Problema 7. Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? *(5 puntos)*

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? *(5 puntos)*

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

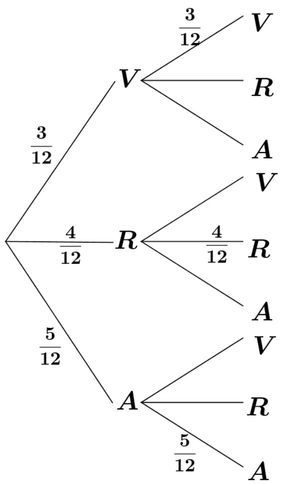
Nombrando los sucesos:

V = extraer bola verde
R = extraer bola roja
A = extraer bola amarilla

a) Extraer dos bolas con devolución. Probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo.

La urna del problema es: $\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{3V} \\ \mathbf{4R} \\ \mathbf{5A} \end{array}}$ *Como la extracción se realiza con devolución* $P(V)=\frac{3}{12}$ $P(R)=\frac{4}{12}$ $P(A)=\frac{5}{12}$

El árbol del problema es:



$$P(\text{mismo color}) = \frac{3}{12}\frac{3}{12}+\frac{4}{12}\frac{4}{12}+\frac{4}{12}\frac{4}{12}=\frac{50}{144}=\frac{25}{72}\cong 0'3472$$

La probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo es $\frac{25}{72}$ ***o 0´3472.***

Que los colores de las bolas extraídas sean distintos es el suceso contrario al anterior, por tanto:

$$P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \frac{25}{72}=\frac{47}{72}\cong 0'6528$$

La probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean distintos es $\frac{47}{72}$ ***o 0´6528.***

b) Se extraen tres bolas al mismo tiempo. Probabilidad de que las tres sean de distinto color.

Extraer tres bolas a la vez es como extraer tres bolas sin devolución.

Las tres bolas son de distinto color en los siguientes resultados:

$V\ R\ A \quad P(V\ R\ A) = \frac{3}{12}\frac{4}{11}\frac{5}{10} = \frac{60}{1320}$

$V\ A\ R \quad P(V\ A\ R) = \frac{3}{12}\frac{5}{11}\frac{4}{10} = \frac{60}{1320}$

$R\ V\ A \quad P(R\ V\ A) = \frac{4}{12}\frac{3}{11}\frac{5}{10} = \frac{60}{1320}$

$R\ A\ V \quad P(R\ A\ V) = \frac{4}{12}\frac{5}{11}\frac{3}{10} = \frac{60}{1320}$

$A\ V\ R \quad P(A\ V\ R) = \frac{5}{12}\frac{3}{11}\frac{4}{10} = \frac{60}{1320}$

$A\ R\ V \quad P(A\ R\ V) = \frac{5}{12}\frac{4}{11}\frac{3}{10} = \frac{60}{1320}$

Por lo que, P(bolas de distinto color al extraer tres bolas) = $6\frac{60}{1320} = \frac{3}{11} \cong 0\acute{}2727$

Si se extraen tres bolas al mismo tiempo, la probabilidad de que las tres sean de distinto color es $\frac{3}{11}$ ***o 0´2727.***

Problema 8. Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. *(4 puntos)*

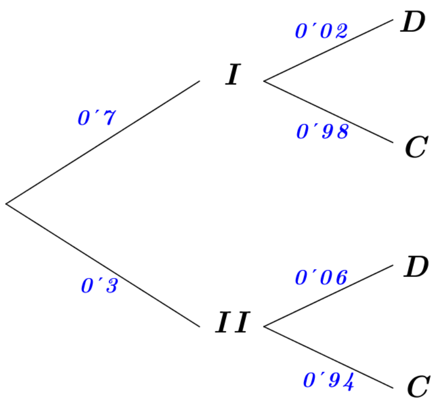
b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. *(6 puntos)*

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
I = móvil procede de la 1ª planta
II = móvil procede de la 2ª planta
C = móvil correcto
D = móvil defectuoso

De los datos del problema, $P(I) = 0'7 \rightarrow P(II) = 1 - 0'7 = 0'3$
En la 1ª planta $P(D) = 0'02 \rightarrow P(C) = 0'98$
En la 2ª planta $P(D) = 0'06 \rightarrow P(C) = 0'94$

El árbol del problema es:



a) *La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.*
$$P(II \cap D) = 0'3 \cdot 0'06 = 0'018$$

La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso es 0´018.

b) *Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.*
$$P\left(I/_D\right) = \frac{P(I \cap D)}{P(D)} = \frac{0'7 \cdot 0'02}{0'7 \cdot 0'02 + 0'3 \cdot 0'06} = \frac{7}{16} = 0'4375$$

Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción es 0´4375.

Problema 7. Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10´25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? *(4 puntos)*

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? *(3 puntos)*

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? *(3 puntos)*

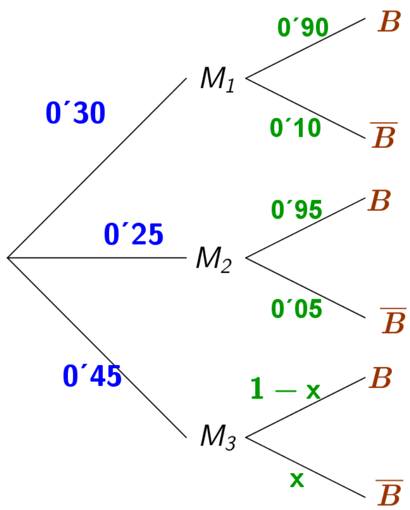
Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
M_1 = *lata fabricada por la 1ª máquina*
M_2 = *lata fabricada por la 2ª máquina*
M_3 = *lata fabricada por la 3ª máquina*
B = *lata buena* $\quad\quad\quad\quad$ $\overline{B}$ = *lata defectuosa*

De los datos del problema:
La máquina M_1 *fabrica el 30% de las latas* $\rightarrow$ $P(M_1)=0'30.$
La máquina M_2 *fabrica el 25% de las latas* $\rightarrow$ $P(M_2)=0'25.$
Y el resto (100 – 30 – 25 = 45) lo fabrica la máquina M_3 $\rightarrow$ $P(M_3)=0'45.$
En $\mathbf{M_1}$ *el 10% de las latas fabricadas son defectuosas* $\rightarrow$ $P(\overline{B})=0'10$ *y* $P(B)=1-0'10=0'90$
En $\mathbf{M_2}$ *el 5% de las latas fabricadas son defectuosas* $\rightarrow$ $P(\overline{B})=0'95$ *y* $P(B)=1-0'95=0'05$
En $\mathbf{M_3}$ $\rightarrow$ $P(\overline{B})=x$ *y* $P(B)=1-x$

El 10´25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas $\rightarrow$ $P(\overline{B})=0'1025$

El árbol del problema es:



$P(\overline{B})=0'1025$ *y del árbol*

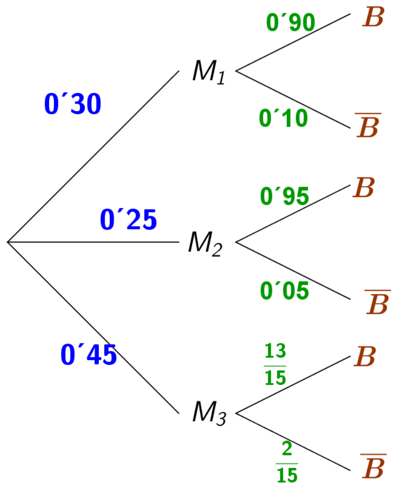
$$P(\overline{B})=0'30\cdot 0'10+0'25\cdot 0'05+0'45\cdot x=$$
$$=0'0425+0'45\cdot x$$

Por tanto: $0'0425 + 0'45\,x = 0'1025;$

$0'45\,x = 0'1025 - 0'0425;\quad 0'45\,x = 0'06$

$$x=\frac{0'06}{0,45}=\frac{2}{15}\quad y\quad 1-x=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

Entonce el árbol queda:



a) Probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa.

La probabilidad pedida es $P\left(\overline{B}/M_3\right)$

$$P\left(\overline{B}/M_3\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap M_3\right)}{P(M_3)}=\frac{0'45\cdot\frac{2}{15}}{0'45}=\frac{2}{15}\cong 0'1333.$$

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?

La probabilidad pedida es $P\left(M_1/B\right)$

$$P\left(M_1/B\right)=\frac{P(M_1\cap B)}{P(B)}=\frac{0'30\cdot 0'90}{1-P\left(\overline{B}\right)}=\frac{0'27}{1-0'1025}=\frac{108}{359}\cong 0'3008.$$

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

La probabilidad pedida es $P\left(M_1/\overline{B}\right)+P\left(M_3/\overline{B}\right)$

$$P\left(M_1/\overline{B}\right)+P\left(M_3/\overline{B}\right)=\frac{P\left(M_1\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}+\frac{P\left(M_3\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{0'30\cdot 0'10}{0'1025}+\frac{0'45\cdot\frac{2}{15}}{0'1025}=\frac{36}{41}\cong 0'8780.$$

Problema 8. Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. *(3 puntos)*
b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. *(3 puntos)*
c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. *(4 puntos)*

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
E = mensaje con emoticonos. $\overline{E}$ *= mensaje sin emoticonos*
Como "el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp añade emoticono" $\rightarrow$

$P(E) = 0{\prime}60 \rightarrow P(\overline{E}) = 1 - 0{\prime}60 = 0{\prime}40$

Se mandan 10 mensajes, usando la variable X = número de mensajes con emoticonos en 10 mensajes, X es una variable binomial de parámetros $n = 10$ *y* $p = 0{\prime}6$.

La tabla que tenemos de la binomial no da los resultados para esta variable (es para $p \le 0{\prime}5$*). Por lo tanto utilizaremos la siguiente variable: Y = número de mensajes sin emoticonos en 10 mensajes* $\rightarrow$ $Y = B(10, 0{\prime}4)$ *y la tabla nos da los resultados para Y.*

La relación entre estas dos variables es:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

a) Probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.
"ningún mensaje de los diez tenga emoticonos" $\equiv X = 0 \equiv Y = 10$
$P(X = 0) = P(Y = 10) = P(Y \le 10) - P(Y \le 9) = 1 - 0{\prime}9999 = 0{\prime}0001$

La probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos es 0´0001.

b) Probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.
$\frac{2}{5}$ *de* $10 = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$
"que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos" $\equiv X = 4 \equiv Y = 6$
$P(X = 4) = P(Y = 6) = P(Y \le 6) - P(Y \le 5) = 0{\prime}9452 - 0{\prime}8338 = 0{\prime}1114$

La probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos es 0´1114.

c) Probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos.
"que ocho o más mensajes tengan emoticonos" $\equiv X \ge 8 \equiv Y \le 2$
$P(X \ge 8) = P(Y \le 2) = 0{\prime}1673$

La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos es 0´1673.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Las horas de estudio y las calificaciones en Matemáticas de siete alumnos han sido:

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
Horas de estudio	17	17,5	13	17	17,5	15	4
Matemáticas	8	9	6	7	8	6	2

a) Halla el coeficiente de correlación entre las calificaciones en Matemáticas y las horas de estudio de esos alumnos. *(0,5 puntos)*
b) Explica el significado del coeficiente de correlación. *(1 punto)*
c) Explica razonadamente como se estima la calificación en Matemáticas que obtendría un alumno al estudiar 20 horas. *(1,8 puntos)*

Solución:

a) *Para hallar el coeficiente de correlación entre las calificaciones en Matemáticas y las horas de estudio debemos realizar los siguientes cálculos:*
usamos las variables x = horas de estudio e y = calificación en Matemáticas,

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
17	8	289	64	136
17,5	9	306,25	81	157,5
13	6	169	36	78
17	7	289	49	119
17,5	8	306,25	64	140
15	6	225	36	90
4	2	16	4	8
101	46	1.601	334	728,5

$$\bar{x} = \frac{101}{7} = 14'428571 \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{1601}{7} - \bar{x}^2} = 4'523183$$

$$\bar{y} = \frac{46}{7} = 6'571429 \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{334}{7} - \bar{y}^2} = 2'18523$$

$$\sigma_{xy} = \frac{728'5}{7} - \bar{x}\,\bar{y} = 9'255102$$

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y} = 0'961299$$

b) *Como el coeficiente de correlación es 0´96, cercano a 1, la relación entre las variables es positiva y muy fuerte, es decir, a más horas de estudio mayor será la calificación en Matemáticas.*

c) *Como la relación entre las variables es muy fuerte y el número de horas de estudio (20 h) está cerca de los valores analizados, podemos estimar la calificación de Matemáticas a partir de la recta de regresión de la calificación de Matemáticas (y) sobre el nº de horas de estudio (x).*
La expresión de esta recta de regresión es,

$$y-\overline{y}=\frac{\sigma_{x\,y}}{\sigma_x{}^2}\left(x-\overline{x}\right)$$

$$y-6´571429=\frac{9´255102}{(4´523183)^2}\,(x-14´428571)$$

$para \quad x=20$

$$y-6´571429=\frac{9´255102}{(4´523183)^2}\,(20-14´428571)$$

$$y=9´092\approx 9´1$$

Un alumno que estudie 20 h estimamos que obtendrá una calificación en Matemáticas de 9´1.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. El 20% de los habitantes de una gran ciudad votan al partido político B. Se seleccionan al azar tres habitantes y se pide calcular razonadamente:
a) La probabilidad de que los tres voten al partido B. (*1 punto*)
b) La probabilidad de que ninguno vote al partido B. (*1 punto*)
c) La probabilidad de que solamente uno vote al partido B. (*1,3 puntos*)
Nota: El número de habitantes es tan grande que siempre se puede considerar que después de seleccionar uno dos o tres ciudadanos se tiene que un 20% de los no seleccionados son los que votan al partido B.

Solución
Consideramos la variable aleatoria X = nº de habitantes, de un grupo de 3, que votan al partido B.
Según indica la nota del problema X es una variable aleatoria binomial de parámetros n = 3 y p = 0’2.

a) El suceso A = Los tres votan al partido B = (X = 3)

$$P(A) = P(X = 3) = \binom{3}{3} 0'2^3\ 0'8^0 = 0'008$$

b) El suceso B = ninguno vota al partido B = (X = 0)

$$P(A) = P(X = 0) = \binom{3}{0} 0'2^0\ 0'8^3 = 0'512$$

c) El suceso C = solamente uno vota al partido B = (X = 1)

$$P(A) = P(X = 1) = \binom{3}{1} 0'2^1\ 0'8^2 = 0'384$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. La tabla siguiente muestra las alturas (en metros) y los pesos (en kilos) de un grupo de 8 empleados de una empresa:

Altura	1,75	1,58	1,80	1,50	1,65	1,75	1,85	1,63
Peso	78	75	90	68	78	84	89	80

Las variables altura y peso están fuertemente correlacionadas, siendo su coeficiente de correlación 0,9197.
a) Estimar, mediante regresión lineal, el peso de un empleado que mida 1,72 metros *(1,7 puntos).*
b) Estimar, mediante regresión lineal, la altura de un empleado que pese 80 kilos *(1,6 puntos).*

Solución:
Obtengamos la tabla de valores que permitirá calcular los parámetros de los apartados a) y b)
Llamamos x = altura y = peso

x	y	x^2	y^2	$x\,y$
1,75	78	3,0625	6084	136,5
1,58	75	2,4964	5625	118,5
1,80	90	3,24	8100	162
1,50	68	2,25	4624	102
1,65	78	2,7225	6084	128,7
1,75	84	3,0625	7056	147
1,85	89	3,4225	7921	164,65
1,63	80	2,6569	6400	130,4
13,51	642	23	51894	1089,75

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{13{,}51}{8} = 1{,}68875 \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{642}{8} = 80{,}25$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{23}{8} - \overline{x}^2} = 0{,}11084 \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{51894}{8} - \overline{y}^2} = 6{,}83283$$

$$\rho = \frac{\sigma_{x\,y}}{\sigma_x\ \sigma_y} \qquad \sigma_{x\,y} = \frac{\sum x_i\ y_i}{n} - \overline{x}\ \overline{y} = \frac{1089{,}75}{8} - \overline{x}\ \overline{y} = 0{,}69653 \qquad \rho = \frac{0{,}69653}{0{,}11084\,.\,6{,}83283} = 0{,}91972$$

Como el coeficiente de correlación es 0,91972 la correlación entre ambas variables es muy fuerte y positiva, luego las rectas de regresión sirven para estimar alturas o pesos siempre que el dato del que partamos este cercano o en el rango de los valores de la variable estudiada.

a) La altura (x) 1,72 m está en el rango de los valores de la altura estudiados (1,50 – 1,85), usamos la recta de regresión de y sobre x para estimar el peso que le corresponda,

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{x\,y}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x}) \quad \to \quad y - 80{,}25 = \frac{0{,}69653}{0{,}11084^2}(x - 1{,}68875)$$

$$\textit{Para} \quad x = 1{,}72 \quad \to \quad y - 80{,}25 = 56{,}6959\,(1{,}72 - 1{,}68875) \quad \to \quad \hat{y} = 82{,}02$$

b) El peso (y) 80 Kg está en el rango de los valores de los pesos estudiados (68 – 89), usamos la recta de regresión de x sobre y para estimar la altura que le corresponda,

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{x\,y}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y}) \quad \to \quad x - 1{,}68875 = \frac{0{,}69653}{6{,}83283^2}(x - 80{,}25)$$

$$\textit{Para} \quad y = 80 \quad \to \quad x - 1{,}68875 = 0{,}0149\,(x - 80{,}25) \quad \to \quad \hat{x} = 1{,}69$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Un dado, cuyas caras están numeradas del 1 al 6 se lanza cinco veces. Se pide la probabilidad de que el número 3 salga:
a) Exactamente dos veces (*1 punto*). b) Una vez a lo sumo (*1 punto*). c) Más de dos veces (*1,3 puntos*).
NOTA: Todos los números tienen la misma probabilidad de salir en cada lanzamiento.

Solución:
Consideramos la siguiente variable aleatoria,
X = número de veces que sale 3 al lanzar cinco veces un dado.
X es una variable aleatoria binomial de parámetros n = 5 y p = P(obtener 3 al lanzar el dado) = 1/6,

$$X = B\left(5, \frac{1}{6}\right)$$

a) A = obtener el 3 exactamente dos veces

$$P(A) = P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5\,.\,4}{2}\frac{5^3}{6^5} = 0'160751$$

b) B = obtener el 3 una vez a lo sumo

$$P(B) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5\frac{5^4}{6^5} = 2\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0'8037551$$

c) C = Obtener el 3 más de dos veces
P (C) = P (X > 2) = 1 – [P (X = 0) + P (X = 1) + P (X = 2)] =
usando los cálculos de los apartados anteriores
= 1 – [P (B) + P (A)] = 1 – (0´8037551 + 0´160751) = 1 – 0´9645061 = 0´0354939

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dados los planos π_1 : x + y + z = -5 , π_2 : x – 3 y - z = 3 y la recta $r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$,

se pide:

a) Determinar razonadamente la posición relativa de la recta r y la recta s intersección de los planos π_1 y π_2 . *(1,7 puntos)*

b) Obtener razonadamente la ecuación del plano que contiene a la recta s anterior y es paralelo a r. *(1,6 puntos)*

Solución:

a)

La recta s es de ecuación $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$ *, calculemos su forma paramétrica. Considerando el menor formado por las incógnitas x z*

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0$ *resolvemos el sistema despejando la incógnita y.*

$$\begin{cases} x+z=-5+y \\ x-z=3+3y \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $2x=-2+2y \quad \rightarrow \quad x=-1+y$

sustituyendo en la 1ª ecuación: $-1+y+z=-5-y$ *; despejando z,* $z=-4-2y$

La ecuación de la recta s será $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-4-2\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$ *y de ella conocemos* $\begin{matrix} P_s(-1,0,-4) \\ \vec{v}_s(1,1,-2) \end{matrix}$

la ecuación de la recta r es $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$ *y de ella conocemos* $\begin{matrix} P_r(2,1,0) \\ \vec{v}_r(2,3,2) \end{matrix}$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s hay que estudiar el rango de la matriz

$$M'=\left(\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad P_r-P_s\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(M)=2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}=8-18+2-6+4-12=14-36=-22\neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(M')=3$$

Por lo tanto las rectas r y s se cruzan.

b) Ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. El plano que buscamos lo podemos calcular de dos formas diferentes.

<u>1ª forma.</u>

De la recta s, como calculamos en el apartado anterior, conocemos un punto y un vector director;
el plano buscado, π, *contiene a la recta s luego* P_s *y* $\vec{v}_s$ *serán un punto y un vector director de* π
Como π *debe ser paralelo a la recta r el otro vector director de* π *será el de r.*

Del plano π *conocemos* $\begin{matrix} P_s(-1,0,-4) \\ \vec{v}_s(1,1,-2) \\ \vec{v}_r(2,3,2) \end{matrix}$ *su ecuación será* $\begin{cases} x=-1+\lambda+2\mu \\ y=\lambda+3\mu \\ z=-4-2\lambda+2\mu \end{cases} \quad \lambda,\mu\in\Re$

Calculemos la ecuación general del plano,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 1 & 3 & y \\ -2 & 2 & z+4 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la última columna,

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (z+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Solución $\pi : 8x - 6y + z + 12 = 0$

$(x+1)\ (2+6) - y\ (2+4) + (z+4)\ (3-2) = 0$

$8x + 8 - 6y + z + 4 = 0$

$8x - 6y + z + 12 = 0$

2ª forma.

El haz de planos que contienen la recta s *es*

$(x + y + z + 5) + \lambda\ (x - 3y - z - 3) = 0 \qquad \lambda \in \Re$

Efectuando operaciones,

$(1+\lambda)x + (1-3\lambda)y + (1-\lambda)z + 5 - 3\lambda = 0 \qquad \lambda \in \Re$

El plano π *que buscamos será uno de los anteriores.*

El vector ortogonal al plano anterior es $\vec{v}_n(1+\lambda, 1-3\lambda, 1-\lambda) \quad \lambda \in \Re$

Como el plano π *debe ser paralelo a la recta r, se cumplirá que* $\vec{v}_n \perp \vec{v}_r \quad \to \quad \vec{v}_n \,.\, \vec{v}_r = 0$

$(1+\lambda, 1-3\lambda, 1-\lambda)\ (2, 3, 2) = 0$

$2 + 2\lambda + 3 - 9\lambda + 2 - 2\lambda = 0$

$7 - 9\lambda = 0 \qquad \to \qquad \lambda = \dfrac{7}{9}$

La ecuación del plano buscado será:

$(x + y + z + 5) + \dfrac{7}{9}\ (x - 3y - z - 3) = 0$

$9\ (x + y + z + 5) + 7\ (x - 3y - z - 3) = 0$

$9x + 9y + 9z + 45 + 7x - 21y - 7z - 21 = 0$

Solución $\pi : 8x - 6y + z + 12 = 0$

$16x - 12y + 2z + 24 = 0$

$8x - 6y + z + 12 = 0$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Se consideran la recta r: (x, y, z) = (t + 1, 2 t, 3 t), el plano π: x – 2 y – z = 0 y el punto P = (1, 1, 1). Se pide

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π (*0,9 puntos*).
b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P (*1,2 puntos*).
c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2 (*1,2 puntos*).

Solución:

a) Como el plano π_1 *debe ser paralelo a* $\pi \;\Rightarrow\; \pi_1 :\; x - 2y - z + D = 0$

Como $P \in \pi_1 \;\Rightarrow\; 1 - 2 \cdot 1 - 1 + D = 0;\;\; -2 + D = 0;\;\; D = 2;$ *luego* $\pi_1 : x - 2y - z + 2 = 0$

b) De la recta r conocemos: Punto $P_r(1,0,0)$ y vector director $\vec{v}_r\,(1,2,3)$. *Obtenemos el vector*

$\overrightarrow{PP_r}\,(0,1,1)$ *que será director de* π_2

Del plano π_2 *conocemos: un punto P(1,1,1) y los vectores directores* $\vec{v}_r$ *y* $\overrightarrow{PP_r}$

La ecuación general de este plano será,

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ *desarrollando por la primera columna,* $$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)(-1) - (y-1)\,1 + (z-1)\,1 = 0$

$-x + 1 - y + 1 + z - 1 = 0$

$-x - y + z + 1 = 0$

$x + y - z - 1 = 0$

Solución $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$

c) La recta intersección de π_1 *y* π_2 *será* $r_2 \begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Para encontrar las ecuaciones paramétricas de esta recta resolvemos el sistema anterior,

como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$ *podemos considerar como incógnitas principales x e y. El sistema a resolver es,*

$$\begin{cases} x - 2y = z - 2 \\ x + y = z + 1 \end{cases} \qquad \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} z-2 & -2 \\ z+1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{z - 2 + 2z + 2}{3} = \dfrac{3z}{3} = z \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & z-2 \\ 1 & z+1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{z + 1 - z + 2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de esta recta son: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \quad\; \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.2. Cien alumnos prepararon un examen de matemáticas. Se representa por x el número de problemas hecho por cada alumno en la preparación y por y la calificación obtenida. Sabiendo que las medias aritméticas de esas variables fueron: $\overline{x} = 9{,}2$ e $\overline{y} = 7{,}5$, que el coeficiente de correlación entre esas variables fue 0,7 y que la desviación típica de la variable y fue el doble que la de la variable x, se pide obtener, razonadamente:

a) Las ecuaciones de las rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y (*2 puntos*).
b) La calificación que la adecuada recta de regresión predice para un alumno que sólo hizo 6 problemas durante la preparación del examen (*1,3 puntos*).

Solución:

a) Los datos del problema son,

x = nº de problemas *y = calificación obtenida*

$\overline{x} = 9{,}2 \qquad \overline{y} = 7{,}5 \qquad \rho = 0{,}7 \qquad \sigma_y = 2\,\sigma_x$

Sabemos que $\rho = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\ \sigma_y}$ *y que la recta de regresión de y sobre x es* $y - \overline{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\ \sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\ \frac{\sigma_y}{2}} = 2\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\ \sigma_y} = 2\ .\ 0{,}7 = 1{,}4$$

La recta de regresión de y sobre x será: y – 7,5 = 1,4 (x – 9,2)

La recta de regresión de x sobre y es $x - \overline{x} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y})$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y\ \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{2\sigma_x\ \sigma_y} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\ \sigma_y} = \frac{1}{2}\,0{,}7 = 0{,}35$$

La recta de regresión de x sobre y será: x – 9,2 = 0,35 (y – 7,5)

b) Un alumno hizo 6 problemas, conocemos el valor de x = 6, obtendremos su calificación utilizando la recta de regresión de y sobre x.

y – 7,5 = 1,4 (6 – 9,2)
y – 7,5 = 1,4 (– 3,2)
y – 7,5 = – 4,48
y = 7,5 – 4,48 = 3,02

La calificación que cabe esperar para este alumno es 3,02

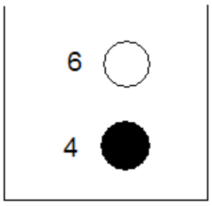
EJERCICIO B

PROBLEMA 4.2. De una urna que contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras se extraen bolas sucesivamente y sin devolución. Obtener razonadamente cuántas bolas hay que extraer para que:

a) La probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea $\frac{29}{30}$ (*2,8 puntos*).

b) La probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea 1 (*0,5 puntos*).

Solución:

Partimos de la urna  *de la que realizamos extracciones sin devolución.*

a) Llamamos A = sacar al menos una bola blanca, el suceso contrario será A´= sacar todas negras

P(A) = 1- P(A´); queremos que 1 – P(A´) = 29/30; P(A´)=1 – 29/30 = 1/30

nº de extracciones	*probabilidad*
1	$P(A') = \frac{4}{10}$
2	$P(A') = \frac{4}{10}\frac{3}{9} = \frac{4}{30}$
3	$P(A') = \frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

Por lo tanto debemos sacar tres bolas.

b) Queremos que P(A) = 1;

Como la urna contiene 4 bolas negras, para que la probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea 1 hay que sacar 5 o más bolas.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. *(3 puntos)*

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. *(7 puntos)*

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

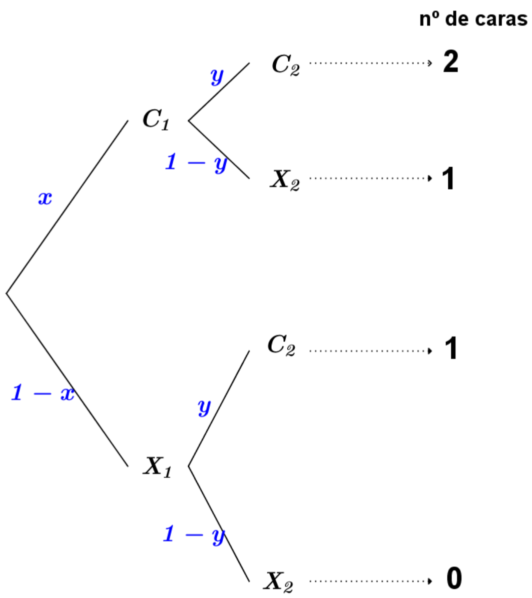
C_1 = *obtener cara en la moneda* M_1. X_1 = *obtener cruz en la moneda* M_1

C_2 = *obtener cara en la moneda* M_2. X_2 = *obtener cruz en la moneda* M_2

De los datos del problema, $P(C_1) = x \rightarrow P(X_1) = 1 - x$; $P(C_2) = y \rightarrow P(X_2) = 1 - y$.

a) Lanzamos las dos monedas al mismo tiempo y se pregunta por el número de caras obtenidas.

El árbol del problema es:



Las probabilidades pedidas son:

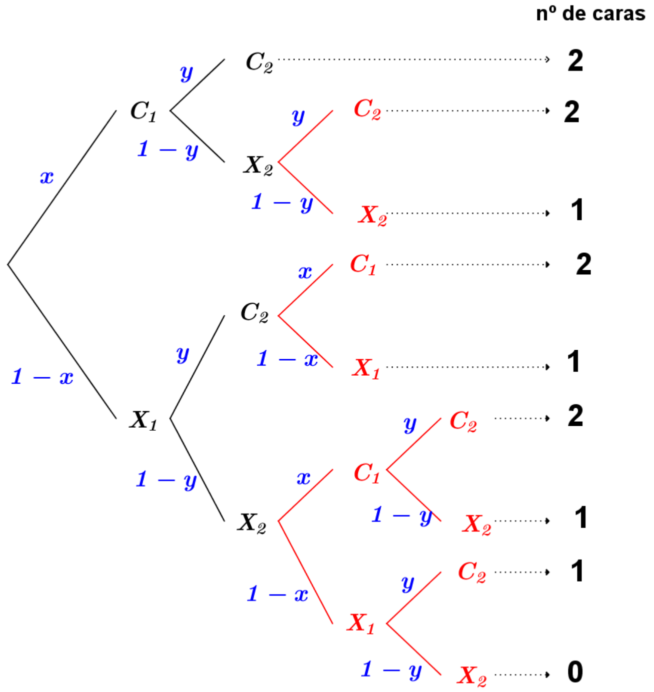
P(no obtener ninguna cara) = (1 – x) (1 – y)

P(obtener solo una cara) = x (1 – y) +(1 – x) y

P(obtener dos caras) = x y

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara.

Partiendo del árbol del apartado anterior lanzamos las monedas que salieron cruz (las nuevas ramas están en rojo):



Las probabilidades pedidas son:

***P(no obtener ninguna cara) =** $(1-x)^2\,(1-y)^2$*

***P(obtener solo una cara) =** $x\,(1-y)^2 + (1-x)^2\,y + (1-x)\,(1-y)^2\,x + (1-x)^2\,(1-y)\,y$*

***P(obtener dos caras) =** $x\,y + x\,(1-y) + (1-x)\,x\,y + (1-x)\,(1-y)\,x\,y$*

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. *(5 puntos)*

b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. *(5 puntos)*

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos referidos al fin de semana:

TN = vuelo procede del territorio nacional

UE = vuelo procede de la Unión Europea

EX = vuelo procede de fuera de la Unión Europea

R = el vuelo se retrasa $\overline{R}$ *= el vuelo no se retrasa*

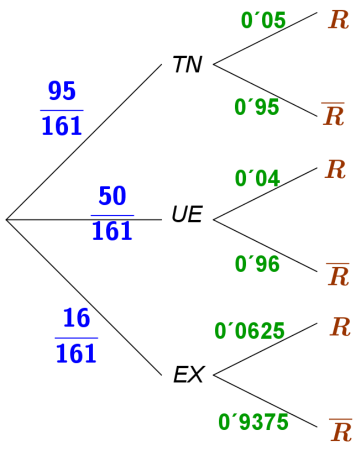
De los datos del problema, $P(TN)=\frac{95}{161} \rightarrow P(UE)=\frac{50}{161}; \quad P(EX)=\frac{16}{161}$

Si el vuelo procede del territorio nacional $\rightarrow P(R)=0'05 \quad y \quad P(\overline{R})=1-0'05=0'95$

Si el vuelo procede de la Unión Europea $\rightarrow P(R)=0'04 \quad y \quad P(\overline{R})=1-0'04=0'96$

Si el vuelo procede de fuera de la Unión Europea $\rightarrow P(R)=0'0625 \quad y \quad P(\overline{R})=1-0'0625=0'9375$

El árbol del problema es:



a) Probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.

$$P(R)=\frac{95}{161}0'05+\frac{50}{161}0'04+\frac{16}{161}0'0625=\frac{31}{44}\cong 0'0481$$

b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea.

$$P\left(UE/_{R}\right)=\frac{P(UE\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{50}{161}0'04}{\frac{31}{644}}=\frac{8}{31}\cong 0'2581$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

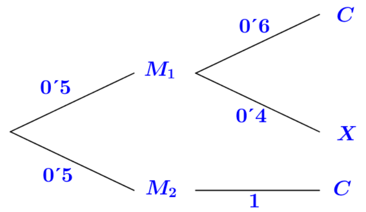
Problema 7. Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2. La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0´6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? *(3 puntos)*
   b. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? *(3 puntos)*

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2. *(4 puntos)*

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
CM_1 = obtener cara en la moneda M_1. *XM_1 = obtener cruz en la moneda M_1*
CM_2 = obtener cara en la moneda M_2. *XM_2 = obtener cruz en la moneda M_2*
De los datos del problema, $P(CM_1) = 0´6 \rightarrow P(XM_1) = 1 - 0´6 = 0´4;$ $\quad P(CM_2) = 1 \rightarrow P(XM_2) = 0.$

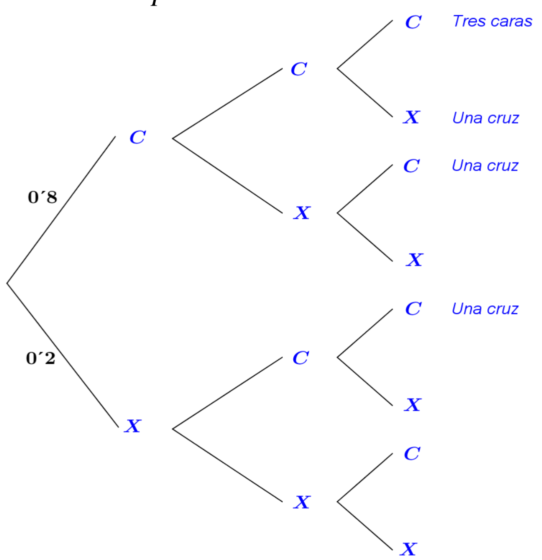
Experiencia: sacamos al azar una moneda de la bolsa que contiene las dos monedas M_1 y M_2 (las dos monedas tienen la misma probabilidad de ser extraídas), la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. El árbol sería:



La probabilidad de obtener cara o cruz sería:

P(C) = 0´5 . 0´6 + 0´5 . 1 = 0´8
P(X) = 0´5 . 0´4 = 0´2

a) Repetimos la experiencia anterior tres veces.
El árbol del problema es:



Las probabilidades pedidas son:

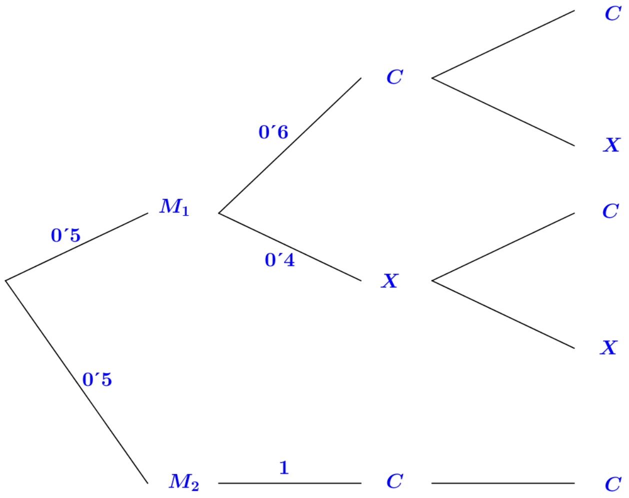
P(obtener tres caras) = 0´8 . 0´8 . 0´8 = 0´512

P(obtener una cruz) = 3 . 0´8 . 0´8 . 0´2 = 0´384

Otra forma de resolverlo sería: consideramos Y = número de cruces en tres lanzamientos → Y = B(3, 0´2) y usando la tabla de la binomial correspondiente,
P(obtener tres caras) = P(Y = 0) = 0´512
P(obtener una cruz) = P(Y = 1) = P(Y≤1) – P(Y≤0) = 0´896 – 0´512 = 0´384.

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces.

El árbol del problema es:



Las probabilidades pedidas son:

$$P\left(M_1/2\ caras\right)=\frac{P(M_1\cap 2\ caras)}{P(2\ caras)}=\frac{0´5\cdot 0´6\cdot 0´6}{0´5\cdot 0´6\cdot 0´6+0´5\cdot 1\cdot 1}=\frac{0´18}{0´68}=\frac{9}{34}\cong 0´2647$$

$$P\left(M_2/2\ caras\right)=\frac{P(M_2\cap 2\ caras)}{P(2\ caras)}=\frac{0´5\cdot 1\cdot 1}{0´68}=\frac{25}{34}\cong 0´7353$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 8. Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. *(3 puntos)*
b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. *(3 puntos)*
c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. *(4 puntos)*

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
NV = no obtener venta. *V = obtener venta*
Como "sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta" $\rightarrow$ $P(NV) = 0'3 \rightarrow P(V) = 1 - 0'3 = 0'7$

El comercial realiza 10 llamadas, usando la variable X = número de ventas en 10 llamadas, X es una variable binomial de parámetros $n = 10$ *y* $p = 0'7$.

La tabla que tenemos de la binomial no da los resultados para esta variable (es para $p \leq 0'5$*). Por lo tanto utilizaremos la siguiente variable: Y = número de ventas en 10 llamadas* $\rightarrow$ $Y = B(10, 0'3)$ *y la tabla nos da los resultados para Y.*

La relación entre estas dos variables es:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

a) Probabilidad de que consiga más de 7 ventas.
"que consiga más de 7 ventas" $\equiv X \geq 8 \equiv Y \leq 2$
$P(X \geq 8) = P(Y \leq 2) = 0'3828$

La probabilidad de que consiga más de 7 ventas es 0´3828.

b) Probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.
"que consiga al menos 5 ventas" $\equiv X \geq 5 \equiv Y \leq 5$
$P(X \geq 5) = P(Y \leq 5) = 0'9527$

La probabilidad de que consiga al menos 5 ventas es 0´9527.

c) Probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.
"que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas" $\equiv 3 \leq X \leq 8 \equiv 2 \leq Y \leq 7$
$P(3 \leq X \leq 8) = P(2 \leq Y \leq 7) = P(Y \leq 7) - P(Y \leq 1) = 0'9984 - 0'1493 = 0'8491$

La probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas es 0´8491.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Las tallas de los ciudadanos adultos de una gran ciudad siguen una distribución normal de media 1,70 y desviación típica 0,20.
a) Se selecciona al azar un ciudadano. Averigua razonadamente cuál es la probabilidad de que su talla sea superior a 1,95. *(1,5 puntos)*
b) Se selecciona al azar otro ciudadano entre los de talla superior a 1,65. Averigua razonadamente cuál es la probabilidad de que su talla sea superior a 1,95. *(1,8 puntos)*

Solución:
Llamando T = talla de los ciudadanos adultos, sabemos que T = N (1´70 , 0´20)

a)
$$P(T > 1'95) = P\left(\frac{T-1'70}{0'20} > \frac{1'95-1'70}{0'20}\right) = P\left(Z > \frac{0'25}{0'20}\right) = P(Z > 1'25) = 1 - P(Z \leq 1'25) = 1 - 0'8944 = 0'1056$$

b)
$$P\left(T > 1'95 \big/ T > 1'65\right) = \frac{P\left((T > 1'95) \cap P(T > 1'65) \right)}{P(T > 1'65)} = \frac{P(T > 1'95)}{P(T > 1'65)} = (*)$$

Calculemos el valor del denominador, el del numerador lo obtuvimos en el apartado anterior,

$$P(T > 1'65) = P\left(\frac{T-1'70}{0'20} > \frac{1'65-1'70}{0'20}\right) = P\left(Z > \frac{-0'05}{0'20}\right) = P(Z > -0'25) = P(Z < 0'25) = 0'5987$$

Por lo que el cálculo inicial será,

$$(*) = \frac{0'1056}{0'5987} = 0'1764$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Un agente comercial consigue, por término medio, vender sus productos al 40% de los clientes que visita. Selecciona al azar cinco de sus clientes para visitarlos cierto día. Averigua razonadamente:
a) La probabilidad de que no venda sus productos a ninguno de esos cinco clientes. (*1,1 puntos*)
b) La probabilidad de que venda sus productos sólo a dos de esos cinco clientes. (*1,1 puntos*)
c) La probabilidad de que venda sus productos sólo a cuatro de esos cinco clientes. (*1,1 puntos*)

Solución:

Definimos la siguiente variable, X = número de clientes, de los cinco, a los que vende su producto.
X es una variable aleatoria binomial de parámetros n = 5 y p = 0´4. Es decir X = B (5 , 0´4)

a) Suceso A = no vende su producto a ninguno de esos cinco clientes,

$$P(A) = P(X=0) = \binom{5}{0} 0'4^0\ 0'6^5 = 0'0776$$

b) Suceso B = vende sus productos sólo a dos de esos cinco clientes,

$$P(B) = P(X=2) = \binom{5}{2} 0'4^2\ 0'6^3 = \frac{5\,.\,4}{2}\, 0'4^2\ 0'6^3 = 0'3456$$

c) Suceso C = vende sus productos sólo a cuatro de esos cinco clientes,

$$P(C) = P(X=4) = \binom{5}{4} 0'4^4\ 0'6^1 = \frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}\, 0'4^4\ 0'6 = 0'0768$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Las notas de Filosofía y de Literatura de los 7 alumnos de una clase, listadas por columnas, son:

Filosofía	3	6	7	5	8	4	8
Literatura	5	8	7	7	9	5	5

a) Calcular el valor medio y la desviación típica de las notas de Filosofía y de las notas de Literatura *(1,3 puntos).*
b) Obtener el coeficiente de correlación entre las notas de Filosofía y de Literatura, explicando su significado *(0,7 puntos).*
c) Al prescindir de la última columna el coeficiente de correlación es 0,9. Explicar detalladamente por qué es mayor que el obtenido en el apartado b) *(1,3 puntos).*

Solución:
Obtengamos la tabla de valores que permitirá calcular los parámetros de los apartados a) y b)
Llamamos x = nota de Filosofía y = nota de Literatura

	x	y	x^2	y^2	$x\,y$
	3	5	9	25	15
	6	8	36	64	48
	7	7	49	49	49
	5	7	25	49	35
	8	9	64	81	72
	4	5	16	25	20
	8	5	64	25	40
Σ	41	46	263	318	279

a)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{41}{7} = 5'857 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{46}{7} = 6'571$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{263}{7} - \bar{x}^2} = 1'807 \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{318}{7} - \bar{y}^2} = 1'498$$

Los resultados obtenidos son,

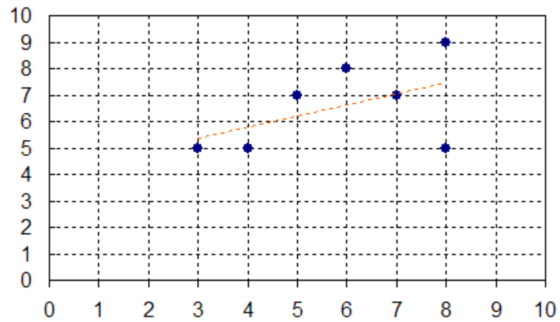
	Filosofía	*Literatura*
valor medio	*5´857*	*6´571*
desviación típica	*1´807*	*1´498*

b) El coeficiente de correlación entre las notas de las dos asignaturas es

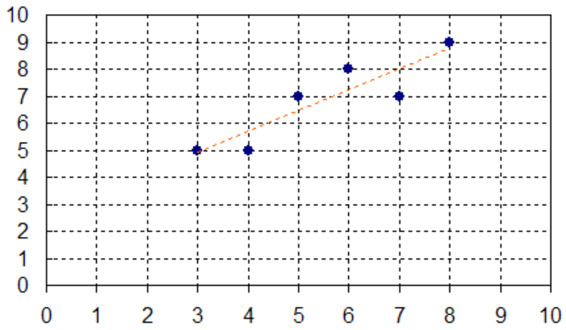
$$\rho = \frac{\sigma_{x\,y}}{\sigma_x\ \sigma_y} \qquad \sigma_{x\,y} = \frac{\sum x_i\ y_i}{n} - \bar{x}\ \bar{y} = \frac{279}{7} - \bar{x}\ \bar{y} = 1'367 \qquad \rho = \frac{1'367}{1'807\,.\,1'498} = 0'505$$

Como el coeficiente de correlación es 0´505 la correlación entre las dos notas es débil. Hay poca relación entre las notas de Filosofía y Literatura de los siete alumnos estudiados.

c) Realizamos la representación gráfica de las notas de los 7 alumnos,



Realizamos la representación gráfica de las notas prescindiendo del último,



En esta última representación la nube de puntos está agrupada alrededor de una recta imaginaria (la de regresión) porque su correlación es fuerte (0´9).
Al añadir a la representación el punto correspondiente al séptimo alumno, este punto queda alejado de la nube anterior y por lo tanto la correlación entre las notas de los 7 alumnos es débil.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. El peso medio de un grupo de 500 estudiantes es 68,5 kilos y la desviación típica, 10 kilos. Suponiendo que los pesos siguen una distribución normal, se pide:

a) ¿Cuántos estudiantes pesan entre 48 y 71 kilos? (*1 punto*).

b) ¿Cuántos estudiantes pesan más de 91 kilos? (*1 punto*).

c) Se eligen 5 alumnos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 de ellos pesen más de 75 kilos? (*1,3 puntos*).

Solución:

Llamando X = peso de un estudiante, X es una variable aleatoria / X = N (68´5 , 10)

(Nota: como X es una v.a. continua se cumple que P (X < a) = P (X ≤ a))

a) Calculamos, en primer lugar, la probabilidad de que un estudiante pese entre 48 y 71 kilos,

$$P(48 < X < 71) = P\left(\frac{48-68'5}{10} < \frac{X-68'5}{10} < \frac{71-68'5}{10}\right) = P(-2'05 < Z < 0'25) = P(Z < 0'25) - P(Z < -2'05) =$$

$$= P(Z < 0'25) - (\,1 - P(Z < 2'05)\,) = 0'5987 - (1 - 0'9798) = 0'5987 - 0'0202 = 0'5785$$

n = 500 . 0´5785 = 289´25. Es decir, 289 estudiantes pesan entre 48 y 71 kilos.

b) Calculamos, en primer lugar, la probabilidad de que un estudiante pese más de 91 kilos,

$$P(X > 91) = P\left(\frac{X-68'5}{10} > \frac{91-68'5}{10}\right) = P(Z > 2'25) = 1 - P(Z < 2'25) = 1 - 0'9878 = 0'0122$$

n= 500 . 0´0122 = 6´1. Es decir, 6 estudiantes pesan más de 91 kilos.

c) Consideramos la v. a. Y = número de estudiantes que pesan más de 75 kilos de un grupo de 5.

Y es una v. a. binomial de parámetros n = 5 y p = P(X > 75)

$$P(X > 75) = P\left(\frac{X-68'5}{10} > \frac{75-68'5}{10}\right) = P(Z > 0'65) = 1 - P(Z < 0'65) = 1 - 0'7422 = 0'2578$$

Luego Y = B (5 , 0´2578) y q = 0´7422

El suceso "exactamente dos de ellos pesen más de 75 kilos" corresponde a Y = 2

$$P(Y = 2) = \binom{5}{2} 0'2578^2 \;.\; 0'7422^3 = 10 \,.\, 0'2578^2 \;.\; 0'7422^3 = 0'271724423 \approx 0'2717$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. a) Obtener el plano que pasa por el punto P(-2,4,-3) y es perpendicular a la recta r : (x,y,z) = (1,2,0) + t (1,-2,1) *(1 punto).*
b) Calcular la distancia entre el punto P y la recta r *(2,3 puntos).*

Solución:

a) *Como el plano buscado es perpendicular a la recta r , el vector director de la recta (1,-2,1) será ortogonal al plano, por lo tanto la ecuación del plano será $x - 2y + z + D = 0$*
el plano debe pasar por el punto P(-2,4,-3), luego $-2 - 2 \cdot 4 + (-3) + D = 0$, $-2 - 8 - 3 + D = 0$
$-13 + D = 0$, es decir $D = 13$
El plano tendrá de ecuación $x - 2y + z + 13 = 0$

b) *Para calcular la distancia del punto P a la recta r utilizamos la siguiente fórmula*

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{RP} \times \vec{d}_r\right|}{\left|\vec{d}_r\right|}$$ *siendo R un punto de la recta r y $\vec{d}_r$ el vector director de r.*

En nuestro problema R(1,2,0), P(-2,4,-3), $\vec{RP}(-3,2,-3)$ *y* $\vec{d}_r(1,-2,1)$.

$$\vec{RP} \times \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} = (-4,0,4)$$

$$\left|\vec{RP} \times \vec{d}_r\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\left|\vec{d}_r\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Por lo tanto, $d(P,r) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{12}}{6} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ *u.l.*

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Consideramos los puntos: A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1) y D = (2,1,2). Se pide

a) Hallar el área del triángulo de vértices B, C y D (*1,1 puntos*).
b) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D (*1,1 puntos*).
c) Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por los puntos B, C y D (*1,1 puntos*).

Solución:

a) *Para calcular el área del triángulo de vértices B, C y D usamos la fórmula*

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|$$

Calculamos los vectores indicados,

$$\overrightarrow{BC}=(0,0,1)-(0,1,0)=(0,-1,1) \qquad y \qquad \overrightarrow{BD}=(2,1,2)-(0,1,2)=(2,0,2)$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$Luego \quad A=\frac{1}{2}2\sqrt{3}=\sqrt{3}\ \ u.a.$$

b) *El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D se obtiene como sigue*

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=(C_1-C_2)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{6}(-1-1-2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

El volumen del tetraedro es $\frac{2}{3}$ *u.v.*

c) *Dado un punto A(x₀,y₀,z₀) y un plano π: a x + b y + c z + d = 0*

$$d(a,\pi)=\frac{|a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Cálculo del plano π:

El plano π pasa por los puntos B, C y D; obtenemos los vectores $\overrightarrow{BC}$ *y* $\overrightarrow{BD}$
y calculamos su producto vectorial (ya obtenido en el apartado a)), el vector que obtenemos (-2,2,2) es perpendicular al plano π.

Del plano π conocemos: un punto, por ejemplo, B (0,1,0) y
un vector normal al plano (-2,2,2)

La ecuación del plano π será:

$$-2(x-0)+2(y-1)+2(z-0)=0$$
$$-2x+2y-2+2z=0$$
$$-x+y+z-1=0$$

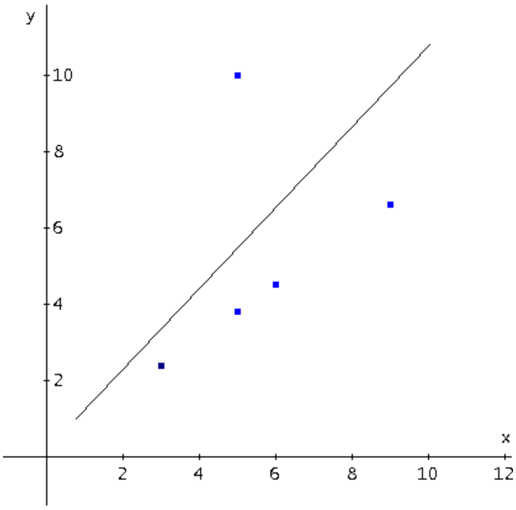
Finalmente,

$$d(a,\pi)=\frac{|-1+0+0-1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ u.l.$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.2. Las coordenadas x e y de los puntos (6; 4,5), (3; 2,4), (9; 6,6) y (5; 10) son las calificaciones de cinco alumnos en Matemáticas y Física. a) Representar los 5 puntos en unos ejes OXY y dibujar aproximadamente la recta de regresión de y sobre x (*0,5 puntos*) y deducir razonadamente a cuál de los números -1, -0,5 ó 0,5 está más próximo el coeficiente de correlación (*1 punto*).
b) Calcular el coeficiente de correlación de los cuatro primeros alumnos *(0,3 puntos)*, explicando el resultado obtenido e interpretándolo gráficamente *(1,5 puntos).*

Solución:
a)



Como es una recta de pendiente positiva el coeficiente de correlación está más próximo a 0'5

b)

x	y	x^2	y^2	x y
3	2,4	9	5,76	7,2
5	3,8	25	14,44	19,0
6	4,5	36	20,25	27,0
9	6,6	81	43,56	59,4
23	17,3	151	84,01	112,6

$$\bar{x} = \frac{23}{4} = 5'75$$

$$\bar{y} = \frac{17'3}{4} = 4'325$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{151}{4} - 5'75^2} = 2'1650635$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{84'01}{4} - 4'325^2} = 1'5155445$$

$$\sigma_{x\,y} = \frac{112'6}{4} - 5'75 \,.\, 4'325 = 3'28125$$

$$\rho = \frac{3'28125}{2'1650635 \,.\, 1'5155445} = 0'9999$$

Como el coeficiente de correlación obtenido es prácticamente 1 posiblemente los cuatro puntos estén situados en una recta; veamos si es así.

Obtengamos la ecuación de la recta que pasa por dos de ellos, por ejemplo, (3, 2'4) y (5, 3'8)

$$y - 3'8 = \frac{3'8 - 2'4}{2}(x - 5)$$

$$y - 3'8 = 0'7\ (x - 5)$$

$$y = 3'8 + 0'7\ (x - 5)$$

Veamos si los otros dos puntos pertenecen a esta recta

para $x = 6 \ \rightarrow\ y = 3'8 + 0'7(6-5) = 3'8 + 0'7 = 4'5$ *el punto (6, 4'5) pertenece*

para $x = 9 \ \rightarrow\ y = 3'8 + 0'7(9-5) = 3'8 + 2'8 = 6'6$ *el punto (9, 6'6) pertenece.*

Los cuatro puntos pertenecen a la misma recta, la relación entre ellos es funcional.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.2. El peso de los estudiantes de una universidad se distribuye normalmente, con media aritmética 65 kilos y desviación típica 1,5 kilos. Obtener razonadamente:

a) El tanto por ciento de estudiantes con peso entre 63,5 y 68 kilos (*1,5 puntos*).

b) La probabilidad de que al elegir al azar 3 estudiantes dos pesen más de 68 kilos (*1,8 puntos*).

Solución:

Llamando M = peso de los estudiantes, sabemos que M = N (65 , 1'5).

a)

$$P(63'5 < M < 68) = P\left(\frac{63'5-65}{1'5} < \frac{M-65}{1'5} < \frac{68-65}{1'5}\right) = P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) =$$

$$= P(Z < 2) - [1 - P(Z < 1)] = 0'9772 - 1 + 0'8413 = 0'8185$$

Por lo tanto el 81'85% de los estudiantes tendrá un peso entre 63'5 y 68 kilos.

b)

$$P(M > 68) = P\left(\frac{M-65}{1'5} > \frac{68-65}{1'5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$$

Llamamos X = número de estudiantes que pesan más de 68 kilos de un grupo de tres.

X = B (3 , 0'0228)

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} 0'0228^2 \; 0'9772 = 0'0015$$

Luego la probabilidad pedida es 0'0015.