EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Hallar las constantes reales a y b para que $f(x)=\begin{cases} x\ln x + a & si \quad x>0 \\ b & si \quad x=0 \\ \dfrac{sen\,\pi x}{x} & si \quad x<0 \end{cases}$

sea una función continua para todo valor real x (*3,3 puntos*).

Solución:

Para x < 0 f(x) está definida como $\dfrac{sen\,\pi x}{x}$ *que es continua ya que el denominador no se anula.*

Para x > 0 f(x) está definida como $x\ln x + a$ *que es continua ya que ln x es continua para x>0.*

Veamos si es continua para x = 0. Deben cumplirse tres condiciones,

1) $\exists\, f(0)$
2) $\exists\, \lim\limits_{x\to 0} f(x)$
3) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Veamos cada una de ellas,

1) f(0) = b, por definición de f(x); luego existe f(0)

2) Para calcular este límite como la función tiene definiciones distintas a la izquierda y a la derecha del 0, debemos estudiar los límites laterales,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{sen\,\pi x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(m)}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\pi\cos\pi x}{1} = \pi$$

(m) como las funciones sen πx y x (numerador y denominador del límite a calcular) son derivables para todo valor real, en particular lo son en intervalos (x, 0), resolvemos la indeterminación aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x + a\right) = \left(0\,(-\infty) + a\right)$$

En primer lugar resolvemos la indeterminación obtenida transformándola en un cociente en el que podamos aplicar la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x\right) = \left(0\,(-\infty)\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(n)}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Como las funciones $\ln x$ *y* $\dfrac{1}{x}$ *son derivables en intervalos (0, x) podemos aplicar L´Hôpital.*

Por lo que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x + a\right) = 0 + a = a$

Finalmente $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *cuando* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \;\rightarrow\; a=\pi$

3) El valor de la función y el del límite deben coincidir, es decir, b = a = π

Para que f(x) sea continua para todo valor real de x $a=b=\pi$

PROBLEMA A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor de m para el cual la función $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x\leq 0 \\ \dfrac{(x+1)\,sen\,x}{x}, & x>0 \end{cases}$ es continua en x = 0. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x + 1)e^{2x}$. *(3 puntos)*

c) La integral $\int (x+1)e^{2x}\,dx$, *(2 puntos)* y el área limitada por la curva $y = (x+1)e^{2x}$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. *(2 puntos)*

Solución:

a) m? / f(x) es continua en x = 0

Condiciones para que f(x) sea continua en x = 0.

1) ¿Existe f(0)?

$f(0) = m\,(0+1)\,e^{2\cdot 0} = m\,e^0 = m\,.\,1 = m.$ *Existe* $f(0) = m$

2) ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *?*

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, *como a la izquierda y derecha de 0 la función f(x) tiene definiciones distintas debemos estudiar los límites laterales,*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\left(m(x+1)e^{2x}\right) = m(0+1)e^{2.0} = m$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\,sen\,x}{x} = \frac{(0+1)\,sen\,0}{0} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$ *(resolvemos la indeterminación aplicando la Regla de L´Hopital)* $$= \lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,x + (x+1)\cos x}{1} = sen\,0 + (0+1)\cos 0 = 1$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *los dos límites laterales deben ser iguales, por lo tanto m = 1.*

3) Para este valor de m se cumple la tercera condición de continuidad: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Luego, ***f(x) es continua en x = 0 para m = 1****.*

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = (x+1)\,e^{2x}$

En primer lugar, $Dom\ y = \Re$

Calculemos y´

$$y' = e^{2x} + (x+1)\,2\,e^{2x} = e^{2x} + (2x+2)\,e^{2x} = (1+2x+2)\,e^{2x} = (2x+3)\,e^{2x}$$

Estudiemos el signo de y´

$$(2x+3)e^{2x} = 0 \quad \begin{cases} 2x+3=0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-3}{2} \\ e^{2x} = 0 \;\rightarrow\; \text{sin } solución \end{cases}$$

$\forall x \in \Re\ \ e^{2x} > 0$, *luego el signo de y´ solo depende de (2 x + 3) que es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y cuya raíz es* $\dfrac{-3}{2}$*, por lo tanto el signo de (2 x + 3) es:*

$$\underset{\quad}{-} \quad \Big| \quad + $$
$$\quad \frac{-3}{2}$$

Y finalmente, $y = (x+1)\,e^{2x}$ *es decreciente en* $\left(-\infty, \dfrac{-3}{2}\right)$ *y creciente en* $\left(\dfrac{-3}{2}, +\infty\right)$.

c) La integral la resolvemos por partes,

$$\int (x+1)e^{2x}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = x+1 & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx & \rightarrow & v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right\} = (x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

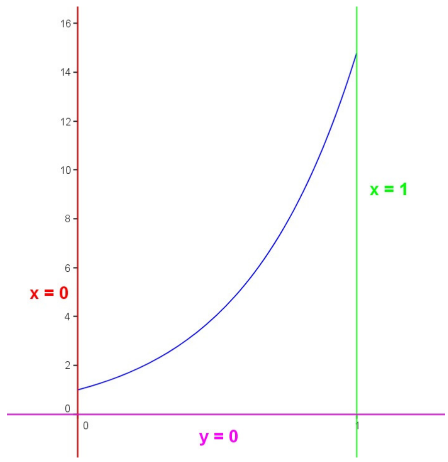
$$= \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\;e^{2x} + C = \left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C = \frac{2x+2-1}{4}e^{2x} + C = \frac{2x+1}{4}e^{2x} + C$$

Es decir, $\int (x+1)e^{2x}\,dx = \dfrac{2x+1}{4}e^{2x} + C$

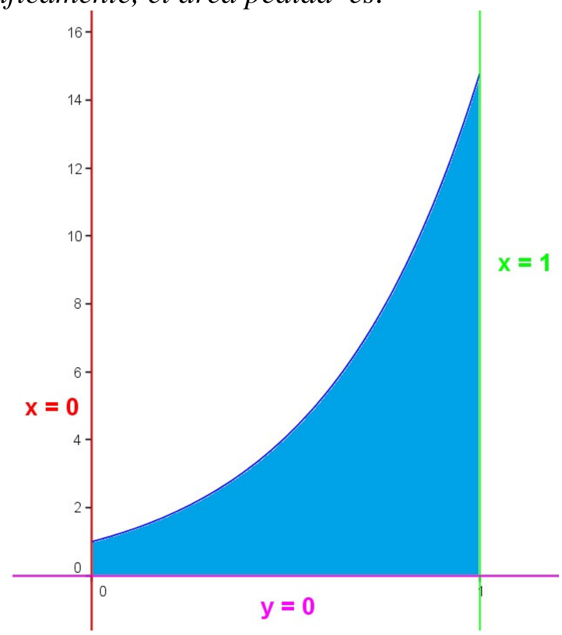
Para obtener el área limitada por la curva $y = (x + 1)\,e^{2x}$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$ es conveniente realizar la representación gráfica.
En primer lugar representemos la curva $y = (x + 1)\,e^{2x}$ que según lo estudiado en el apartado b) entre $x = 0$ y $x = 1$ es creciente, podemos representarla usando una tabla de valores:

x	$y = (x+1)\,e^{2x}$
0	1
1	$2\,e^2 \approx 14'78$

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Gráficamente, el área pedida es:



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx$$

Como la integral indefinida ya está resuelta anteriormente,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}dx = \left[\frac{2x+1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{2.1+1}{4}e^{2.1} - \frac{2.0+1}{4}e^{2.0} =$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^0 = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4} \approx 5'2918\;u.a.$$

Finalmente, el área pedida mide: $\left(\dfrac{3}{4}e^2 - \dfrac{1}{4}\right)$ $u.a. \approx 5'2918\;u.a.$

Problema 5. Sea la función $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real . Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(3 puntos)*
b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(5 puntos)*
c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo [– 1, 1]. *(2 puntos)*

Solución:
Como k es un parámetro real, si k = 0 f(x) = 0 y las respuestas a los tres apartados son inmediatas:
a) Dom f(x) = $\Re$, f(x) no tiene asíntotas.
b) f(x) es una función constante por tanto no es ni creciente ni decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.
c) f(x) es nula para cualquier valor de x por tanto f(x) se anula en cualquier punto del intervalo [– 1, 1].

A continuación resolvemos el ejercicio considerando $k \neq 0$.

a) $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$

$e^{2x} \neq 0 \ \ \forall\, x \in \Re \quad \rightarrow \quad$ *Dom f(x) =* $\Re$.

Asíntotas.
Como Dom f(x) = $\Re$ $\rightarrow$ *f(x) no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\frac{\infty}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\{\text{como } e^{2x} \text{ es un infinito de orden superior a } kx\}=0$$

La asíntota horizontal es y = 0 en $+\infty$.

Asíntota oblicua: (y = m x + n)

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{k\,x}{e^{2x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{k}{e^{2x}}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{k}{e^{2x}}=\dfrac{k}{0}=\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{e^{2x}}=\dfrac{k}{\infty}=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad \text{No hay asíntota oblicua.}$$

Luego f(x) sólo tiene asíntota horizontal y = 0 en $+\infty$.

b) Monotonía y máximos y mínimos de y = f(x)

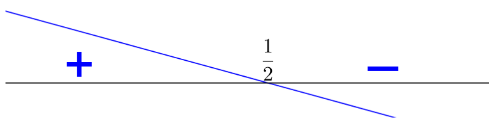
$$f'(x)=\frac{k\,e^{2x}-k\,x\,e^{2x}\,2}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{k\,e^{2x}\,(1-2x)}{e^{4x}}$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$\forall x \in \Re \quad e^{2x}$ *y* $e^{4x}>0 \quad \rightarrow \quad$ *el signo de f´(x) depende de la expresión k (1 – 2 x)*

1 – 2 x es un polinomio de primer grado (una línea recta) de pendiente negativa y raíz: 1 – 2 x = 0;

1 = 2 x; $x=\dfrac{1}{2}$. *Gráficamente*



En consecuencia:

si $k > 0$ f(x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un máximo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2\,e}\right)$**.**

$$x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{k\,\frac{1}{2}}{e^{2\,\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2\,e}$$

si $k < 0$ f(x) es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y creciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un mínimo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2\,e}\right)$**.**

c) Justificar que f(x) se anula en algún punto del intervalo [– 1 , 1]

Como Dom f(x) = $\Re$ $\rightarrow$ f(x) es continua en $\Re$ $\rightarrow$ f(x) es continua en [– 1 , 1]

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = \dfrac{k\,(-1)}{e^{2\,(-1)}} = \dfrac{-k}{e^{-2}} = -k\,e^{2} \\ f(1) = \dfrac{k \cdot 1}{e^{2\cdot 1}} = \dfrac{k}{e^{2}} \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad f(-1) \cdot f(1) = -k\,e^{2}\,\frac{k}{e^{2}} = \left\{e^{2} \neq 0\right\} = -k^{2} < 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano:

f(x) es continua en [– 1 , 1] y f(– 1) . f(1) < 0 $\rightarrow$ ***∃ c ∈ (– 1 , 1) / f(c) = 0***

Problema 4.1. Se tienen dos programas informáticos *A* y *B*. Para procesar *n* datos, el programa *A* realiza un número de operaciones elementales no superior a $12+n\sqrt[4]{n^3}$, mientras que el programa *B* ejecuta $n^2 - 2\ n + 10$ operaciones elementales. Comprobar que cuando el número *n* de datos es grande, el programa *A* procesa los *n* datos con menos operaciones elementales que el programa *B*. *(3,3 puntos)*.

Solución:

Llamando $NP_A(n)$ al número de operaciones elementales que realiza el programa A para procesar n datos y $NP_B(n)$ al número de operaciones elementales que realiza el programa B para procesar n datos

De los datos del problema sabemos que: $NP_A(n) \le 12+n\sqrt[4]{n^3}$ *y* $NP_B(n) = n^2-2n+10$

Para comprobar que para n grandes el programa A realiza menos operaciones que el B calculemos el siguiente límite,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{NP_A(n)}{NP_B(n)} \le \lim_{n\to+\infty}\frac{12+n\sqrt[4]{n^3}}{n^2-2n+10} = \lim_{n\to+\infty}\frac{12+n\,n^{3/4}}{n^2-2n+10} = \lim_{n\to+\infty}\frac{12+n^{7/4}}{n^2-2n+10} = \lim_{n\to+\infty}\frac{12+n^{1'75}}{n^2-2n+10} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1'75}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{0'25}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Considerando que para valores grandes de n, $NP_A(n)$ *y* $NP_B(n)$ *son positivos, podemos afirmar que:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{NP_A(n)}{NP_B(n)} = 0$$

Como el valor del límite es 0, esto quiere decir que para valores de n grandes el denominador (número de operaciones del programa B) es mayor que el numerador, es decir, que el programa A procesa los n datos con menos operaciones elementales que el programa B.