PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x) = x^2 + |x|$, donde x es un número real cualquiera y $|x|$ representa el valor absoluto de x. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto o puntos donde la gráfica de la función f corta a los ejes de coordenadas. *(2 puntos)*

b) La justificación de que la curva $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. *(1 punto)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, *(2 puntos)*
y el extremo relativo de la función f, justificando si es máximo o mínimo. *(1 punto)*

d) La representación gráfica de dicha curva $y = f(x)$. *(1 punto)*

e) Las integrales definidas $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ y $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$. *(1,5 + 1,5 puntos)*

Solución:

a) Puntos de corte con ejes coordenados.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 + |0| = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + |x| = 0$

Para $x < 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$ *soluciones no válidas porque* x *debe ser negativo.*

Para $x \geq 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$ *(x = – 1 no válida porque* x *debe mayor o igual que cero).*

Solución: $x = 0$

El único ***punto de corte con los ejes coordenados es (0 , 0).***

b) Para que la curva $y = f(x)$ *sea simétrica respecto al ejes de ordenadas debe cumplir* $f(x) = f(-x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + |x| \\ f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = f(-x)$$

Luego, ***la curva*** $y = f(x)$ ***es simétrica respecto al eje de ordenadas.***

c) Monotonía y extremos de $f(x)$

Para resolver este apartado es conveniente expresar $f(x)$ *como función definida a trozos.*

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x < 0 \\ x^2 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Obtengamos $f'(x)$,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x < 0 \\ 2x + 1 & , \quad x > 0 \end{cases} \qquad f'(0) = \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

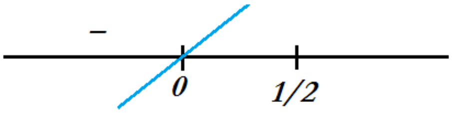
$$\text{Luego,} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x < 0 \\ 2x + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$,

Para $x < 0$,

$2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = ½$

$2x - 1$ *es una recta de pendiente positiva que pasa por el punto (½ , 0), por tanto:*



Es decir, f(x) es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. Y, considerando que la función es simétrica respecto del eje de ordenadas, deducimos que la función es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

Como f(x) es decreciente a la izquierda de $x = 0$ y creciente a la derecha, en $x = 0$ hay un mínimo relativo, que además es el absoluto por lo dicho anteriormente.

*Luego, **f(x) es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$**. Y **en el punto $(0, 0)$ hay un mínimo relativo**.*

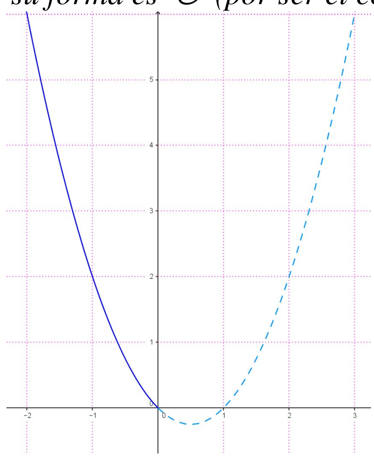
d) Representación gráfica de f(x).

Como f(x) es simétrica respecto del eje de ordenadas, representamos la función para valores de $x < 0$ y para $x > 0$ la representamos por simetría.

Anteriormente obtuvimos $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x < 0 \\ x^2 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

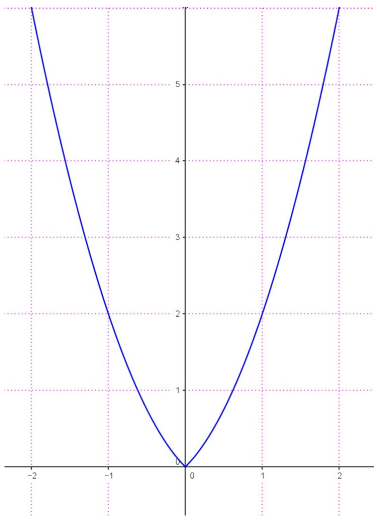
Para $x < 0$, $f(x) = x^2 - x$. Esta función es una parábola de la que obtuvimos, en el apartado a), sus puntos de corte con el eje de abcisas: $(0, 0)$ y $(1, 0)$, y su forma es $\cup$ (por ser el coeficiente de x^2 positivo)

Luego para $x < 0$ la representación de f(x) es:

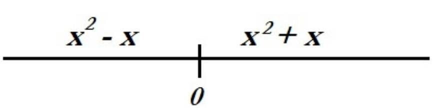


Completando la representación de f(x) por simetría obtendríamos:

La representación de $y = f(x)$ es:



e) f(x) es



$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = -\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2 + x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) - 0 = \frac{8}{3} + \frac{4}{2} = \frac{14}{3}$$

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = a\,x$ y la función $f(x) = x^3 - a\,x$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. *(1 + 2 puntos)*

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. *(3 puntos)*

c) Calcular en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = a\,x$, cuando $a > 1$. *(2 puntos)*

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. *(2 puntos)*

Solución:

a) Puntos de corte de $y = f(x)$ con los ejes coordenados.

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = f(0) = 0^3 - a\,.\,0 = 0 \;\rightarrow\; (\,0\,,\,0\,)$$

$$y = 0 \;\rightarrow\; x^3 - a\,x = 0 \;\rightarrow\; x\,(\,x^2 - a\,) = 0 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - a = 0 \;\rightarrow\; x^2 = a \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{a} \end{array} \right.$$

$$\left(como \quad a > 0 \;\rightarrow\; \exists\sqrt{a}\right)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $(\,0\,,\,0\,)$, $\left(\sqrt{a}\,,0\right)$ y $\left(-\sqrt{a}\,,0\right)$.

Monotonía.

$y = x^3 - a\,x, \quad a > 0$

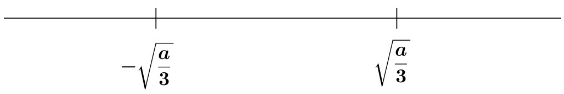
$y' = 3\,x^2 - a$

$3\,x^2 - a = 0$

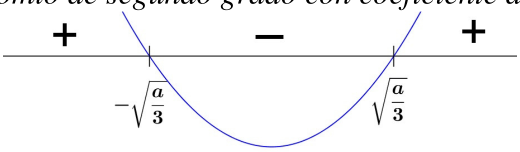
$3\,x^2 = a$

$$x^2 = \frac{a}{3} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad como\ a > 0 \;\rightarrow\; \exists\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Hay que estudiar el signo de y' en los intervalos:



y' es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 positivo, luego



Por tanto, ***la función f es creciente en*** $\left(-\infty\,,-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\,,+\infty\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\,,\,\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

b) Gráfica de f para $a = 9$.

Hay que representar la función $y = x^3 - 9\,x$

Dom y = $\Re$, porque es una función polinómica.

Del estudio anterior sabemos:

Puntos de corte con los ejes coordenados: $(\,0\,,\,0\,)$, $(\,3\,,\,0\,)$ y $(\,-3\,,\,0\,)$.

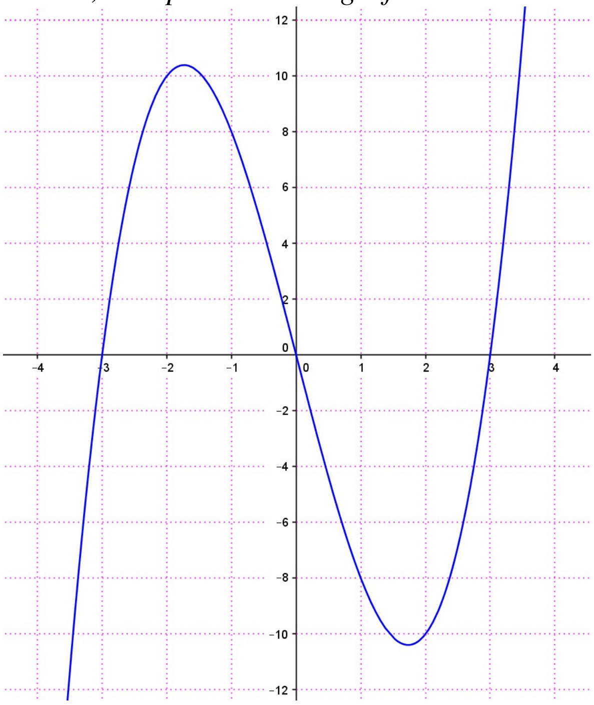
Monotonía: creciente en $\left(-\infty\,,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3}\,,+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}\,,\,\sqrt{3}\right)$.

Extremos: $x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; y = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; y = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

luego, en $\left(-\sqrt{3}\,,6\sqrt{3}\right)\approx\left(-1'73\,,10'39\right)$ hay un máximo relativo y en $\left(\sqrt{3}\,,-6\sqrt{3}\right)\approx\left(1'73\,,-10'39\right)$ hay un mínimo relativo.

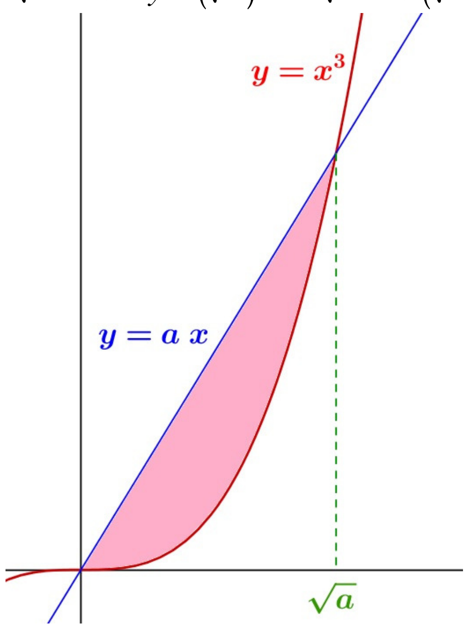
Con esta información, la representación gráfica será:



c) Área entre $y = x^3$, $y = a\,x$ ($a > 1$), en 1^{er} cuadrante.
Calculemos los puntos de corte entre las dos curvas:
$x^3 = a\,x$, resuelta en el apartado a) "$x^3 - a\,x = 0$", las soluciones: $x = -\sqrt{a}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{a}$
Como el área a calcular es en el 1^{er} cuadrante, las soluciones que nos interesan son $x = 0$ y $x = \sqrt{a}$.
Los puntos de corte serán: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0^3 = 0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$

$$x=\sqrt{a} \;\rightarrow\; y=\left(\sqrt{a}\right)^3 = a\sqrt{a} \;\rightarrow \left(\sqrt{a}\,,a\sqrt{a}\right)$$

La representación gráfica es:



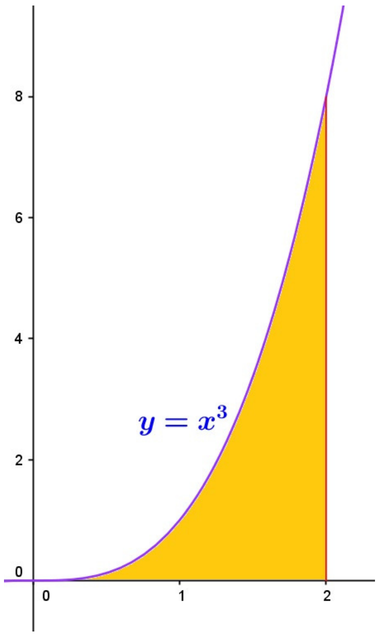
El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^{\sqrt{a}}\left(a\,x - x^3\right)dx = \left[a\,\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}} = \left(a\,\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{2}-\frac{\left(\sqrt{a}\right)^4}{4}\right)-0 = a\,\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}$$

Finalmente, ***el área de la región pedida es*** $\dfrac{a^2}{4}$ *u.a.*

d) Área entre $y = x^3$, eje OX, $x = 0$ y $x = 2$.

La representación gráfica del área a calcular es:



El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^2 x^3\, dx == \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

Por tanto, $\dfrac{a^2}{4} = 4 \quad \rightarrow \quad a^2 = 16 \quad \rightarrow \quad (\text{como } a > 0) \quad a = 4$

*Finalmente, **el valor del parámetro a buscado es $a = 4$.***

PROBLEMA 3. Se da la función real f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f*. *(3 puntos)*

b) La integral $\int f(x)\,dx$, así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2 , 0). *(3+1 puntos)*

c) El área de la región limitada por la curva *y = f(x)* y las rectas *y* = 0, *x* = 2, *x* = 4. *(3 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}$

Dom f(x),

$$x^2\,(x-1)=0\left\langle\begin{array}{l} x^2=0\rightarrow x=0\\ x-1=0\rightarrow x=1\end{array}\right. \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$$

Asíntotas,

verticales,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\frac{2}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0\end{array}\right\}\rightarrow\quad y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$, ***las asíntotas verticales son x = 0 y x = 1 y la asíntota horizontal es y = 0.***

b) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}\,dx$

Es una integral racional,

$$\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A\,x\,(x-1)+B\,(x-1)+C\,x^2}{x^2\,(x-1)} \quad\rightarrow\quad x^2+1=A\,x\,(x-1)+B\,(x-1)+C\,x^2$$

$$x=0\rightarrow 0^2+1=A\cdot 0\,(0-1)+B\,(0-1)+C\cdot 0^2 \quad\rightarrow\quad 1=-B \quad\rightarrow\quad B=-1$$

$$x=1\rightarrow 2=C \quad\rightarrow\quad C=2$$

$$x=2\rightarrow 2^2+1=A\cdot 2\,(2-1)+B\,(2-1)+C\cdot 2^2 \quad\rightarrow\quad 5=2A+B+4C \quad\rightarrow\quad 5=2A-1+4\cdot 2$$

$$5=2A+7;\quad -2=2A;\quad A=-1$$

Entonces,

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x^2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = (*)$$

$$\int \frac{-1}{x^2}\,dx = \int -x^{-2}dx = -\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{x}$$

$$(*) = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2\,Ln|x-1| + C$$

$$Luego\ ,\ \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2\,Ln|x-1| + C$$

La primitiva de f(x) cuya gráfica pase por (2, 0) será,

Para x = 2, $-Ln|2| + \frac{1}{2} + 2Ln|2-1| + C = 0; \quad -Ln\ 2 + \frac{1}{2} + 2\ Ln\ 1 + C = 0; \quad -Ln\ 2 + \frac{1}{2} + 2\cdot 0 + C = 0$

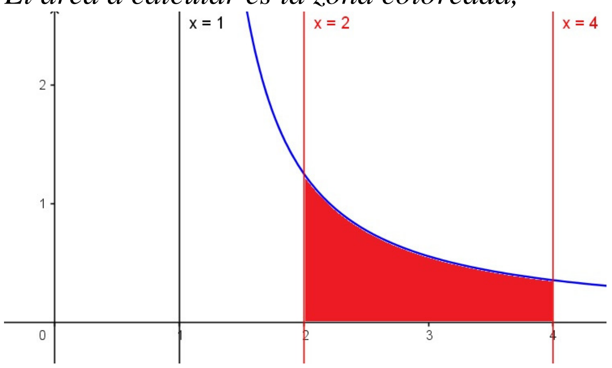
$$-Ln\ 2 + \frac{1}{2} + C = 0; \quad C = -\frac{1}{2} + Ln\ 2$$

Finalmente, ***la primitiva de f(x) cuya gráfica pase por (2, 0) es*** $F(x) = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2Ln|x-1| - \frac{1}{2} + Ln\ 2$

c) El área de la región limitada por la curva y = f(x) y las rectas y = 0, x = 2, x = 4.

El área a calcular la dibujamos considerando las asíntotas de la función obtenidas en el apartado a) y que para x ≥ 2, tanto el numerado como el denominador de f(x) son positivos, f(x) es positiva.

El área a calcular es la zona coloreada,



Esta área la calculamos mediante la siguiente integral:

$$\int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = \left[-Ln|x| + \frac{1}{x} + 2Ln|x-1|\right]_2^4 = \left(-Ln|4| + \frac{1}{4} + 2Ln|4-1|\right) - \left(-Ln|2| + \frac{1}{2} + 2Ln|2-1|\right) =$$

$$= -Ln\ 4 + \frac{1}{4} + 2Ln\ 3 + Ln\ 2 - \frac{1}{2} + 2Ln\ 1 = -Ln\ 4 + \frac{1}{4} + 2Ln\ 3 + Ln\ 2 - \frac{1}{2} + 2\cdot 0 = -Ln\ 4 + \frac{1}{4} + 2Ln\ 3 + Ln\ 2 - \frac{1}{2} =$$

$$= 2Ln\ 3 + Ln\ 2 - Ln\ 4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = Ln\ 3^2 + Ln\ 2 - Ln\ 4 - \frac{1}{4} = Ln\frac{9\cdot 2}{4} - \frac{1}{4} = Ln\frac{9}{2} - \frac{1}{4} \cong 1'25407739\ u.a.$$

El área de la región pedida es 1´25407739 u.a.

PROBLEMA 3. Se considera la función $f(x) = x\, e^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. *(4 puntos)*

b) Las asíntotas y la gráfica de *f*. *(3 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\, dx$. *(3 puntos)*

Solución:

a) $f(x) = x\, e^{1-x^2}$

Dom f(x) = $\Re$.

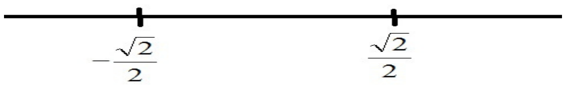
Monotonía.

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x\, e^{1-x^2}\,(-2x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

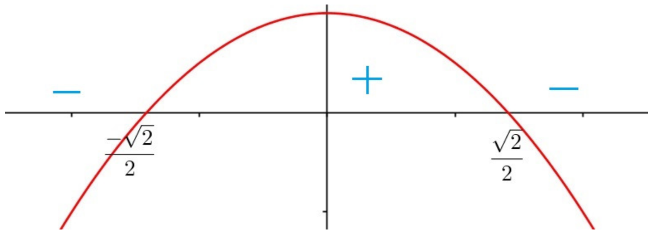
Estudiemos el signo de f´(x),

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \quad \begin{cases} e^{1-x^2} = 0 & \text{sin } \textit{solución} \\ \left(1-2x^2\right) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:



En f´(x) el factor e^{1-x^2} *es siempre positivo y el factor* $\left(1-2x^2\right)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces las obtenidas, por tanto:*



Luego, ***f(x) es creciente en*** $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\infty, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía de f(x) deducimos que hay un máximo relativo en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *y un mínimo relativo en* $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2\,e}}{2} \quad \rightarrow \quad \textit{Máximo relativo} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2\,e}}{2}\right) \cong (0'7071,\, 1'1658)$$

$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{1-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{2\,e}}{2} \quad \rightarrow \quad \textit{Mínimo relativo} \quad \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2\,e}}{2}\right) \cong (-0'7071,\, -1'1658)$$

b) Asíntotas y gráfica de y = f(x)

Dom f(x) = $\Re$*, por tanto no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\, e^{1-x^2}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2-1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(\text{aplicando L´Hopital})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\, e^{1-x^2}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2-1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(\text{aplicando L´Hopital})=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

Por lo que la ***asíntota horizontal es y = 0.***

Asíntota oblícua.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\, e^{1-x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x^2}\right)=e^{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\, e^{1-x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-x^2}\right)=e^{-\infty}=0$$

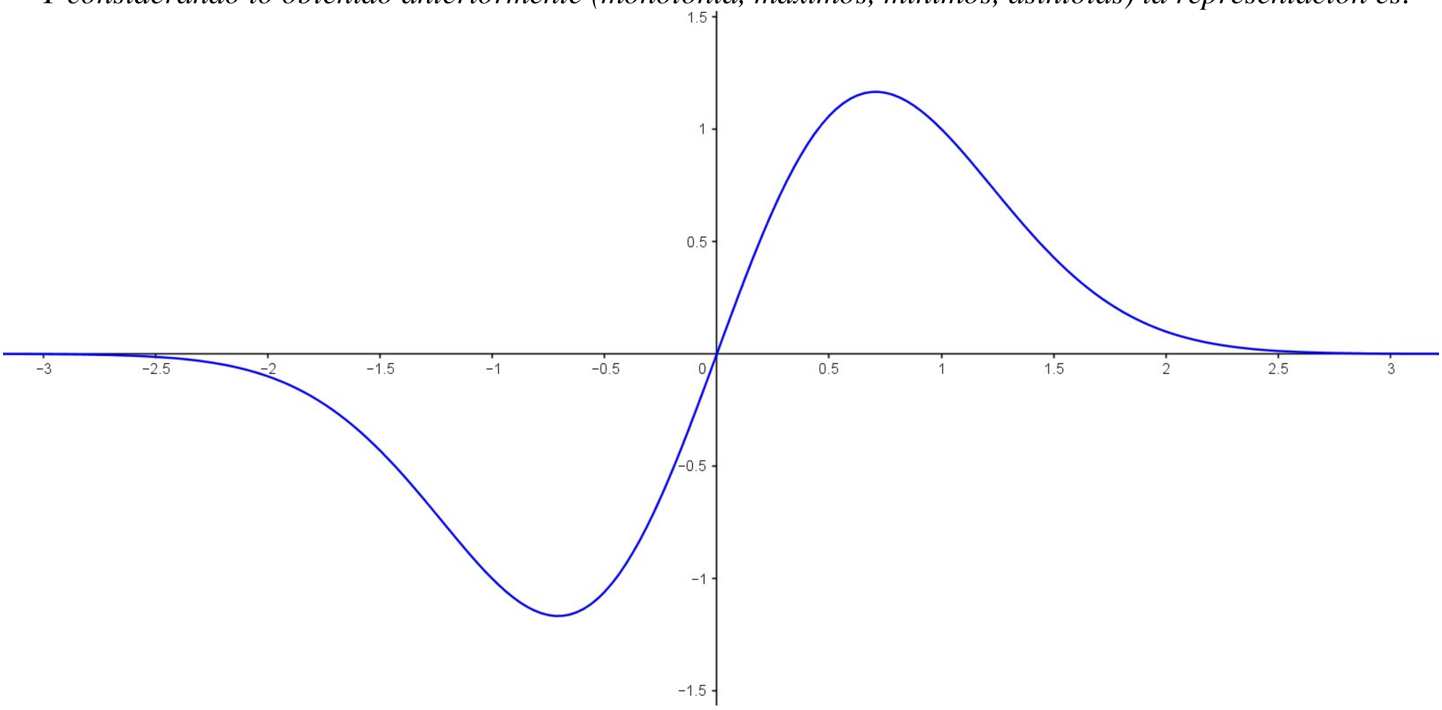
Por lo que no tiene ***asíntota oblícua.***

Representación gráfica.

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad\to\quad y=0\cdot e^{1-0^2}=0 \\ y=0 \quad\to\quad x\cdot e^{1-x^2}=0 \quad\to \left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ e^{1-x^2}=0 \quad \text{sin } solución \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad pto.\,corte \quad (0{,}0)$$

Y considerando lo obtenido anteriormente (monotonía, máximos, mínimos, asíntotas) la representación es:



c)

$$\int f(x)\,dx = \int x\,e^{1-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \rightarrow \dfrac{dt}{-2} = x\,dx \end{array} \right\} = \int e^t\,\frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t dt =$$

$$= \frac{-1}{2}\,e^t + C = \frac{-1}{2}\,e^{1-x^2} + C$$

Luego $\int f(x)\,dx = \dfrac{-1}{2}\,e^{1-x^2} + C$

Problema 5. Consideramos la función $f(x)=\dfrac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x=-\dfrac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. *(2 puntos)*

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(4 puntos)*

c) Obtener $\int f(x)\,dx.$ *(4 puntos)*

Solución:

a)

$$x=-\frac{1}{2} \quad \text{es discontinuidad evitable de } f(x) \text{ si } \begin{cases} a) \text{ No existe } f\left(\frac{-1}{2}\right) \text{ y} \\ b) \text{ Existe } \lim\limits_{x\to -1/2} f(x) \end{cases}$$

$$a)\ f\left(-1/2\right)=\frac{-2\left(-1/2\right)^2+\left(-1/2\right)+1}{2\left(-1/2\right)^2+5\left(-1/2\right)+2}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+2}=\frac{0}{0} \rightarrow \text{No existe } f\left(-1/2\right).$$

El cálculo realizado anteriormente indica que $\frac{-1}{2}$ *es raíz del numerador y denominador, por lo que podremos simplificar la expresión de f(x).*

$$-2x^2+x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)}=\frac{-1\pm 3}{-4}=\begin{cases} x_1=\frac{-1+3}{-4}=\frac{-1}{2} \\ x_2=\frac{-1-3}{-4}=1 \end{cases} \rightarrow -2x^2+x+1=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$2x^2+5x+2=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm 3}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{-5+3}{4}=\frac{-1}{2} \\ x_2=\frac{-5-3}{4}=-2 \end{cases} \rightarrow -2x^2+x+1=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

$$\text{Entonces} \quad f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}=\frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)}=\frac{-(x-1)}{x+2}=\frac{-x+1}{x+2}$$

$$b)\ \lim_{x\to -1/2} f(x)=\lim_{x\to -1/2}\frac{-x+1}{x+2}=\frac{-\left(-1/2\right)+1}{-1/2+2}=\frac{3/2}{3/2}=1 \rightarrow \text{Existe } \lim_{x\to -1/2} f(x)$$

Hemos comprobado las dos condiciones por tanto f(x) tiene una discontinuidad evitable en x = $-1/2$.

b) Monotonía de f(x).

En el apartado anterior hemos obtenido las raíces del denominador de f(x). Por tanto sabemos que $Dom\, f(x) = \Re-\left\{-2, \frac{-1}{2}\right\}$.

También hemos simplificado la expresión de f(x) que será la que utilicemos para obtener f´(x).

$$f(x) = \frac{-x+1}{x+2}, \quad f'(x) = \frac{-1\,(x+2) - (-x+1)\,1}{(x+2)^2} = \frac{-x-2+x-1}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un número negativo. Por tanto f´(x) es negativa en su dominio.

f(x) es decreciente en $\Re - \left\{-2, \frac{-1}{2}\right\}$.

c) $\int f(x)\,dx$

Para el cáculo de la integral utilizamos la expresión simplificada de $f(x) = \frac{-x+1}{x+2}$

Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{-x+1}{x+2} = \frac{-x-2+2+1}{x+2} = \frac{-x-2}{x+2} + \frac{3}{x+2} = -1 + \frac{3}{x+2}$$

Luego, $\int \frac{-x+1}{x+2}\,dx = \int\left(-1 + \frac{3}{x+2}\right)dx = \int (-1)\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx = -x + 3\,Ln|x+2| + C$

Finalmente, $\int f(x)\,dx = -x + 3\,Ln|x+2| + C$

Problema 5. Se considera la función $h(x) = a\,x + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abcisa $x = \frac{-3}{4}$. *(3 puntos)*

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. *(2 puntos)*

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿a? / $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4}$.

$h'(x) = a + 2x;\quad a + 2x = 0;\quad 2x = -a;\quad x = \frac{-a}{2}.$

$h''(x) = 2 \;\rightarrow\; h''\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 > 0 \;\rightarrow\;$ *en* $x = \frac{-a}{2}$ *hay un mínimo relativo.*

Por tanto, $\frac{-a}{2} = \frac{-3}{4} \;\rightarrow\; -a = \frac{-6}{4} \;\rightarrow\; a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Solución: $\boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$.

b) Para $a = \frac{3}{2}$ *dibujar las curvas* $y = h(x)$ *e* $y = h'(x)$.

$y = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$

Polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola.

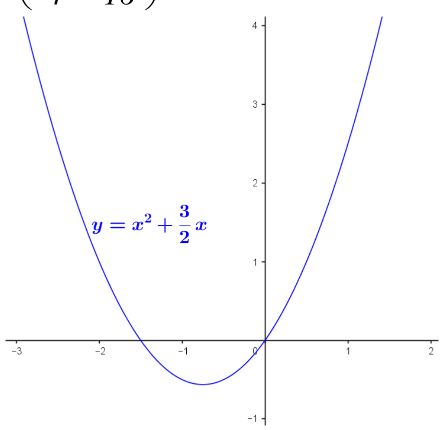
Corte con ejes coordenados $(0, 0)$ *y* $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

$x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

$y = 0 \;\rightarrow\; x^2 + \frac{3}{2}x = 0;\quad x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \end{array} \right.$

Por lo estudiado en el apartado a), esta función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4} \;\rightarrow\; y = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{-3}{4} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = \frac{-9}{16}$

Mínimo relativo $\left(\frac{-3}{4}, \frac{-9}{16}\right)$



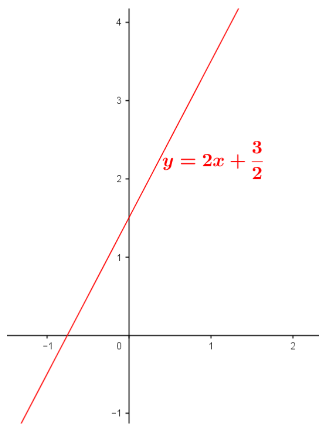
$y = h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$

Polinomio de 1º grado, gráficamente una recta.

$x = 0 \rightarrow y = 2\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

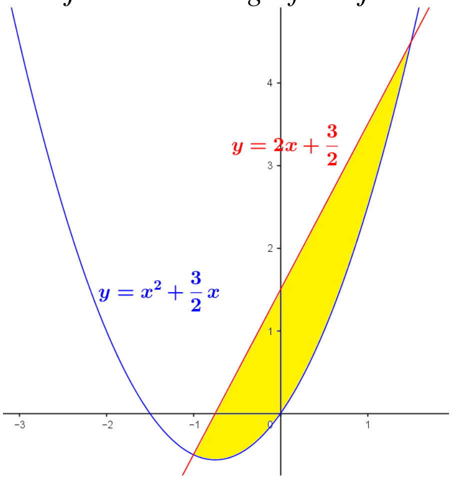
$y = 0 \rightarrow 2x + \frac{3}{2} = 0;\; 2x = \frac{-3}{2};\; x = \frac{-3}{4}$

x	y
0	$\frac{3}{2}$
$\frac{-3}{4}$	0



c) ¿área del plano comprendida entre ambas curvas?

Dibujemos las dos gráficas juntas:



El área comprendida entre las dos curvas es la zona coloreada.
Obtengamos los puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2}; \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3; \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

El área pedida la obtendremos a calculando la siguiente integral definida,

$$A = \int_{-1}^{3/2} \left(2x + \frac{3}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} =$$

$$= \left[-\frac{\left(3/2\right)^3}{3} + \frac{\left(3/2\right)^2}{4} + \frac{3}{2}\left(3/2\right) \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$= \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{125}{48} \cong 2'6042$$

Solución: el área pedida mide $\frac{125}{48}$ *u.a.* $\cong$ *2´6042 u.a.*

EJERCICIO A

PROBLEMA 3.

a) Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \le x \le 4$ *(1,1 puntos)*.

b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$ en el intervalo $[-1, 4]$ *(1,1 puntos)*.

c) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$ *(1,1 puntos)*.

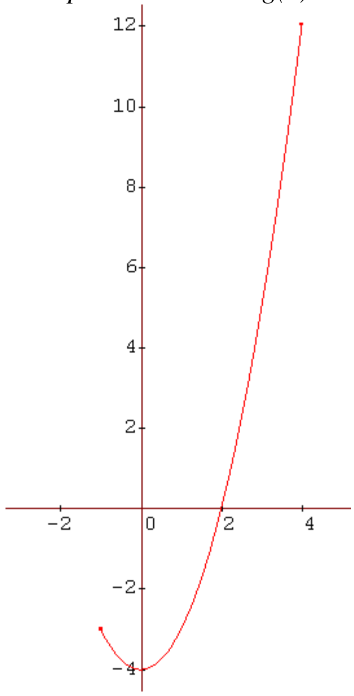
Solución:

a)

Como la función g(x) esta definida como un trozo de parábola, haremos los cálculos (puntos de corte con los ejes, vértice) para representar la parábola y calcularemos los puntos de inicio y fin de g(x).

$y = x^2 - 4$

La representación de g(x) será:



Puntos de corte con los ejes coordenados:

eje OY, $x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$, $(0, -4)$

eje OX, $y = 0$ $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \quad , \quad (0, -4)$$

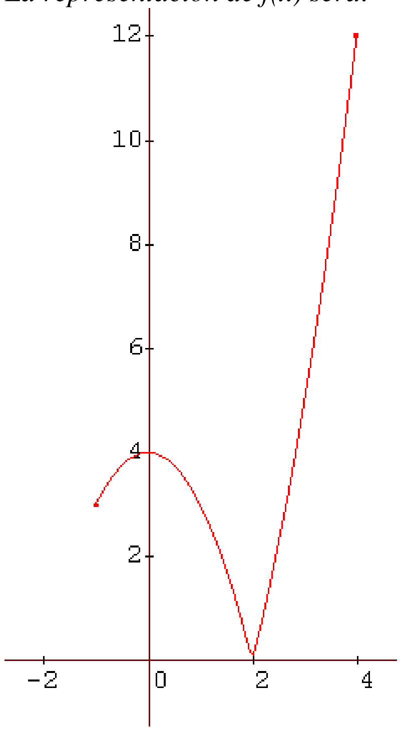
Calculemos el inicio y fin de g(x)

inicio $x = -1$, $y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$; $(-1, -3)$

fin $x = 4$, $y = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$; $(4, 12)$

b)

La representación de f(x) será:



$f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$ *en el intervalo [-1, 4]*

Por su definición $f(x) = \left| g(x) \right|$

Por lo que podemos dibujar la función f(x) a partir de la representación de g(x) trazando la parte negativa de g(x) simétrica respecto del eje OX.

Los valores máximo y mínimo absoluto de f(x) podemos obtenerlos directamente de la gráfica,

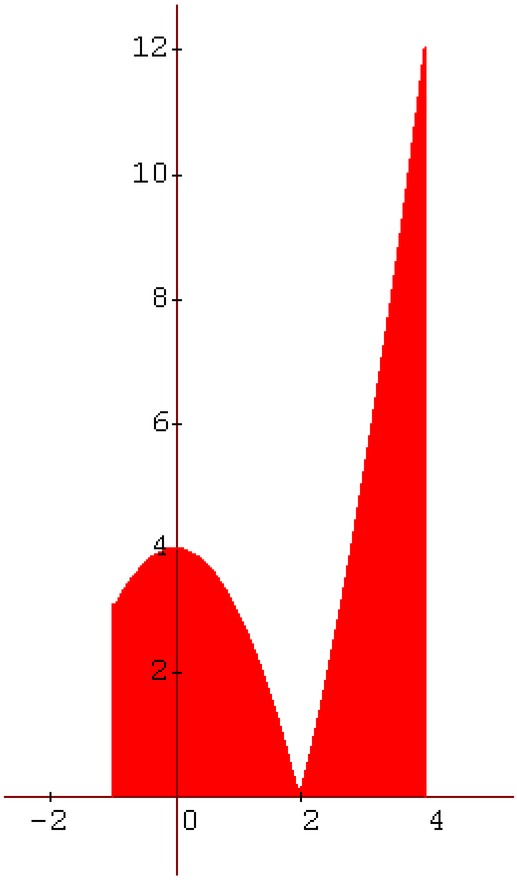
el máximo absoluto se alcanza en el punto $(4, 12)$

el mínimo absoluto se alcanza en el punto $(2, 0)$

c)

La definición de f(x) es $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & , \quad -1\le x<2 \\ x^2-4 & , \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$

El área a calcular será



La obtendremos mediante el siguiente cálculo integral,

$$A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+4\right)dx+\int_{2}^{4}\left(x^2-4\right)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4}=$$

$$=\left[\left(\frac{-8}{3}+8\right)-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right]+\left[\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right]=$$

$$=\frac{-8}{3}+8-\frac{1}{3}+4+\frac{64}{3}-16-\frac{8}{3}+8=\frac{47}{3}+4=\frac{47+12}{3}=\frac{59}{3}$$

El área del recinto pedido mide $\frac{59}{3}$ *u. a.*

PROBLEMA A.3. Sea f la función definida por

$$f(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. *(4 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\,dx=\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ *(3 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Cálculo del dominio,

$$x^2-3x+2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=2\\ \frac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Por lo que $Dom\ f(x)=\Re-\{1,2\}$

Cálculo de las asíntotas,

Asíntotas verticales, las posibles asíntotas verticales son x = 1 y x = 2.

x = 1

$$\underset{x\to 1}{Lím}\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1^2-3\,.\,1+2}=\frac{1}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=1\ es\ a.v.$$

x = 2

$$\underset{x\to 2}{Lím}\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{2}{2^2-3\,.\,2+2}=\frac{2}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=2\ es\ a.v.$$

Asíntota horizontal,

$$\underset{x\to -\infty}{Lím}\frac{x}{x^2-3x+2}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\underset{x\to -\infty}{Lím}\frac{x}{x^2}=\underset{x\to -\infty}{Lím}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{x}{x^2-3x+2}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{x}{x^2}=\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Luego y = 0 es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua,

Es una función racional con asíntota horizontal, por lo que no tiene asíntota oblicua. Comprobémoslo,
La asíntota oblicua será la recta de ecuación y = m x + n; calculando los coeficientes m y n

$$m=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{\frac{x}{x^2-3x+2}}{x}=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{x}{x^3-3x^2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{x}{x^3}=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

Como m = 0, no hay asíntota oblicua.

b) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x),*

Estudiemos el signo de y´,

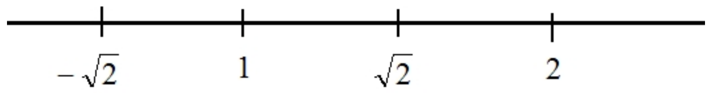
$$y' = \frac{1\left(x^2-3x+2\right)-x(2x-3)}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

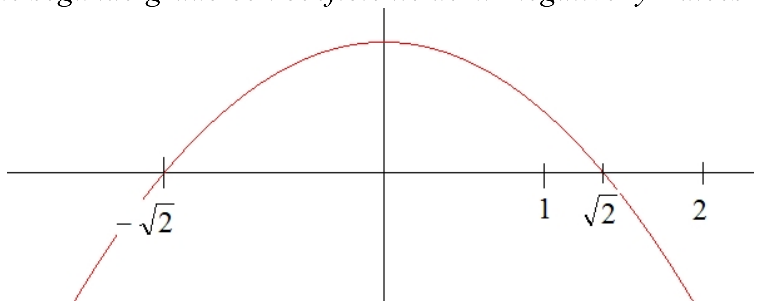
$-x^2+2=0 \quad \to \quad x^2=2 \quad \to \quad x=\pm\sqrt{2}$

$\left(x^2-3x+2\right)^2=0 \quad \to \quad x^2-3x+2=0 \quad \to \quad$ (*resuelta en el apartado a*)) $\quad x=1, 2$

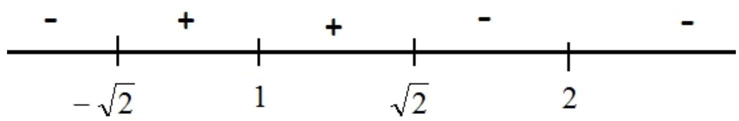
Representamos en la recta real las cuatro soluciones obtenidas y tenemos en cuenta el dominio de la función,



Como el denominador de y´ está elevado al cuadrado, el signo de y´ sólo depende del numerador que es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $\pm\sqrt{2}$, es decir:



Por lo que el signo de y´ será:



Finalmente f(x) es creciente en $\left(-\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, \sqrt{2}\right)$ *y decreciente en* $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, 2\right) \cup \left(2, +\infty\right)$.

c) *Cálculo de la integral,*

El denominador tiene dos raíces simples, x =1 y x =2, luego

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)\,(x-2)}$$

Luego, $x = A\,(x-2) + B\,(x-1)$, *calculemos los valores de A y B:*

para $x = 1 \;\to\; 1 = -A + 0 \;\to\; A = -1$

para $x = 2 \;\to\; 2 = 0 + B \cdot 1 \;\to\; B = 2$

Entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx =$$

$$= -Ln\left|x-1\right| + 2\,Ln\left|x-2\right| + C$$

PROBLEMA A.3. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ se pide obtener, **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(2 puntos)*
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*, *(4 puntos)*
c) El área limitada por la curva y = f(x), el eje de abcisas y las rectas x = 2 y x = 3. *(4 puntos)*

Solución:
a) Dominio de f(x)

$$x^2-x=0 \;\rightarrow\; x(x-1)=0 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \;\rightarrow\; x=1 \end{array} \right\} \;\rightarrow\; Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$$

Asíntota vertical,
Posibles A.V. x = 0 y x = 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=0 \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=1 \quad es\ A.V.$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{\infty}=0 \;\rightarrow\; y=0 \quad es\ la\ asíntota\ horizontal.$$

Asíntota oblicua,
Como la función es un cociente de polinomios y
grad (numerador) – grad (denominador) = 1 – 2 = – 1 ≠ 1
la función no tiene asíntota oblicua

Finalmente, ***Dom f(x) = ℜ ~{0, 1} y***
sus asíntotas son x = 0, x = 1 (asíntotas verticales) e y = 0 (asíntota horizontal).

b) Monotonía de f(x).
Estudiemos el signo de f´(x), sabemos que Dom f(x) = ℜ ~{ 0, 1 }.

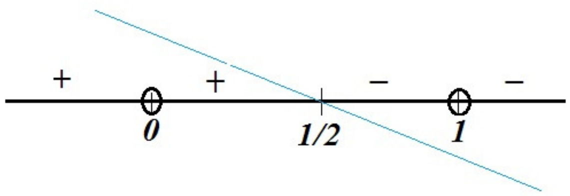
$$f'(x)=\frac{-1(2x-1)}{(x^2-x)^2}=\frac{-2x+1}{(x^2-x)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador:

$$-2x+1=0 \;\rightarrow\; 1=2x \;\rightarrow\; x=\frac{1}{2}$$

$$(x^2-x)^2=0 \;\rightarrow\; x^2-x=0 \quad (resuelta\ en\ a)) \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right.$$

f´(x) es un cociente y su denominador está elevado al cuadrado, por tanto positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 1/2, por tanto:

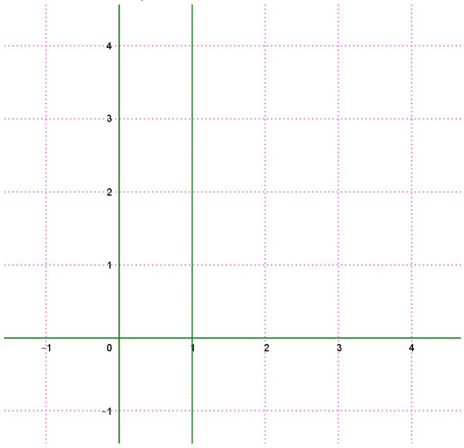


Por tanto, ***f(x) es creciente en (– ∞, 0) ∪ (0 , ½) y decreciente en (½ , 1) ∪ (1 , + ∞).***

c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$

De lo estudiado en los apartados anteriores podemos intentar representar la función $f(x)$,

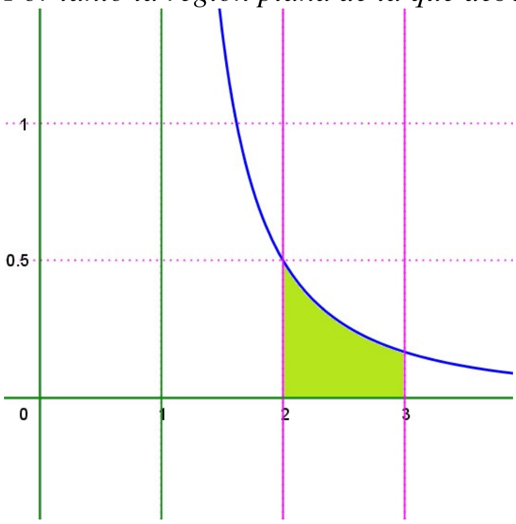
Conocemos sus asíntotas y su monotonía,



Como el área a calcular está limitada por las rectas $x = 2$ y $x = 3$; la función es decreciente para $x > 1$ para representar el área basta con calcular la un par de valores de la función, por ejemplo:

x	$f(x)$
2	$\frac{1}{2^2-2}=\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3^2-3}=\frac{1}{6}$

Por tanto la región plana de la que debemos calcular su área es:



El área de esta región la obtenemos mediante la siguiente integral definida: $\int_2^3 \frac{1}{x^2-x}dx$

Calculemos la integral indefinida,

$$\int \frac{1}{x^2-x}dx$$

Es una integral racional,

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}=\frac{A(x-1)+Bx}{x^2-x}$$

Luego $1 = A\,(x-1) + B\,x$

para $x = 0 \;\rightarrow\; 1 = A\,(0-1) + B \cdot 0 \;\rightarrow\; 1 = -A \;\rightarrow\; A = -1$

para $x = 1 \;\rightarrow\; 1 = A\,(1-1) + B \cdot 1 \;\rightarrow\; 1 = B \;\rightarrow\; B = 1$

Como la integral indefinida es para calcular la integral definida, no usamos la constante de integración,

$$\int \frac{1}{x^2-x}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=-Ln\,|x|+Ln\,|x-1|$$

Luego,

$$\int_2^3\frac{1}{x^2-x}dx=\left[-Ln\,|x|+Ln\,|x-1|\right]_2^3=\left(-Ln\,|3|+Ln\,|3-1|\right)-\left(-Ln\,|2|+Ln\,|2-1|\right)=$$

$$=\left(-Ln\,3+Ln\,2\right)-\left(-Ln\,2+Ln\,1\right)=-Ln\,3+Ln\,2+Ln\,2-Ln\,1=2Ln\,2-Ln\,3-0=$$

$$=2Ln\,2-Ln\,3\approx 0´2877$$

Solución: el valor del área pedida es $\left(2Ln\,2-Ln\,3\right)u^2 \approx$ ***0´2877 u^2.***

PROBLEMA A.3. Se considera la función $f(x) = x\,e^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función *f(x)*. *(3 puntos)*

b) La representación gráfica de la curva de la curva *y = f(x)*, *(2 puntos)*

c) El valor del parámetro *a* para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función *g(x) = f(x) + a x*. *(4 puntos)*

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx,\ \int x\,e^{-x}dx.$ *(1 punto)*

Solución:

a) $f(x) = x\,e^{-x^2}$

Dom f(x) = $\Re$*, por tanto no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-x^2}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (aplicando\ L'Hopital) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\,e^{-x^2}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (aplicando\ L'Hopital) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo que la ***asíntota horizontal es y = 0.***

Monotonía.

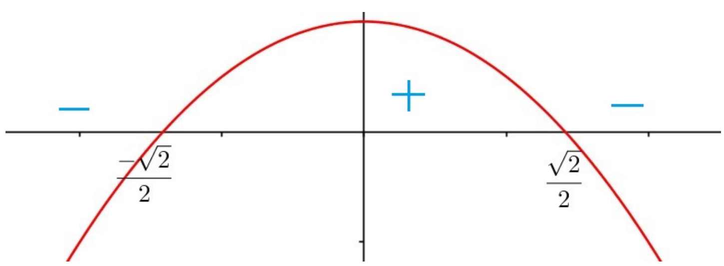
$$f'(x) = e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$$f'(x) = 0 \quad\rightarrow\quad e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \quad \begin{cases} e^{-x^2} = 0 & \text{sin } solución \\ \left(1-2x^2\right) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:

En f´(x) el factor e^{-x^2} *es siempre positivo y el factor* $\left(1-2x^2\right)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces las obtenidas, por tanto:*



Luego, ***f(x) es creciente en*** $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía de f(x) deducimos que hay un máximo relativo en $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *y un mínimo relativo en* $x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\to\quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \quad\to\quad \textit{Máximo relativo}\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)\cong(0´71,\,0´43)$$

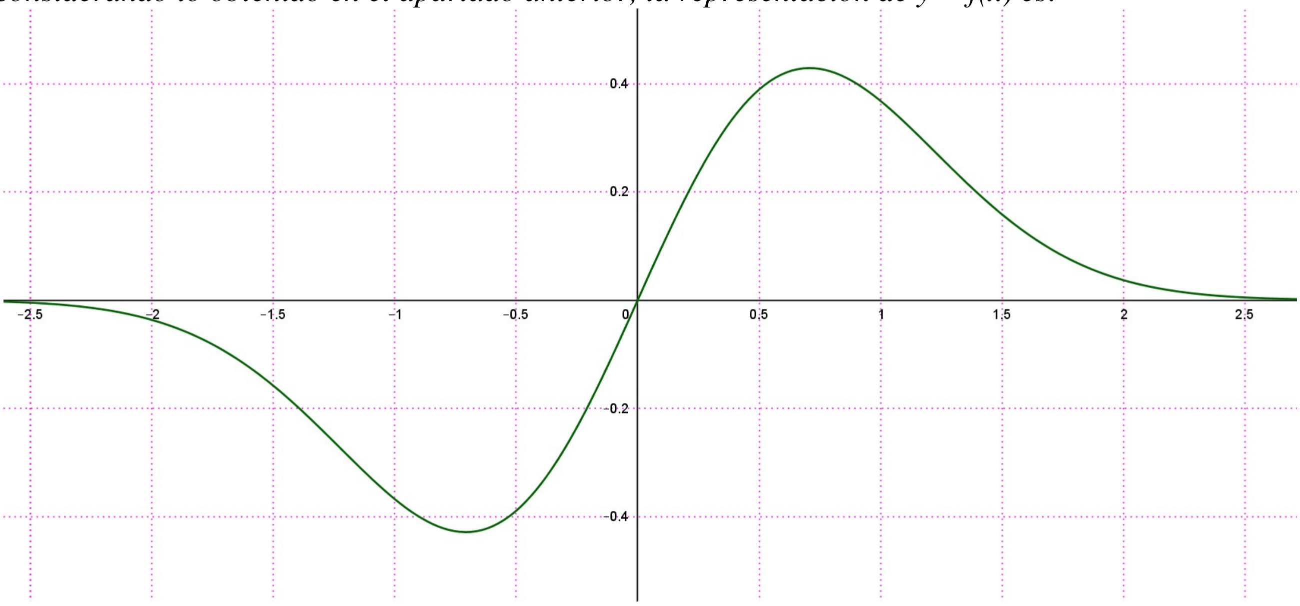
$$x=\frac{-\sqrt{2}}{2} \quad\to\quad f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \quad\to\quad \textit{Mínimo relativo}\quad \left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)\cong(-0´71,\,-0´43)$$

b) Representación gráfica de y = f(x)

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad\to\quad y=0\cdot e^{-0^2}=0 \\ y=0 \quad\to\quad x\cdot e^{-x^2}=0 \quad\to \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ e^{-x^2}=0 \quad \text{sin } \textit{solución} \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \textit{pto. corte} \quad (0,0)$$

Y considerando lo obtenido en el apartado anterior, la representación de y = f(x) es:



c) ¿a? / g(x) = f(x) + a x cumpla el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1]

$$g(x)=x\,e^{-x^2}+a\,x$$

El teorema de Rolle dice:

Si f(x) es continua en [a, b], f(x) derivable en (a, b) y f(a) = f(b) entonces ∃c ∈ (a, b) / f´(c) = 0

Por definición, g(x) es continua y derivable en $\Re$*, entonces:*

g(x) es continua en [0, 1]

g(x) es derivable en (0, 1)

hay que comprobar que g(0) = g(1)

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=0 \\ g(1)=\dfrac{1}{e}+a \end{array}\right\} \quad\to\quad 0=\frac{1}{e}+a \quad\to\quad a=\frac{-1}{e}$$

Para que g(x) cumpla el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1] debe ser $a=\dfrac{-1}{e}$.

d)

$$1)\ \int f(x)\,dx = \int x\,e^{-x^2}dx = \left\{\begin{array}{l} t=-x^2 \\ dt=-2x\,dx \rightarrow \dfrac{dt}{-2}=x\,dx \end{array}\right\} = \int e^t\,\frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t dt =$$

$$= \frac{-1}{2}\,e^t + C = \frac{-1}{2}\,e^{-x^2} + C$$

$$\textit{Luego}\quad \int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}\,e^{-x^2} + C$$

$$2)\ \int x\,e^{-x}dx = \left\{\begin{array}{l} u=x \rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx \rightarrow v=-e^{-x} \end{array}\right\} = -x\,e^{-x} - \int -e^{-x}dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1)+C$$

$$\textit{Luego}\quad \int x\,e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1)+C$$

Problema 3. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x\,(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. *(2 puntos)*
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. *(4 puntos)*
c) La integral $\int f(x)\,dx$. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x\,(x+2)}$

Dom f(x),

$$x\,(x+2)=0\left\langle\begin{array}{l}x=0\\ x+2=0\rightarrow x=-2\end{array}\right. \qquad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{-2,0\}$$

Asíntotas,

verticales,

$$\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x\,(x+2)}=\frac{-3}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=-2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x\,(x+2)}=\frac{-1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x\,(x+2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2+2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x\,(x+2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2+2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\infty}=0\end{array}\right\} \rightarrow \quad y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $Dom\ f(x)=\Re-\{-2,0\}$, ***las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 0 y la asíntota horizontal es y = 0.***

b) *¿Monotonía de f(x)?*

Para estudiar la monotonía de esta función, usaremos la siguiente expresión de ella:

$$f(x)=\frac{x-1}{x\,(x+2)} \quad \rightarrow \quad y=\frac{x-1}{x\,(x+2)}=\frac{x-1}{x^2+2x}$$

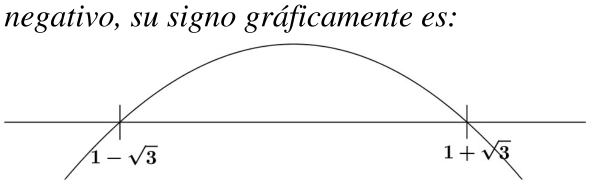
Debemos estudiar el signo de y´ en su dominio.

$$y'=\frac{1\left(x^2+2x\right)-(x-1)\,(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2}=\frac{x^2+2x-\left(2x^2+2x-2x-2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2}=\frac{x^2+2x-2x^2+2}{\left(x^2+2x\right)^2}=\frac{-x^2+2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

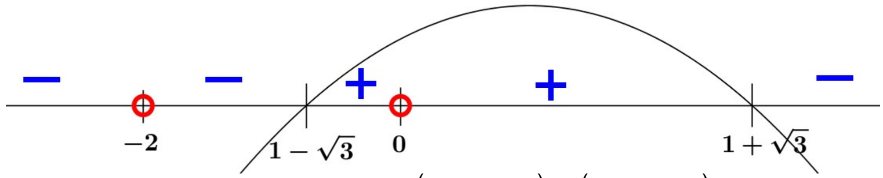
Como el denominador está elevado al cuadrado será positivo, luego el signo de y´ sólo depende del numerador. Obtengamos las raíces del numerador:

$$-x^2+2x+2=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot2}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{-2}=1\pm\sqrt{3}=\left\langle\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{3}\approx-0'7321\\ x_2=1+\sqrt{3}\approx2'7321\end{array}\right.$$

Como $-x^2+2x+2$ *es un polinomio de segundo grado con las raíces obtenidas y coeficiente de* x^2 *negativo, su signo gráficamente es:*



Añadiendo los valores que no son del dominio de f(x):



Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $\left(1-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,1+\sqrt{3}\right)$ ***y***

decreciente en $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$.

c) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}\,dx$

Es una integral racional,

$$\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A\,(x+2)+B\,x}{x\left(x+2\right)}\quad\rightarrow\quad x-1=A\,(x+2)+B\,x$$

$$x=-2\rightarrow\ -2-1=A\,(-2+2)+B\,(-2)\quad\rightarrow\quad -3=-2B\quad\rightarrow\quad B=\frac{3}{2}$$

$$x=0\rightarrow\quad 0-1=A\,(0+2)+B\cdot 0\quad\rightarrow\quad -1=2A\quad\rightarrow\quad A=\frac{-1}{2}$$

Entonces,

$$\int\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}\,dx=\int\left(\frac{-1/2}{x}+\frac{3/2}{x+2}\right)dx=\int\frac{-1/2}{x}\,dx+\int\frac{3/2}{x+2}\,dx=$$

$$=\frac{-1}{2}Ln|x|+\frac{3}{2}Ln|x+2|+C$$

Solución: $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}\,dx=\frac{-1}{2}Ln|x|+\frac{3}{2}Ln|x+2|+C$

Problema 5. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. *(1 punto)*
b) Las asíntotas de la función. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. *(3 puntos)*
d) La integral de la función *f(x)*. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

Dom f(x),

$$x^2-4=0;\quad x^2=4;\quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{-2,2\}$$

Puntos de corte con

$$eje\ OY,\quad x=0\quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2+3}{0^2-4}=\frac{-3}{4}\quad\rightarrow\quad\left(0,\frac{-3}{4}\right)$$

$$eje\ OX,\quad f(x)=0\quad\rightarrow\quad\frac{x^2+3}{x^2-4}=0;\quad x^2+3=0;\quad x^2=-3,$$ *sin solución. f(x) no corta al eje OX.*

El dominio de f(x) es $\Re-\{-2,2\}$ ***y sólo corta al eje OY en el punto*** $\left(0,\frac{-3}{4}\right)$.

b) Asíntotas.

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2,

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{(-2)^2+3}{(-2)^2-4}=\frac{7}{0}=\infty\quad\rightarrow\quad x=-2\ \text{es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{2^2+3}{2^2-4}=\frac{7}{0}=\infty\quad\rightarrow\quad x=2\ \text{es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2-4}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2-4}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1\end{array}\right\}\rightarrow\quad y=1\ \text{es la asíntota horizontal.}$$

Oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2 y la asíntota horizontal es y = 1.

c) Monotonía y extremos.

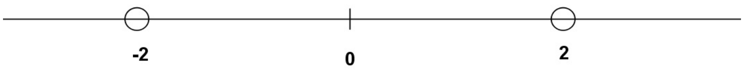
$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4},\qquad f'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-\left(x^2+3\right)2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3-6x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Estudiemos el signo de f´(x). Obtengamos las raíces del numerador y denominador de f´(x).

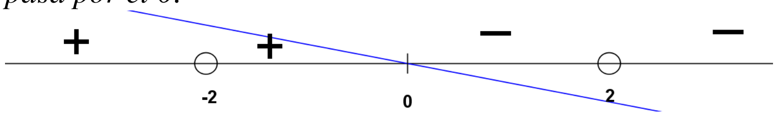
$-14x=0;\quad x=0$

$\left(x^2-4\right)^2=0;\quad x^2-4=0;\quad x^2=4;\quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

Considerando el dominio de f(x) = $\Re - \{-2, 2\}$, *debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,*



Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un polinomio de primera grado (una línea recta) con coeficiente de x negativo que pasa por el 0:



Luego, ***f(x) es creciente en*** $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ ***y es decreciente en*** $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

El único extremo de la función está en $x = 0$ *y como la función pasa de creciente a decreciente es un máximo relativo.*

La función f(x) sólo tiene un máximo relativo en $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$.

d) $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx$

Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4+4+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{7}{x^2-4} = 1 + \frac{7}{x^2-4}$$

Luego, $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx = \int\left(1 + \frac{7}{x^2-4}\right)dx = \int 1\,dx + \int \frac{7}{x^2-4}\,dx = x + \int \frac{7}{x^2-4}\,dx$

La integral pendiente es una integral racional,

$$\frac{7}{x^2-4} = \frac{7}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\,(x+2) + B\,(x-2)}{(x-2)(x+2)} \quad \to \quad 7 = A\,(x+2) + B\,(x-2)$$

$$x = -2 \quad \to \quad 7 = A\,(-2+2) + B\,(-2-2) \quad \to \quad 7 = -4B \quad \to \quad B = \frac{-7}{4}$$

$$x = 2 \quad \to \quad 7 = A\,(2+2) + B\,(2-2) \quad \to \quad 7 = 4A \quad \to \quad A = \frac{7}{4}$$

Entonces,

$$\int \frac{7}{x^2-4}\,dx = \int\left(\frac{7/4}{x-2} + \frac{-7/4}{x+2}\right)dx = \int \frac{7/4}{x-2}\,dx + \int \frac{-7/4}{x+2}\,dx = \frac{7}{4}\,Ln|x-2| - \frac{7}{4}\,Ln|x+2|$$

Finalmente, $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx = x + \frac{7}{4}\,Ln|x-2| - \frac{7}{4}\,Ln|x+2| + C$

Problema 5. Considerar la función $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(2 puntos)*
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(4 puntos)*
c) El área comprendida entre la curva *y=f(x)* y las rectas *y=0, x=1* y *x=2*. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$

Dom f(x),

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad x\neq 0 \\ \ln(x+1) \quad \rightarrow \quad x+1>0 \quad \rightarrow \quad x>-1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad Dom\ f(x)=(-1,0)\cup(0,+\infty)$$

Asíntotas,

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son $x=-1$ *y* $x=0$,

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{-1}+\ln(0)=-1+\infty=\infty \quad \rightarrow \quad x=-1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{0}+\ln(1)=\infty+0=\infty \quad \rightarrow \quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{+\infty}+\ln(+\infty)=0+(+\infty)=+\infty \quad \rightarrow \quad \text{no hay asíntota horizontal.}$$

Oblicua,

$y=m\,x+n$

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{+\infty}=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{*}{=}0\end{cases} \quad \rightarrow \quad m=0$$

* *{como x es un infinito de orden superior a ln(x+1)}*

No hay asíntota oblicua por ser m = 0.

El dominio de f(x) es $(-1,0)\cup(0,+\infty)$ ***y sus asíntotas son x = – 1 y x = 0.***

b) Monotonía y extremos.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1),\qquad f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{-x-1+x^2}{x^2(x+1)}=\frac{x^2-x-1}{x^2(x+1)}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$. Obtengamos las raíces del numerador y denominador de $f'(x)$.

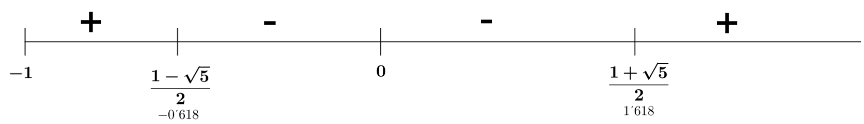
$$x^2-x-1=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cong -0'618\in Dom\, f(x) \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1'618\in Dom\, f(x)\end{cases}$$

$$x^2(x+1)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \\ x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=-1\end{cases}$$

Considerando el dominio de $f(x)$ = $(-1,0)\cup(0,+\infty)$, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos,

x	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{1}{x+1}$
$-0'7$	$\dfrac{-1}{(-0'7)^2}+\dfrac{1}{-0'7+1}=1'29...>0$
$-0'5$	$\dfrac{-1}{(-0'5)^2}+\dfrac{1}{-0'5+1}=-2<0$
1	$\dfrac{-1}{1^2}+\dfrac{1}{1+1}=-0'5<0$
2	$\dfrac{-1}{2^2}+\dfrac{1}{2+1}=0'083...>0$

Es decir:



***f(x) es creciente en** $\left(-1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ **y es decreciente en** $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.*

En $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ como la función pasa de creciente a decreciente hay un máximo relativo y

en $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ como la función pasa de decreciente a creciente hay un mínimo relativo.

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\ln\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)=\frac{2}{1-\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cong -2'5805$$

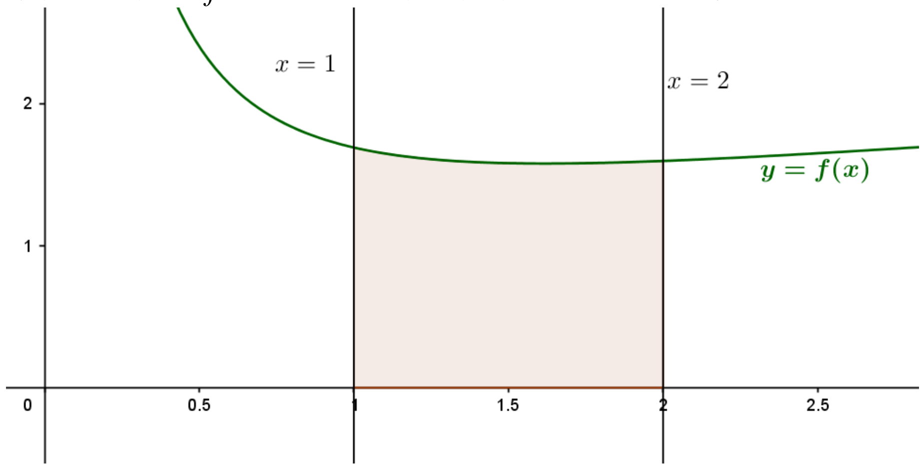
$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)=\frac{2}{1+\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cong 1'5805$$

La función f(x) tiene un máximo relativo en** $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}+\ln\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cong(-0'618\,,-2'5805)$ **y

un mínimo relativo en** $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}+\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cong(1'618\,,1'5805)$ **.

c) Área entre f(x), y = 0, x = 1   y   x =2

Nos interesa la función a ambos lado del mínimo relativo. El área a calcular gráficamente es:



El área la obtendremos mediante la siguiente integral definida $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right) dx$.

Los valores de x están comprendidos entre 1 y 2, por tanto podemos emplear indistintamente $\ln(x)$ *o* $\ln|x|$.

Calculamos la integral de cada uno de los sumandos,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \ln(x+1)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \quad \rightarrow \quad v = x \end{array} \right\} = x \ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx \overset{*}{=}$$

$$\left\{ \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \quad \rightarrow \quad \int \frac{x}{x+1} dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x - \ln(x+1) \right\}$$

$$\overset{*}{=} x \ln(x+1) - \left(x - \ln(x+1)\right) = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

Entonces $\int \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right) dx = \ln(x) + (x+1)\ln(x+1) - x$,

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right) dx = \left[\ln(x) + (x+1)\ln(x+1) - x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\ln(2) + (2+1)\ln(2+1) - 2\right] - \left[\ln(1) + (1+1)\ln(1+1) - 1\right] = \ln 2 + 3\ln 3 - 2 - \left(0 + 2\ln 2 - 1\right) =$$

$$= \ln 2 + 3\ln 3 - 2 - 2\ln 2 + 1 = 3\ln 3 - \ln 2 - 1 = \ln 27 - \ln 2 - 1 = \ln\left(\frac{27}{2}\right) - 1 \cong 1'6027$$

Solución: el área pedida es de $\ln\left[\left(\frac{27}{2}\right) - 1\right]$ *u.a.* $\cong$ *1´6027 u.a.*

Problema 5. Sea la función $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real . Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(3 puntos)*

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(5 puntos)*

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo [– 1, 1]. *(2 puntos)*

Solución:

Como k es un parámetro real, si k = 0 f(x) = 0 y las respuestas a los tres apartados son inmediatas:

a) Dom f(x) = $\Re$, f(x) no tiene asíntotas.

b) f(x) es una función constante por tanto no es ni creciente ni decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.

c) f(x) es nula para cualquier valor de x por tanto f(x) se anula en cualquier punto del intervalo [– 1, 1].

A continuación resolvemos el ejercicio considerando k ≠ 0.

a) $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$

$e^{2x}\neq 0\ \ \forall x\in\Re \quad\rightarrow\quad Dom\,f(x)=\Re.$

Asíntotas.

Como Dom f(x) = $\Re$ → f(x) no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\frac{\infty}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\{\text{como } e^{2x} \text{ es un infinito de orden superior a } kx\}=0$$

La asíntota horizontal es y = 0 en +∞.

Asíntota oblicua: (y = m x + n)

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{k\,x}{e^{2x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{k}{e^{2x}}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{k}{e^{2x}}=\frac{k}{0}=\infty\\[2ex]\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{e^{2x}}=\frac{k}{\infty}=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad \text{No hay asíntota oblicua.}$$

Luego f(x) sólo tiene asíntota horizontal y = 0 en +∞.

b) Monotonía y máximos y mínimos de y = f(x)

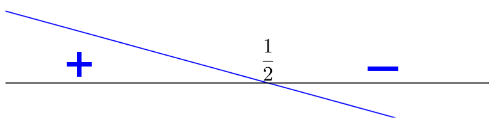
$$f'(x)=\frac{k\,e^{2x}-k\,x\,e^{2x}\,2}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{k\,e^{2x}\,(1-2x)}{e^{4x}}$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$\forall x\in\Re\quad e^{2x}\ \ y\ \ e^{4x}>0 \quad\rightarrow\quad$ *el signo de f´(x) depende de la expresión k (1 – 2 x)*

1 – 2 x es un polinomio de primer grado (una línea recta) de pendiente negativa y raíz: 1 – 2 x = 0;

1 = 2 x; $x=\dfrac{1}{2}$. *Gráficamente*



En consecuencia:

si $k > 0$ f(x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un máximo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$**.**

$$x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{k\,\frac{1}{2}}{e^{2\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

si $k < 0$ f(x) es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y creciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un mínimo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$**.**

c) Justificar que f(x) se anula en algún punto del intervalo [– 1 , 1]

Como Dom f(x) = $\Re$ $\rightarrow$ *f(x) es continua en* $\Re$ $\rightarrow$ *f(x) es continua en [– 1 , 1]*

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = \dfrac{k\,(-1)}{e^{2\,(-1)}} = \dfrac{-k}{e^{-2}} = -k\,e^2 \\ f(1) = \dfrac{k \cdot 1}{e^{2\cdot 1}} = \dfrac{k}{e^2} \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad f(-1)\cdot f(1) = -k\,e^2\,\frac{k}{e^2} = \left\{e^2 \neq 0\right\} = -k^2 < 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano:

f(x) es continua en [– 1 , 1] y f(– 1) . f(1) < 0 $\rightarrow$ ***∃ c ∈ (– 1 , 1) / f(c) = 0***

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(1) = 1$. *(1,7 puntos).*

Solución:
a)

Asíntotas de $y = \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

Por lo tanto no tiene asíntota horizontal.

Asíntota vertical.

Buscamos las posibles asíntotas verticales,

$6x^2 - 7x + 2 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.6.2}}{2.6} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} \dfrac{7+1}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{7-1}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Posibles a.v. $x = \dfrac{1}{2}$ *y* $x = \dfrac{2}{3}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \frac{12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9\frac{1}{2} - 5}{0} = \frac{12\frac{1}{8} - 8\frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 5}{0} = \frac{\frac{12-16+36-40}{8}}{0} =$$

$$= \frac{\frac{48-56}{8}}{0} = \frac{\frac{-8}{8}}{0} = \frac{-1}{0} = \infty$$

luego $x = \dfrac{1}{2}$ *es asíntota vertical.*

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \frac{12\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9\frac{2}{3} - 5}{0} = \frac{12\frac{8}{27} - 8\frac{4}{9} + 6 - 5}{0} = \frac{\frac{96-96}{27} + 1}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

luego $x = \dfrac{2}{3}$ *es asíntota vertical.*

Asíntota oblicua.

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = m\,x + n$ *siendo,*

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^3 - 7x^2 + 2x} = 2$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 - 12x^3 + 14x^2 - 4x}{6x^2 - 7x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2 + 5x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = 1$$

Por lo tanto la asíntota oblicua es: $y = 2\,x + 1$

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$$

efectuemos la división polinómica

$$\begin{array}{rrrrr|l}
12x^3 & -\ 8x^2 & +\ 9x & -\ 5 & & 6x^2 - 7x + 2 \\ \cline{6-6}
-\ 12x^3 & +\ 14x^2 & -\ 4x & & & 2x + 1 \\ \cline{1-3}
 & 6x^2 & +\ 5x & -\ 5 & & \\
 & -\ 6x^2 & +\ 7x & -\ 2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 12x & -\ 7 & &
\end{array}$$

luego $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = (2x + 1) + \dfrac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}$

$$H(x) = \int \left[(2x + 1) + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} \right] dx = x^2 + x + Ln\left|6x^2 - 7x + 2\right| + C$$

Como debe ser $H(1) = 1$

$$1 = 1^2 + 1 + Ln\left|6\,.\,1^2 - 7\,.\,1 + 2\right| + C$$

$$1 = 1 + 1 + Ln\left|6 - 7 + 2\right| + C$$

$$1 = 2 + Ln\left|1\right| + C$$

$$1 = 2 + 0 + C \quad \to \quad 1 = 2 + C \quad \to \quad C = -1$$

Por lo tanto $H(x) = x^2 + x - 1 + Ln\left|6x^2 - 7x + 2\right|$

Problema 3.2. Se considera la función real f (x) = $x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:
a) La gráfica de la curva *y = f(x)*. *(2 puntos).*
b) Los valores de *x* para los que está definida la función real *g(x) = ln f(x)*. *(1,3 puntos).*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *g(x)*, razonando si tiene, o no, máximo absoluto. *(1,3 puntos).*

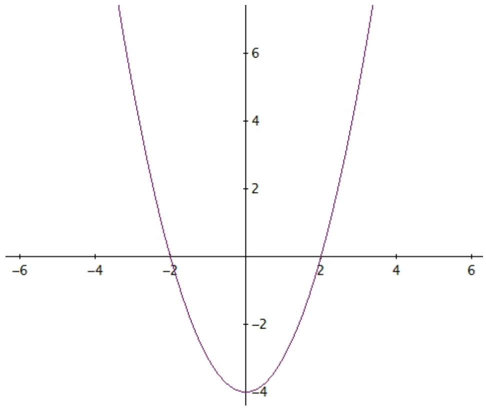
Solución:
a) Podemos obtener la gráfica de esta curva de dos formas diferentes.

a1) Como $y = x^2 - 4$ *es una función polinómica de 2º grado, gráficamente es una parábola.*
Efectuemos los cálculos para representar esta parábola.
Puntos de corte con los ejes coordenados,
$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \ x^2 = 4$; *dos soluciones:* $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$
Los puntos de corte son (0 , – 4), (2 , 0) y (– 2 , 0)
Vértice de la parábola,

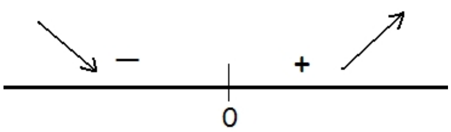
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2.1} = 0 \quad \rightarrow \quad y = -4$$

El vértice es (0 , – 4)

La gráfica de $y = x^2 - 4$ *es*

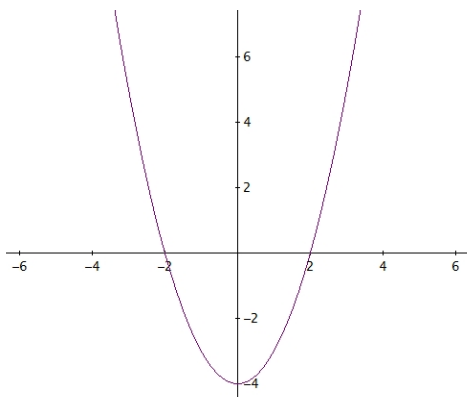


a2) $y = x^2 - 4$ *tratada como función.*
Dom y = R, por ser una función polinómica.
Puntos de corte con los ejes coordenados,
$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \ x^2 = 4$; *dos soluciones:* $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$
Los puntos de corte son (0 , – 4), (2 , 0) y (– 2 , 0)
Monotonía, signo de y´
$y' = 2x$
$2x = 0; \ x = 0$



Decreciente $(-\infty , 0)$
Creciente $(0 , +\infty)$
Mínimo relativo $(0 , -4)$

La gráfica de $y = x^2 - 4$ *es*



b) $g(x) = Ln\,(x^2 - 4)$*. Buscamos el dominio de* $g(x)$

$x^2 - 4 > 0$*, considerando la representación gráfica realizada en el apartado anterior obtenemos inmediatamente la solución de esta inecuación que es el dominio de* $g(x)$,

$$Dom\ g(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

c) Monotonía de $g(x)$

$g(x) = Ln\,(x^2 - 4)$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

estudiemos el signo de $g'(x)$*, para ello buscamos las raíces del numerador y del denominador,*

$2x = 0;\ \ x = 0$

$x^2 - 4 = 0$*; dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$

Representando estas raíces en la recta real y teniendo en cuenta el dominio de $g(x)$*, obtenemos*

Por lo tanto $g(x)$ *es* $\begin{array}{ll} Decreciente & (-\infty, -2) \\ Creciente & (2, +\infty) \end{array}$

Y $g(x)$ *no tiene ni máximos ni mínimos relativos. Para comprobar si* $g(x)$ *tiene máximo absoluto representémosla gráficamente. Ya conocemos su dominio y su monotonía.*

$$Dom\ g(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Puntos de corte con eje OX,

$$y = 0 \ \rightarrow\ Ln(x^2 - 4) = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 4 = 1 \ \rightarrow\ x^2 = 5 \ \rightarrow\ x = \pm\sqrt{5} \cong \pm 2{,}23 \in Dom\ g(x) \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} (-\sqrt{5}, 0) \\ (\sqrt{5}, 0) \end{array}$$

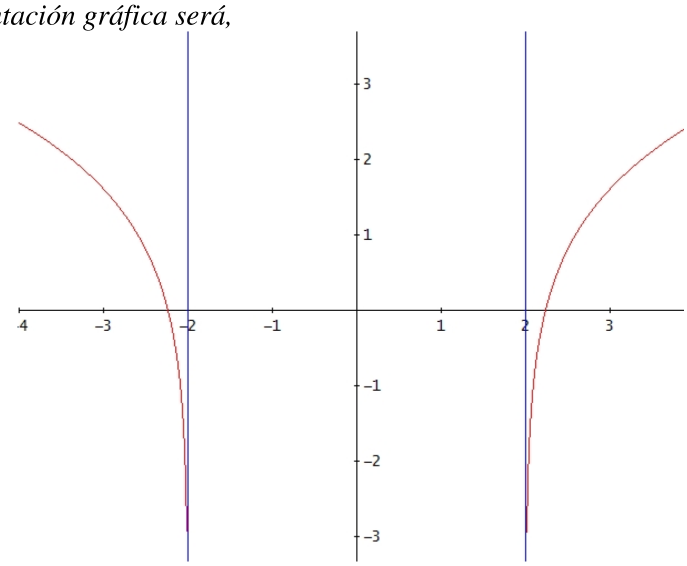
no hay corte con el eje OY porque $x = 0$ *no es del dominio de* $g(x)$

Asíntota vertical,

$$\lim_{x \to -2^-} Ln(x^2 - 4) = Ln\,0 = -\infty \ \rightarrow\ x = -2 \quad es \quad a.v.$$

$$\lim_{x \to 2^+} Ln(x^2 - 4) = Ln\,0 = -\infty \ \rightarrow\ x = 2 \quad es \quad a.v.$$

La representación gráfica será,



Luego $g(x)$ *no tiene máximo absoluto.*

PROBLEMA A.3. Dada la función f definida por

$$f(x) = x^2\ e^{-x}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y el recorrido de la función f. *(2 puntos)*

b) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2\ e^{-x}$ alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función f. *(2 puntos)*

d) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2\ e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión. *(2 puntos)*

e) La gráfica de la curva $y = x^2\ e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. *(2 puntos)*

Solución:

a) Dominio:

Tanto x^2 *como* e^{-x} *se pueden calcular para cualquier número real x, por lo que* $Dom\ f(x) = \Re$

Recorrido:

$\forall\, x \in \Re,\quad x^2 \geq 0 \quad y \quad e^{-x} > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\, e^{-x} \geq 0$. *Por lo que* $Im\ f(x) = [\,0\,, +\infty\,)$

b) Calculemos f´(x),

$f'(x) = 2\,x\,e^{-x} + x^2\,e^{-x}(-1) = 2\,x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x} = (2x - x^2)\,e^{-x}$

Igualamos la primera derivada a cero para buscar los posibles extremos de f(x)

$(2x - x^2)\,e^{-x} = 0$

como $e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re \quad \to \quad 2x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(2-x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2 - x = 0 \quad \to \quad x = 2 \end{cases}$

Calculemos la segunda derivada para determinar si para estos valores de x f(x) alcanza un extremo relativo.

$f''(x) = (2-2x)\,e^{-x} + (2x - x^2)\,e^{-x}(-1) = (2-2x)\,e^{-x} - (2x - x^2)\,e^{-x} = (2 - 2x - 2x + x^2)\,e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\,e^{-x}$

$x = 0, \quad f''(0) = 2\,e^0 = 2 > 0 \quad \to \quad$ *mínimo relativo*

$x = 2, \quad f''(2) = (4 - 8 + 2)2\,e^{-2} = -2\,e^{-2} < 0 \quad \to \quad$ *máximo relativo*

Por lo tanto, la función f(x) alcanza el máximo relativo en x = 2 y el mínimo relativo en x = 0.

Calculemos los puntos correspondientes para usarlos en el apartado e):

para $x = 0, \quad f(0) = 0^2\,.\,e^{-0} = 0 \quad \to$ *en* $(\,0\,,\,0\,)$ *mínimo relativo*

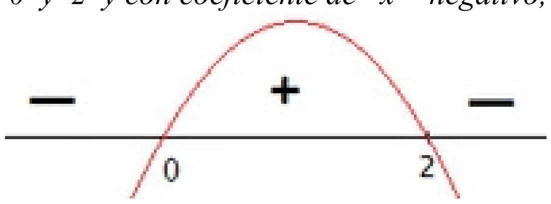
para $x = 2, \quad f(2) = 2^2\,.\,e^{-2} = 4\,e^{-2} \quad \to$ *en* $(\,2\,,\,4\,e^{-2}\,) \approx (\,2\,,\,0'5413\,)$ *máximo relativo*

c) Monotonía.

Debemos estudiar el signo de f´(x).

Por lo calculado en el apartado anterior sabemos que $f'(x) = (2x - x^2)\,e^{-x}$ *y* $f'(x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Como $\forall\, x \in \Re, \quad e^{-x} > 0$, *el signo de f´(x) depende de* $(\,2\,x - x^2\,)$ *que es un polinomio de 2º grado cuyas raíces son 0 y 2 y con coeficiente de* x^2 *negativo, luego el signo de f´(x) es:*



Por lo tanto:

f(x) es creciente en (0 , 2) y

f(x) es decreciente en $(-\infty\,, 0\,) \cup (\,2\,, +\infty)$

d) *Puntos de inflexión.*

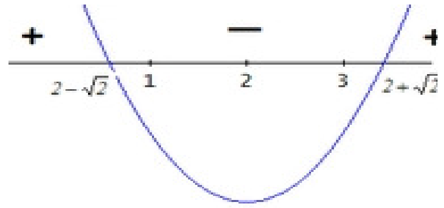
Debemos estudiar el signo de la segunda derivada.

Del apartado b) sabemos que: $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)\, e^{-x}$

En $f''(x)$ *el factor* e^{-x} *es siempre positivo, luego el signo de* $f''(x)$ *depende del otro factor que es un polinomio de* 2^o *grado con coeficiente de* x^2 *positivo y cuyas raíces son:*

$$x^2 - 4x + +2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 2 + \sqrt{2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

El signo de $f''(x)$ *será:*



Luego en $x = 2 - \sqrt{2}$ *y* $x = 2 + \sqrt{2}$ *hay puntos de inflexión porque en ellos la segunda derivada cambia de signo.*

e) *Por los cálculos realizados en los apartados anteriores, de la curva* $y = x^2\, e^{-x}$ *conocemos: dominio, imagen, monotonía y extremos relativos. Para completar su representación obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su asíntotas.*

Puntos de corte:

Para $x = 0$ *(calculado en el apartado b))* $y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$Para \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = x^2\, e^{-x} \quad \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \\ e^{-x} = 0,\ sin\ solución\ pues\ \ e^{-x} \neq 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad (0, 0)$$

Asíntotas:

Como el dominio de la función es $\Re$ *no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal:

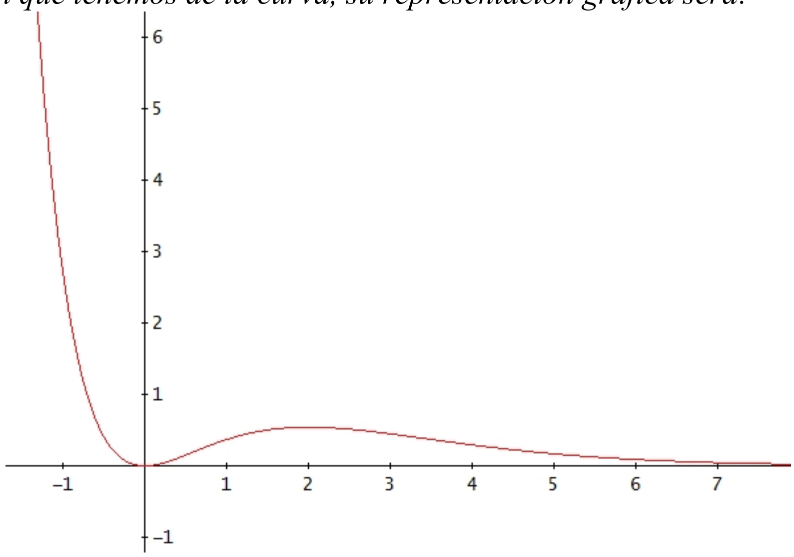
$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\left(x^2\, e^{-x}\right) = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)(indeterminado).$$ *Como* e^x *es infinito de orden superior a* x^2 *entonces*

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\left(x^2\, e^{-x}\right) = 0$$

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\left(x^2\, e^{-x}\right) = (-\infty)^2\, e^{+\infty} = (+\infty)\,(+\infty) = (+\infty)$$

Luego $y = 0$ *es asíntota horizontal en* $+\infty$. *Como* $f(x) \geq 0$ *(visto en apartado a)) la posición de la curva respecto de la asíntota será:*

Con la información que tenemos de la curva, su representación gráfica será:



PROBLEMA 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función *f*. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. *(3 + 1 puntos)*

c) El valor de $\int_2^3 f(x)\,dx$. *(3 puntos)*

Solución:

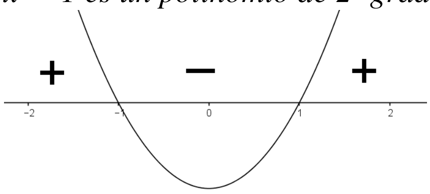
a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Dom f(x),

$x^2-1>0$

$x^2-1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

x^2 – 1 es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces – 1 y 1, luego



Por tanto, Dom f(x) = (– ∞, – 1) ∪ (1 , + ∞).

Asíntotas,

verticales,

x = – 1 por la izquierda

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{-1}{0}=\infty \quad\to\quad$ *x = –1 es asíntota vertical por la izquierda.*

x = 1 por la derecha

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{0}=\infty \quad\to\quad$ *x = 1 es asíntota vertical por la derecha.*

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{|x|}=\{como\ x<0\}=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|x|}=\{como\ x>0\}=1\end{array}\right\}\to$$

tiene dos asíntotas horizontales: y = – 1 en – ∞ e y = 1 en + ∞.

oblicua, como la función tiene a. horizontal en ambos lados, no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, las asíntotas de la función f son:

asíntotas verticales: x = – 1 por la izquierda y x = 1 por la derecha

asíntotas horizontales: y = – 1 en – ∞ e y = 1 en + ∞.

b) Monotonía y representación gráfica.

Para la monotonía calculamos $f'(x)$ y estudiamos su signo.

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\,\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\,2x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$$

En el estudio del dominio de $f(x)$ hemos obtenido que $x^2-1>0\ \ \forall\, x\in Dom\ f(x)$, además, $\forall\, x\in Dom\ f(x)$, $\sqrt{x^2-1}>0$; por tanto $f'(x)<0\ \ \forall\, x\in Dom\ f(x)$.

Luego, f(x) es decreciente en su dominio.

Representación gráfica de f(x).

De la función conocemos: dominio, asíntotas y monotonía.

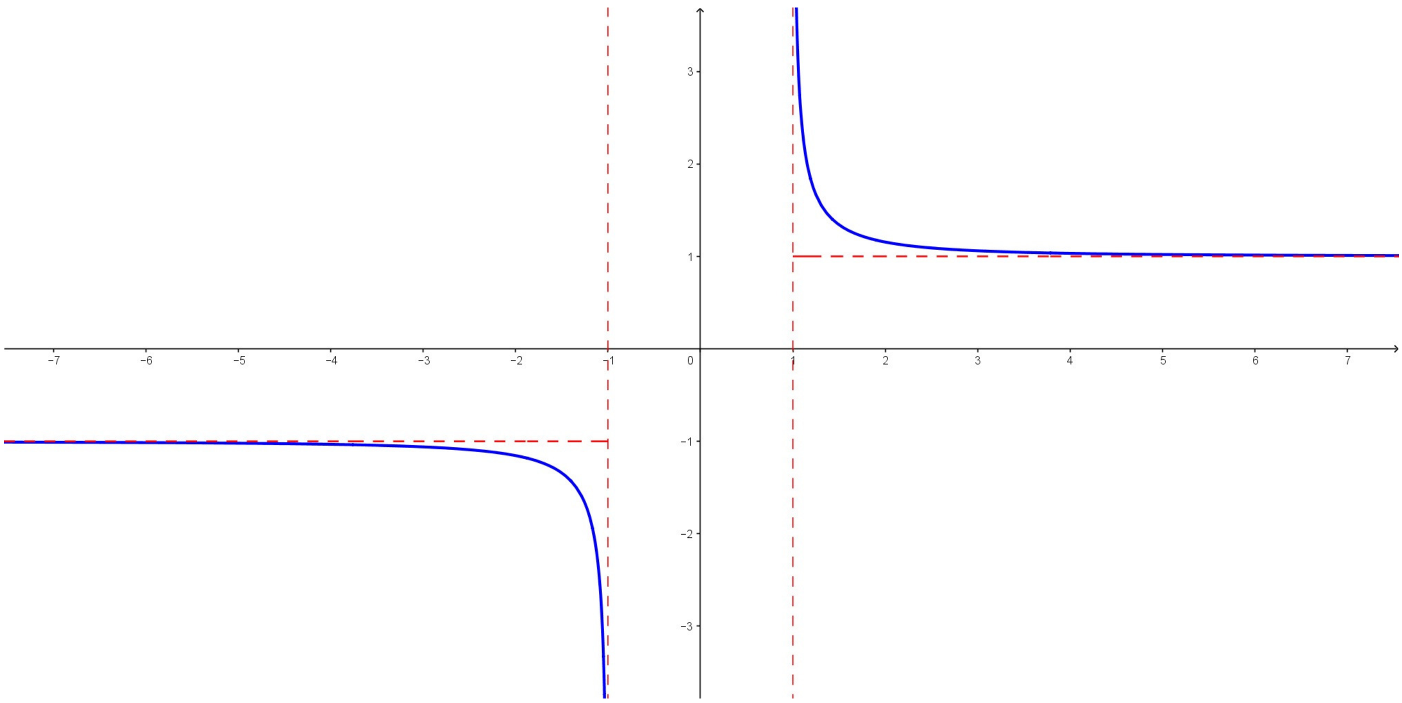
Puntos de corte:

Corte eje OX, $y=0$, $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0$; $x=0\ \notin Dom\ f(x)\cdot$ No corta al eje OX

Corte eje OY, $x=0\ \notin Dom\ f(x)\cdot$ No corta al eje OY

Como $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ entonces si $x<-1$, {numerador negativo y denominador positivo}, $f(x)<0$; si $x>1$, {numerador y denominador positivos}, $f(x)>0$.

Considerando todo lo anterior, la representación gráfica de f(x) será:



c) $\int_2^3 f(x)\,dx.$

Calculemos: $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\left\{t=x^2-1;\quad dt=2x\,dx;\quad x\,dx=\frac{dt}{2}\right\}=\int\frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}=\sqrt{x^2-1}$

Finalmente, $\int_2^3 f(x)\,dx=\left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3=\left(\sqrt{3^2-1}\right)-\left(\sqrt{2^2-1}\right)=\sqrt{8}-\sqrt{3}$

Solución: $\int_2^3 f(x)\,dx=\sqrt{8}-\sqrt{3}$

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(0) = 0$. *(1,7 puntos).*

Solución:
a)

$$y = \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5}$$

Asíntotas verticales:

$x^3 + x^2 + 5x + 5 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & & -1 & 0 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$x^2 + 5 = 0 \quad \to \quad x^2 = -5$ *sin raíces reales.*

Veamos si $x = -1$ es a.v.

$$\lim_{x\to -1} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \frac{4(-1)^2 + 2(-1) + 10}{0} = \frac{4 - 2 + 10}{0} = \frac{12}{0} = \infty$$

Por lo tanto $x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

análogamente,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Por lo tanto $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2}{x^4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

Por lo tanto no hay asíntota oblicua.

b)

$$H(x) = \int \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5}dx$$

$$\frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \frac{4x^2 + 2x + 10}{(x+1)(x^2 + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 5} = \frac{A(x^2 + 5) + (Bx + C)(x+1)}{(x+1)(x^2 + 5)}$$

$$4x^2 + 2x + 10 = A(x^2 + 5) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$x=-1 \quad \rightarrow \quad 4-2+10=A(1+5)+(-B+C)=0$$
$$12=6A \quad \rightarrow \quad A=2$$

$$x=0 \quad \rightarrow \quad 10=5A+C$$
$$10=5\,.\,2+C$$
$$10=10+C \quad \rightarrow \quad C=0$$
$$x=1 \quad \rightarrow \quad 16=6A+(B+C)2$$
$$16=6\,.\,2+(B+0)2$$
$$16=12+2B \quad \rightarrow \quad 4=2B \quad \rightarrow \quad B=2$$

$$H(x)=\int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx=\int \frac{2}{x+1}dx+\int \frac{2x}{x^2+5}dx=2Ln|x+1|+Ln|x^2+5|+C=$$
$$como \quad x^2+5>0 \quad \forall x\in \Re$$
$$=Ln(x+1)^2+Ln(x^2+5)+C$$

Debe ser H(0) = 0
$0 = Ln(0 + 1)^2 + Ln\ (0^2 + 5) + C$
$0 = Ln\ 1 + Ln\ 5 + C$
$0 = 0 + Ln\ 5 + C$
$C = -\ Ln\ 5$
Por lo que,

$$H(x)=Ln(x+1)^2+Ln(x^2+5)-Ln\,5=Ln\frac{(x+1)^2(x^2+5)}{5}$$

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x-2)(x^2+9)$. Se pide obtener razonadamente:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) La función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ *que cumple* $H(3) = \dfrac{\pi}{3}$. *(1,7 puntos).*

Solución:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18}$$

Asíntota horizontal,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18} = \left(\dfrac{+\infty}{-\infty}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 0 \quad \textit{es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales,

Calculemos las raíces del denominador,

$$(x-2)(x^2+9) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x-2=0 \quad\rightarrow\quad x=2 \\ x^2+9=0 \quad\rightarrow\quad x^2=-9 \quad \textit{sin raíces reales} \end{array}\right.$$

Por lo que la posible asíntota vertical será la recta x = 2, comprobemos si lo es calculando el límite siguiente,

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{2\,.\,2^2+12\,.\,2-6}{(2-2)(2^2+9)} = \frac{26}{0} = \infty$$

Por lo tanto ***x = 2 es la asíntota vertical****.*

Asíntota oblicua,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+12x-6}{x^4-2x^3+9x^2-18x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

y obtendríamos el mismo resultado al calcular el límite cuando x → +∞; por lo tanto ***no hay asíntota oblicua****.*

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \quad / \quad H(3) = \frac{\pi}{3}.$$

$$H(x) = \int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx =$$

Descomponemos el integrando,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+9}=\frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+9)}$$

luego, $2x^2+12x-6=A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)$

Calculamos los valores de A, B y C dando valores a x:

$x=2 \rightarrow 26=13A \rightarrow A=2$

$x=0 \rightarrow -6=2\,.\,9+C(-2) \rightarrow -6=18-2C \rightarrow 2C=18+6 \rightarrow 2C=24 \rightarrow C=12$

$x=1 \rightarrow 8=10A-B-C$ *; sustituyendo los valores obtenidos de A y C,*

$8=10\,.\,2-B-12 \rightarrow 8=8-B \rightarrow B=0$

Por lo tanto,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\frac{2}{x-2}+\frac{0x+12}{x^2+9}=\frac{2}{x-2}+\frac{12}{x^2+9}$$

$$y \quad H(x)=\int\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{12}{x^2+9}\right)dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{12}{x^2+9}dx\overset{*}{=}$$

calculamos cada integral por separado

$$\int\frac{2}{x-2}dx=2Ln|x-2|$$

$$\int\frac{12}{x^2+9}dx=12\int\frac{1}{9+x^2}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{\frac{9+x^2}{9}}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{1+\frac{x^2}{9}}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=$$

$$=12\,\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=4arctg\,\frac{x}{3}$$

$$\overset{*}{=}2Ln|x-2|+4arctg\,\frac{x}{3}+C$$

Calculemos el valor de C para que se cumpla la condición exigida,

$$H(3)=\frac{\pi}{3}$$

$$H(3)=2Ln|3-2|+4arctg\left(\frac{3}{3}\right)+C$$

$$\frac{\pi}{3}=2Ln\,1+4arctg\,1+C \rightarrow \frac{\pi}{3}=2.0+4\frac{\pi}{4}+C \rightarrow \frac{\pi}{3}=\pi+C \rightarrow C=\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{-2\pi}{3}$$

Finalmente, la función pedida es:

$$H(x)=2Ln|x-2|+4\,arctg\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}$$