

Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Indeterminado.***

para a = 0, $|A| = 0 \;\rightarrow\; ran(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A,

$$\left.\begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Calculemos el rango de A´,

Considerando el estudio realizado anteriormente ran(A´) ≥ 2, el menor de orden 3 de A´ por estudiar es:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por tanto, ran(A) = 2 ≠ 3 = ran(A´) $\rightarrow$ ***Sistema Incompatible***

Respondamos a las preguntas,

a) El sistema es incompatible para a = 0.

b) El sistema es compatible indeterminado para a = – 2.

Del estudio realizado anteriormente, el sistema a resolver en este caso es:

$$\begin{cases} -2x \qquad\qquad -z = -2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$ *Siendo x e y las incógnitas principales*

$$\begin{cases} -2x \qquad\qquad = -2 + z \\ 2x - 2y = 1 - z \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -2+z & 0 \\ 1-z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{4-2z}{4} = 1 - \dfrac{z}{2} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & -2+z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{-2+2z+4-2z}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Finalmente, ***para a = – 2 las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{\lambda}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

c) Solución para   a = – 1

Si a = – 1, a ≠ – 2 y 0, por lo que el sistema es compatible determinado

El sistema es $\begin{cases} -x \quad -z = -1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 2x \quad + z = 2 \end{cases}$ *Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-2}{1-2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1-4-2+2+2+2}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \{F_3 = -2xF_1\} \frac{0}{-1} = 0$$

La solución del sistema para   a = – 1 es: { x = 1, y= 1, z = 0}

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + a\,y + 2\,z = a \\ 2\,x + a\,y - z = 2 \\ a\,x - y + 2\,z = a \end{cases}$

dependiente del parámetro real a. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $a = 2$. *(4 puntos)*

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. *(3 puntos)*

c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a. *(2 + 2 puntos)*

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.

A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2a - 4 - a^2 - 2a^2 + 1 - 4a = -3a^2 - 6a - 3$$

$$-3a^2 - 6a - 3 = 0 \;\rightarrow\; a^2 + 2a + 1 = 0 \;\rightarrow\; (a+1)^2 = 0 \;\rightarrow\; a + 1 = 0 \;\rightarrow\; a = -1$$

Entonces,

para $a \neq -1$, *$|A| \neq 0 \rightarrow$ ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas $\rightarrow$* ***Sistema Compatible Determinado***

para $a = -1$, *$|A| = 0 \rightarrow$ ran(A) ≤ 2*

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) \geq 1 \\[2ex] \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow\; ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) $\rightarrow$ ran(A´) = 2

Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Indeterminado.***

Respondamos a las preguntas,

a) Solución para a = ***2***

Si a = ***2****, a ≠* ***– 1****, por lo que el sistema es compatible determinado*

El sistema es $\begin{cases} -x+2\,y+2\,z=2 \\ 2\,x+2\,y-z=2 \\ 2\,x-y+2\,z=2 \end{cases}$ *Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{8-4-4-8-2-8}{-4-4-4-8+1-8}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4+8-4-8-2-8}{-27}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4-4+8-8-2-8}{-27}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

Para a = 2 la solución del sistema es: $\{\, x = y = z = \frac{2}{3} \}$

b) Según lo estudiado al principio ***el sistema es compatible determinado para a ≠ – 1****.*

c) Según lo estudiado al principio ***el sistema es compatible indeterminado para a = – 1****.*

Del estudio realizado anteriormente, para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y (las que determinan el menor de orden dos no nulo).

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -x-y=-1-2z \\ 2\,x-y=2+z \end{cases} \rightarrow$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-2z & -1 \\ 2+z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{1+2z+2+z}{3}=\frac{3+3z}{3}=1+z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -2+z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{3}=\frac{-2-z+2+4z}{3}=\frac{3z}{3}=z$$

Finalmente, ***para a = – 1 las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$

PROBLEMA A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -a\,x + y - z = 1 \end{cases}$

donde a es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado. *(2 puntos)*

b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$. *(4 puntos)*

c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado. *(4 puntos)*

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.

A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a - 1 = -a$$

$$-a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0$$

Entonces,

para a ≠ 0**, $|A| \neq 0 \;\rightarrow\;$ ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas → **Sistema Compatible Determinado

***para a = 0**, $|A| = 0 \;\rightarrow\;$ ran(A) ≤ 2*

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) → ran(A´) = 2

*Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas → **Sistema Compatible Indeterminado.***

Respondamos a las preguntas,

a) Según lo estudiado al principio ***el sistema es compatible determinado para a*** $\boldsymbol{\neq 0}$.

b) Solución para $a = \mathbf{3}$

Si $a = \mathbf{3}$, $a \neq \mathbf{0}$, *por lo que el sistema es compatible determinado*

El sistema es $\begin{cases} \quad\quad y - z = -2 \\ -x \quad\quad + z = 5 \\ -3x + y - z = 1 \end{cases}$ *Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.*

De lo estudiado al principio, sabemos que /A/ = – a, por tanto (como a = 3) /A/ = – 3

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-5+1+2+5}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+6-15+2}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2-15+1}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

Para a = 3 la solución del sistema es: { x = – 1, y = 2, z = 4 }

c) Según lo estudiado al principio ***el sistema es compatible indeterminado para a = 0****.*

Del estudio realizado inicialmente, para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y (las que determinan el menor de orden dos no nulo).

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} y = -1 + z \\ -x = 5 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 + z \\ x = -5 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -5 + z \\ y = -1 + z \end{cases}$$

Finalmente, ***para a = 0 las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x = -5 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

PROBLEMA B.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=\alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. *(4 puntos)*
b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. *(4 puntos)*
c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. *(2 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = \{Como\ F_3 = F_1 + 2F_2\} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Estudiemos el rango de A´. { Sabemos que ran (A´) ≥ ran (A) }
A partir del menor de orden 2 no nulo de A formamos el menor de orden 3 de A´,

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{vmatrix} \underset{F_3 - F_1 - 2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \alpha - 14 \end{vmatrix} = (\alpha - 14)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \alpha - 14 \\ \alpha - 14 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} Para \quad \alpha = 14,\ ran(A') = 2 \\ Para \quad \alpha \neq 14,\ ran(A') = 3 \end{array}$$

a) ***Si $\alpha = 14$**, ran (A) = ran (A´) = 2 < 3 = nº de incognitas →* ***Sistema Compatible (indeterminado)***
Si $\alpha \neq 14$**, ran (A) = 2 ≠ 3 = ran (A´) →* ***Sistema Incompatible

b) El sistema es compatible para $\alpha = 14$ y, según lo estudiado inicialmente, el sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo. Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y.

$$\begin{cases} x+y=4-z \\ 3x+4y=5-5z \end{cases} \to \quad x=\frac{\begin{vmatrix} 4-z & 1 \\ 5-5z & 4 \end{vmatrix}}{1}=16-4z-5+5z=11+z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-z \\ 3 & 5-5z \end{vmatrix}}{1}=5-5z-12+3z=-7-2z$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x=11+\lambda \\ y=-7-2\lambda \qquad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$

c) Cambiamos el coeficiente 11 por otro número diferente. Lo llamamos r ($r\neq 11$)

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & r & \alpha \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & r \end{vmatrix}= \underset{F_3-F_1-2F_2}{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & r-11 \end{vmatrix}=(r-14)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=r-11$$

$$r-11=0 \quad \to \quad r=11$$

Como $r\neq 11 \ \to\ r-11\neq 0 \ \to\ /A/\neq 0$, por lo tanto ran (A) = 3.
Y como el máximo rango de A´ también es 3, obtenemos ran (A) = ran (A´) = 3 = nº de incógnitas
Por tanto, ***para $r\neq 11$ el sistema sería compatible y determinado****.*

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+\ \ y+(a+1)\ z=2 \\ x+(a-1)\ y+2z=1 \\ 2\ x+ay+z=-1 \end{cases}$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a. *(5 puntos)*
b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. *(5 puntos)*

Solución:
a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = a-1+a(a-1)+4-(a+1)(a-1)2-2a-1 = a-1+a^2+a+4-2(a^2-1)-2a-1 =$$

$$= a^2+2-2a^2+2 = 4-a^2$$

$$4-a^2=0 \ \rightarrow \ a^2=4 \ \rightarrow \ a=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Soluciones: $a=-2$ *y* $a=2$

Para a ≠ – 2 y 2

$|A| \neq 0 \ \rightarrow$ *ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que* ***el sistema es compatible y determinado***.

Para a = – 2

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$*, estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-1=-4 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A)=2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3-4+2+12+4+1 = 18 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) ≠ ran(A´), luego ***el sistema es incompatible***.

Para a = 2

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Sabemos que /A / = 0, estudiemos los rangos de A y A´,

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-3=-1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *las tres filas son iguales* y $|1| = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 1$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{como\ C_3 = C_2 - C_1\} = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 2$$

Luego, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº incógnitas, luego **el sistema es compatible determinado**.

Por tanto,

Si a ≠ – 2 y 2, Sistema Compatible Determinado
Si a = – 2, Sistema Incompatible
Si a = 2, Sistema Compatible Indeterminado

b) ¿Soluciones del sistema cuando sea compatible?

Si a ≠ – 2 y 2, Sistema Compatible Determinado

Lo resolvemos por Cramer,

Sabemos que la matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array}\right)$ y $|A| = 4 - a^2$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{4-a^2} = \frac{2(a-1)+a(a+1)-2+(a-1)(a+1)-4a-1}{4-a^2} = \frac{2a-2+a^2+a-2+a^2-1-4a-1}{4-a^2} =$$

$$= \frac{2a^2-a-6}{4-a^2} = \frac{(a-2)(2a+3)}{-(a-2)(a+2)} = \frac{-(2a+3)}{a+2}$$

Factorizando el numerador, $\begin{array}{c|ccc} & 2 & -1 & -6 \\ 2 & & 4 & 6 \\ \hline & 2 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow 2a^2 - a - 6 = (a-2)(2a+3)$

y el denominador, $4 - a^2 = -(a^2 - 4) = -(a-2)(a+2)$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a+1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}{4-a^2}=\frac{1-(a+1)+8-2(a+1)+2-2}{4-a^2}=\frac{9-3(a+1)}{4-a^2}=\frac{9-3a-3}{4-a^2}=\frac{6-3a}{4-a^2}=\frac{3(2-a)}{4-a^2}=\frac{3(a-2)}{a^2-4}=$$

$$=\frac{3(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{3}{a+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a+1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}{4-a^2}=\frac{-a+1+2a+2-4(a-1)-a+1}{4-a^2}=\frac{4-4a+4}{4-a^2}=\frac{8-4a}{4-a^2}=\frac{4a-8}{a^2-4}=\frac{4(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{4}{a+2}$$

{La simplificación efectuada en el cálculo de x, y, z se puede realizar porque $a \neq 2 \rightarrow a-2 \neq 0$}

Si $a \neq -2$ y 2, la solución es: $x=\dfrac{-(2a+3)}{a+2}, \quad y=\dfrac{3}{a+2}, \quad z=\dfrac{4}{a+2}$.

Si a = 2, Sistema Compatible Indeterminado

Del estudio realizado en el apartado a), el menor no nulo de orden 2 calculado nos indica las ecuaciones e incógnitas principales; en este caso 1^a y 2^a ecuaciones e y, z como incógnitas.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} y+3z=2-x \\ y+z=1-x \end{cases}$ y $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2-x & 3\\ 1-x & 2\end{vmatrix}}{-1}=\frac{4-2x-3+3x}{-1}=\frac{1+x}{-1}=-1-x$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2-x\\ 1 & 1-x\end{vmatrix}}{-1}=\frac{1-x-2+x}{-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$Solución:\ \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z=1 \end{cases}$$

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & m & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}m\\ 0\\ 9\end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuando la ecuación matricial $A^2\,X = B$ tiene solución en función del parámetro real m. *(4 puntos)*
b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando estas existan. *(6 puntos)*

Solución:
a) Calculemos A^2,

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & m & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & m & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2+2m & 2\\ 0 & m^2+3 & m\\ 0 & 3m & 3\end{pmatrix}$$

¿ran(A^2) en función de m?
Estudiemos $|A^2|$,

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix}1 & 2+2m & 2\\ 0 & m^2+3 & m\\ 0 & 3m & 3\end{vmatrix}=3(m^2+3)-3m\,m=3m^2+9-3m^2=9\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A^2)=3$$

Como su rango es 3, que es el máximo posible, la ecuación $A^2\,X = B$ tiene solución única.

b) ¿Solución de la ecuación matricial?
Como $|A^2|\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\left(A^2\right)^{-1}$ (la matriz inversa de A^2).
La solución X, la obtendremos de la siguiente forma:

$$A^2\,X = B;\;\; \left(A^2\right)^{-1} A^2\,X=\left(A^2\right)^{-1} B \quad\rightarrow\quad I\,X=\left(A^2\right)^{-1} B \quad\rightarrow\quad X=\left(A^2\right)^{-1} B$$

Calculemos $\left(A^2\right)^{-1}$,

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2+2m & 2\\ 0 & m^2+3 & m\\ 0 & 3m & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}m^2+3 & m\\ 3m & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & m\\ 0 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & m^2+3\\ 0 & 3m\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2+2m & 2\\ 3m & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2+2m\\ 0 & 3m\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2+2m & 2\\ m^2+3 & m\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & m\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2+2m\\ 0 & m^2+3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3m^2+9-3m^2 & 0 & 0\\ 6+6m-6m & 3 & 3m\\ 2m+2m^2-2m^2-6 & m & m^2+3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 3m\\ 2m-6 & m & m^2+3\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ -6 & 3 & -3m\\ 2m-6 & -m & m^2+3\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}9 & -6 & 2m-6\\ 0 & 3 & -m\\ 0 & -3m & m^2+3\end{pmatrix}$$

Finalmente, $$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & -6 & 2m-6\\ 0 & 3 & -m\\ 0 & -3m & m^2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2/3 & (2m-6)/9\\ 0 & 1/3 & -m/9\\ 0 & -m/3 & (m^2+3)/9\end{pmatrix}$$

Entonces, $X = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & (2m-6)/9 \\ 0 & 1/3 & -m/9 \\ 0 & -m/3 & (m^2+3)/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + 9\dfrac{2m-6}{9} \\ \dfrac{-m}{9}9 \\ \dfrac{m^2+3}{9}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}$

Solución: $$X = \begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}$$

Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$-x+y+z=m$$
$$2x+my-z=3m$$
$$(m-1)x+3y-z=6+m$$

Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. *(6 puntos)*

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. *(4 puntos)*

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2+C_1 \\ = C_3+C_1 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & m+2 & 1 \\ m-1 & m+2 & m-2 \end{vmatrix} = \{desarrollando\ por\ la\ 1^a\ fila\} = -1\begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ m+2 & m-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -((m+2)(m-2)-(m+2)) = -[(m+2)(m-2-1)] = -[(m+2)(m-3)]$$

$$-[(m+2)(m-3)] = 0; \quad \left\langle \begin{matrix} m+2=0 & \rightarrow & m=-2 \\ m-3=0 & \rightarrow & m=3 \end{matrix} \right.$$

Para m ≠ – 2 y m ≠ 3

$|A| \neq 0$ → ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 → ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para m = – 2

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Calculemos el rango de A
Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A,

$$En\ A, \left.\begin{matrix} |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Calculemos el rango de A´
Al menor anterior no nulo de A le añadimos la cuarta columna y tercera fila,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4+4+18+6+6-8 = 30 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) ≠ ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Para m = 3

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

En esta matriz F_2 y F_3 son iguales, podemos eliminar una de ellas (ambas ecuaciones son la misma). Queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

A es una matriz 2x3, por tanto el máximo rango de A es 2.
A´ es una matriz 2x4, por tanto el máximo rango de A´ es 2.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\text{En } A, \quad \left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ es 2 → ran(A) = ran(A´) = 2 < nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto,

Para m ≠ – 2 y m ≠ 3 el sistema es compatible determinado
Para m = – 2 el sistema es incompatible y
Para m = 3 el sistema es compatible indeterminado

b) Solución para m = 3.

Del estudio realizado en el apartado anterior para m = 3 el sistema es compatible indeterminado y las ecuaciones e incógnitas principales (las del menor de orden 2 no nulo) son 1ª y 2ª y x e y.
El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -x + y = 3 - z \\ 2x + 3y = 9 + z \end{cases}$$

$$|A| = -5$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 9+z & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{9 - 3z - 9 - z}{-5} = \frac{-4z}{-5} = \frac{4z}{5}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-z \\ 2 & 9+z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-9 - z - 6 + 2z}{-5} = \frac{-15 + z}{-5} = \frac{15 - z}{5}$$

Si m = 3, la solución es:
$$\begin{cases} x = \dfrac{4\lambda}{5} \\ y = \dfrac{15 - \lambda}{5} \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+\alpha\, y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha\, x+y+z=9 \end{cases}$, se pide:

a) Probar que es siempre compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado. *(2 puntos).*
b) Resolver el sistema anterior para $\alpha=7$. *(1,3 puntos).*

Solución:
a)
Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A' a la matriz ampliada,

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

A es una matriz 3x3, luego el máximo rango de A será 3
A' es una matriz 3x4, luego su máximo rango será 3
Estudiemos el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}=5+3+\alpha^2-5\alpha-1-3\alpha=\alpha^2-8\alpha+7$$

$$\alpha^2-8\alpha+7=0 \quad\rightarrow\quad \alpha=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4.1.7}}{2.1}=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{8\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{8+6}{2}=7\\[2mm] \dfrac{8-6}{2}=1\end{cases}$$

$$Para\quad \alpha\neq 1\quad y\quad \alpha\neq 7,\quad ran(A)=3=ran(A')=n^{o}\ de\ incógnitas\quad\Rightarrow\quad S.C.D$$

$$Para\quad \alpha=1$$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

En la matriz A la 1ª y 3ª filas son iguales, luego el máximo rango de A será 2,

$$en\quad A\quad\rightarrow\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-3=2\neq 0\quad\rightarrow\quad ran(A)=2$$

en A', orlando el menor anterior, no nulo, con 3ª fila y 4ª columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}=0\quad (1^{a}\ y\ 2^{a}\ filas\ iguales),\quad luego\quad ran(A')=2$$

ran(A) = ran(A') = 2 < nº incognitas, Sistema Compatible Indeterminado

$$Para\quad \alpha=7$$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$en\quad A'\quad\rightarrow\quad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-21=-16\neq 0\quad\rightarrow\quad ran(A)=2$$

en A', orlando el menor anterior, no nulo, con 3ª fila y 4ª columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 9 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9(5+3+49-35-1-21) = 9(57-57) = 0, \quad luego \quad ran(A') = 2$$

ran(A) = ran(A') = 2 < nº incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

Por lo tanto, para cualquier valor de α *el sistema es siempre compatible.*
El sistema es compatible indeterminado para $\alpha = 1$ *y* $\alpha = 7$.

b) Para $\alpha = 7$
El sistema a resolver es,

$$\begin{cases} x + 7\,y + z = 9 \\ 3x + 5y + z = 9 \\ 7\,x + y + z = 9 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado. Del estudio realizado en al apartado anterior, sabemos que el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + 7\,y = 9 - z \\ 3x + 5y = 9 - z \end{cases} \quad \textit{por Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9-z & 7 \\ 9-z & 5 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{5(9-z) - 7(9-z)}{-16} = \frac{-2(9-z)}{-16} = \frac{9-z}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9-z \\ 3 & 9-z \end{vmatrix}}{-16} = \frac{1(9-z) - 3(9-z)}{-16} = \frac{-2(9-z)}{-16} = \frac{9-z}{8}$$

$$\textit{Solución}\begin{cases} x = \dfrac{9-\lambda}{8} \\ y = \dfrac{9-\lambda}{8} \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.1. Dado el sistema dependiente del parámetro real α $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar, razonadamente los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. *(1,3 puntos).*
b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado. *(1,3 puntos).*
c) Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$. *(0,7 puntos).*

Solución:
a)
Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A' a la matriz ampliada,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right)$$

A es una matriz 3x3, luego el máximo rango de A será 3
A' es una matriz 3x4, luego su máximo rango será 3

Estudiemos el rano de A

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2$$

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$$

$Por \quad Ruffini:$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \lfloor 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \lfloor 0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \lfloor 0 & & \end{array}$$

$$Soluciones: \quad \alpha = 1 \quad y \quad \alpha = -2$$

$$Para \quad \alpha \neq 1 \quad y \quad \alpha \neq -2, \quad |A| \neq 0 \quad luego \quad ran(A) = 3 = ran(A') = n^o \ de \ incógnitas \quad \Rightarrow \quad S.C.D$$

$Para \quad \alpha = -2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que | A | = 0 luego el rango de A será menor o igual que 2, como el menor de A

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Ahora calculemos el rango de A'. Orlando el menor anterior de A, no nulo, con 3ª fila y 4ª columna de A´,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 + 2 + 2 - 1 = 9 \neq 0 \qquad luego \quad ran(A') = 3$$

ran(A) = 2 ≠ 3 = ran(A'), Sistema Incompatible

Para $\alpha = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como esta matriz tiene todas sus filas (o columnas) iguales para estudiar su rango sólo debemos considerar una fila, la 1ª por ejemplo, como esta fila tiene elementos no nulos ran(A´) = 1. Lo mismo ocurre con la matriz A, por lo que ran(A) = ran(A´) = 1 < 3 = nº de incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado.

b) Resolvamos el sistema para $\alpha \neq -2$ *y* $\alpha \neq 1$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

Utilizaremos los resultados obtenidos en el apartado a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^2 + 1 + 1 - \alpha - 1 - \alpha}{\alpha^3 - 3\alpha + 2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha^3 - 3\alpha + 2} =$$

Como las raíces del polinomio $\alpha^3 - 3\alpha + 2$ *son (obtenido en a))* $\alpha = 1$ *doble y* $\alpha = -2$ $\Rightarrow$

$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)$

Siguiendo con el cálculo de x,

$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \text{ como } \alpha \neq 1 \text{ podemos simplificar por } \alpha - 1 = \frac{1}{(\alpha + 2)}$$

como $\alpha \neq -2$ *la solución anterior existe puesto que el denominador es no nulo.*

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^2 + 1 + 1 - 1 - \alpha - \alpha}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{1}{(\alpha + 2)}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^2 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - 1}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{1}{(\alpha + 2)}$$

Cuando el sistema es compatible determinado la solución es: $x = y = z = \dfrac{1}{\alpha - 2}$

c) Solución para $\alpha = 0$

Como 0 es distinto de – 2 y 1, para este valor de α *obtendremos la solución del sistema usando el resultado del apartado anterior. Es decir,*

$$x = y = z = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

Para $\alpha = 0$ *la solución del sistema es* $x = y = z = \dfrac{1}{2}$

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}(\alpha+3)\,x-4\,y-2z=4\\ x-2\,y-(\alpha+2)z=2\\ 2x+(\alpha-3)\,y-2\,z=4\end{cases}$, se pide, razonando las respuestas:

a) Justificar que para el valor de $\alpha=0$ el sistema es incompatible. *(1,1 puntos).*
b) Determinar los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. *(1,1 puntos).*
c) Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado. *(1,1 puntos).*

Solución:
Previamente realizamos el estudio del sistema según los valores del parámetro α.
Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A´ a la ampliada, tenemos

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha+3 & -4 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -(\alpha+2) & 2\\ 2 & \alpha-3 & -2 & 4\end{array}\right)$$

Como la matriz A es 3x3, el máximo rango de A será 3.
Como la matriz A´es 3x4, el máximo rango de A´ será 3.
Por lo que procedemos a estudiar el rango de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha+3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -(\alpha+2)\\ 2 & \alpha-3 & -2\end{vmatrix}=4(\alpha+3)-2(\alpha-3)+8(\alpha+2)-8+(\alpha+3)(\alpha-3)(\alpha+2)-8=$$

$$=4\alpha+12-2\alpha+6+8\alpha+16-16+(\alpha+3)(\alpha-3)(\alpha+2)=10\alpha+18+\left(\alpha^2-9\right)(\alpha+2)=$$

$$=10\alpha+18+\alpha^3-9\alpha+2\alpha^2-18=\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=\alpha\left(\alpha^2+2\alpha+1\right)=\alpha(\alpha+1)^2$$

Los valores de α que anulan el determinante de A serán,

$$\alpha(\alpha+1)^2=0 \quad\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}\alpha=0\\ (\alpha+1)^2=0 \quad\rightarrow\quad \alpha+1=0 \quad\rightarrow\quad \alpha=-1\end{array}\right.$$

A partir de estos cálculos vamos a contestar a las cuestiones del problema.

a) Justificar que para α = 0 el sistema es incompatible.
Según el estudio realizado anteriormente, para α = 0 sabemos que $|A|=0$*, luego rang (A)* ≤ 2
Calculemos el rango de A,

$$para \quad \alpha=0 \quad A=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

busquemos un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6+4=-2\neq 0,$$ *por lo tanto rang(A) = 2*

Calculemos el rango de A´

$$para \quad \alpha=0 \quad A'=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -2 & 2\\ 2 & -3 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

a partir del menor de orden 2 no nulo de A veamos si conseguimos un menor de orden 3 no nulo de A´,

$$\begin{vmatrix}3 & -4 & 4\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix}\overset{C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(6-4)=-2\neq 0,$$ *por lo tanto rang(A´) = 3*

Como rang(A) ≠ rang(A´), para α= 0 el sistema es incompatible.

b) Valores de α para que el sistema sea compatible y determinado.

Por ser un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas será compatible y determinado cuando rang(A) = rang(A´) = 3.

Según estudiamos al principio $|A| = 0$ *para* $\alpha = 0$ *o* $\alpha = -1$*, por lo que para* $\alpha \neq 0$ *y* $\alpha \neq -1$ *rang(A) = 3.*

Como el máximo rango de A´ también es 3, para estos valores de α rang(A´) = 3

Luego, el sistema será compatible y determinado para $\alpha \neq 0$ *y* $\alpha \neq -1$

c) Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado.

Del estudio realizado al principio sólo nos queda por estudiar el caso en que $\alpha = -1$

Según ese estudio, para $\alpha = -1$ *sabemos que* $|A| = 0$*, luego rang (A)* ≤ 2

Calculemos el rango de A,

$$para \quad \alpha = -1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

En esta matriz se comprueba, fácilmente, que $F_1 = F_3$ *y* $F_1 = 2 \times F_2$*.*
Es decir, sólo tiene una fila linealmente independiente, por lo que su rango es 1.

Calculemos el rango de A´

$$para \quad \alpha = -1 \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

En esta matriz se cumplen las mismas relaciones que en la matriz A.
Por lo tanto su rango es 1.

Hemos obtenido: rang(A) = rang(A´) = 1 < nº de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado

Resolvemos el sistema usando sólo una incógnita (por ser de rango 1), por ejemplo, escogemos la ecuación correspondiente a la 2ª fila y como incógnita principal la x,

$x - 2y - z = 2$

despejamos x, $x = 2 + 2y + z$

Y finalmente, para $\alpha = -1$ *la solución del sistema es:*

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \Re$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ 2x+3y+5z=2 \\ 3x+5y+\lambda^2 z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro λ, se pide:

i) Determinar para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. *(1,3 puntos)*

ii) Obtener el conjunto S de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado. *(1 punto)*

iii) Obtener el vector de S ortogonal (perpendicular) al vector (1,1,2). *(1 punto)*

Solución:

i) La matriz ampliada del sistema es

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right)$$

El máximo rango posible de A y A' es 3, estudiamos el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 15 + 10 - 9 - 25 - 2\lambda^2 = \lambda^2 - 9$$

$$\lambda^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{9} \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm 3$$

Para $\lambda \neq -3$ *y* $\lambda \neq 3$*, ran(A) = 3 = ran(A') = nº de incógnitas, Sistema Compatible Determinado.*

Para $\lambda = -3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que det(A) = 0, calculemos el rango de A,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Veamos el rango de A', al menor anterior le orlamos la 4ª columna y la 3ª fila,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 30 + 6 + 27 - 10 - 2 = -6 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Como ran(A)=2 ≠ 3=ran(A'), Sistema Incompatible

Para $\lambda = 3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

Al igual que calculamos en el caso anterior ran(A) = 2

Veamos el de A'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 30 + 6 - 27 - 10 - 2 = 39 - 39 = 0$$

como no hay más menores de orden 3 de A', ran(A') = 2

Como ran(A) = 2 = ran(A') < nº incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

En resumen,

Para $\lambda \neq -3$ *y* $\lambda \neq 3$*, Sistema Compatible Determinado.*

Para $\lambda = -3$*, Sistema Incompatible*

Para $\lambda = 3$*, Sistema Compatible Indeterminado*

ii) *El sistema es compatible indeterminado para* $\lambda = 3$*, el menor que da el rango 2 es el formado por 1ª y 2ª fila y 1ª y 2ª columna, luego las incógnitas principales serán x e y; para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación. Es decir:*

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x + 3y = 2 - 5z \end{cases}$$

En el apartado anterior ya calculamos el determinante del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 2-5z & 3 \end{vmatrix}}{1} = 9 - 3z - 2 + 5z = 7 + 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 2 & 2-5z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 5z - 6 + 2z = -4 - 3z$$

$$\text{Para } \lambda = 3 \text{ el conjunto, } S\text{, de soluciones del sistema es: } \begin{cases} x = 7 + 2\mu \\ y = -4 - 3\mu \quad \mu \in \Re \\ z = \mu \end{cases}$$

iii) *Los vectores de S son de la forma* $(7 + 2\mu, -4 - 3\mu, \mu)$.
El que sea ortogonal al vector (1 , 1 , 2) debe cumplir:

$$(7 + 2\mu, -4 - 3\mu, \mu) \cdot (1,1,2) = 0$$

$$7 + 2\mu - 4 - 3\mu + 2\mu = 0$$

$$\mu + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = -3$$

El vector buscado es (1 , 5 , – 3)

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z,

$$\begin{cases} (\lambda+2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda+6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda-2)z = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ **(1 punto).**

b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, **obtener** todas sus soluciones **(1,8 puntos).**

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$ **(0,5 puntos).**

Solución:

Como es un sistema homogéneo estudiamos la matriz de coeficientes,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{C_2+C_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 1 \\ 3 & \lambda+3 & -3 \\ 5 & \lambda+3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda+3 & -3 \\ \lambda+3 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & \lambda+3 \\ 5 & \lambda+3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + (\lambda+3)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda-2+3) + (\lambda+3)(3-5) =$$

$$(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+1) - 2(\lambda+3) = (\lambda+3)\left[(\lambda+2)(\lambda+1) - 2\right] = (\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda+2-2) =$$

$$= (\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda) = (\lambda+3)(\lambda+3)\lambda = \lambda(\lambda+3)^2$$

$$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda+3)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ (\lambda+3)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda+3) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -3 \end{cases}$$

Para $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda \neq -3$ $|A| \neq 0 \rightarrow$ *S.C.D., la solución es la trivial*

Para $\lambda = 0$ *y* $\lambda = -3$ $|A| = 0 \rightarrow$ *S.C.I.*

a) Los valores de λ *para los que el sistema sólo admite la solución (x,y,z)=(0,0,0), la solución trivial, son* $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda \neq -3$.

b)

Para $\lambda = 0$

El sistema es $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ y sabemos que $|A| = 0$

como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 3 = 15 \neq 0, \quad ran(A) = 2$

resolvemos el sistema usando la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y. Debemos resolver el siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2x - y = -z \\ 3x + 6y = 3z \end{cases}$$

Por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ 3z & 6 \end{vmatrix}}{15} = \frac{-6z + 3z}{15} = \frac{-3z}{15} = \frac{-z}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 3 & 3z \end{vmatrix}}{15} = \frac{6z + 3z}{15} = \frac{9z}{15} = \frac{3z}{5}$$

Solución $\begin{cases} x = \dfrac{-\alpha}{5} \\ y = \dfrac{3\alpha}{5} \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \Re$

Para $\lambda = -3$

El sistema es $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 5z = 0 \end{cases}$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ y sabemos que $|A| = 0$

Como en esta matriz se cumple que $F_2 = -3F_1$ *y* $F_3 = -5F_1$ *el máximo rango de A será 1, podemos calcular el siguiente menor de orden 1,*

$|-1| = -1 \neq 0$ *luego* $ran(A) = 1$

Para resolver el sistema utilizamos la primera ecuación y la incógnita x como principal, es decir,
$-x - y + z = 0$*, por lo tanto,* $x = -y + z$

Solución $\begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \Re$

c) Para $\lambda = -3$*, según hemos estudiado en el apartado anterior, la matriz de coeficientes tiene rango 1, esto quiere decir que los tres planos son el mismo.*

PROBLEMA A.1.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \alpha\, x + \alpha^3\; y + z = 1 \\ \alpha\, x + \alpha\; y + z = 1 \\ \alpha^3\; x + \alpha\; y + z = 1 \end{cases}$ donde α es un parámetro real, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado. *(4 puntos)*
b) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible indeterminado. *(3 puntos)*
c) Resolver el sistema en todos los casos en que es compatible indeterminado. *(3 puntos)*

Solución:
Estudiemos el sistema. La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha^3 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz de coeficientes, A, es 3x3 por lo que su máximo rango es 3.
La matriz ampliada, A´, es 3x4 por lo que su máximo rango, también, será 3.
Empezamos estudiando el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^3 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^6 - \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^4 = \alpha^6 - 2\alpha^4 + \alpha^2 = \alpha^2\left(\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1\right)$$

$$\alpha^2\left(\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1\right) = 0 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} \alpha^2 = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 0 \\ \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; \alpha^2 = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \;\rightarrow\; \alpha = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{array} \right.$$

A partir de este estudio iremos obteniendo las respuestas a los apartados.

a)
Para $\alpha \neq -1, 0, 1$ *se cumple* $|A| \neq 0$ *luego* rang$(A) = 3$ *y como el máximo rango de A´ es 3,* rang$(A') = 3$
Luego, rang(A) = rang$(A') = 3$ = *nº de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado.*

Por lo tanto el sistema es compatible determinado para $\alpha \neq -1, 0, 1$.

b) Estudiemos el sistema para los valores de $\alpha = -1, 0, 1$
Sabemos que para estos valores de α $|A| = 0$ *luego* rang$(A) \leq 2$.
$\alpha = -1$

La matriz ampliada es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Como las tres filas son iguales y sus elementos no nulos → rang(A´) = 1 = rang(A) < 3 = nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

$\alpha = 0$

La matriz ampliada es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Las tres filas son iguales, a efectos de cálculo de rango nos podemos quedar con una sola fila.
Como A = (0 0 1) → rang(A) = 1 (hay un elemento no nulo en la matriz).
Análogamente, A´ = (0 0 1 1) → rang(A´) = 1
Luego, rang(A´) = 1 = rang(A) < 3 = nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

$\alpha = 1$

La matriz ampliada es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Como las tres filas son iguales y sus elementos no nulos → rang(A´) = 1 = rang(A) < 3 = nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La respuesta del apartado b) es: el sistema es compatible indeterminado para $\alpha = -1, 0, 1$.

c) Resolvamos el sistema en los casos en que es compatible indeterminado.

$\alpha = -1$, *rang(A´) = 1 = rang(A)*

El menor no nulo que proporciona el rango de A es, por ejemplo, $|a_{13}| = |1| \neq 0$.
La ecuación que tenemos para resolver será: $-x - y + z = 1 \rightarrow z = 1 + x + y$

Para $\alpha = -1$*, la solución del sistema es:* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \Re$

$\alpha = 0$, *rang(A´) = 1 = rang(A)*

El menor no nulo que proporciona el rango de A es, por ejemplo, $|a_{13}| = |1| \neq 0$.
La ecuación que tenemos para resolver será: $0x + 0y + z = 1 \rightarrow z = 1$

Para $\alpha = 0$*, la solución del sistema es:* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \Re$

$\alpha = 1$, *rang(A´) = 1 = rang(A)*

El menor no nulo que proporciona el rango de A es, por ejemplo, $|a_{11}| = |1| \neq 0$.
La ecuación que tenemos para resolver será: $x + y + z = 1 \rightarrow x = 1 - y - z$

Para $\alpha = 1$*, la solución del sistema es:* $\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \Re$

PROBLEMA A.1. Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases} x-2y-3z &=0 \\ 3x+10y-z &=0 \\ x+14y+\alpha z &=0 \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando $\alpha = 0$. *(4 puntos).*

b) El valor de α para el que el sistema S tiene infinitas soluciones. *(4 puntos).*

c) Todas las soluciones del sistema S cuando se da a α el valor obtenido en el apartado b). *(2 puntos).*

Solución:

El sistema S es homogéneo, por lo tanto es un sistema compatible.

a) Para $\alpha = 0$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x-2y-3z &=0 \\ 3x+10y-z &=0 \\ x+14y &=0 \end{cases}$$

Llamando A a la matriz de coeficientes de este sistema,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 0-126+2+30+14+0 = 46-126 = -80 \neq 0$$

Por lo que ran(A) = 3 = nº de incógnitas $\rightarrow$ sistema compatible determinado que por ser homogéneo tendrá como solución la trivial, es decir, x = y = z = 0

Para $\alpha = 0$ la solución del sistema S es x = y = z = 0

b) Como es un sistema homogéneo, tendrá infinitas soluciones cuando $|M| = 0$, siendo M la matriz de coeficientes del sistema S.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & \alpha \end{vmatrix} = 10\alpha-126+2+30+14+6\alpha = 46-126 = 16\alpha-80$$

$16\alpha - 80 = 0$; $16\alpha = 80$; $\alpha = \dfrac{80}{16} = 5$

Como el menor de orden 2 de M $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10+6 = 16 \neq 0 \rightarrow$ para $\alpha = 5$,

ran(M) = 2 < nº de incógnitas $\rightarrow$ S es un sistema compatible indeterminado y tendrá infinitas soluciones.

S tiene infinitas soluciones para $\alpha = 5$

c) Para $\alpha = 5$ resolvemos el sistema usando las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo de M (calculado en el apartado anterior). Usamos la primera y segunda ecuaciones y las incógnitas x e y:

$\begin{cases} x-2y=3z \\ 3x+10y=z \end{cases}$ *, lo podemos resolver por Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3z & -2 \\ z & 10 \end{vmatrix}}{16} = \frac{30z + 2z}{16} = \frac{32z}{16} = 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{16} = \frac{z - 9z}{16} = \frac{-8z}{16} = \frac{-z}{2}$$

Finalmente, para $\alpha = 5$ *la solución será:* $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \dfrac{-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+a\ y+2\ z=3 \\ x-3\ y+a\ z=-2 \\ x+y+2z=a \end{cases}$, donde a es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. *(4 puntos)*
b) La solución del sistema cuando $a = 0$. *(3 puntos)*
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. *(3 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6+2+a^2+6-a-2a = a^2-3a+2$$

$$a^2-3a+2=0$$

$$a = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} a_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ a_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Soluciones: a = 1 y a = 2

Para a ≠ 1 y 2
$|A| \neq 0$ $\rightarrow$ *ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.*

Para a = 1

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, *estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-1 = -4 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+3-2+9+2-1 = 8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 ≠ 3 =ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Para a = 2

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, *estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{C_3 = C_1 + C_2\} = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < 3 = nº incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Respondamos las cuestiones,

a) ***El sistema es compatible cuando a ≠ 1.***
(Si a ≠ 1 y 2 sistema compatible determinado y si a = 2 sistema compatible indeterminado)

b) Si a = 0 (a ≠ 1 y 2), el sistema es compatible determinado.

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = \left(a^2 - 3a + 2\right)\Big|_{a=0} = 0^2 - 3\cdot 0 + 2 = 2$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-18-4}{2} = -11; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4+4-6}{2} = -3; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3+9+2}{2} = 7$$

Si a = 0, la solución es: $\begin{cases} x = -11 \\ y = -3 \\ z = 7 \end{cases}$

c) Soluciones cuando el sistema es compatible indeterminado.
El sistema es compatible indeterminado para a = 2.
El sistema a sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo. Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y + 2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 - 2z \\ x - 3y = -2 - 2z \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 3-2z & 2 \\ -2-2z & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-9+6z+4+4z}{-5} = \frac{-5+10z}{-5} = 1 - 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 1 & -2-2z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-2-2z-3+2z}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Cuando el sistema es compatible indeterminado su solución es: $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

Problema 1.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=\alpha \end{cases}$, se pide:

a) Justificar que para cualquier valor del parámetro real α, el sistema tiene solución única. *(1 punto).*
b) Hallar la solución del sistema en función del parámetro α. (*1.3 puntos*).
c) Determinar el valor de α para el que la solución (x, y, z) del sistema satisface $x + y + z = 1$. (*1 punto*).

Solución:
a) La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{array}\right)$$

Estudiemos los rangos de la matriz de coeficientes, A, y de la ampliada A´.
A es una matriz 3x3, luego su máximo rango será 3. Calculemos el menor de orden 3 de A,

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 48+18+18-8-108-18=-50\neq 0$$ *luego ran (A) = 3.*

Como A´ es 3x4, máximo rango de A´es 3. Como el rango de A ya es 3 el de A´ también será 3. Por lo tanto: ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
Y como en todo el proceso de cálculo no ha intervenido el parámetro α podemos afirmar que el sistema tiene solución única (es SCD) para cualquier valor de α.

b) Resolvamos el sistema por Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50}=\frac{40+18+18\alpha-8\alpha-18-90}{-50}=\frac{-50+10\alpha}{-50}=\frac{5-\alpha}{5}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix}}{-50}=\frac{36+6\alpha+30-6-36\alpha-30}{-50}=\frac{30-30\alpha}{-50}=\frac{-3+3\alpha}{5}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{-50}=\frac{24\alpha+45+9-20-54-9\alpha}{-50}=\frac{-20+15\alpha}{-50}=\frac{4-3\alpha}{10}$$

c) La solución del sistema que hemos obtenido en el apartado anterior debe satisfacer x + y + z = 1. Es decir,

$$\frac{5-\alpha}{5}+\frac{-3+3\alpha}{5}+\frac{4-3\alpha}{10}=1$$

$$\frac{10-2\alpha}{10}+\frac{-6+6\alpha}{10}+\frac{4-3\alpha}{10}=1$$

$$10-2\alpha-6+6\alpha+4-3\alpha=10$$

$$8+\alpha=10$$

$$\alpha=2$$

Por lo que, el valor buscado de α es 2.

Problema 1.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente

a) El vector X tal que A X = 0X. (1,1 puntos).
b) Todos los vectores X tales que A X = 3X. (1,1 puntos).
c) Todos los vectores X tales que A X = 2X. (1,1 puntos).

Solución:
a) Buscamos el vector X / A X = 0 X

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo en el que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4+2=6 \neq 0$ *luego es un sistema compatible determinado, su solución es la trivial x = y = 0*

El vector X buscado será: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Buscamos el vector X / A X = 3 X

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-y=3x \\ 2x+4y=3y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -2x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo en el que $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+2=0.$ *Como* $|1| = 1 \neq 0$ *es un sistema compatible indeterminado.*

2 x + y = 0; y = – 2 x, por lo tanto la solución del sistema es: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Y el vector X será: $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \Re$

c) Buscamos el vector X / A X = 2 X

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-y=2x \\ 2x+4y=2y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -x-y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo en el que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2+2=0.$ *Como* $|-1| = -1 \neq 0$ *es un sistema compatible indeterminado.*

– x – y = 0; y = – x, por lo tanto la solución del sistema es: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Y el vector X será: $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \Re$

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=\alpha+3 \\ 2x-y+z=\alpha+1 \\ 3x+\alpha y+2z=4 \end{cases}$, se pide:

a) Probar que es compatible para todo valor de α. *(1,3 puntos).*
b) Obtener razonadamente el valor de α para el que el sistema es indeterminado. *(1 punto).*
c) Resolver el sistema cuando α = 0, escribiendo los cálculos necesarios para ello. *(1 punto).*

Solución:
a) Probar que es compatible para todo valor de α.

La matriz de coeficientes de este sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$ *y la ampliada* $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha+3 \\ 2 & -1 & 1 & \alpha+1 \\ 3 & \alpha & 2 & 4 \end{array}\right)$

Para conocer la compatibilidad del sistema estudiamos los rangos de estas dos matrices.
A es una matriz 3x3, por lo que su máximo rango será 3,
A´ es una matriz 3x4, por lo que su máximo rango será 3
Estudiamos el rango de A.
Calculamos el menor de orden 3 de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -2+2\alpha+3+3-\alpha-4=\alpha$$

Para α ≠ 0, ran(A) = 3. Como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3.
ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas, Sistema Compatible Determinado

Para α = 0, escribimos la matriz A´

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes, A. Sabemos que $|A| = 0$.

El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2=-3\neq 0 \quad \rightarrow$ *ran(A) = 2*

Estudiemos el rango de la matriz ampliada, A´. Orlando el menor no nulo anterior con la 3ª fila y 4ª columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4+3+9-8=0 \quad \rightarrow \quad ran(A')=2$$

Por lo que ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

Y finalmente queda probado que para cualquier valor de α el sistema es compatible.

b) Según lo estudiado en el apartado anterior, el sistema es compatible indeterminado para α = 0.

c) Resolver para α = 0.
Del apartado a) sabemos que para α = 0 ran(A) = ran(A´) = 2, el menor de orden 2 no nulo de la matriz A nos indica las ecuaciones e incógnitas principales que usaremos para resolver el sistema.
El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x+y=3-z \\ 2x-y=1-z \end{cases} \qquad \textit{Sabemos que} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3+z-1+z}{-3} = \frac{-4+2z}{-3} = \frac{4-2z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+-z-6+2z}{-3} = \frac{-5+z}{-3} = \frac{5-z}{3}$$

Y la solución del sistema será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-2\lambda}{3} \\ x = \dfrac{5-\lambda}{3} \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 5x+7y+\alpha z=0 \end{cases}$, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α el sistema sólo admite la solución (x, y, z) = (0,0,0). *(1,5 puntos).*

b) Resolver, razonadamente, el sistema para el valor de α que lo hace indeterminado. *(1,8 puntos).*

Solución:
Estudiemos el sistema.
Llamando A a la matriz de coeficientes y A´ a la matriz ampliada,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{pmatrix} \quad y \quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & \alpha & 0 \end{array}\right)$$

Como el sistema es homogéneo, sabemos que es compatible (rang(A) = rang(A´)).
Estudiemos el máximo rango posible de A,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{vmatrix}=3\alpha+14+20-15-28-2\alpha=\alpha-9$$

$$\alpha-9=0 \quad \rightarrow \quad \alpha=9$$

$$Para\ \alpha\neq 9,\quad |A|\neq 0 \quad luego \quad rang(A)=3=n^{o}\ de\ incógnitas \quad \rightarrow \quad Sistema\ Compatible\ Deteminado$$

como el sistema es homogéneo la solución es la trivial, x = y = z = 0

Para α = 9, estudiemos la matriz A resultante. Para este valor de α sabemos que $|A| = 0$*, luego* $rang(A) \leq 2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Busquemos un menor de orden dos no nulo, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A)=2$$

luego rang(A) = 2 < 3 = nº de incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado.

De lo estudiado anteriormente, las respuestas a cada uno de los apartados será:

a) El sistema sólo admite la solución (x , y , z) = (0 , 0 , 0) (solución trivial) para α ≠ 9

b) El valor de α que hace al sistema indeterminado es α = 9
Para este valor de α la solución será:
Utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo, es decir,

$$\begin{cases} x+y=-z \\ 2x+3y=-4z \end{cases}$$ *Resolviéndolo por Cramer,*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -4z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-3z+4z}{1}=z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -4z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-4z+2z}{1}=-2z$$

Por tanto, para α = 9 la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \qquad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$$