OPCIÓN A

PROBLEMA A.3. Se dan las funciones $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y $g(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) Las derivadas de *f(x)* y *g(x)*. *(4 puntos).*
b) Los dominios de definición de las funciones *f(x)* y *g(x)*. *(3 puntos).*
c) La expresión simplificada de la función *f(x) + g(x)*, *(1´5 puntos)*, y el recorrido de esta función *f(x) + g(x)*. *(1´5 puntos).*

Solución:

a) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Antes de derivar apliquemos propiedades de los logaritmos, $f(x)=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right]=\frac{1}{1-x^2}$$

$g(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ *, apliquemos propiedades de los logaritmos,*

$$g(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\left[\ln(1-x)-\ln(1+x)\right]$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{(1-x)(1+x)}\right]=\frac{-1}{1-x^2}$$

$$\boxed{\text{Solución: } f'(x)=\frac{1}{1-x^2} \quad y \quad g'(x)=\frac{-1}{1-x^2}}$$

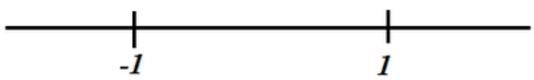
b) Dominio de $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

El argumento del logaritmo neperiano debe ser positivo, luego $\frac{1+x}{1-x}>0$

Estudiemos el signo del cociente,

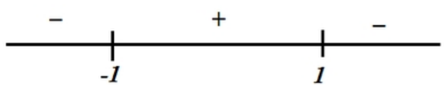
1 + x = 0; x = – 1; 1 – x = 0; x = 1

Debemos estudiar el signo del cociente en los intervalos:



$x=-2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+(-2)}{1-(-2)}=\frac{-1}{3}<0$

$x=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1+0}{1-0}=\frac{1}{1}>0$ *Luego:*



Por tanto,
Dom f(x) = (– 1 , 1)
(intervalo abierto)

$x=2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}<0$

Dominio de $g(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Como en la función anterior, $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}>0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{1-x}{1+x}>0$

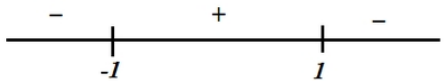
Estudiemos el signo del cociente,

Los intervalos a considerar son los mismos que en el estudio del dominio de f(x),

$$x=-2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+(-2)}{1+(-2)}=\frac{3}{-1}<0$$

$$x=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1-0}{1+0}=\frac{1}{1}>0$$

Luego:



Por tanto,
Dom g(x) = (– 1 , 1)

$$x=2 \quad \rightarrow \quad \frac{1-2}{1+2}=\frac{-1}{3}<0$$

c)

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)+\ln(1-x)-\ln(1+x)\right]=\frac{1}{2}0=0$$

Es decir, ***f(x) + g(x) = 0****,* *por lo tanto* ***el recorrido de f(x) + g(x) es { 0 }***

OPCIÓN B

Problema B.3. Un club deportivo alquila un avión de 80 plazas para realizar un viaje a la empresa VR. Hay 60 miembros del club que han reservado su billete. En el contrato de alquiler se indica que el precio de un billete será 800 euros si sólo viajan 60 personas, pero que el precio por billete disminuye en 10 euros por cada viajero adicional a partir de esos 60 viajeros que ya han reservado el billete.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El total que cobra la empresa VR si viajan 61, 70 y 80 pasajeros. (1 *punto*).

b) El total que cobra la empresa VR si viajan $60 + x$ pasajeros, siendo $0 \leq x \leq 20$. (4 *puntos*).

c) El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total la empresa VR. (5 *puntos)*

Solución:

a) Llamando P al precio del billete y T al total que cobra la empresa VR.

Viajan 61 pasajeros $\rightarrow$ $P = 800 - 10\,(61 - 60) = 790$ *y* $T = 790 \,.\, 61 = 48190$

Viajan 70 pasajeros $\rightarrow$ $P = 800 - 10\,(70 - 60) = 700$ *y* $T = 700 \,.\, 70 = 49000$

Viajan 80 pasajeros $\rightarrow$ $P = 800 - 10\,(80 - 60) = 600$ *y* $T = 600 \,.\, 80 = 48000$

Solución: ***si viajan 61 pasajeros la empresa cobra 48190€, si viajan 70 pasajeros cobra 49000€ y si viajan 80 pasajeros cobra 48000€.***

b) Viajan $60 + x$ *pasajeros,* $0 \leq x \leq 20$.

$P = 800 - 10\,(60 + x - 60) = 800 - 10\,x$

$T = (60 + x)(800 - 10\,x) = 48000 + 200\,x - 10\,x^2 = -10\,x^2 + 200\,x + 48000$

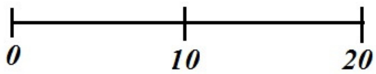
Solución: ***si viajan $60 + x$ pasajeros, VR cobra $-10\,x^2 + 200\,x + 48000$, siendo $0 \leq x \leq 20$.***

c) Buscamos el máximo de $T = -10\,x^2 + 200\,x + 48000$, $0 \leq x \leq 20$.

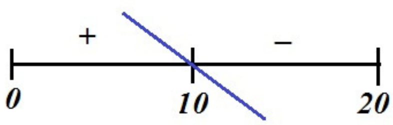
$T' = -20\,x + 200$

$T' = 0, \quad -20\,x + 200 = 0; \quad -20\,x = -200; \quad x = 10$

Debemos estudiar el signo de T´ en los siguientes intervalos:



Como T´ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz x = 10, a la derecha de 10 T´es positivo y a la izquierda negativo:



Por tanto, en x = 10 hay un máximo relativo de la función T, además como a la izquierda de 10 T es creciente y a la derecha decreciente es el máximo absoluto de T para $0 \leq x \leq 20$.

*Solución****: el número de pasajeros que maximiza lo que cobra en total la empresa VR es 70*** *(60 + 10)****.***

PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. *(4 puntos)*

c) La integral $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$. *(3 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas de f.

Dominio,

$$(x+1)^2=0 \;\rightarrow\; x+1=0 \;\rightarrow\; x=-1$$

Luego, $Dom\, f(x) = \Re-\{-1\}$.

Asíntotas,

Asíntotas verticales:

Posible $x = -1$,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=-1 \;\; es \;\; a.v.$$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{(x+1)^2}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\{\text{como el denominador es un polinomio de 2º grado y el numerador de 1}^{er}\text{ grado}\}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{(x+1)^2}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\{\text{como en el límite anterior}\}=0$$

La asíntota horizontal es: $y = 0$.

Por ser la función f un cociente de funciones polinómicas con el denominador de mayor grado que el numerador, no tiene asíntota oblicua.

Solución: Dom f(x) = $\Re-\{-1\}$, ***asíntota vertical:*** $x=-1$ ***y asíntota horizontal:*** $y = 0$.

b) Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que estudiar el signo de f´(x).

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$$

$Dom\, f(x) = \Re-\{-1\}$

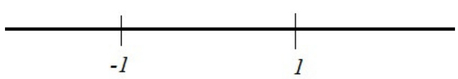
$$f'(x)=\frac{1.(x+1)^2-x.2.(x+1)}{\left((x+1)^2\right)^2}=\frac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{(x+1)^4}=\frac{-x^2+1}{(x+1)^4}$$

Calculamos las raíces del numerador y denominador:

$-x^2+1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm 1$

$(x+1)^4=0;\quad x+1=0;\quad x=-1$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos:



En f´(x) el denominador está elevado a la cuarta, será positivo; luego el signo de f´(x) depende del numerador que es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces –1 y 1. Por tanto, el signo de f´(x) será:*

$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$-$		$+$		$-$

Por tanto, ***f(x) es creciente en $(-1, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.***

c) Cálculo de $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx.$

Es una integral racional, descomponemos el integrando:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} == \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$$

Por tanto, comparando los polinomios de los numeradores inicial y final, debe ser:

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \quad A = 1 \quad y \quad B = -1$$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx =$$

Calculemos cada integral por separado:

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = Ln\,|x+1|$$

$$\int \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx = \int -(x+1)^{-2}\,dx = \left\{\begin{matrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{matrix}\right\} = \int -t^{-2}\,dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{t} = \frac{1}{x+1}$$

Luego: $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = Ln\,|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

PROBLEMA B.3. Se va a construir un depósito de 1500 m^3 de capacidad, con forma de caja abierta por la parte superior. Su base es un cuadrado y las paredes laterales son cuatro rectángulos iguales perpendiculares a la base. El precio de cada m^2 de la base es de 15€ y el precio de cada m^2 de pared lateral es de 5€.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

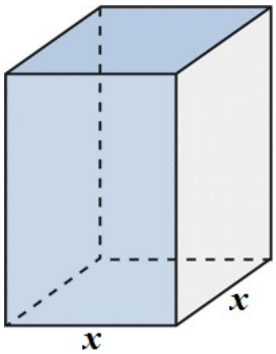
a) El coste total del depósito en función de la longitud x de un lado de la base. *(3 puntos)*

b) Las longitudes del lado de la base y de la altura del depósito para que dicho coste total sea mínimo. *(5 puntos)*

c) El valor del mínimo coste total del depósito. *(2 puntos)*

Solución:

El depósito es un paralelepípedo de base cuadrada y sin tapa superior. Los datos del problema podemos resumirlos en:



$V = 1500\ m^3$

base a 15 €/m^2
caras laterales a 5 €/m^2

a) Coste del depósito en función de x (C).

Base cuadrada de área x^2, el coste de la base es: $15\,x^2$

Área lateral, cuatro rectángulos, mide $4\,x\,y$, el coste del área lateral es: $5\,.\,4\,x\,y = 20\,x\,y$

Por tanto, $C = 15\,x^2 + 20\,x\,y$

Falta expresar y en función de x. Lo hacemos a partir del dato $V = 1500$

El volumen de la caja es: $V = x^2\,y \;\rightarrow\; x^2\,y = 1500 \;\rightarrow\; y = \dfrac{1500}{x^2}$

Luego, $C = 15\,x^2 + 20\,x\,\dfrac{1500}{x^2} = 15\,x^2 + \dfrac{30000}{x}$

Como x es la longitud del lado de la base, $x > 0$

Solución: $C = 15\,x^2 + \dfrac{30000}{x}, \quad x \in \Re^+$

b) ¿x y / coste total mínimo?

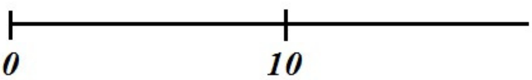
Busquemos el mínimo de la función C anteriormente obtenida.

$$C = 15\,x^2 + \frac{30000}{x}, \quad x \in \Re^+$$

$$C' = 30x - \frac{30000}{x^2}$$

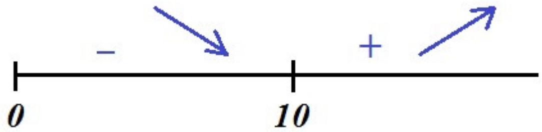
$$30x - \frac{30000}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; 30x^3 - 30000 = 0 \;\rightarrow\; 30x^3 = 30000 \;\rightarrow\; x^3 = 1000 \;\rightarrow\; x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Para determinar si es máximo o mínimo, estudiamos el signo de C' en los intervalos:



x	C'
1	$30\,.\,1-\dfrac{30000}{1^2}=30-30000=-29970<0$
11	$30\,.\,11-\dfrac{30000}{11^2}=\dfrac{9930}{121}>0$

Luego:



En $x = 10$ C tiene un mínimo relativo que, además, es el absoluto porque la función a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente.

Para $x = 10$, $y=\dfrac{1500}{10^2}=15$

En conclusión, ***el coste del depósito es mínimo cuando el lado de la base mide 10m y la altura del depósito es de 15m.***

c) ¿Mínimo coste?

$$x=10 \quad \rightarrow \quad C=15\,.\,10^2+\frac{30000}{10}=1500+3000=4500$$

Solución: ***el coste mínimo es de 4500€.***

PROBLEMA B.3. La diferencia de potencial x entre dos puntos de un circuito eléctrico provoca el paso de una corriente eléctrica de intensidad y, que está relacionada con la diferencia de potencial x por la ecuación $y = -x^2 - x + 6$, siendo $0 \le x \le 2$.

Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) La gráfica de la función $f(x) = -x^2 - x + 6$ *(3 puntos)*
y deducir, gráfica o analíticamente, el valor de la intensidad y cuando la diferencia de potencial x es 0 y el valor de la diferencia de potencial x al que corresponde una intensidad y igual a 0, siendo $0 \le x \le 2$. *(1 punto)*

b) El valor de la diferencia de potencial x para el que es máximo el producto $y \cdot x$ de la intensidad y por la diferencia de potencial x, cuando $0 \le x \le 2$, *(2 puntos)*
y obtener el valor máximo de dicho producto $y \cdot x$, cuando $0 \le x \le 2$, *(1 punto)*

c) El área de la superficie situada en el primer cuadrante limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. *(2 puntos)*

Solución:

a) Gráfica de $f(x) = -x^2 - x + 6$.

f(x) es una parábola.

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$

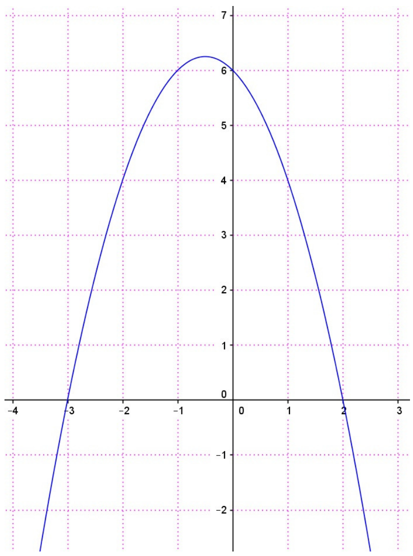
$$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 - x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} =$$

$$= \frac{1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \dfrac{1+5}{-2} = \dfrac{6}{-2} = -3 & \rightarrow (-3, 0) \\ \dfrac{1-5}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 & \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(-1)} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = -\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4} = 6'25 \qquad \rightarrow \left(\frac{-1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

Por tanto la gráfica de $f(x) = -x^2 - x + 6$ *es:*



*Cuando la **diferencia de potencial es 0** (x = 0), según cálculos anteriores, la **intensidad es de 6**.*

*Para una **intensidad 0** (y = 0), según cálculos anteriores, la **diferencia de potencial** (x / 0 ≤ x ≤ 2) es **2**.*

b) ¿x? / y . x es máximo ($0 \le x \le 2$)

$P = y \,.\, x = (-x^2 - x + 6) \,.\, x = -x^3 - x^2 + 6x$

Busquemos extremos relativos.

$P' = -3x^2 - 2x + 6$

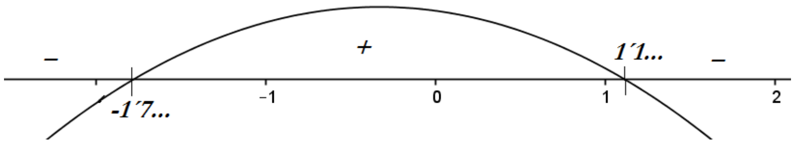
$-3x^2 - 2x + 6 = 0$

$3x^2 + 2x - 6 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 3\cdot(-6)}}{2\cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3} = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{19}}{3} \cong 1'1126 \\ \dfrac{-1-\sqrt{19}}{3} \cong -1'7863 \end{cases}$$

Signo de P´:

Considerando que P´ es, gráficamente, una parábola con coeficiente de x^2 negativo y corta al eje OX para x = – 1´7… y x = 1´1…,



P es una función que está definida en el intervalo [0 , 2].

A la izquierda de $\dfrac{-1+\sqrt{19}}{3} \cong 1'1196$ la función es creciente y a la derecha es decreciente, luego para $x = \dfrac{-1+\sqrt{19}}{3}$ la función P alcanza su máximo absoluto.

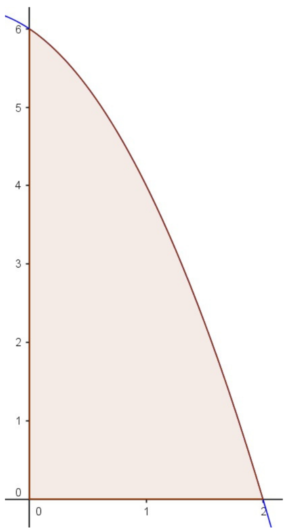
Por tanto, para una diferencia de potencial de $\dfrac{-1+\sqrt{19}}{3} \cong 1'1196$ el producto y . x es máximo.

Y para

$$x = \frac{-1+\sqrt{19}}{3} \quad \rightarrow \quad y \cdot x = P = -\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right)^3 - \left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{-1+\sqrt{19}}{3} = \frac{-56+38\sqrt{19}}{27} \cong 4'0607$$

c)

El área pedida es:



La calculamos mediante la siguiente integral:

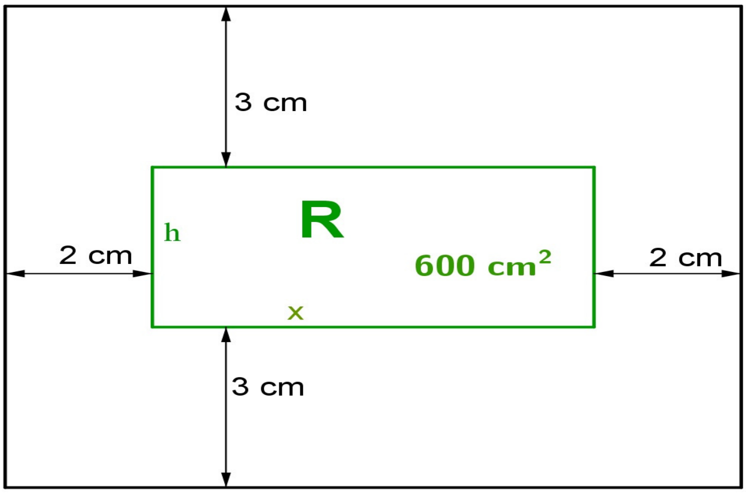
$$\int_0^2 \left(-x^2 - x + 6\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 6\cdot 2\right) - 0 =$$

$$= -\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12 = -\frac{8}{3} - 2 + 12 = -\frac{8}{3} + 10 = \frac{22}{3}\, u^2 \cong 7'3333\, u^2$$

PROBLEMA B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que:
Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R. *(3 puntos)*
b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima. *(5 puntos)*
c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima. *(3 puntos)*

Solución:
La representación gráfica del ejercicio es:



a) Área de la cartulina en función de x (base de R).

$A_R = 600\ cm^2 \ \rightarrow\ x\,.\,h = 600 \ \rightarrow\ h = \dfrac{600}{x}$ *(como x es la longitud de la base, x > 0)*

Entonces, las medidas de la cartulina son: base $= x + 4$ y altura $= \dfrac{600}{x} + 6$

El área de la cartulina será: $(x+4)\left(\dfrac{600}{x}+6\right) = 600 + 6x + \dfrac{2400}{x} + 24 = 624 + 6x + \dfrac{2400}{x}$

Solución: $A_{cartulina} = 624 + 6x + \dfrac{2400}{x}, \quad x > 0$

b) ¿x? / $A_{cartulina}$ sea mínima.

Por el apartado (a) sabemos que $A_{cartulina} = 624 + 6x + \dfrac{2400}{x}, \quad x > 0$

Obtengamos el mínimo de esta función,

$A'_{cartulina} = 6 - \dfrac{2400}{x^2}$

$A'_{cartulina} = 0 \ \rightarrow\ 6 - \dfrac{2400}{x^2} = 0 \ \rightarrow\ 6x^2 - 2400 = 0 \ \rightarrow\ 6x^2 = 2400 \ \rightarrow\ x^2 = 400$

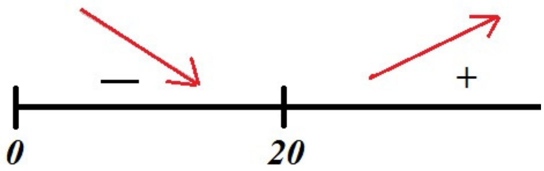
$x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$

Como $x > 0$, *entonces* $x = 20$

Para determinar si para este valor de x el área es mínima, estudiemos la monotonía de $A_{cartulina}$
Hay que estudiar el signo de $A'_{cartulina}$ *en los intervalos* $(0, 20)$ y $(20, +\infty)$

x	A_c'
1	$6-\dfrac{2400}{1^2}=-2394<0$
21	$6-\dfrac{2400}{21^2}=0'55..>0$

Por tanto:



Luego, en $x = 20$ se alcanza el mínimo relativo que, además, es el mínimo absoluto ya que la función A_c es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.

Solución: el área de la cartulina es mínima para $x = 20$ cm.

c) Dimensiones de dicha cartulina.

Para $x = 20$, (según calculamos en el apartado (a)) las dimensiones de la cartulina son:

base = $20 + 4 = 24$ cm y altura = $\dfrac{600}{20}+6 = 36$ cm

Solución: las dimensiones de la cartulina de área mínima pedida son 24 cm de ancho y 36 cm de alto.

PROBLEMA A.3. Se da la función real h definida por $h(x)=\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. *(1 + 2 puntos)*

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. *(4 puntos)*

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)\,dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. *(4 puntos)*

Solución:

a) Dominio de h(x)

$$x^2+2x+5=0 \quad\to\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}\ \textit{Sin solución}$$

Por tanto, ***Dom h(x) =*** $\mathfrak{R}$

Calculemos los límites,

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\frac{-3}{5}$$

b) Asíntota de $y = h(x)$.

Como Dom h(x) = $\mathfrak{R}$, $y = h(x)$ *no tiene asíntota vertical.*

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$, $y = h(x)$ *no tiene asíntota horizontal*

Obtengamos la asíntota oblicua, (puede ser de dos formas)

1. *La función h(x) es un cociente de dos polinomios tales que grad(num) – grad(den) = 3 – 2 = 1, luego tiene asíntota oblicua. Cálculo de la asíntota (efectuamos la división polinómica),*

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 + 5x - 3 & x^2 + 2x + 5 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 - 2x^2 - 5x} & x - 1 \\
\quad -x^2 \qquad\quad - 3 & \\
\quad \underline{+x^2 + 2x + 5} & \\
\qquad\quad 2x + 2 &
\end{array}$$

Por tanto, ***la asíntota oblicua es*** $\boldsymbol{y = x - 1}$

2. *La asíntota oblicua es* $y = mx + n$, *siendo*

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}=\lim_{x\to+\infty} 1=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[h(x)-m\,x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-3}{x^2+2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(-1)=-1$$

Por tanto, ***la asíntota oblicua es*** $\boldsymbol{y = x - 1}$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}\,dx =$

Considerando la división polinómica realizada en el apartado anterior,

$$\int\left(x-1+\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+Ln\left|x^2+2x+5\right|+C$$

Calculemos el área de la superficie.

Debemos realizar una representación gráfica del área a calcular.

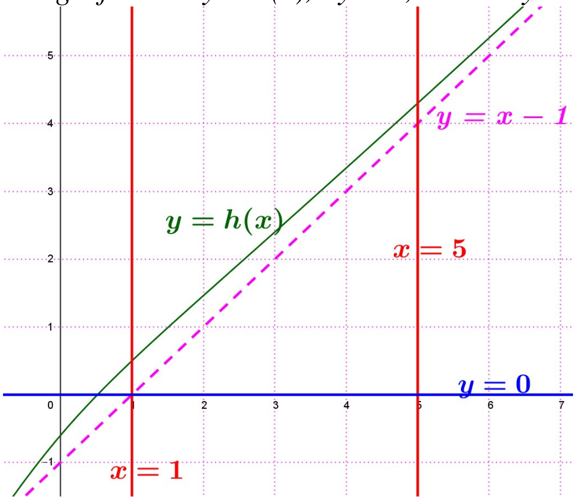
El segundo límite calculado en el apartado a) nos informa que h(x) pasa por $\left(0,-\frac{3}{5}\right)$.

De la función h(x) conocemos su asíntota oblicua $y = x - 1$.

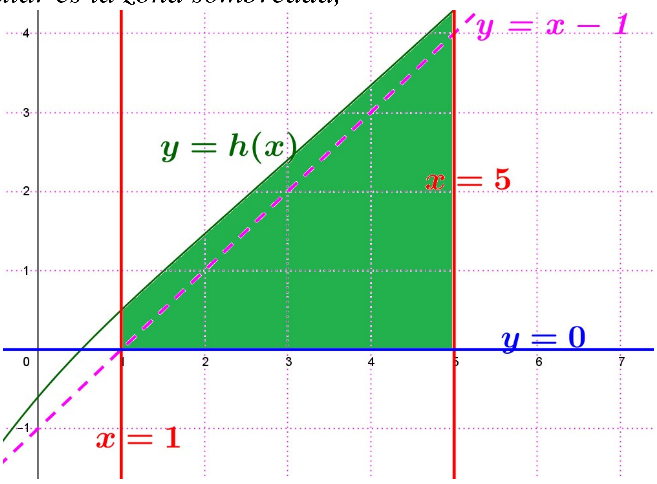
Calculemos,

x	$h(x)$	$x-1$
1	$\dfrac{1^3+1^2+5\cdot 1-3}{1^2+2\cdot 1+5}=\dfrac{4}{8}=0{'}5$	$1-1=0$
5	$\dfrac{5^3+5^2+5\cdot 5-3}{5^2+2\cdot 5+5}=\dfrac{172}{40}=4{'}3$	$5-1=4$

La representación gráfica de $y = h(x)$, $y = 0$, $x = 1$ *y* $x = 5$ *es*



El área a calcular es la zona sombreada,



El cálculo del área es mediante la integral definida,

$$\int_1^5 h(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+Ln\left|x^2+2x+5\right|\right]_1^5=\left(\frac{5^2}{2}-5+Ln\left|5^2+2\cdot 5+5\right|\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1+Ln\left|1^2+2\cdot 1+5\right|\right)=$$

$$=\frac{15}{2}+Ln\,40+\frac{1}{2}-Ln\,8=8+Ln\,\frac{40}{8}=8+Ln\,5$$

El área pedida es de (8 + Ln 5) u.a. (aproximadamente 9´6094 u.a.)

PROBLEMA B.3. un proyectil está unido al punto (0, 2) por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto (0, 2). *(2 puntos)*

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto (0, 2) para $-2 \le x \le 2$. *(2 puntos)*

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto (0, 2) para $-2 \le x \le 2$. *(2 puntos)*

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \le x \le 2$. *(4 puntos)*

Solución:

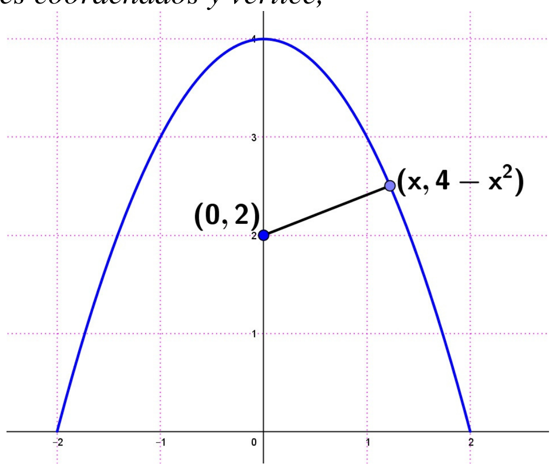
La representación gráfica del problema es:

$y = 4 - x^2$ *es una parábola, calculemos puntos de corte con ejes coordenados y vértice,*

$x = 0, \quad y = 4 \quad (0, 4)$

$$y = 0, \quad 4 - x^2 = 0, \quad 4 = x^2, \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad \begin{cases} (-2,0) \\ (2,0) \end{cases}$$

$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-1)} = 0 \qquad (0,4)$$



$$a) \quad d\left((0, 2), \left(x, 4 - x^2\right)\right) = \sqrt{(x - 0)^2 + \left(4 - x^2 - 2\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(2 - x^2\right)^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

La función pedida es $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \quad -2 \le x \le 2$

b) *Debemos buscar el máximo absoluto de la función anterior.*

$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \quad -2 \le x \le 2$

Teniendo en cuenta que en el cálculo inicial de f(x) el radicando es la suma de dos términos al cuadrado, este radicando es siempre positivo.

Para encontrar el máximo absoluto de f(x) necesitamos obtener sus extremos relativos.

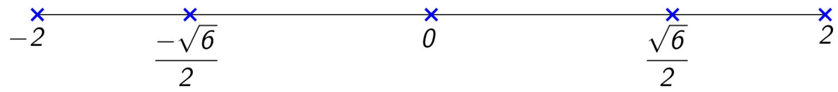
Considerando que si $h(x) = \sqrt{g(x)}$ *siendo* $g(x) > 0$ *entonces como* $h'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$, *entonces el signo de h´(x) coincide con el signo de g´(x). Es decir, para calcular los extremos relativos de h(x) basta con obtener los de g(x)*

Luego, los extremos relativos de f(x) son lo de $y = x^4 - 3x^2 + 4$. *Calculémoslos,*

$y = x^4 - 3x^2 + 4, \qquad y' = 4x^3 - 6x$

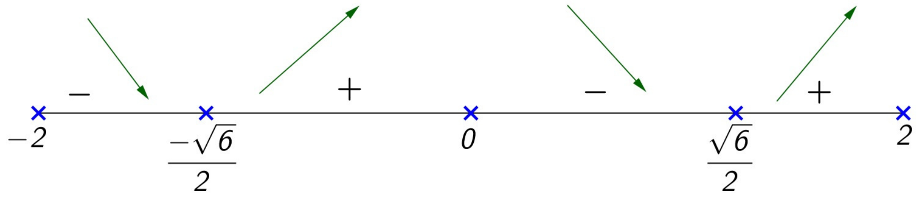
$$4x^3 - 6x = 0, \quad x\left(4x^2 - 6\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 6 = 0, \quad 4x^2 = 6, \quad x^2 = \frac{6}{4}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{6}{4}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \cong \pm 1'2247 \end{cases}$$

Estudiemos el signo de y´ en los siguientes intervalos



x	$y' = 4x^3 - 6x$	
$-1'5$	$4\,(-1'5)^3 - 6\,(-1'5) = -4'5$	$-$
-1	$4\,(-1)^3 - 6\,(-1) = 2$	$+$
1	$4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = -2$	$-$
$1'5$	$4 \cdot 1'5^3 - 6 \cdot 1'5 = 4'5$	$+$

Luego,



El máximo relativo de y está en x = 0, por tanto el máximo relativo de f(x) está en x =0. Pero como f(x) está definida en un intervalo debemos obtener el valor de f(x) en los extremos para determinar el máximo absoluto,

x	$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$
-2	$\sqrt{(-2)^4 - 3(-2)^2 + 4} = \sqrt{8} = 2'8284$
0	$\sqrt{0^4 - 3 \cdot 0^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$
2	$\sqrt{2^4 - 3 \cdot 2^2 + 4} = \sqrt{8} = 2'8284$

El máximo absoluto de f(x) se alcanza en x = – 2 y x = 2.

Por lo que, ***los puntos de la curva a mayor distancia absoluta del punto (0 , 2) son los puntos (– 2 , 0) y (2 , 0)*** *{para los valores de x obtenidos, los puntos los calculamos en el apartado a)}.*

c) Obtengamos el mínimo absoluto de f(x).

De lo estudiado en el apartado anterior sabemos que los mínimos relativos están en $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$*. Como a la izquierda de ellos la función es decreciente y a la derecha creciente, el mínimo absoluto será alguno de ellos. Calculemos f(x) para estos valores de x,*

x	$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$
$\frac{-\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

El mínimo absoluto se alcanza en los dos valores.

Calculemos los puntos de la curva correspondientes,

x	$y = 4 - x^2$
$\frac{-\sqrt{6}}{2}$	$4 - \left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$4 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

Finalmente, ***los puntos de la curva*** $\boldsymbol{y = 4 - x^2}$ ***a menor distancia absoluta del punto*** $\boldsymbol{(0\,,\,2)}$ ***son*** $\left(\dfrac{-\sqrt{6}}{2}\,,\dfrac{5}{2}\right)$ *y* $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\,,\dfrac{5}{2}\right)$.

d) Representemos la superficie de la que debemos calcular su área. {sabemos que $-2 \le x \le 2$*}*

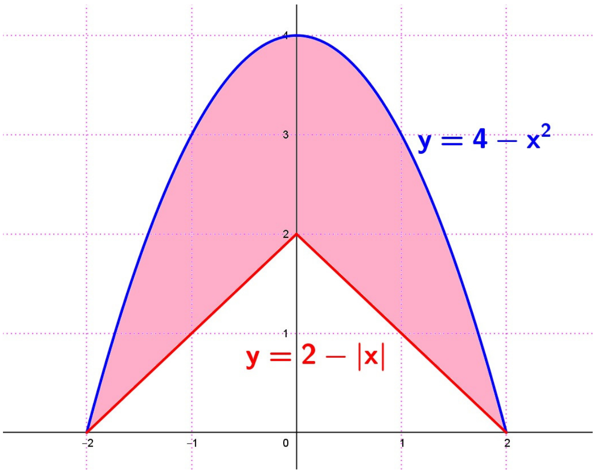
$y = 4 - x^2$ *la representamos en el apartado a)*

$$y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x, & x > 0 \\ 2 + x, & x \le 0 \end{cases}$$

x	$2-x$
0	2
2	0

x	$2+x$
0	2
-2	0

La representación es,



Esta figura es simétrica respecto del eje OY ya que,

1) $\begin{array}{l} g(x) = 4 - x^2 \\ g(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 \end{array} \quad \rightarrow \quad g(x) = g(-x)$

2) $\begin{array}{l} h(x) = 2 - |x| \\ h(-x) = 2 - |-x| = 2 - |x| \end{array} \quad \rightarrow \quad h(x) = h(-x)$

Calculamos:

$$\int_0^2 \left(\left(4 - x^2\right) - (2 - x) \right) dx = \int_0^2 \left(4 - x^2 - 2 + x \right) dx = \int_0^2 \left(2 - x^2 + x \right) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \left[2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right] = \frac{10}{3}$$

Y $\quad A_S = 2 \cdot \dfrac{10}{3} = \dfrac{20}{3}$ *u.a.*

El área de la superficie pedida es $\dfrac{20}{3}$ ***u.a.***

* * *

En caso de no observar la simetría de la figura, el cálculo sería,

$$A_1 = \int_{-0}^{0} \left(\left(4 - x^2\right) - (2 - x) \right) dx \qquad y \qquad A_2 = \int_0^2 \left(\left(4 - x^2\right) - (2 - x) \right) dx$$

Y $A_S = A_1 + A_2$.

PROBLEMA 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

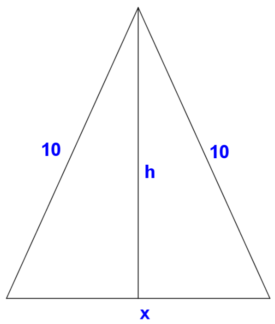
a) La expresión del área *A(x)* del triángulo, en función de la longitud *x* del tercer lado. *(4 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *A(x), 0 ≤ x ≤ 20.* *(4 puntos)*

c) La longitud *x* del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de este área. *(2 puntos)*

Solución:

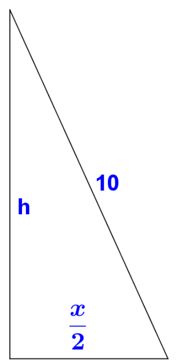
a) El triángulo isósceles del problema es:



El área de este triángulo será: $A = \dfrac{x \cdot h}{2}$

Obtenemos el valor de h en función de x, teniendo en cuenta que en un triángulo isósceles la altura sobre el lado desigual divide a este en dos partes iguales y forma con la base un ángulo recto.

Es decir:



Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$10^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2; \quad 100 = h^2 + \frac{x^2}{4}; \quad h^2 = 100 - \frac{x^2}{4} = \frac{400 - x^2}{4};$$

$$h = \sqrt{\frac{400 - x^2}{4}} = \frac{\sqrt{400 - x^2}}{2}$$

$$A = \frac{x \cdot \dfrac{\sqrt{400 - x^2}}{2}}{2} = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{4}$$

Por construcción el valor de x puede variar entre 0 y 20 (para x = 0 o x = 20 no habría triángulo)

Por tanto, $A(x) = \dfrac{x\sqrt{400 - x^2}}{4} \quad x \in (0,20)$

b) Monotonía de A(x).

$$A(x) = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{4} = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{400 - x^2}\right)$$

$$A'(x) = \frac{1}{4}\left[\sqrt{400 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}}\right] = \frac{1}{4}\left[\sqrt{400 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{400 - x^2}}\right] = \frac{1}{4}\,\frac{400 - x^2 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} =$$

$$= \frac{400 - 2x^2}{4\sqrt{400 - x^2}} = \frac{200 - x^2}{2\sqrt{400 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{200 - x^2}{2\sqrt{400 - x^2}} = 0; \quad 200 - x^2 = 0; \quad x^2 = 200; \quad x = \pm\sqrt{200} = \pm 10\sqrt{2} \cong \pm 14'14$$

Como el dominio de A(x) es el intervalo (0,20), estudiaremos el signo de A´(x) en los intervalos:

x	$A'(x)$	
10	$\dfrac{200-10^2}{2\sqrt{400-10^2}} = 2'886...$	$+$
15	$\dfrac{200-15^2}{2\sqrt{400-15^2}} = -0'944...$	$-$

Finalmente, ***A(x) es creciente en*** $(\,0\,,\ 10\sqrt{2}\,)$ ***y decreciente en*** $(\,10\sqrt{2}\,,\ 20\,)$**.**

c) ¿Longitud del lado x para que el área sea máxima?

Del estudio de la monotonía de $A(x)$ *deducimos que para* $x = 10\sqrt{2}$ *hay un máximo relativo. Y este máximo relativo es el absoluto porque la función a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.*

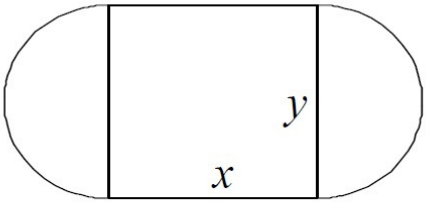
$$\text{Para} \quad x = 10\sqrt{2}, \quad A(x) = \frac{10\sqrt{2}\,\sqrt{400-\left(10\sqrt{2}\right)^2}}{4} = 50$$

Finalmente, ***el área del triángulo es máxima cuando el lado desigual del triángulo isósceles mide*** $10\sqrt{2}$ ***cm y el valor de esta área es de 50 cm***^{2}**.**

PROBLEMA 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide (4 + π) metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

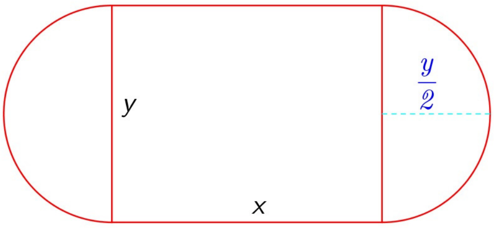
a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. *(5 puntos)*

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. *(5 puntos)*



Solución:

El campo es:



un rectángulo de dimensiones x e y y dos semicircunferencias de radio y/2. Su superficie es de (4 + π) m^2.

a) La longitud de las rayas a pintar será:

Perímetro del rectángulo: $2x + 2y$

Perímetro de una semicircunferencia: $\pi \; y/2$

Las dos semicircunferencias: $2\pi \; y/2 = \pi \; y$

Por tanto: $\mathbf{L = 2x + 2y + \pi y}$

Para poder expresar L en función de y, hay que buscar la relación entre x e y.
La relación la obtendremos a partir del valor de la superficie del campo.
El campo está formado por un rectángulo y dos semicírculos,
- rectángulo de lados x e y $\rightarrow$ $A_R = x\,y$
- dos semicírculos de radio y/2 $\rightarrow$ $A_{SC} = (1/2)\,\pi\,(y/2)^2 = (1/2)\,\pi\,(y^2/4) = \pi\, y^2/8$
el área de los dos semicírculos será: $2\,\pi\, y^2/8 = \pi\, y^2/4$

$$Superficie\ \ del\ campo = xy + \frac{\pi}{4}y^2. \qquad Luego \quad xy + \frac{\pi}{4}y^2 = 4 + \pi \qquad despejemos\ x$$

$$xy = 4 + \pi - \frac{\pi}{4}y^2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 + \pi - \frac{\pi}{4}y^2}{y}$$

$$Luego, \quad L = 2\left(\frac{4 + \pi - \frac{\pi}{4}y^2}{y}\right) + 2y + \pi\ y = \frac{8 + 2\pi - \frac{\pi}{2}y^2}{y} + 2y + \pi\ y = \frac{8}{y} + \frac{2\pi}{y} - \frac{\pi}{2}y + 2y + \pi\ y =$$

$$= \frac{8 + 2\pi}{y} + 2y + \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)y = \frac{8 + 2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2}y$$

Solución: $L = \dfrac{8 + 2\pi}{y} + 2y + \dfrac{\pi}{2}y$

b) ¿Dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima?

Debemos minimizar L. Como y es la longitud de un lado, por definición, $y \geq 0$.

$$L = \frac{8+2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2}y$$

$$L' = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$L' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} = 0; \quad 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2}; \quad \frac{4+\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2}; \quad y^2 = \frac{16+4\pi}{4+\pi};$$

$$y^2 = \frac{4(4+\pi)}{4+\pi}; \quad y^2 = 4; \quad y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Como $y \geq 0$, la solución obtenida es y = 2. Ahora podemos estudiar el signo de L´ en los intervalos (0,2) y $(2,+\infty)$ o calcular L´´. Calculemos L´´.

Reescribimos la expresión de L´,

$$L' = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} = -(8+2\pi)y^{-2} + 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$L'' = -(8+2\pi)(-2)y^{-3} = (16+4\pi)y^{-3} = \frac{16+4\pi}{y^3}$$

$$\text{Para } y = 2, \quad L'' = \frac{16+4\pi}{2^3} > 0$$

Por tanto en y = 2 hay un mínimo relativo (el único extremo obtenido). Este mínimo relativo es el absoluto de L porque a la izquierda de 2 L es decreciente y a la derecha creciente.

$$y = 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4+\pi-\frac{\pi}{4}2^2}{2} = \frac{4+\pi-\pi}{2} = 2$$

Solución: para que la pintura usada sea mínima las dimensiones del campo son la parte central un cuadrado de lado 2 m (x = y = 2) y las semicircunferencias laterales de radio 1 m.

Problema 6. Considerar la función $f(x)=e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M=(x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes coordenados, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

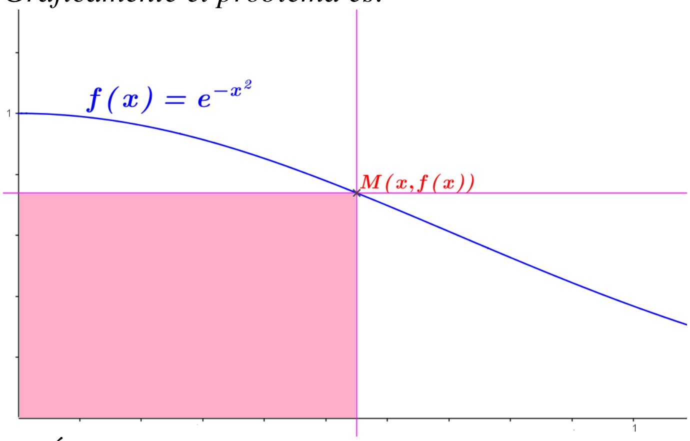
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Determinar el área del rectángulo en función de x. *(3 puntos)*

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. *(7 puntos)*

Solución:

Gráficamente el problema es:



a) Área del rectángulo en función de x

El rectángulo definido tiene de base x y de altura $f(x) = e^{-x^2}$

Su área es: $A_R(x) = x\,e^{-x^2} \quad x>0$

b) ¿M? / A_R sea máxima

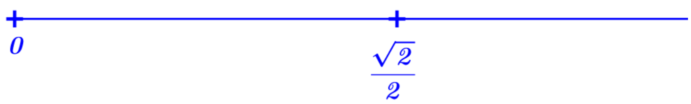
$$A_R(x) = x\,e^{-x^2}$$

$$A'_R(x) = e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

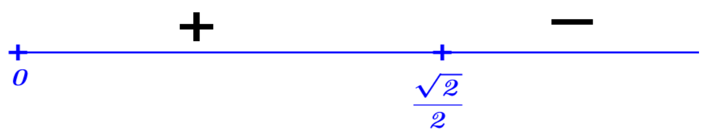
$$A'_R(x)=0 \quad\rightarrow\quad e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0 \quad \begin{cases} e^{-x^2}=0 \quad \text{sin } solución \\ \left(1-2x^2\right)=0 \rightarrow 2x^2=1 \rightarrow x^2=\dfrac{1}{2} \rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Como $x>0$, *solución* $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0'7071\ldots$

Debemos estudiar el signo de $A'_R(x)$ en los intervalos:



x	$A'_R(x)$
$0'5$	$e^{-0'5^2}\left(1-2\cdot 0'5^2\right)=0'38\ldots>0$
1	$e^{-1^2}\left(1-2\cdot 1^2\right)=-0'367\ldots<0$



El máximo relativo se alcanza en $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *que es el absoluto porque a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.*

Calculemos el punto M,

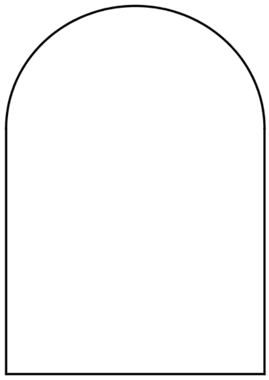
$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}} \quad \to \quad M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

Y el área máxima

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to \quad A_R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\cong 0\'4289\ u.a.$$

Solución: el punto M que proporciona mayor área es $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ***y esta área mide*** $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$ *u.a.*

Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

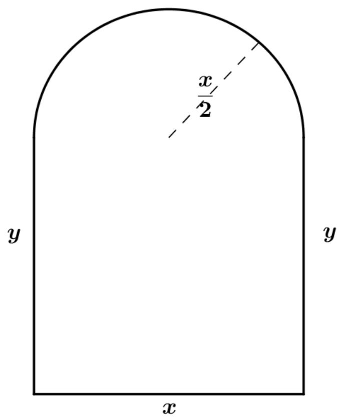
a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x. *(3 puntos)*

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. *(5 puntos)*

c) Calcular el valor de dicha área máxima. *(2 puntos)*

Solución:

La anchura de la ventana es x, la altura de la parte rectangular y, el radio del semicírculo superior es x/2.



El perímetro de la ventana es de 20m.

La longitud del semicírculo es: $\pi\frac{x}{2}$.

El perímetro de la ventana es: $x+2y+\frac{\pi}{2}x$

Como hay que obtener el área de la ventana en función de x, despejemos y:

$$x+2y+\frac{\pi}{2}x=20;\quad 2y=20-x-\frac{\pi}{2}x;\quad 2y=20-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)x$$

$$y=\frac{20-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)x}{2}=\frac{20-\left(\frac{2+\pi}{2}\right)x}{2}=10-\frac{2+\pi}{4}x$$

a) Área de la ventana,

Área de la ventana = Área del rectángulo (xy) + Área del semicírculo,

$$A(x)=x\left(10-\frac{2+\pi}{4}x\right)+\frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=10x-\frac{2+\pi}{4}x^2+\frac{\pi\frac{x^2}{4}}{2}=10x-\frac{2+\pi}{4}x^2+\frac{\pi}{8}x^2=10x-\left(\frac{2+\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)x^2=$$

$$=10x-\left(\frac{4+2\pi-\pi}{8}\right)x^2=10x-\frac{4+\pi}{8}x^2$$

Como x e y son longitudes, $x, y > 0$ (si alguna es 0 no hay ventana), por tanto $10-\frac{2+\pi}{4}x>0$,

$$10>\frac{2+\pi}{4}x,\quad 40>(2+\pi)x,\quad x<\frac{40}{2+\pi}\cong 7'7797$$

Finalmente, el área de la ventana en función de su anchura, x, es

$$A(x)=10x-\frac{4+\pi}{8}x^2 \qquad x\in\left(0,\frac{40}{2+\pi}\right)$$ ***x en metros.***

b) Dimensiones de la ventana que permita la máxima entrada de luz.

Buscamos el área máxima.

$$A'(x) = 10 - \frac{4+\pi}{8} 2x = 10 - \frac{4+\pi}{4} x$$

$$A'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 10 - \frac{4+\pi}{4} x = 0 \quad \rightarrow \quad 10 = \frac{4+\pi}{4} x \quad \rightarrow \quad x = \frac{40}{4+\pi} \cong 5'60009 \in \left(0, \frac{40}{2+\pi}\right)$$

Como $A'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo, es una recta de pendiente negativa, entonces a la izquierda de su raíz es positiva y a la derecha negativa.

En $x = \dfrac{40}{4+\pi}$ hay un máximo local y como A(x) a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente, este máximo local es el absoluto.

$$\text{Para} \quad x = \frac{40}{4+\pi}, \quad y = 10 - \frac{2+\pi}{4} \frac{40}{4+\pi} = 10 - \frac{10(2+\pi)}{4+\pi} = 10 - \frac{20+10\pi}{4+\pi} = \frac{40+10\pi-20-10\pi}{4+\pi} = \frac{20}{4+\pi}$$

Por tanto, ***las dimensiones de la ventana que permite la máxima entrada de luz son:***

$$\textbf{parte rectángular} \left\langle \begin{array}{l} \text{base} \quad \dfrac{40}{4+\pi} m. \\ \text{altura} \quad \dfrac{20}{4+\pi} m. \end{array} \right. \qquad \textbf{y semicírculo superior de radio } \frac{20}{4+\pi} m.$$

c) Valor del área máxima.

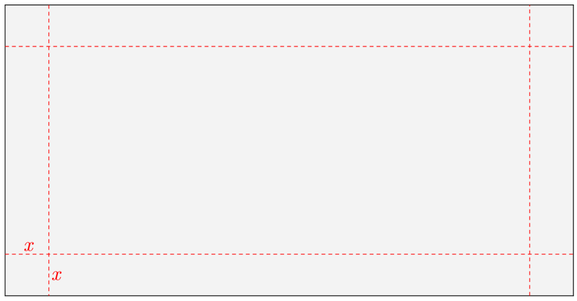
$$A(x) = 10x - \frac{4+\pi}{8} x^2$$

$$\text{para} \quad x = \frac{40}{4+\pi} \quad \rightarrow \quad A\left(\frac{40}{4+\pi}\right) = 10\frac{40}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8}\left(\frac{40}{4+\pi}\right)^2 = \frac{400}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8}\frac{1600}{(4+\pi)^2} = \frac{400}{4+\pi} - \frac{200}{4+\pi} =$$

$$= \frac{200}{4+\pi} \cong 28'005$$

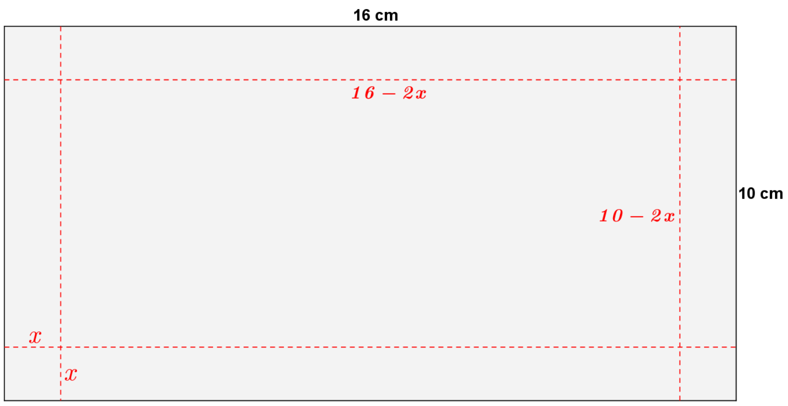
El área máxima mide: $\dfrac{200}{4+\pi} m^2 \cong$ ***28´005 m²***.

Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:



a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. *(8 puntos)*
b) Dicho volumen. *(2 puntos)*

Solución:
Completando las dimensiones de la hoja:



Las dimensiones, en cm, de la caja de cartón a construir son:
largo $16-2x$,
ancho $10-2x$ *y*
alto x

Por lo tanto el volumen de la caja será

$$V(x) = (16-2x)(10-2x)\,x$$

Y para que haya caja deberá cumplirse: $\begin{cases} x>0 \\ 16-2x>0 \;\rightarrow\; 16>2x \;\rightarrow\; 8>x \;\equiv\; x<8, \\ 10-2x>0 \;\rightarrow\; 10>2x \;\rightarrow\; 5>x \;\equiv\; x<5 \end{cases}$ *luego* $0<x<5$

$V(x) = (160-32x-20x+4x^2)\,x = (4x^2-52x+160)\,x = 4x^3-52x^2+160x$

Debemos obtener el máximo de la función $V(x) = 4x^3-52x^2+160x$ *siendo* $0<x<5$

$V'(x) = 12x^2-104x+160$

$$12x^2-104x+160=0; \quad x=\frac{-(-104)\pm\sqrt{(-104)^2-4\cdot 12\cdot 160}}{2\cdot 12}=\frac{104\pm 56}{24}=\begin{cases} x_1=\dfrac{104+56}{24}=\dfrac{20}{3}>5 \\ x_1=\dfrac{104-56}{24}=2\in(0,5) \end{cases}$$

Obtengamos el signo de $V'(x)$ *a la izquierda y derecha de* $x=2$.

$V'(x) = 12x^2-104x+160$

$x=1'5 \;\rightarrow\; V'(1'5)=12\,(1'5)^2-104\,(1'5)+160=31>0$ *creciente*

$x=2'5 \;\rightarrow\; V'(2'5)=12\,(2'5)^2-104\,(2'5)+160=-25<0$ *decreciente*

Por tanto, como $V(x)$ *es creciente a la izquierda de* 2 *y decreciente a su derecha el máximo relativo es absoluto.*

Para $x=2$, *largo* $16-2\cdot 2=12$, *ancho* $10-2\cdot 2=6$; $V(2)=4\cdot 2^3-52\cdot 2^2+160\cdot 2=144$

Solución:

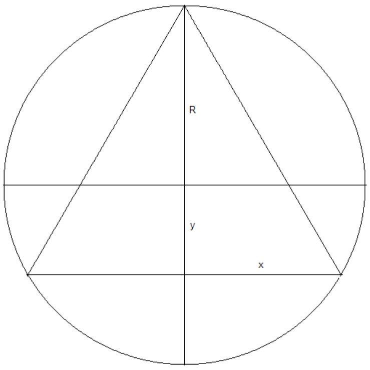
a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible son: 12 cm de largo, 6 cm de ancho y 2 cm de altura.

b) El volumen máximo es de 144 cm^3.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.1. Probar que el volumen de cualquier cono recto inscrito en una esfera es menor que el 30% del volumen de la misma *(3,3 puntos).*

Solución:
Al inscribir un cono en una esfera, los volúmenes de ambos cuerpos son, llamando R al radio de la esfera,



$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\, R^3$$
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\, x^2 (y+R)$$
$$\textit{siendo}\quad x^2 + y^2 = R^2, \quad x, y > 0$$

despejando x^2, expresamos el volumen del cono en función de y, $x^2 = R^2 - y^2$, luego

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\,(R^2 - y^2)\,(y+R) = \frac{1}{3}\pi\left(R^3 + R^2 y - R\,y^2 - y^3\right)$$

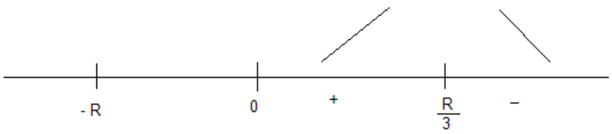
Busquemos el mayor cono recto que podemos inscribir en la esfera de radio R,

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2R\,y - 3y^2\right)$$

$$V' = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2R\,y - 3y^2\right) = 0 \;\rightarrow\; R^2 - 2R\,y - 3y^2 = 0$$

$$3y^2 + 2R\,y - R^2 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{-2R \pm \sqrt{(2R)^2 - 4\,.\,3\,(-R^2)}}{6} = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 + 12R^2}}{6} = \frac{-2R \pm 4R}{6} = \left\langle \begin{array}{l} y_1 = \frac{2R}{6} = \frac{R}{3} \\ y_2 = \frac{-6R}{6} = -R \end{array}\right.$$

Puesto que los valores de y deben ser positivos, estudiamos el signo de V´en R^+,
como V´ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de y^2 negativo, obtenemos



Para y = R/3 V alcanza un máximo relativo; por ser V creciente en el intervalo (0, R/3) y decreciente en (R/3,+∞) este máximo es absoluto. Es decir que el mayor cono recto que podemos inscribir en una esfera de radio R es aquel cuyo volumen es:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2\right)\left(\frac{R}{3} + R\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right)\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{9R^2 - R^2}{9}\right)\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{8R^2}{9}\frac{4R}{3} = \frac{32}{81}\pi\,R^3$$

Comprobemos que con el mayor cono recto inscrito en la esfera se cumple la condición del problema,

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\,R^3$$
$$V_{cono} = \frac{32}{81}\pi\,R^3$$
$$¿V_{cono} < \frac{30}{100}V_{esfera}\,?$$
$$\frac{32}{81} < \frac{30}{100}\frac{4}{3} \;\rightarrow\; \frac{32}{81} < \frac{10}{25} \;\rightarrow\; 0\text{´}395 < 0\text{´}4 \quad \textit{Sí}$$

Como el volumen del mayor cono recto que podemos inscribir en la esfera cumple la condición del problema, cualquier cono recto inscrito en una esfera la cumple.

EJERCICIO A

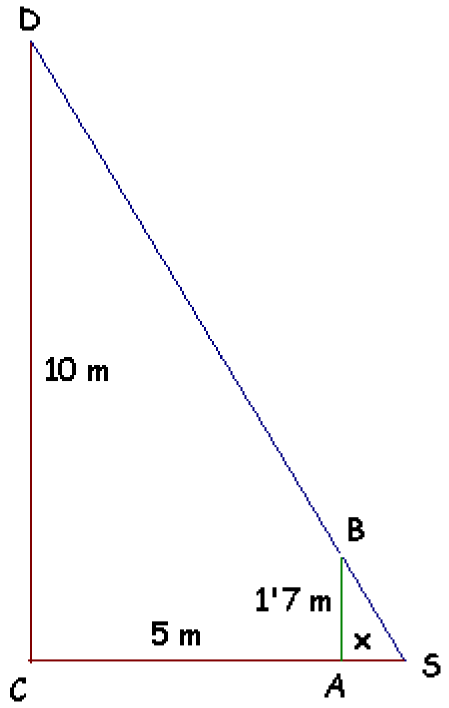
PROBLEMA 4. Una persona camina a la velocidad constante de 3m/s alejándose horizontalmente en línea recta desde la base de un farol cuyo foco luminoso está a 10 m de altura. Sabiendo que la persona mide 1,70 m, calcular:

a) La longitud de la sombra cuando la persona está a 5 m de la base del farol *(2 puntos)*.

b) La velocidad de crecimiento de la sombra a los t segundos de comenzar a caminar *(1,3 puntos)*.

Solución:

a) El gráfico correspondiente al problema es (los segmentos CD y AB representan, respectivamente, al farol y a la persona):



Podemos resolver este problema de dos formas:

A1) Por triángulos semejantes.

Los triángulos SAB y SCD son triángulos rectángulos con ángulo agudo común en el vértice S, por lo que son semejantes.

Podemos aplicar el teorema de Thales,

$$\frac{x}{x+5}=\frac{1'7}{10} \quad\rightarrow\quad 10x = 1'7x + 8'5$$

$$8'3x = 8'5 \quad\rightarrow\quad x=\frac{8'5}{8'3}=1'024$$

La longitud de la sombra es de 1´024 m.

A2) Por geometría analítica.

Consideramos C el origen de coordenadas.

Obtengamos la ecuación de la recta r, pasa por D y B .

Esta recta pasa por los puntos D(0,10) y B(5,1´7); su vector director será v(-5, 8´3). La ecuación será:

$$\frac{x-0}{-5}=\frac{y-10}{8'3} \quad\rightarrow\quad y=\frac{-8'3x}{5}+10$$

Calculamos la longitud de la sombra buscando el punto de corte de la recta r con el eje de abcisas, S.

$$y=0 \quad\rightarrow\quad 0=\frac{-8'3x}{5}+10 \quad\rightarrow\quad 0=-8'3x+50$$

$$x=\frac{50}{8'3}$$

El punto S es $\left(\frac{50}{8'3},0\right)$

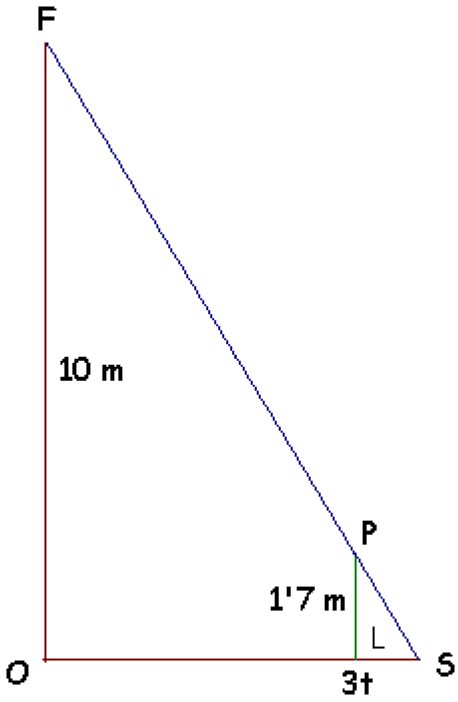
Como el punto A tiene de coordenadas (5,0), la longitud de la sombra, x, será:

$$\frac{50}{8'3}-5=\frac{50-41'5}{8'3}=\frac{8'5}{8'3}=1'024 \; m.$$

b)

Calculando la longitud de la sombra en función del tiempo, la derivada de esta longitud nos dará la velocidad de crecimiento de la sombra.

Al cabo de t segundos la persona, como camina a una velocidad de 3 m/s, habrá recorrido 3t m. Gráficamente tendremos la siguiente situación,



Calcularemos la longitud de la sombra al cabo de t segundos, L, obteniendo la ecuación de la recta que pasa por los puntos F y P, r. Sus coordenadas son:

F(0 , 10) y P(3t , 1´7)

el vector director de la recta buscada: (3t , – 8´3).

La ecuación será:

$$\frac{x-0}{3t}=\frac{y-10}{-8'3} \quad\rightarrow\quad y=\frac{-8'3x}{3t}+10$$

Calculamos la longitud de la sombra buscando el punto de corte de la recta r con el eje de abcisas, S.

$$y=0 \quad\rightarrow\quad 0=\frac{-8'3x}{3t}+10 \quad\rightarrow\quad 0=-8'3x+30t$$

$$x=\frac{30t}{8'3}$$

El punto S es $\left(\frac{30t}{8'3}\,,\,0\right)$

La longitud de la sombra será:

$$L=\frac{30t}{8'3}-3t=\frac{30t-24'9t}{8'3}=\frac{5'1t}{8'3}$$

La velocidad de crecimiento de la sombra será:

$$L'=\frac{5'1}{8'3} \quad \textit{es decir} \quad \frac{5'1}{8'3}\,m/s=0'614\,m/s$$

PROBLEMA B.3. Dada la función polinómica $f(x) = 4 - x^2$, se pide obtener razonadamente:

a) La gráfica de la curva $y = 4 - x^2$. *(2 puntos)*

b) El punto P de esa curva cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x + y = 0$. *(3 puntos)*

c) Las rectas que pasan por el punto $(-2, 1)$ y son tangentes a la curva $y = 4 - x^2$, obteniendo los puntos de tangencia. *(5 puntos)*

Solución:

a) Gráfica de $y = 4 - x^2$

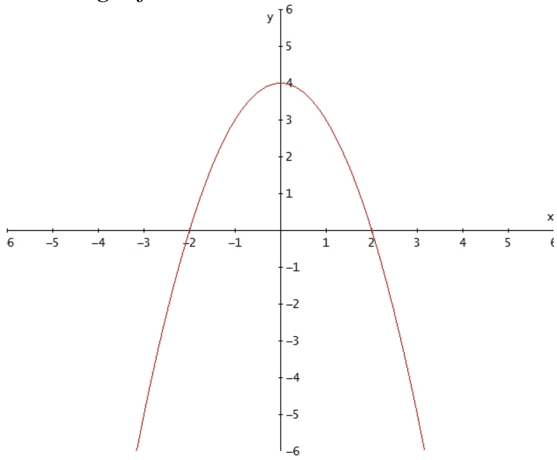
Esta función es un polinomio de segundo grado, gráficamente es una parábola. Para representarla basta con calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su vértice.

Corte con el eje OX $\rightarrow$ $x = 0,\ y = 4 - 0^2 = 4$ $\rightarrow$ $(0, 4)$

Corte con el eje OY $\rightarrow$ $y = 0,\ 0 = 4 - x^2$ $\rightarrow$ $x^2 = 4$ $\rightarrow$ $x = \pm 2$ $\rightarrow$ $(2, 0)$ *y* $(-2, 0)$

Vértice $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2(-1)} = 0 \rightarrow (0, 4)$

La representación gráfica de esta curva será:



Otra forma de obtener la gráfica de esta curva sería mediante su estudio. Veámoslo,

$y = 4 - x^2$

Es una función polinómica por lo tanto su dominio es el conjunto de los números reales y no tiene asíntotas. Las ramas las estudiaremos si es necesario.

Dom $y = R$

Puntos de corte,

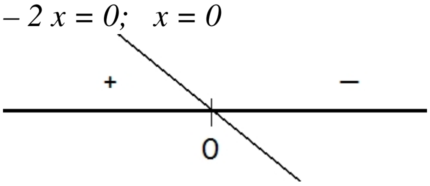
Corte con el eje OX $\rightarrow$ $x = 0,\ y = 4 - 0^2 = 4$ $\rightarrow$ $(0, 4)$

Corte con el eje OY $\rightarrow$ $y = 0,\ 0 = 4 - x^2$ $\rightarrow$ $x^2 = 4$ $\rightarrow$ $x = \pm 2$ $\rightarrow$ $(2, 0)$ *y* $(-2, 0)$

Monotonía,

$y' = -2x;$

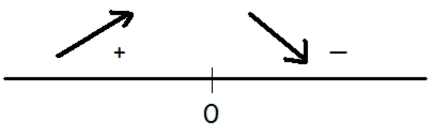
$-2x = 0;\quad x = 0$



Creciente en $(-\infty, 0)$ *y decreciente en* $(0, +\infty)$

Máximos-Mínimos

Del estudio anterior obtenemos que,



Luego en el punto $(0, 4)$ *hay un máximo*

La representación gráfica de esta curva será la realizada anteriormente.

b) Buscamos un punto P ϵ { $y = 4 - x^2$ } / { recta tangente a y en P } $\perp$ { $x + y = 0$ }

Sea P (a , b), la recta tangente a la curva en este punto tiene por pendiente $y'_{x=a}$

$y' = -2x \rightarrow y'_{x=a} = -2a$

La pendiente de la recta $x + y = 0$ { $y = -x$ } es -1

Como las dos rectas deben ser perpendiculares, el producto de sus pendientes será -1, luego

$(-2a) \cdot (-1) = -1;\quad 2a = -1;\quad a = -1/2$

Calculemos la ordenada del punto P,

$$a = \frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad b = 4 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Por lo tanto el punto P buscado será el $\left(\frac{-1}{2}, \frac{15}{4}\right)$

c) Rectas tangentes a la curva { $y = 4 - x^2$ } que pasan por (-2 , 1)

Sea (a , $4 - a^2$) el punto de tangencia entre la recta y la parábola.

Como la recta debe pasar por los puntos (-2 , 1) y (a , $4 - a^2$), la pendiente de esta recta será:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - a^2 - 1}{a - (-2)} = \frac{3 - a^2}{a + 2}$$

Como la recta debe ser tangente a la parábola en el punto (a , $4 - a^2$), la pendiente de esta recta debe ser:

$y'_{x=a}$, *como* $y' = -2x \rightarrow y'_{x=a} = -2a$

Por lo tanto:

$$\frac{3 - a^2}{a + 2} = -2a \quad \rightarrow \quad 3 - a^2 = -2a^2 - 4a \quad \rightarrow \quad a^2 + 4a + 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación,

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{-4+2}{2} = -1 \\ \dfrac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$$

Los puntos de tangencia, (a , $4 - a^2$), serán:

para $a = -1 \rightarrow (-1, 4 - (-1)^2) = (-1, 3)$

para $a = -3 \rightarrow (-1, 4 - (-3)^2) = (-3, -5)$

Las rectas, que pasan por el punto (-2 , 1), serán:

para $a = -1 \rightarrow m = -2(-1) = 2$	*para* $a = -3 \rightarrow m = -2(-3) = 6$
$y - 1 = 2(x - (-2))$	$y - 1 = 6(x - (-2))$
$y - 1 = 2(x + 2)$	$y - 1 = 6(x + 2)$
$y - 1 = 2x + 4$	$y - 1 = 6x + 12$
$y = 2x + 5$	$y = 6x + 13$

Solución:

recta $y = 2x + 5$ *y punto de tangencia* (-1 , 3)

recta $y = 6x + 13$ *y punto de tangencia* (-3 , -5)

Matemáticas II Junio 2013

OPCIÓN B

PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x) = sen\ x$, para cualquier valor real, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razona-miento utilizado**:

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abcisa $x = \pi/6$. *(4 puntos)*

b) La ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto de abcisa $x = \pi/3$. Se recuerda que la recta normal a una curva en un punto P es la recta que pasa por ese punto y es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto P. *(3 puntos)*

c) El ángulo formado por las rectas determinadas en los apartados a) y b). *(3 puntos)*

Solución:

a) Recta tangente a $y = sen\ x$ *en* $x = \pi/6$

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad y = sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \text{punto de la recta} \quad \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

$$y' = cos\ x \quad \rightarrow \quad m = y'_{x=\frac{\pi}{6}} = cos\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La ecuación de la recta tangente pedida será: $y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}}$$

b) Recta normal a $y = sen\ x$ *en* $x = \pi/3$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \rightarrow \quad y = sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \text{punto de la recta} \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Pendiente de la recta tangente, $y' = cos\ x \quad \rightarrow \quad m_{r.t.} = y'_{x=\frac{\pi}{3}} = cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Como la recta tangente y la recta normal son perpendiculares, se cumple $m_{r.t.}\ m_{r.n.} = -1$*, luego*

$$\frac{1}{2}\,m_{r.n.} = -1 \quad \rightarrow \quad m_{r.n.} = -2$$

La ecuación de la recta normal pedida será: $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\boxed{y = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c) En el apartado a) hemos obtenido la recta $r : y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \vec{v_r} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

En el apartado b) hemos obtenido la recta $s : y = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \vec{v_s} = (-2\,,\,1)$

Llamando α *al ángulo que forman las rectas* r *y* s,

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|\left(1\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1,-2)\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{\left|\,1-\sqrt{3}\,\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}\,\sqrt{1+4}} = \left(como\ \sqrt{3}>1\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{\frac{7}{4}}\,\sqrt{5}} = 0{,}247478...$$

Y, finalmente $\alpha = 75'6717^{o}$

PROBLEMA B.3. Un pueblo está situado en el punto A (0, 4) de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva

$y = \dfrac{x^2}{4}$, siendo $-6 \le x \le 6$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia entre un punto P (x, y) del río y el pueblo en función de la abcisa x de P. *(2 puntos)*

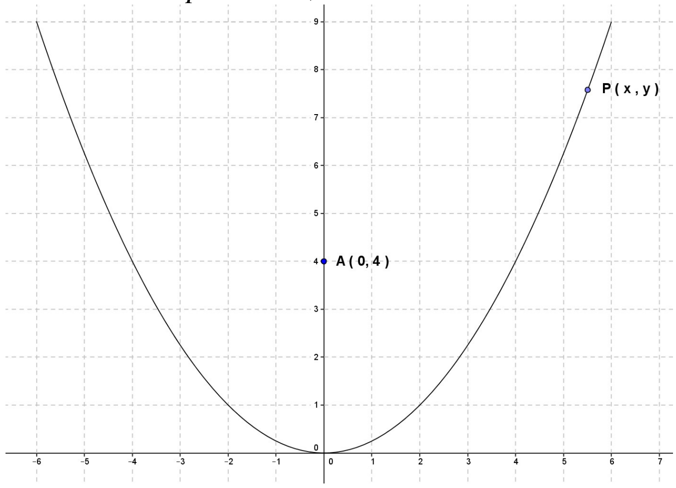
b) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo. *(4 puntos)*

c) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo. *(4 puntos)*

Solución:

Representemos gráficamente los datos del problema,

x	$y = \frac{x^2}{4}$
-6	9
-4	4
0	0
4	4
6	9



a) ¿Distancia entre P y A?

$$d = d(P, A) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = [\text{como } P \text{ es de la curva } y = \frac{x^2}{4},\ ] = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{16} - 8\,\frac{x^2}{4} + 16} = \sqrt{\frac{x^4}{16} + x^2 - 2x^2 + 16} = \sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}$$

Solución: $d(P, A) = \sqrt{\dfrac{x^4}{16} - x^2 + 16} \qquad x \in [-6, 6]$

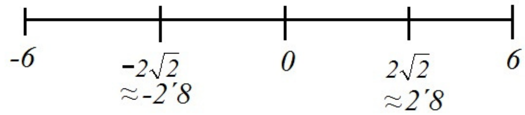
b) Debemos buscar el mínimo de la función d del apartado anterior.

$$d' = \frac{\frac{4x^3}{16} - 2x}{2\sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}} = \frac{\frac{x^3}{4} - 2x}{2\sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}}$$

Estudiemos el signo de d´. En d´ el radicando del denominador lo obtuvimos como suma de dos términos al cuadrado, por tanto es positivo. Luego el denominador es positivo y el signo de d´ depende del numerador. Estudiamos el signo del numerador,

$$\frac{x^3}{4} - 2x = 0 \ \rightarrow\ x^3 - 8x = 0 \ \rightarrow\ x(x^2 - 8) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 8 = 0 \ \rightarrow\ x^2 = 8 \ \rightarrow\ x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

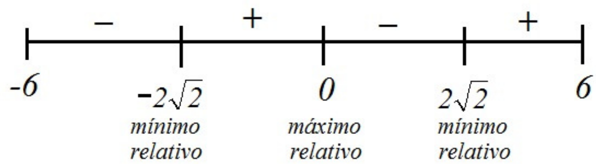
Tenemos que estudiar el signo de d' *en los intervalos:*



Como el numerador es un polinomio de tercer grado con tres raíces reales, el signo del polinomio alterna en los cuatro intervalos; sólo necesitamos calcular el signo de d' *en uno de los intervalos.*

$$x=1 \quad \rightarrow \quad d'=\frac{\frac{1^3}{4}-2.1}{2\sqrt{\frac{1^4}{16}-1^2+16}}=\frac{\frac{1}{4}-2}{2\sqrt{\frac{1}{16}+15}}=\frac{\frac{-7}{4}}{2\sqrt{\frac{1}{16}+15}}<0$$

Por tanto:



Como a la izquierda de los mínimos la función es decreciente y a la derecha creciente, uno de ellos o ambos serán los mínimos absolutos.
Calculemos el valor de d *en los dos mínimos relativos obtenidos:*

$$x=-2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad d=\sqrt{\frac{\left(-2\sqrt{2}\right)^4}{16}-\left(-2\sqrt{2}\right)^2+16}=\sqrt{\frac{16\,.\,4}{16}-4\,.\,2+16}=\sqrt{4-8+16}=\sqrt{12}$$

$$x=2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad d=\sqrt{\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^4}{16}-\left(2\sqrt{2}\right)^2+16}=\sqrt{\frac{16\,.\,4}{16}-4\,.\,2+16}=\sqrt{4-8+16}=\sqrt{12}$$

Como en los dos mínimos relativos la función vale lo mismo, ambos son los absolutos.

Obtengamos los puntos del río,

$$x=-2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad y=\frac{\left(-2\sqrt{2}\right)^2}{4}=\frac{4\,.\,2}{4}=2$$

$$x=2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad y=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{4}=\frac{4\,.\,2}{4}=2$$

Solución: los puntos del río situados a distancia mínima del pueblo son $\left(-2\sqrt{2}\,,\,2\right)$ *y* $\left(2\sqrt{2}\,,\,2\right)$**.**

c) Del estudio realizado en el apartado anterior, el máximo relativo de la distancia se alcanza en $x = 0$*. Pero como estamos trabajando con una función definida en un intervalo, el máximo absoluto se puede alcanzar en los extremos del intervalo o en el máximo relativo.*
Veamos,

$$x=0 \quad \rightarrow \quad d=\sqrt{\frac{0^4}{16}-0^2+16}=\sqrt{16}=4$$

$$x=-6 \quad \rightarrow \quad d=\sqrt{\frac{(-6)^4}{16}-(-6)^2+16}=\sqrt{\frac{1296}{16}-36+16}=\sqrt{61}=7'8102$$

$$x=6 \quad \rightarrow \quad d=\sqrt{\frac{6^4}{16}-6^2+16}=\sqrt{\frac{1296}{16}-36+16}=\sqrt{61}=7'8102$$

Es decir, ***los puntos del río situados a distancia máxima del pueblo son (– 6 , 9) y (6 , 9).***

PROBLEMA B.3. Cada día, una planta productora de acero vende x toneladas de acero de baja calidad e y toneladas de acero de alta calidad. Por restricciones del sistema de producción debe suceder que $y = \dfrac{23-5x}{10-x}$, siendo $0 < x < \dfrac{23}{5}$.

El precio de una tonelada de acero de alta calidad es de 900 euros y el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 300 euros.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los ingresos obtenidos en un día en función de x. *(3 puntos)*

b) Cuántas toneladas de cada tipo de acero se deben vender en un día para que los ingresos obtenidos ese día sean máximos. *(5 puntos)*

c) El ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día. *(2 puntos)*

Solución:

Datos: x *toneladas de acero de baja calidad a 300€/T.*

y *toneladas de acero de alta calidad a 900€/T.*

$$y = \frac{23-5x}{10-x},\ 0 < x < \frac{23}{5} = 4'6.$$

a) ¿Ingresos en función de x?

$$I(x) = 300x + 900\,\frac{23-5x}{10-x} \qquad 0 < x < \frac{23}{5}$$

b) ¿Ingresos máximo?

Tenemos que estudiar $I'(x)$

$$I'(x) = 300 + 900\,\frac{-5(10-x)-(23-5x)(-1)}{(10-x)^2} = 300 + 900\,\frac{-50+5x+23-5x}{(10-x)^2} = 300 + 900\,\frac{-27}{(10-x)^2} =$$

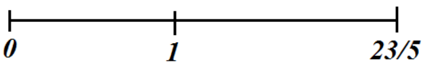
$$= 300 - \frac{24300}{(10x)^2}$$

Estudiemos el signo de I´,

$$300 - \frac{24300}{(10-x)^2} = 0 \ \rightarrow\ 300 = \frac{24300}{(10-x)^2} \ \rightarrow\ (10-x)^2 = \frac{24300}{300} \ \rightarrow\ (10-x)^2 = 81 \ \rightarrow$$

$$10-x = \pm\sqrt{81} \ \rightarrow\ 10-x = \pm 9 \ \begin{cases} 10-x = 9 \ \rightarrow\ x = 1 \\ 10-x = -9 \ \rightarrow\ x = 19,\ 19 > \dfrac{23}{5} \quad 19 \notin Dom\, I(x) \end{cases}$$

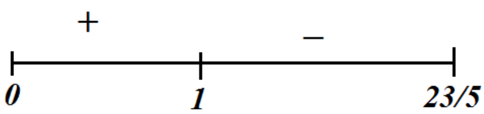
Luego, debemos estudiar el signo de I´ en los siguientes intervalos:



Para $x = 0'5$ $\quad I'(0'5) = 300 - \dfrac{24300}{(10-0'5)^2} = +$

Para $x = 2$ $\quad I'(2) = 300 - \dfrac{24300}{(10-2)^2} = -$

entonces:



Luego, I(x) es creciente en (0 , 1) y decreciente en $\left(1, \dfrac{23}{5}\right)$. *En x = 1 hay un máximo relativo. Ahora bien, a la izquierda de x = 1 la función es creciente y a la derecha decreciente entonces en x = 1 hay un máximo absoluto.*

Para $x = 1$, $y = \dfrac{23-5\,.\,1}{10-1} = \dfrac{18}{9} = 2$

Finalmente, ***para que los ingresos de ese día sean máximos se debe vender 1 tonelada de acero de baja calidad y 2 toneladas de acero de alta calidad.***

c) ¿Ingreso máximo?

Del apartado anterior, el ingreso máximo se obtiene para $x= 1$ *e* $y =2$*, por tanto*

$I(1) = 300\,.\,1 + 900\,.\,2 = 2100$

Solución: el ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día es de 2100€.

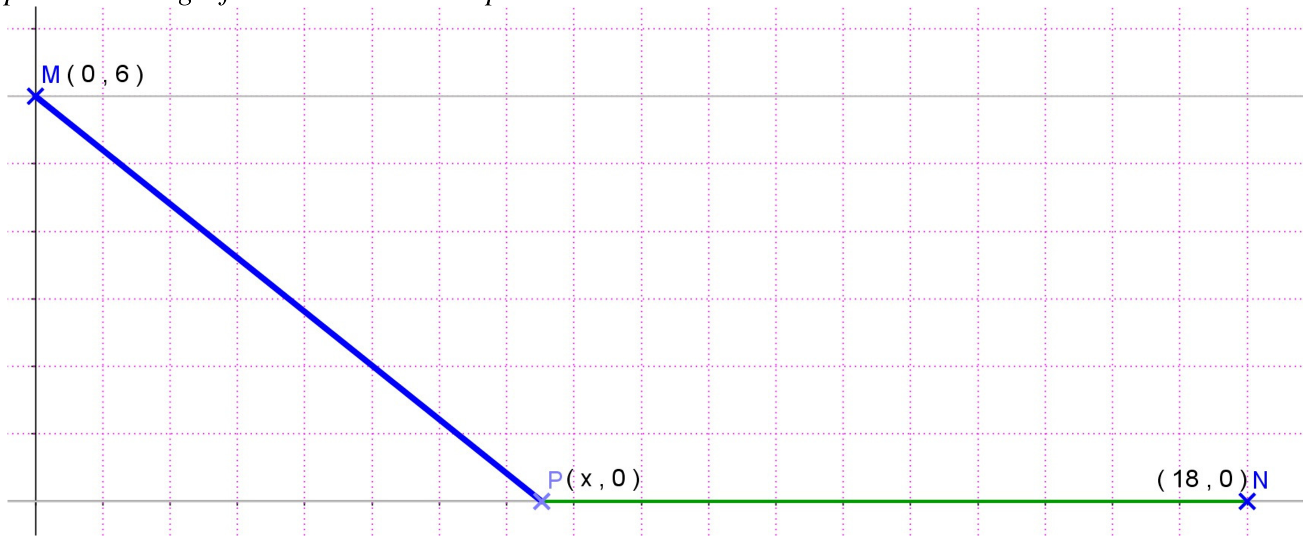
PROBLEMA A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable *MP* tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable *PN* es de 5 €/m. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El costo total C de los dos cables en función de la abcisa x del punto P, cuando $0 \le x \le 18$. *(3 puntos)*

b) El valor de x, con $0 \le x \le 18$, para el que el costo total C es mínimo. *(4 puntos)*

c) El valor de dicho costo total mínimo. *(3 puntos)*

Solución:
La representación gráfica de los datos del problema es:



a) Coste de los dos cables en función del valor x del punto P.
Sabemos que $0 \le x \le 18$,

$$d(M,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2+36}$$

$$d(P,N) = 18 - x$$

Por lo que el coste C de los cables será: $C = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x) \qquad 0 \le x \le 18$

b) Mínimo de C.

$$C' = 10\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} - 5 = \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5$$

$$C' = 0 \;\rightarrow\; \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5 = 0 \;\rightarrow\; 10x - 5\sqrt{x^2+36} = 0 \;\rightarrow\; 10x = 5\sqrt{x^2+36}$$

$$(10x)^2 = \left(5\sqrt{x^2+36}\right)^2 \;\rightarrow\; 100\,x^2 = 25(x^2+36) \;\rightarrow\; 100\,x^2 = 25\,x^2 + 900$$

$$100\,x^2 - 25\,x^2 = 900 \;\rightarrow\; 75\,x^2 = 900 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{900}{75} \;\rightarrow\; x^2 = 12 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{12}$$

Pero como $0 \le x \le 18$, *entonces* $x = \sqrt{12} \approx 3'4641$

Para determinar si es mínimo calculemos los valores de C' *a la izquierda y derecha de* $\sqrt{12}$

$$x = 1, \quad C' = \frac{10\,.\,1}{\sqrt{1^2 + 36}} - 5 = \frac{10}{\sqrt{37}} - 5 = -3'3560 < 0$$

$$x = 5, \quad C' = \frac{10\,.\,5}{\sqrt{5^2 + 36}} - 5 = \frac{50}{\sqrt{61}} - 5 = 1'4018 > 0$$

Hemos obtenido que a la izquierda de $\sqrt{12}$ *C´ es negativa y a la derecha positiva, por lo que para x =* $\sqrt{12}$ *la función C tiene un mínimo relativo que además es el absoluto porque C es decreciente a la izquierda de* $\sqrt{12}$ *y creciente a la derecha.*

Por tanto, ***el coste total C es mínimo para x =*** $\sqrt{12}$ ***m ≈3´4641 m.***

c) El valor del coste total mínimo será:

$$C = 10\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2 + 36} + 5\left(18 - \sqrt{12}\right) = 10\sqrt{12 + 36} + 5\left(18 - \sqrt{12}\right) = 141'9615$$

Por lo que, ***el coste total mínimo es de 141´96 €.***

PROBLEMA B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud *x*, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud 100 – *x*, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

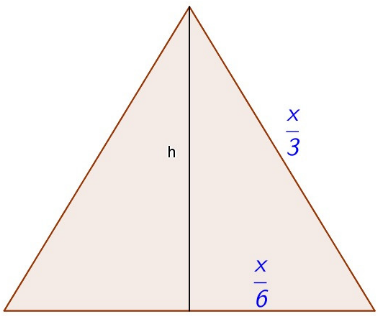
a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \le x \le 100$. *(4 puntos)*

b) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor. *(3 puntos)*

c) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido. *(3 puntos)*

Solución:
Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes.
Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero [de lado $x/3$]
y con la otra, de longitud 100 – x, se construye un cuadrado [de lado $(100-x)/4$]

a) Área del triángulo equilátero,



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 + h^2 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{36} + h^2 \;\rightarrow\; h^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} \;\rightarrow$$

$$h^2 = \frac{4x^2 - x^2}{36} \;\rightarrow\; h^2 = \frac{3x^2}{36} \;\rightarrow\; h = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

(como h es una longitud, h > 0)

Luego, $A_T = \dfrac{\frac{x}{3}\,\frac{x\sqrt{3}}{6}}{2} = \dfrac{\frac{x^2\sqrt{3}}{18}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Área del cuadrado,

$$A_C = \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = \frac{(100-x)^2}{16}$$

Finalmente, la suma de las áreas es $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \dfrac{(100-x)^2}{16} \qquad 0 \le x \le 100$

b) Mínimo de f(x).

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot 2x + \frac{1}{16}\cdot 2(100-x)\cdot(-1) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{1}{8}(100-x) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{100}{8} + \frac{x}{8} = \frac{4\sqrt{3}\,x - 900 + 9x}{72} =$$

$$= \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x - 900}{72}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x - 900}{72} = 0 \;\rightarrow\; \left(4\sqrt{3}+9\right)x - 900 = 0 \;\rightarrow\; \left(4\sqrt{3}+9\right)x = 900$$

$$x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9} \cong 56{\acute{}}5035 \quad \left(\in [0, 100]\right)$$

Como $f'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo, es una recta de pendiente positiva, entonces a la izquierda de su raíz es negativa y a la derecha positiva.
En x = 56´5035 hay un mínimo local y como f(x) a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente, este mínimo local es el absoluto.

La función f(x) alcanza su mínimo para $x = \dfrac{900}{4\sqrt{3}+9}\,cm \cong 56{,}5035\ cm$

c) Máximo de f(x):

Como f(x) está definida en un intervalo cerrado, la función alcanza su máximo en el interior del intervalo o en los extremos. En el interior, como hemos obtenido en el apartado anterior, alcanza el mínimo.

Calculemos el valor de f(x) en los extremos del intervalo (para x = 0 y x= 100)

$$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot 0^2 + \frac{(100-0)^2}{16} = \frac{100^2}{16} = 625$$

$$f(100) = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot 100^2 + \frac{(100-100)^2}{16} = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot 100^2 = 481$$

El máximo de f(x) se alcanza para x = 0*, en este caso* ***todo el alambre se usa para construir un cuadrado de 25 cm de lado****.*

PROBLEMA B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0,0) y (250,0), respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

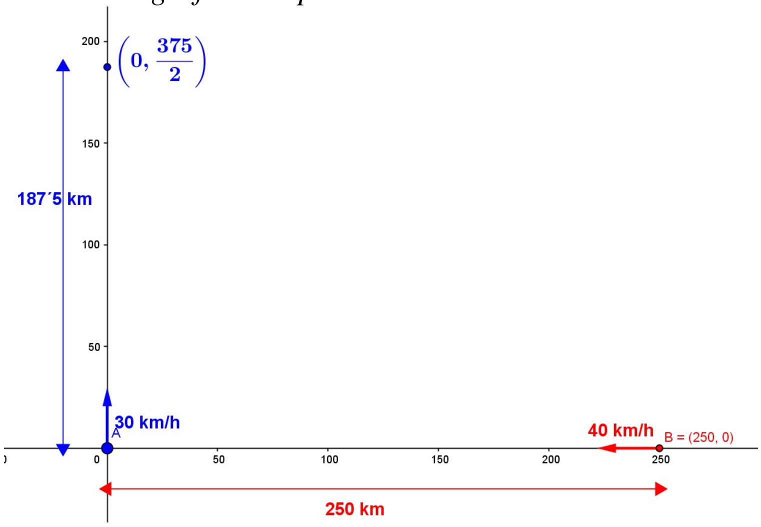
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia *f(t)* entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo *t* en horas desde que comenzaron a desplazarse. *(2 puntos)*

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f* a lo largo del trayecto. *(4 puntos)*

c) Los valores de *t* para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. *(4 puntos)*

Solución:
La representación gráfica del problema es:



La indicación "siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1)" significa que en ambos ejes la unidad es 1 km.
La distancia que debe recorrer el móvil A es de 187´5 km, y el móvil B 250 km.

a) Distancia entre los móviles en función del tiempo t.

Al cabo de t horas el móvil A habrá recorrido 30 t Km y su posición será el punto (0 , 30 t)

Al cabo de t horas el móvil B habrá recorrido 40 t Km y su posición será el punto (250 – 40 t , 0)

Por tanto, $f(t) = d(A, B) = \sqrt{(250-40t-0)^2+(0-30t)^2} = \sqrt{62500-20000t+1600t^2+900t^2} =$

$= \sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2}$

Luego $f(t) = \sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2}$.

b) A llega a su posición final cuando $30t = \frac{375}{2} \rightarrow 60t = 375 \rightarrow t = \frac{375}{60} = 6´25$

B llega a su posición final cuando $40t = 250 \rightarrow t = \frac{250}{40} = 6´25$

Luego, ***ambos móviles tardan 6´25 h en desplazarse desde su posición inicial a la final.***

Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(t) a lo largo del trayecto, estudiamos la monotonía de f(t).

De lo calculado en el apartado a) y lo obtenido en este apartado, sabemos que:

$f(t)=\sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2} \qquad 0\le t\le 6'25 \qquad \{t \text{ horas} \quad y \quad f(t)\ Km\}$

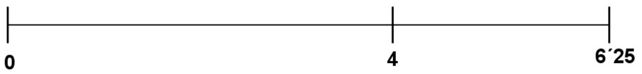
Estudiemos el signo de f´(t)

$$f'(t)=\frac{-20000+5000\,t}{2\sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2}}$$

$$\frac{-20000+5000\,t}{2\sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2}}=0 \quad\to\quad -20000+5000\,t=0 \quad\to\quad 5000\,t=20000$$

$$\to\quad t=\frac{20000}{5000}=4$$

Debemos estudiar el signo de f´(t) en los intervalos:



t	$f'(t)$
1	$\dfrac{-20000+5000\cdot 1}{2\sqrt{62500-20000\cdot 1+2500\cdot 1^2}}=-$
5	$\dfrac{-20000+5000\cdot 5}{2\sqrt{62500-20000\cdot 5+2500\cdot 5^2}}=+$

Finalmente, ***f(t) es decreciente en (0 , 4) y creciente en (4 , 6´25).***

c) Máximos y mínimos de f(t)

Del estudio de la monotonía de f(t) deducimos que para t = 4 hay un mínimo relativo. Y este mínimo relativo es el absoluto porque la función a su izquierda es decreciente y a su derecha creciente.

El máximo de f(t) se alcanzará en alguno de los extremos del intervalo [0 , 6´25].

Calculemos el valor de f(t) en estos extremos,

$$t=0,\quad f(t)=\sqrt{62500-20000\cdot 0+2500\cdot 0^2}=250$$

$$t=5,\quad f(t)=\sqrt{62500-20000\cdot 5+2500\cdot 5^2}=187'5$$

Luego, el máximo se alcanza en t =0.

Para terminar nos falta calcular f(4), $t=4,\quad f(t)=\sqrt{62500-20000\cdot 4+2500\cdot 4^2}=150$

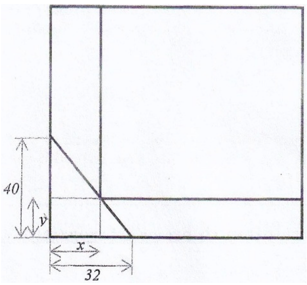
Finalmente, ***la distancia máxima entre los móviles A y B se alcanza en el momento inicial (t = 0 h) y es de 250 km. La mínima para t = 4 h y es de 150 km.***

Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectángulo R, uno de cuyos vértices es el punto *(x, y)* (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \le x \le 32$. *(4 puntos)*

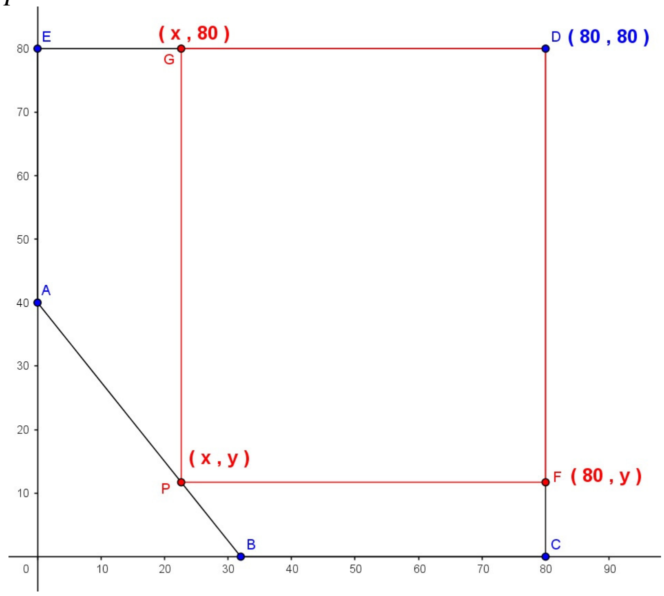
b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. *(4 puntos)*

c) Calculad el valor de dicha área máxima. *(2 puntos)*



Solución:

La representación gráfica del problema es:



a) Área del rectángulo R de vértices $PFDG$

El lado PF mide $(80 - x)$ cm, el lado PG mide $(80 - y)$ cm. El área del rectángulo R quedaría en función de x e y. Para expresar el área de R en función de x, consideramos que el punto $P(x, y) \in \overline{AB}$.

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y B para expresar y en función de x.

$$\begin{cases} A = (0,40) \\ B = (32,0) \end{cases} \to r : \begin{cases} Punto\ (0,40) \\ v.\ director\ (32,-40) \approx (4,-5) \end{cases}$$

$$luego\ r : \frac{x-0}{4} = \frac{y-40}{-5} \to -5x = 4y - 160 \to \quad 4y = -5x + 160 \to \quad y = \frac{-5x+160}{4} = \frac{-5}{4}x + 40$$

El área de rectángulo R será:

$$A_R = (80-x)(80-y) = (80-x)\left(40 + \frac{5}{4}x\right)$$

$$80 - y = 80 - \left(\frac{-5}{4}x + 40\right) = 80 + \frac{5}{4}x - 40 = 40 + \frac{5}{4}x$$

Solución: $A_R = (80-x)\left(40 + \frac{5}{4}x\right) cm^2 \quad 0 \le x \le 32$

b) Valor de x / A_R es máxima.

$$A_R = (80-x)\left(40+\frac{5}{4}x\right) \quad 0 \le x \le 32$$

$$A'_R = -\left(40+\frac{5}{4}x\right)+(80-x)\frac{5}{4} = -40-\frac{5}{4}x+100-\frac{5}{4}x = 60-\frac{5}{2}x$$

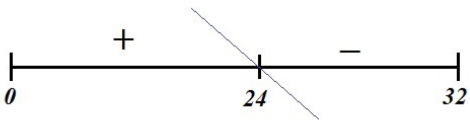
$$60-\frac{5}{2}x=0; \quad 120-5x=0; \quad 120=5x; \quad x=\frac{120}{5}=24\in(0,32)$$

$$A''_R = -\frac{5}{2}$$

$$Para\ x=24,\ A''_R = -\frac{5}{2}<0 \quad \rightarrow \quad en\ x=24\ A_R\ tiene\ un\ máximo\ relativo$$

Estudiemos el signo de $A_R{}'$ a la izquierda y derecha de 24.

Como $A_R{}'$ es una recta de pendiente negativa cuya raíz es 24:



Luego en x = 24 A_R tiene un máximo relativo que es el absoluto en [0 , 32] ya que a la izquierda de 24 A_R es creciente y a la derecha es decreciente.

Las dimensiones de R son:

$$80 - x = 80 - 24 = 56 \quad y \quad 40+\frac{5}{4}x = 40+\frac{5}{4}\cdot 24 == 70$$

Solución: las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima son 56 cm x 70 cm.

c) El área máxima será, A_R = 56 . 70 =3920

Solución: el área máxima del rectángulo R mide 3920 cm^2.

(Este ejercicio es similar al B3 de Junio de 2014)

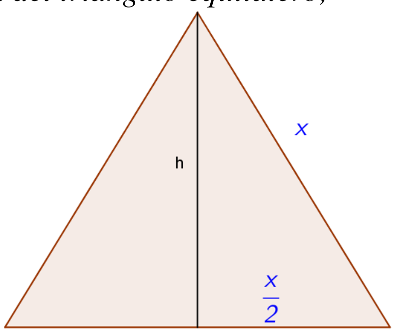
Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. *(3 puntos)*

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. *(7 puntos)*

Solución:
Se divide un alambre de longitud 240 m en dos partes.
Con una de ellas se construye un triángulo equilátero de lado x [la longitud de esta parte será 3 x]
y con la otra, de longitud 240 – 3 x, se construye un cuadrado [de lado (240 – 3 x) / 4]

a) Área del triángulo equilátero,



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 \rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \rightarrow$$

$$h^2 = \frac{4x^2 - x^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

(como h es una longitud, h > 0)

Luego, $A_T = \dfrac{x\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\dfrac{x^2\sqrt{3}}{18}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

Área del cuadrado,

$$A_C = \left(\frac{240-3x}{4}\right)^2 = \frac{(240-3x)^2}{16}$$

La parte del cable usada para construir el cuadrado mide 240 – 3 x que deber ser positivo, luego 240 – 3 x > 0; 240 > 3 x; 3 x < 240; x < 80. Luego x ∈ [0, 80]

Finalmente, la suma de las áreas en función de la longitud del lado del triángulo, x, es $S(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \dfrac{(240-3x)^2}{16}$ $\quad 0 \le x \le 80$*, x en metros.*

b) ¿x? / S(x) sea mínima.

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2x + \frac{1}{16}\cdot 2(240-3x)\cdot(-3) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{8}(240-3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 90 + \frac{9}{8}x = \frac{4\sqrt{3}\,x + 9x}{8} - 90 =$$

$$= \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x}{8} - 90$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x}{8} - 90 = 0 \rightarrow \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x}{8} = 90 \rightarrow \left(4\sqrt{3}+9\right)x = 720$$

$$x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9} \cong 45'2028 \quad (\in [0,80])$$

Como S´(x) es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo, es una recta de pendiente positiva, entonces a la izquierda de su raíz es negativa y a la derecha positiva.

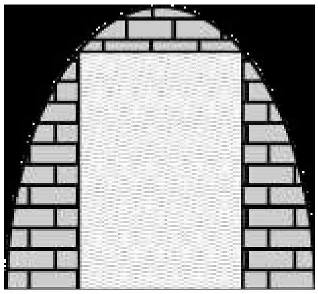
En x = 45´2028 hay un mínimo local y como f(x) a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente, este mínimo local es el absoluto.

La función S(x) alcanza su mínimo para $x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9} m \cong 45´2028\ m$

Por tanto, ***para que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima el lado del triángulo debe ser de*** $\frac{720}{4\sqrt{3}+9} m$ ***y la longitud del cable para construir el triángulo será de*** $3\frac{720}{4\sqrt{3}+9} m \cong 135´6085\ m.$

El área mínima será: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{720}{4\sqrt{3}+9}\right)^2 + \frac{\left(240 - 3\frac{720}{4\sqrt{3}+9}\right)^2}{16} \cong 1565´8710\ m^2$

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



a) Calcular las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. *(6 puntos)*

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta de piedra. *(4 puntos)*

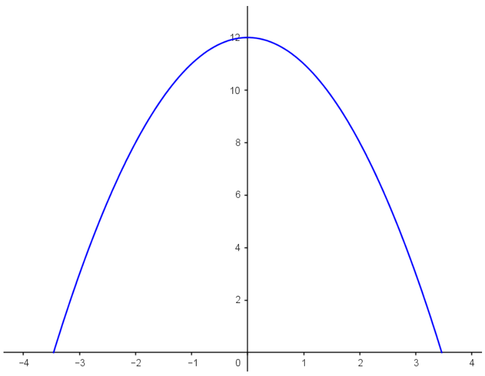
Solución:

Representemos gráficamente el problema:

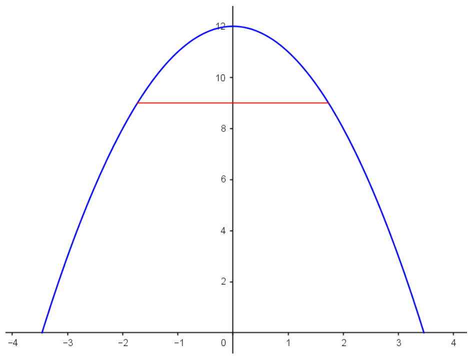
Parábola $y = -x^2 + 12$

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = 12$$

$$y = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 12 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 12 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \cong \pm 3'4641$$



La puerta rectangular a poner es este corte de la muralla tiene sus dos esquinas superiores en la parábola.



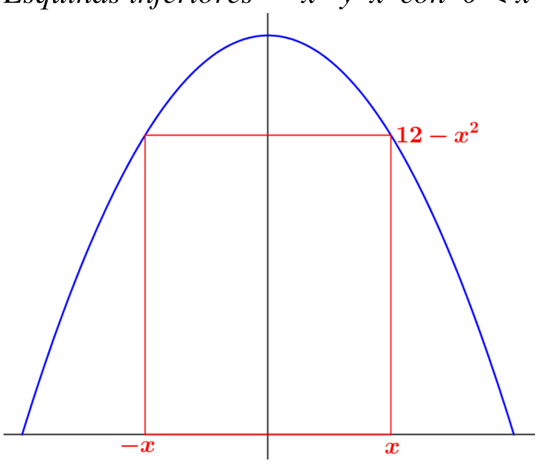
Fijadas las esquinas superiores, con $y \in [0,12]$, *las esquinas inferiores de la puerta serán:*

$$\forall\, y \in [0,12] \;\rightarrow\; y = -x^2 + 12 \;\rightarrow\; x^2 = 12 - y \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{12 - y}$$

Las esquinas inferiores quedan simétricas respecto del origen de coordenadas.

Para que los cálculos sean más sencillos utilizaremos los siguientes valores para las esquinas.

Esquinas inferiores $-x$ *y* x *con* $0 < x < 2\sqrt{3}$. *Esquinas superiores* $12 - x^2$. *Gráficamente:*



El área de la puerta es:

$$A(x) = 2\,x\left(12 - x^2\right) = 24x - 2x^3$$

$$A(x) = 24x - 2x^3 \qquad 0 < x < 2\sqrt{3}$$

a) Dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.

$$A'(x) = 24 - 6x^2$$

$24 - 6x^2 = 0;\quad 6x^2 = 24;\quad x^2 = 4;\quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2,$ *como* $0 < x < 2\sqrt{3}$, *entonces* $x = 2$.

$A''(x) = -12x;\quad A''(2) = -12 \cdot 2 = -24 < 0$, *por tanto en* $x = 2$ *hay un máximo relativo.*

Obtengamos el signo de A´(x) a la derecha e izquierda de x = 2.

$$A'(x) = 24 - 6x^2$$

$$x = 1{\acute{}}5 \quad \rightarrow \quad A'(1{\acute{}}5) = 24 - 6 \cdot 1{\acute{}}5^2 = 11{\acute{}}5 > 0 \quad \text{creciente}$$

$$x = 2{\acute{}}5 \quad \rightarrow \quad A'(2{\acute{}}5) = 24 - 6 \cdot 2{\acute{}}5^2 = -13{\acute{}}5 < 0 \quad \text{decreciente}$$

Por tanto, como A(x) es creciente a la izquierda de 2 y decreciente a su derecha el máximo relativo es absoluto.

Para x = 2, y = 12 – 2^2 = 8

Solución: para que la puerta tenga la mayor superficie posible sus dimensiones son de 4 m de base y 8 m de altura.

b) Utilizando la puerta del apartado anterior.

El área de la puerta del apartado anterior es: 8 x 4 = 32 m^2.

Calculemos el área del corte vertical, que es el área encerrada por la parábola.

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(12 - x^2\right) dx = \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = \left(12 \cdot 2\sqrt{3} - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^3}{3}\right) - \left(12 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right) - \frac{-\left(2\sqrt{3}\right)^3}{3}\right) =$$

$$= 24\sqrt{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} - \left(-24\sqrt{3} - \frac{-24\sqrt{3}}{3}\right) = 24\sqrt{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} + 24\sqrt{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} = 48\sqrt{3} - \frac{48\sqrt{3}}{3} = 32\sqrt{3}$$

Solución: el área de la parte frontal de la puerta es 32 m^2 y el área de la parte frontal de la entrada recubierta de piedra es $\left(32\sqrt{3} - 32\right) m^2 \cong 23{\acute{}}4256\ m^2$.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano (– 1,0), (1,0), (1,1) y (– 1, 1). Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. *(10 puntos)*

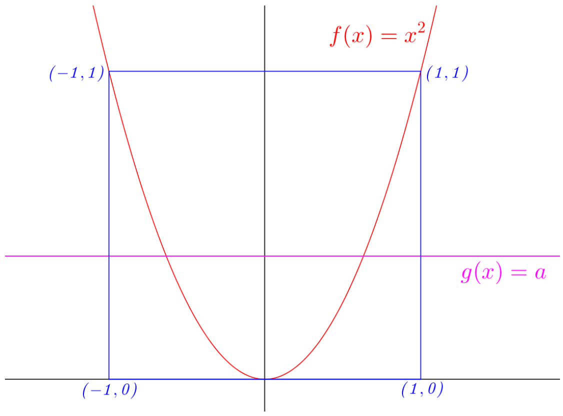
Solución:

La representación gráfica del problema es:

f(x) es una parábola

$f(x) = x^2$

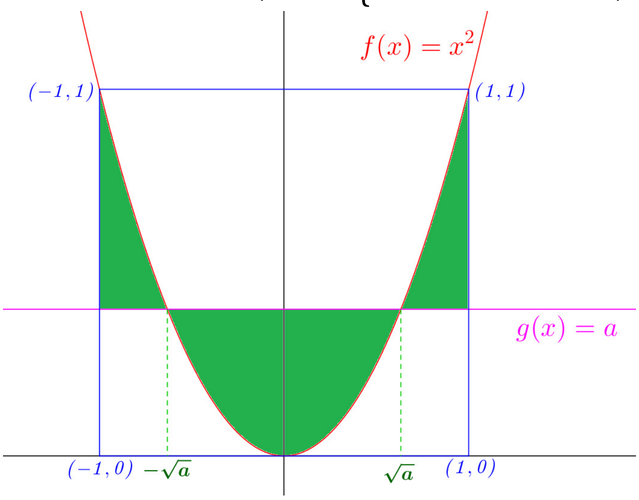
x	$f(x)$
-1	1
0	0
1	1



El área del rectángulo R es {la base mide 2 y la altura 1} $A_R = 2.1 = 2$

Para calcular el área entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ necesitamos obtener sus puntos de corte:

$x^2 = a \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{a} \qquad \left\{como\ 0 < a < 1 \quad \exists \sqrt{a}\right\}$



El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ dentro de R son las zonas coloreadas del dibujo.

Como las dos funciones son simétricas respecto del eje OY, el cálculo de esta área lo obtenemos como sigue:

$$A = 2\left[\int_0^{\sqrt{a}} \left(a - x^2\right) dx + \int_{\sqrt{a}}^{1} \left(x^2 - a\right) dx\right] =$$

$$= 2\left[\left[a\,x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} + \left[\frac{x^3}{3} - a\,x\right]_{\sqrt{a}}^{1}\right] =$$

$$= 2\left[\left(a\sqrt{a} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3}\right) - (0 - 0) + \left(\frac{1^3}{3} - a\cdot 1\right) - \left(\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3} - a\sqrt{a}\right)\right] = 2\left(\sqrt{a^3} - \frac{\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a - \frac{\sqrt{a^3}}{3} + \sqrt{a^3}\right) =$$

$$= 2\left(2\sqrt{a^3} - \frac{2\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a\right) = 2\left(\frac{4\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a\right) = \frac{8\sqrt{a^3}}{3} + \frac{2}{3} - 2\,a$$

Debe cumplirse que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R $\rightarrow$

$$A = \frac{1}{3} A_R \quad \rightarrow \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} + \frac{2}{3} - 2\,a = \frac{1}{3}2; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} - 2\,a = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} - 2\,a = 0; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} = 2\,a;$$

$$\frac{8\sqrt{a^3}}{2} = 3\,a; \quad 4\sqrt{a^3} = 3a; \quad \left(4\sqrt{a^3}\right)^2 = (3a)^2; \quad 16\,a^3 = 9\,a^2; \quad 16\,a^3 - 9\,a^2 = 0; \quad a^2\,(16a - 9) = 0$$

$$\begin{cases} a^2 = 0; \quad a = 0 \\ 16a - 9 = 0; \quad 16a = 9; \quad a = \dfrac{9}{16} \end{cases} \qquad como\ 0 < a < 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{9}{16}$$

Como en el proceso de resolución de la ecuación hemos elevado al cuadrado, comprobemos que la solución verifica la ecuación inicial:

$$4\sqrt{a^3} = 3a; \quad 4\sqrt{\left(\frac{9}{16}\right)^3} = 3\,\frac{9}{16}; \quad \frac{27}{16} = \frac{27}{16} \qquad a = \frac{9}{16}\ es\ solución.$$

Solución: el valor de a buscado es $\frac{16}{9}$.

Problema 3.2. Se considera la función real f (x) = $x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:
a) La gráfica de la curva *y = f(x)*. *(2 puntos).*
b) Los valores de *x* para los que está definida la función real *g(x) = ln f(x)*. *(1,3 puntos).*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *g(x)*, razonando si tiene, o no, máximo absoluto. *(1,3 puntos).*

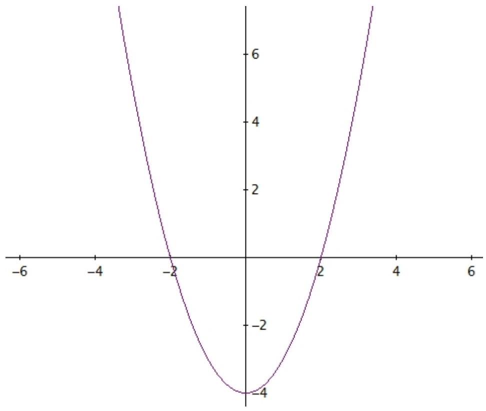
Solución:
a) Podemos obtener la gráfica de esta curva de dos formas diferentes.

a1) Como $y = x^2 - 4$ *es una función polinómica de 2º grado, gráficamente es una parábola.*
Efectuemos los cálculos para representar esta parábola.
Puntos de corte con los ejes coordenados,
$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \quad x^2 = 4$; *dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$
Los puntos de corte son (0 , – 4), (2 , 0) y (– 2 , 0)
Vértice de la parábola,

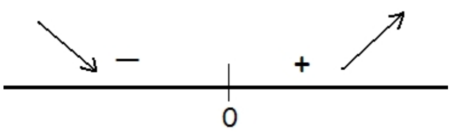
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2.1} = 0 \quad \rightarrow \quad y = -4$$

El vértice es (0 , – 4)

La gráfica de $y = x^2 - 4$ *es*

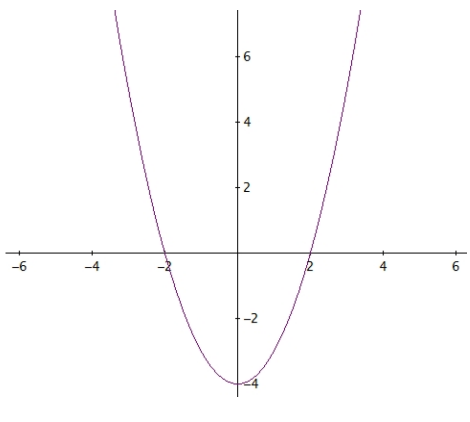


a2) $y = x^2 - 4$ *tratada como función.*
Dom y = R, por ser una función polinómica.
Puntos de corte con los ejes coordenados,
$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \quad x^2 = 4$; *dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$
Los puntos de corte son (0 , – 4), (2 , 0) y (– 2 , 0)
Monotonía, signo de y´
$y' = 2x$
$2x = 0; \quad x = 0$



Decreciente $(-\infty, 0)$
Creciente $(0, +\infty)$
Mínimo relativo $(0, -4)$

La gráfica de $y = x^2 - 4$ *es*



b) $g(x) = Ln\ (\ x^2 - 4\ )$. *Buscamos el dominio de g(x)*

$x^2 - 4 > 0$, *considerando la representación gráfica realizada en el apartado anterior obtenemos inmediatamente la solución de esta inecuación que es el dominio de g(x),*

$$Dom\ g(x) = (-\infty\ , -2) \cup (2\ , +\infty)$$

c) Monotonía de g(x)

$g(x) = Ln\ (\ x^2 - 4\ )$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

estudiemos el signo de g´(x), para ello buscamos las raíces del numerador y del denominador,

$2\ x = 0;\ \ x = 0$

$x^2 - 4 = 0$; *dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$

Representando estas raíces en la recta real y teniendo en cuenta el dominio de g(x), obtenemos

Por lo tanto g(x) es $\begin{matrix} Decreciente & (-\infty\ , -2) \\ Creciente & (2\ , +\infty) \end{matrix}$

Y g(x) no tiene ni máximos ni mínimos relativos. Para comprobar si g(x) tiene máximo absoluto representémosla gráficamente. Ya conocemos su dominio y su monotonía.

$$Dom\ g(x) = (-\infty\ , -2) \cup (2\ , +\infty)$$

Puntos de corte con eje OX,

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad Ln(x^2 - 4) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 5 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{5} \cong \pm 2{,}23 \in Dom\ g(x) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{matrix} (-\sqrt{5}\ , 0) \\ (\sqrt{5}\ , 0) \end{matrix}$$

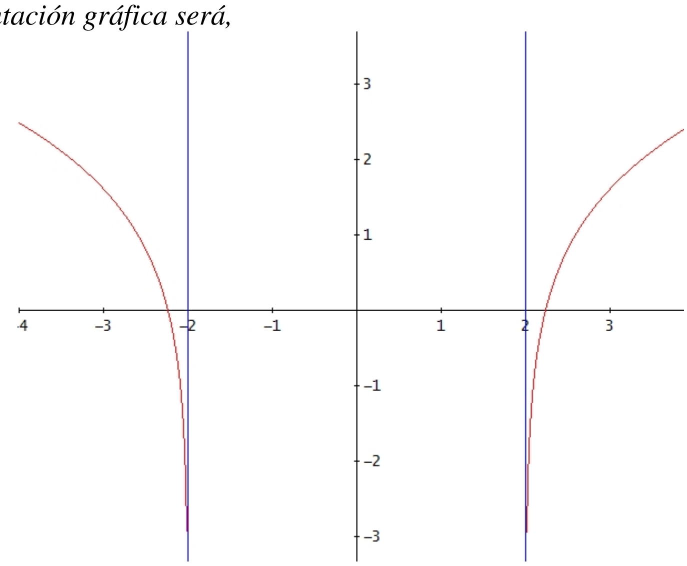
no hay corte con el eje OY porque x = 0 no es del dominio de g(x)

Asíntota vertical,

$$\lim_{x \to -2^-} Ln(x^2 - 4) = Ln\ 0 = -\infty \quad \rightarrow \quad x = -2 \quad es \quad a.v.$$

$$\lim_{x \to 2^+} Ln(x^2 - 4) = Ln\ 0 = -\infty \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad es \quad a.v.$$

La representación gráfica será,



Luego g(x) no tiene máximo absoluto.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Un incendio se extiende en forma circular uniformemente. El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de 1,8 *m/min*.

a) Obtener el área quemada en función del tiempo *t* transcurrido desde el comienzo del incendio **(1,3 puntos).**

b) Calcular la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio alcance 45 *m* **(2 puntos).**

Solución:

a) Área quemada en función del tiempo.

Como el radio crece a 1´8 m/min, $r = 1'8\,t$ *(t en minutos)*

El área del círculo quemado será: $A = \pi\,(1'8\,t)^2 = 3'24\,\pi\,t^2$ *(A en* m^2 *y t en minutos)*

b) El radio alcanza un valor de 45 m

$$45 = 1'8\,t \quad \rightarrow \quad t = \frac{45}{1'8} = 25$$

al cabo de 25 min.

La velocidad de crecimiento del área viene dad por $A' = 2 \,.\, 3'24\,\pi\,t = 6'48\,\pi\,t$

Luego para $t = 25$, $A' = 6'48\,\pi\,25 = 162\,\pi \approx 508'938$

Por lo que la velocidad de crecimiento en el instante en que el radio alcance 45 m será de 162 π m^2/min*, aproximadamente, 509* m^2/min*.*

EJERCICIO B

PROBLEMA 3.
a) Obtener la derivada de la función $f(x) = ax + b + sen\ x$ **(0,5 puntos)**. **Calcular** a y b si $O = (0, 0)$ es un punto de la curva $y = ax + b + sen\ x$, cuya recta tangente en $O = (0, 0)$ es el eje OX **(1,8 puntos).**

b) Justificar que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + sen\ x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0,\pi]$ **(0,5 puntos).**

c) Calcular esos dos puntos **(0,5 puntos).**

Solución:
a) $f'(x) = a + \cos x$

Calculo de a y b con las condiciones dadas
(0 , 0) es punto de la curva $\rightarrow$ $0 = a \,.\, 0 + b + sen\ 0$ $\rightarrow$ $0 = b + 0$ $\rightarrow$ $b = 0$
la recta tangente a la curva en (0 , 0) es el eje OX $\rightarrow$ $f'(0) = 0$ $\rightarrow$ $a + \cos 0 = 0$ $\rightarrow$ $a + 1 = 0$ $\rightarrow$ $a = -1$
Por lo tanto, $a = -1$ *y* $b = 0$

b)

$g(x) = -\frac{2}{\pi}x + sen\ x$ *Intentaremos aplicar el Teorema de Bolzano. Debemos buscar intervalos en que la función g(x) tome valores de distinto signo en los extremos.*

$$g(0) = -\frac{2}{\pi}0 + sen\ 0 = 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} + sen\ \frac{\pi}{2} = -1 + 1 = 0$$

Ya hemos encontrado dos puntos del intervalo [0 , π] en los que se anula g(x).

c) Los puntos del intervalo [0, π] en los que se anula g(x) son $(0, 0)$ *y* $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

PROBLEMA A.3. Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$, se pide:

a) Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. *(3 puntos)*

b) Demostrar que $f(x) \geq g(x)$ cuando $x \geq 0$. *(3 puntos)*

c) Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B. *(4 puntos)*

Solución:

a) Puntos de intersección entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Debemos resolver la siguiente ecuación:

$x^3 = 2x^2 - x$

$x^3 - 2x^2 + x = 0$

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

Para $x = 0$, $f(0) = 0^3 = 0 \rightarrow (0, 0)$

Para $x = 1$, $f(1) = 1^3 = 1 \rightarrow (1, 1)$

Los puntos de intersección buscados son: $A = (0, 0)$ *y* $B = (1, 1)$

b) $f(x) \geq g(x)$

Veamos cuando se cumple esta desigualdad.

$x^3 \geq 2x^2 - x$

$x^3 - 2x^2 + x \geq 0$

Según hemos obtenido en el apartado anterior: $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$

Como $(x-1)^2$ *es siempre positivo, por estar elevado al cuadrado, el signo del primer miembro de la desigualdad depende del de* x.

Luego para $x \geq 0$ *se cumple que* $x^3 - 2x^2 + x \geq 0$ *y por lo tanto* $f(x) \geq g(x)$. *c.q.d.*

c) Representemos gráficamente las dos curvas.

Por lo resuelto en el apartado a) conocemos los puntos de corte entre ambas, $A = (0, 0)$ *y* $B = (1, 1)$.

$y = 2x^2 - x$

Es una parábola. Buscamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su vértice.

$x = 0 \rightarrow y = 2\,0^2 - 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$y = 0 \rightarrow 2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0,0) \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} & \left(\dfrac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

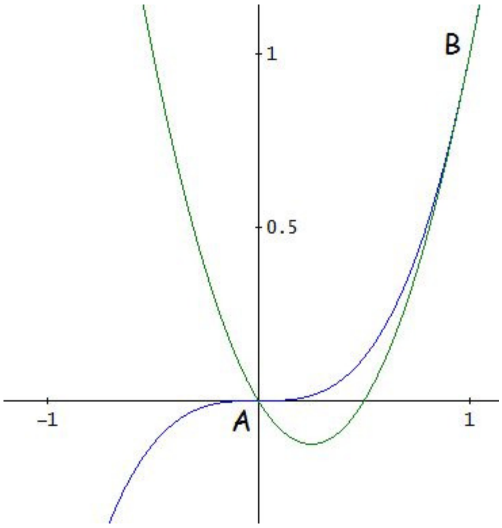
$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2.2} = \frac{1}{4} \rightarrow y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{8} \qquad \left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{8}\right)$$

$y = x^3$

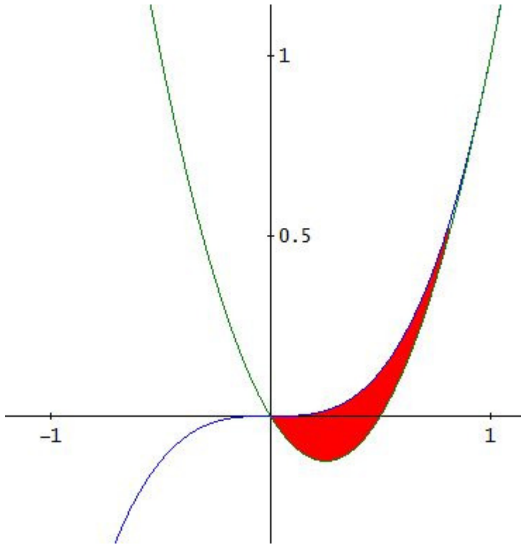
La representamos a partir de una tabla de valores,

x	$y = x^3$
-1	-1
0	0
1	1

La representación gráfica será:



El área a calcular es:



El cálculo del área pedida será mediante la siguiente integral definida:

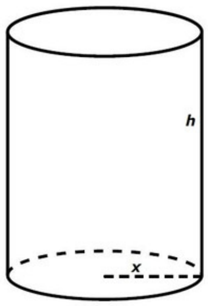
$$\int_0^1 \left(x^3 - \left(2x^2 - x\right)\right)dx = \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3-8+6}{12} = \frac{1}{12}$$

El área de la superficie limitada por las dos curvas mide $\frac{1}{12}$ *u.a.*

PROBLEMA B.3. Se desea construir un depósito cilíndrico de 100 m^3 de capacidad, abierto por la parte superior. Su base es un círculo en posición horizontal de radio x y la pared vertical del depósito es una superficie cilíndrica perpendicular a su base.
El precio del material de la base del depósito es 4 euros/m^2.
El precio del material de la pared vertical es 2 euros/m^2.
Obtener **razonadamente**:

a) El área de la base en función de su radio x . *(1 punto).*
b) El área de la pared vertical del cilindro en función de x . *(2 puntos).*
c) La función *f(x)* que da el coste del depósito. *(2 puntos).*
d) El valor x del radio de la base para que el coste del depósito es mínimo y el valor de dicho coste mínimo. *(5 puntos).*

Solución:



a) Como la base del cilindro es un círculo, su área será $A_b = \pi x^2$

b) El área de la pared vertical del cilindro es el área lateral del cilindro: $A_l = 2\,\pi\, x\, h$
Para expresar este área en función de x, utilizamos la condición de que el volumen del depósito debe ser 100 m^3.
El volumen del cilindro es: $V_c = \pi x^2 h$, *por lo tanto* $\pi x^2 h = 100 \;\rightarrow\; h = \dfrac{100}{\pi x^2}$

Y finalmente, $A_l = 2\pi\, x\, h = 2\pi\, x \dfrac{100}{\pi x^2} = \dfrac{200}{x}$

c) El coste del depósito será

$$f(x) = 4\,.\,\pi\, x^2 + 2\,\frac{200}{x} = 4\,\pi\, x^2 + \frac{400}{x}$$

Por definición x *es la longitud del radio de la base, luego* $x>0$
La función que da el coste del depósito es: $f(x) = 4\,\pi\, x^2 + \dfrac{400}{x}, \quad x > 0$

d) Mínimo de f(x)

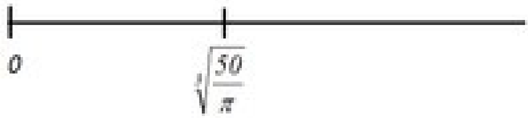
$$f'(x) = 8\,\pi\, x - \frac{400}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad\rightarrow\quad 8\,\pi\, x - \frac{400}{x^2} = 0$$

$$8\,\pi\, x^3 - 400 = 0$$

$$8\,\pi\, x^3 = 400 \quad\rightarrow\quad x^3 = \frac{400}{8\,\pi} = \frac{50}{\pi} \quad\rightarrow\quad x = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \approx 2'5154$$

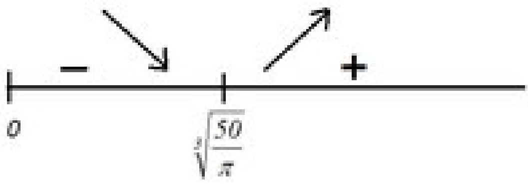
Estudiemos el signo de $f'(x)$ *a la izquierda y derecha de* $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$



$x = 1 \;,\; f'(1) = 8\pi - \dfrac{400}{1^2} = 8\pi - 400 = -397'4535$

$x = 3 \;,\; f'(3) = 8\pi\, 3 - \dfrac{400}{3^2} = 30'9538$

Es decir,



Como a la izquierda de $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ $f(x)$ *es decreciente y a la derecha creciente, en* $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ $f(x)$ *alcanza su mínimo absoluto.*

Para $x = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \quad \rightarrow \quad f\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2 + \dfrac{400}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}} = 238'5308 \approx 238'53$

Para que el coste del depósito sea mínimo, el radio de la base debe medir $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ ***m*** $\approx$ ***2´5154 m y el coste será de 238´53 €.***

PROBLEMA 6. Los vértices de un triángulo son A (0 , 12), B (– 5 , 0) y C (5 , 0).Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas (– x , 0) y (x , 0) siendo $0 \leq x \leq 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos *AB* y *AC*.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

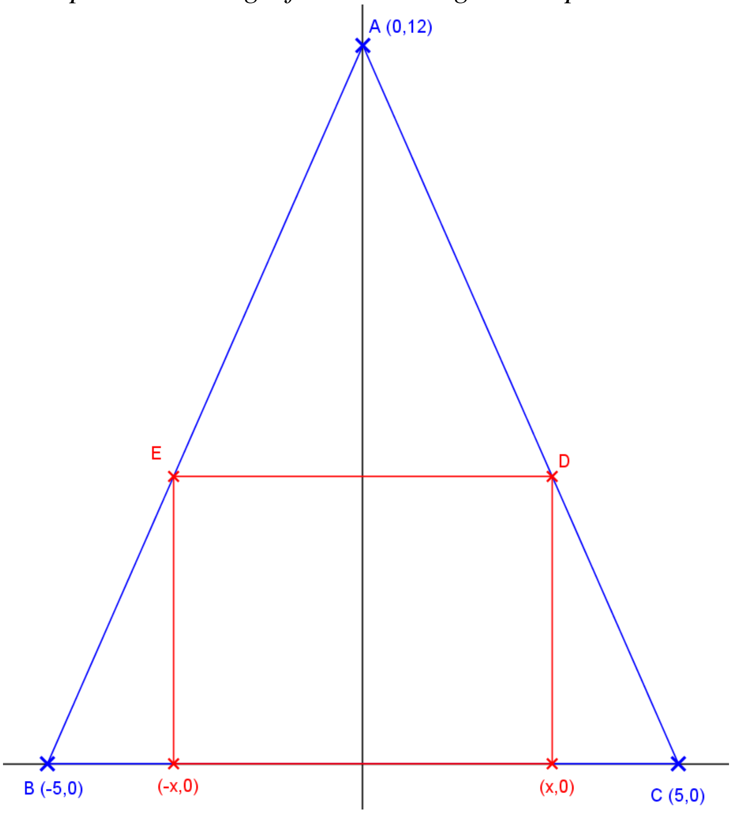
a) La expresión *f(x)* del área del rectángulo anterior. *(4 puntos)*

b) El valor de *x* para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. *(3 puntos)*

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. *(3 puntos)*

Solución:

La representación gráfica del triángulo del problema es:



El triángulo ABC, por construcción, es isósceles de lado desigual BC.

Podemos comprobarlo calculando,

$$d(A,B)=\sqrt{(-5-0)^2+(0-12)^2}=13$$

$$d(A,C)=\sqrt{(5-0)^2+(0-12)^2}=13$$

Del rectángulo inscrito conocemos su base que mide 2 x. Calculemos su altura. Debemos obtener el vértice D.

Recta que pasa por A y C,

$$\vec{AC}=(5,-12)$$

$$r_{AC}:\frac{x-5}{5}=\frac{y-0}{-12} \quad\rightarrow\quad y=\frac{-12\,(x-5)}{5}$$

Por tanto las coordenadas de D son:

$$\left(x,\frac{-12\,(x-5)}{5}\right)$$

a) Área del rectángulo inscrito

De lo calculado anteriormente sabemos que la base del rectángulo es $2x$ *y la altura* $\frac{-12\,(x-5)}{5}$.

$$A_R=2x\cdot\frac{-12(x-5)}{5}=\frac{-24x(x-5)}{5}$$

Por construcción el valor de x *puede variar entre* 0 *y* 5.

Por tanto, $f(x)=\dfrac{-24x\,(x-5)}{5} \quad x\in[0,5]$

b) ¿x? / área del rectángulo es máxima.

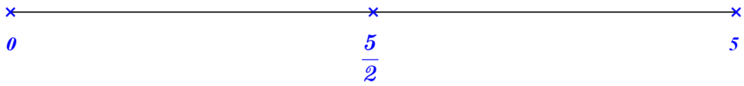
$$f(x)=\frac{-24x\,(x-5)}{5}=\frac{-24x^2+120x}{5} \quad x\in[0,5]$$

Busquemos el máximo.

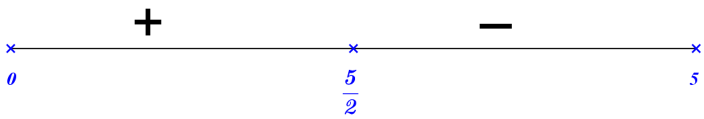
$$f'(x) = \frac{-48x + 120}{5}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-48x + 120}{5} = 0; \quad -48x + 120 = 0; \quad 48x = 120; \quad x = \frac{120}{48} = \frac{5}{2}$$

Como el dominio de f(x) es el intervalo (0,5), estudiaremos el signo de f´(x) en los intervalos:



x	$f'(x)$	
1	$\frac{-48 \cdot 1 + 120}{5} = 14{'}4$	$+$
3	$\frac{-48 \cdot 3 + 120}{5} = -4{'}8$	$-$



Luego en $x = \frac{5}{2}$ *hay un máximo local de f(x) que es el absoluto porque a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.*

$$x = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-24 \cdot \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - 5\right)}{5} = 30$$

Dimensiones del rectángulo de área máxima:

$$base: \quad 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$$

$$altura: \frac{-12\left(\frac{5}{2} - 5\right)}{5} = 6$$

Solución: el área del rectángulo es máxima para $x = \frac{5}{2}$ ***y las dimensiones del rectángulo son, base 5 u.l y altura 6 u.l. (el área del rectángulo es 30 u.a.).***

c) ¿Proporción entre el área del rectángulo y la del triángulo?

En el apartado anterior hemos obtenido el área del rectángulo, $A_r = 30$

Como T es un triángulo isósceles de base 10 y altura 12, $A_T = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60.$

Por tanto, $\frac{A_r}{A_T} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}.$

Finalmente, ***la proporción entre el área del rectángulo y la del triángulo es*** $\frac{1}{2}\cdot$