Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2024ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2024
MATEMATIKA II	**MATEMÁTICAS II**

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

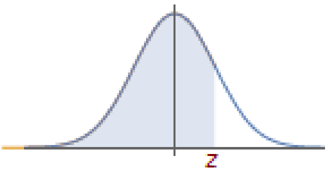
No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

UNIBERTSITATERA
SARTZEKO EBALUAZIOA

2024ko EZOHIKOA

MATEMATIKA II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak
Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

(1 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3 \\ \alpha x - 5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible,

(a) (0,75 p) cuando $\alpha = 0$.

(b) (0,75 p) cuando $\alpha = 1$.

Ejercicio B1

(2,5 p) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores del parámetro *m*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 2 & 1 \\ m & -2 & m-2 & 1 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -2 + 3\lambda, \\ z = -1 + \lambda. \end{cases}$$

(a) **(1 p)** Determina su posición relativa.

(b) **(1,5 p)** Si dichas rectas se cortan, calcula el ángulo mínimo formado entre ambas. En caso de que no se corten, calcula la distancia entre ambas rectas.

Ejercicio B2

Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10$$

(a) **(0,75 p)** Calcula el valor del parámetro A para que la recta *r* y el plano π sean paralelos.

(b) **(0,75 p)** Si $A = 21$, calcula la intersección del plano π y la recta *r*.

(c) **(0,75 p)** Si $A = 1$, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función *f* en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 2$ son paralelas. Además, *f* tiene un extremo relativo cuando $x = 1$ y $f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$ para los valores de los parámetros A = –3, B = 0 y C = 4.

Ejercicio B3

Sea $f(x)=2xe^{-2x^2}$.

(a) **(1 p)** Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
(b) **(1 p)** Encuentra los extremos relativos de *f* y razona si son máximos o mínimos.
(c) **(0,5 p)** Calcula las asíntotas de *f*.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

(2,5 p) Calcula la siguiente integral, y explica el método empleado:

$$\int x\ln^2 x dx$$

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y=\frac{x^2}{3}$, $y=x^2+2x$ e $y=3$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por dichas curvas.
(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.

(a) **(0,5 p)** Identifica la distribución correspondiente al número de adultos que quedan protegidos, y determina sus parámetros.
(b) **(1 p)** Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.
(c) **(1 p)** Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.

Ejercicio B5

Sean A y B sucesos aleatorios independientes, siendo sus probabilidades $P(A)=0,7$ y $P(B)=0,1$, y sean $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los sucesos complementarios de A y B respectivamente. Calcula las siguientes probabilidades razonadamente, e indica claramente el proceso o ley aplicada:

(a) **(0,5 p)** $P(A\cup B)$,

(b) **(0,5 p)** $P(\overline{A}\cup\overline{B})$,

(c) **(0,5 p)** $P(\overline{A}\cap\overline{B})$,

(d) **(0,5 p)** $P(A\cap\overline{B})$,

(e) **(0,5 p)** $P(\overline{A}/\overline{B})$.

.

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
(1 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x+4y+z=3 \\ \alpha x-5y+2z=-2 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible,
(a) (0,75 p) cuando $\alpha=0$.
(b) (0,75 p) cuando $\alpha=1$.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ \alpha & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$A/B=\begin{pmatrix} \alpha & 4 & 1 & 3 \\ \alpha & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ \alpha & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-15\alpha+16-\alpha+10-12\alpha+2\alpha=-26\alpha+26$$

$$|A|=0 \Rightarrow -26\alpha+26=0 \Rightarrow 26\alpha=26 \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{26}{26}=1}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.
Transformamos la matriz ampliada A/B en otra matriz triangular equivalente para que sea más fácil estudiar el rango de A y A/B.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&4&1&3\\1&-5&2&-2\\2&-1&3&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^a-Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}1&-5&2&-2\\-1&-4&-1&-3\\\hline 0&-9&1&-5\end{array}\rightarrow \text{Nueva fila } 2^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-2\cdot Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}2&-1&3&1\\-2&-8&-2&-6\\\hline 0&-9&1&-5\end{array}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&4&1&2\\0&-9&1&-5\\0&-9&1&-5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-Fila\,2^a\\ \begin{array}{cccc}0&-9&1&-5\\0&9&-1&5\\\hline 0&0&0&0\end{array}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix}1&4&1\\0&-9&1\\0&0&0\end{matrix}}_{A}\begin{matrix}2\\-5\\0\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha\neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $\alpha=1$ el sistema es compatible indeterminado.

(a) Para $\alpha=0$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases}4y+z=3\\-5y+2z=-2\\2x-y+3z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=3-4y\\-5y+2z=-2\\2x-y+3z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5y+2(3-4y)=-2\\2x-y+3(3-4y)=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-5y+6-8y=-2\\2x-y+9-12y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-13y=-8\rightarrow \boxed{y=\frac{8}{13}}\\2x-13y=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-13\frac{8}{13}=-8\\z=3-4\frac{8}{13}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-8=-8\\\boxed{z=\frac{7}{13}}\end{cases}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow\boxed{x=0}$$

La solución es $x=0;\ y=\frac{8}{13};\ z=\frac{7}{13}$.

(b)Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2). Resolvemos el sistema partiendo del sistema de ecuaciones triangular obtenido en el estudio de la compatibilidad.

$$\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{matrix}}^{A/B} \right) \Rightarrow \begin{cases} x+4y+z=3 \\ -9y+z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y+z=3 \\ z=9y-5 \end{cases} \Rightarrow x+4y+9y-5=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+13y=8 \Rightarrow x=8-13y \Rightarrow \begin{cases} x=8-13\lambda \\ y=\lambda \\ z=9\lambda-5 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones son $x=8-13\lambda,\ y=\lambda,\ z=9\lambda-5$; para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio B1

(2,5 p) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores del parámetro *m*:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ m & 2-m & 2 & 1\\ m & -2 & m-2 & 1\end{pmatrix}$$

Utilizando el método de Gauss convertimos la matriz A en otra equivalente con la mayor cantidad de ceros y si es posible triangular.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ m & 2-m & 2 & 1\\ m & -2 & m-2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^{a}-Fila\,2^{a}\\ \begin{array}{cccc}m & -2 & m-2 & 1\\ -m & -2+m & -2 & -1\\ \hline 0 & m-4 & m-4 & 0\end{array}\rightarrow \text{Nueva fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ m & 2-m & 2 & 1\\ 0 & m-4 & m-4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a}\\ \begin{array}{cccc}m & 2-m & 2 & 1\\ -1 & -3 & -4 & -1\\ \hline m-1 & -1-m & -2 & 0\end{array}\rightarrow \text{Nueva fila }2^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ m-1 & -1-m & -2 & 0\\ 0 & m-4 & m-4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Columna\,2^{a}-Columna\,3^{a}\\ \begin{array}{cc|l}3 & -4 & -1\\ -1-m & 2 & 1-m\rightarrow Nueva\,columna\,2^{a}\\ m-4 & -m+4 & 0\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & 1\\ m-1 & 1-m & -2 & 0\\ 0 & 0 & m-4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Columna\,1^{a}+Columna\,2^{a}\\ \begin{array}{cc|l}1 & -1 & 0\\ m-1 & 1-m & 0\rightarrow Nueva\,columna\,1^{a}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 1-m & -2 & 0\\ 0 & 0 & m-4 & 0\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante del menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna.

$$\begin{vmatrix}-1 & 4 & 1\\ 1-m & -2 & 0\\ 0 & m-4 & 0\end{vmatrix}=0+0+(1-m)(m-4)-0-0-0=(1-m)(m-4)$$

Este determinante se anula cuando $m=1$ o $m=4$.

Distinguimos tres casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 1$ o $m \neq 4$.
El menor de orden 3 tiene determinante no nulo y el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $m = 1$.
En este caso el menor de orden 3 tiene determinante nulo y el rango de la matriz A es menor de 3.

La matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera y segunda columna y la tercera fila → $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$.

El rango de la matriz A es 2.

CASO 3. $m = 4$.
En este caso el menor de orden 3 tiene determinante nulo y el rango de la matriz A es menor de 3.

La matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera y segunda columna y la tercera fila → $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$.

El rango de la matriz A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ o $m \neq 4$ el rango de A es 3 y si $m = 1$ o $m = 4$ el rango de A es 2.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -2+3\lambda, \\ z = -1+\lambda. \end{cases}$$

(a) **(1 p)** Determina su posición relativa.
(b) **(1,5 p)** Si dichas rectas se cortan, calcula el ángulo mínimo formado entre ambas. En caso de que no se corten, calcula la distancia entre ambas rectas.

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -2+3\lambda \\ z = -1+\lambda. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (1,3,1) \\ Q_s(0,-2,-1) \end{cases}$$

Comprobamos si los vectores directores tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,3,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1}$$

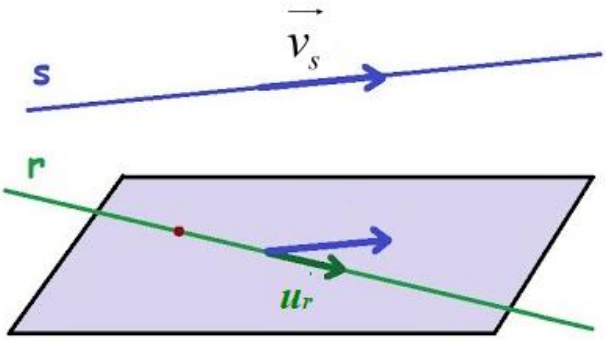
No tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.
Hallamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-2,-1) - (1,-1,0) = (-1,-1,-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,3,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-1,-1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2+1-3+2+1 = -4 \neq 0$$

Como el producto mixto no es nulo las rectas se cruzan. Las rectas tienen distinta dirección, pero están en planos paralelos.

b) Hallamos la distancia entre las rectas. Para ello hallamos el plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(1,2,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(1,3,1)\\ P_r(1,-1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1)-(y+1)+3z-2z-(y+1)+3(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2-y-1+3z-2z-y-1+3x-3=0\Rightarrow \boxed{\pi:5x-2y+z-7=0}$$

La distancia entre las rectas es la distancia del punto $Q_s(0,-2,-1)$ al plano π.

$$\left.\begin{array}{l}Q_s(0,-2,-1)\\ \pi:5x-2y+z-7=0\end{array}\right\}\Rightarrow d(Q_s,\pi)=\frac{|5\cdot 0-2(-2)-1-7|}{\sqrt{5^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{30}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}\simeq 0.73$$

La distancia entre las rectas r y s tiene un valor de $\frac{2\sqrt{30}}{15}\simeq 0.73$ unidades.

Ejercicio B2
Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10$$

(a) **(0,75 p)** Calcula el valor del parámetro A para que la recta r y el plano π sean paralelos.
(b) **(0,75 p)** Si $A = 21$, calcula la intersección del plano π y la recta r.
(c) **(0,75 p)** Si $A = 1$, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

a) Para que la recta y el plano π sean paralelos el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares, por lo que su producto escalar debe ser nulo. Hallamos ambos vectores y le aplicamos esta condición.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 4z - 1 = y \end{cases} \Rightarrow 2x - x - 4x + 1 + z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -1 + 3x \Rightarrow y = x + 4(-1 + 3x) - 1 = x - 4 + 12x - 1 = 13x - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + 13\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,13,3) \\ P_r(0,-5,-1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x - 3y + Az = 10 \Rightarrow \vec{n} = (2,-3,A)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2,-3,A) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,13,3) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{u_r} \to \vec{n} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2,-3,A)(1,13,3) = 0 \Rightarrow 2 - 39 + 3A = 0 \Rightarrow 3A = 37 \Rightarrow \boxed{A = \frac{37}{3}}$$

Falta comprobar que la recta no está contenida en el plano. Para ello comprobamos que el punto $P_r(0,-5,-1)$ de la recta no pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,-5,-1) \\ \pi \equiv 2x - 3y + \frac{37}{3}z = 10 \\ ¿P_r \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow ¿2 \cdot 0 - 3(-5) + \frac{37}{3}(-1) = 0? \Rightarrow ¿15 - \frac{37}{3} = 0?$$

No se cumple la igualdad, por lo que el punto no pertenece al plano. La recta y el plano son paralelos para $A = \frac{37}{3}$.

b) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+4z=1 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x-3y+21z=10 \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} 2x-y+z=0 \\ x-y+4z=1 \\ 2x-3y+21z=10 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} 2x-y+z=0 \\ x=1+y-4z \\ 2x-3y+21z=10 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$$

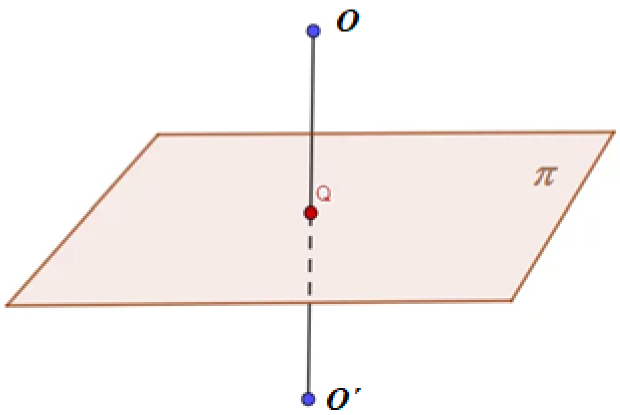
$$\Rightarrow \begin{matrix} 2(1+y-4z)-y+z=0 \\ 2(1+y-4z)-3y+21z=10 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} 2+2y-8z-y+z=0 \\ 2+2y-8z-3y+21z=10 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y-7z=-2 \\ -y+13z=8 \end{matrix} \Bigg\}$$

$$6z=6 \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow y-7=-2 \Rightarrow \boxed{y=5} \Rightarrow \boxed{x=1+5-4=2}$$

El punto de intersección de recta y plano es A(2, 5. 1).

c) Nos piden hallar el punto O´ del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por O(0, 0, 0), después hallamos el punto Q de corte de recta y plano. El punto Q es el punto medio del segmento $\overline{OO´}$. La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : 2x-3y+z=10 \Rightarrow \vec{n}=(2,-3,1)$$

$$\begin{matrix} \vec{v}=\vec{n}=(2,-3,1) \\ O(0,0,0)\in r \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{matrix} \pi : 2x-3y+z=10 \\ r: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 4\lambda+9\lambda+\lambda=10 \Rightarrow 14\lambda=10 \Rightarrow \lambda=\frac{10}{14}=\frac{5}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{7} \\ y = \dfrac{-15}{7} \\ z = \dfrac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{10}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

Para obtener el punto O´ simétrico de O respecto del plano π le sumamos al punto Q el vector $\overrightarrow{OQ}$.

$$\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{10}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{5}{7}\right) - (0,0,0) = \left(\frac{10}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

$$O' = Q + \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{10}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{10}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{20}{7}, \frac{-30}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

El punto simétrico de O respecto del plano π tiene coordenadas $O'\left(\frac{20}{7}, \frac{-30}{7}, \frac{10}{7}\right)$.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función *f* en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=2$ son paralelas. Además, *f* tiene un extremo relativo cuando $x=1$ y $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$ para los valores de los parámetros A = –3, B = 0 y C = 4.

(a) Si las rectas tangentes a la gráfica de la función *f* en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=2$ son paralelas implica que la pendiente es la misma → $f'(-1)=f'(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(-1)=f'(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-1)^2+2A(-1)+B=3\cdot 2^2+2A\cdot 2+B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-2A+B=12+4A \Rightarrow \boxed{B-6A=9}$$

Si *f* tiene un extremo relativo cuando $x=1$ la derivada debe anularse para ese valor → $f'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+2A+B=0 \Rightarrow \boxed{B+2A=-3}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y determinamos el valor de los parámetros A y B.

$$\left.\begin{array}{l} B-6A=9 \\ B+2A=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B-6A=9 \\ B=-2A-3 \end{array}\right\} \Rightarrow -2A-3-6A=9 \Rightarrow -8A=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{12}{-8}=\frac{-3}{2}} \Rightarrow \boxed{B=-2\frac{-3}{2}-3=0}$$

Nos falta por determinar el valor de C.

Sabemos que $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$. Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2$$

Lo usamos para hallar el valor de C.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow 0^3+A\cdot 0^2+B\cdot 0+C=2 \Rightarrow \boxed{C=2}$$

Los parámetros son $A=\frac{-3}{2}$, $B=0$ y $C=2$.

(b)Para los valores de los parámetros A = –3, B = 0 y C = 4 la función queda $f(x)=x^3-3x^2+4$.

La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$ tiene la ecuación $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$. Hallamos el valor de la función y de su derivada en $x=-1$ y determinamos la ecuación de la recta tangente.

$$f(x)=x^3-3x^2+4 \Rightarrow f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=-1-3+4=0$$

$$f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)=3+6=9$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=0 \\ f'(-1)=9 \\ y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=9(x+1) \Rightarrow \boxed{y=9x+9}$$

La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$ tiene la ecuación $y=9x+9$.

Ejercicio B3

Sea $f(x)=2xe^{-2x^2}$.

(a) **(1 p)** Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
(b) **(1 p)** Encuentra los extremos relativos de *f* y razona si son máximos o mínimos.
(c) **(0,5 p)** Calcula las asíntotas de *f*.

(a) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=2xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x)=2e^{-2x^2}+2x\cdot(-4x)e^{-2x^2}=2e^{-2x^2}-8x^2e^{-2x^2}=\left(2-8x^2\right)e^{-2x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \left(2-8x^2\right)e^{-2x^2}=0 \Rightarrow \left\{e^{-2x^2}\neq 0\right\} \Rightarrow 2-8x^2=0 \Rightarrow 1-4x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x=\frac{-1}{2}$ y $x=\frac{1}{2}$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

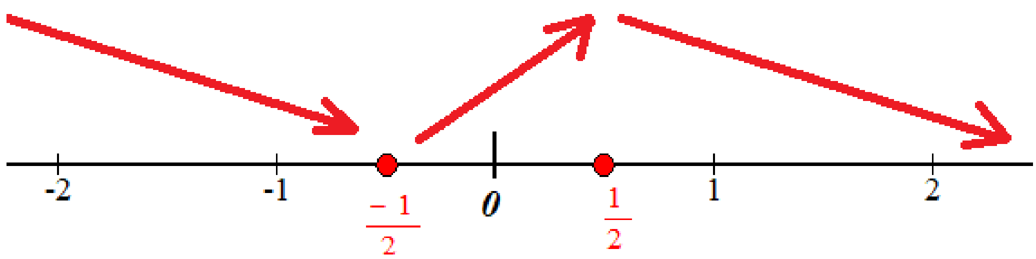
- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale

  $f'(-1)=\left(2-8(-1)^2\right)e^{-2(-1)^2}=-6e^{-2}=\frac{-6}{e^2}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale

  $f'(0)=\left(2-8\cdot 0^2\right)e^{-2\cdot 0^2}=2>0$. La función crece en $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

  $f'(1)=\left(2-8\cdot 1^2\right)e^{-2\cdot 1^2}=-6e^{-2}=\frac{-6}{e^2}<0$. La función decrece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y crece en $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(b) Por lo visto en el apartado anterior la función tiene un mínimo relativo en $x=\frac{-1}{2}$ y un máximo relativo en $x=\frac{1}{2}$. Como $f\left(\frac{-1}{2}\right)=2\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=-e^{-1/2}=\frac{-1}{\sqrt{e}}$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{\sqrt{e}}\right)$ y el máximo relativo es $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

(c) **Asíntota vertical**. $x=a$

El dominio de la función $f(x)=2xe^{-2x^2}$ es todo $\mathbb{R}$. No tiene asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2xe^{-2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x^2}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4xe^{2x^2}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

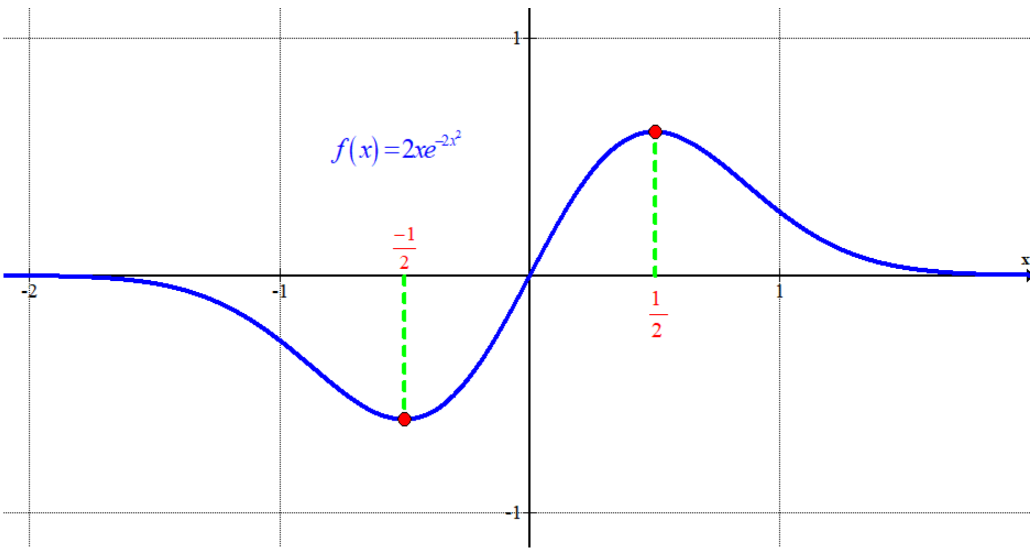
$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2xe^{-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{2x^2}}=\frac{-\infty}{+\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4xe^{2x^2}}=\frac{2}{-\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.



CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
(2,5 p) Calcula la siguiente integral, y explica el método empleado:

$$\int x\ln^2 x dx$$

Resolvemos la integral usando del método de integración por partes.

$$\int x\ln^2 x dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln^2 x \to du = 2\frac{1}{x}\ln x dx\\ dv = xdx \to v=\int xdx = \frac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2}2\frac{1}{x}\ln x dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \int x\ln x dx = \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int x\ln x dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x \to du = \frac{1}{x}dx\\ dv = xdx \to v=\int xdx = \frac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =\\ =\frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4}\end{array}}$$

$$\ldots = \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4}\right) = \boxed{\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\cdot\ln x + \frac{x^2}{4} + K}$$

Aplicando dos veces el método de integración por partes hemos obtenido que $\int x\ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\cdot\ln x + \frac{x^2}{4} + K$.

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y=\frac{x^2}{3}$, $y=x^2+2x$ e $y=3$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por dichas curvas.
(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

(a) Averiguamos donde se cortan sus gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{3} \\ y=x^2+2x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3}=x^2+2x \Rightarrow x^2=3x^2+6x \Rightarrow 2x^2+6x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x+3=0 \to \boxed{x=-3} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{3} \\ y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3}=3 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-3} \\ \boxed{x=3} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+2x \\ y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-3)}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-2+4}{2}=\boxed{1=x} \\ x=\frac{-2-4}{2}=\boxed{-3=x} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos las gráficas y el recinto limitado por ellas en el primer cuadrante.

$y=x^2+2x$

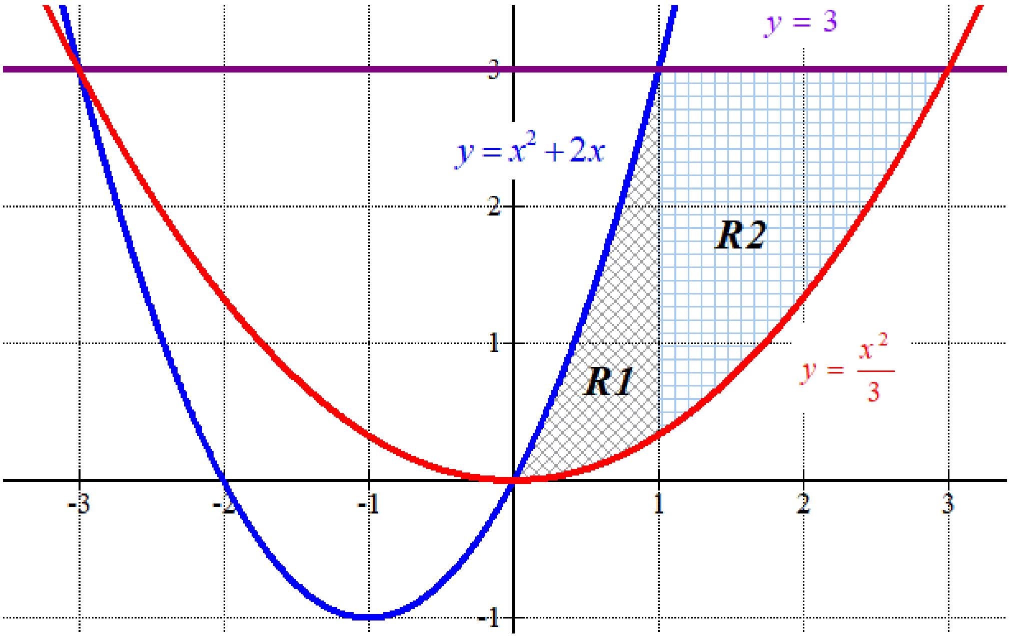
x	$y=x^2+2x$
-3	3
0	0
1	3
2	8
3	18

$y=\frac{x^2}{3}$

x	$y=x^2/3$
-3	3
0	0
1	$1/3$
2	$4/3$
3	3

$y=3$

x	$y=3$
-3	3
0	3
1	3
2	3
3	3



(b) El recinto limitado por las curvas lo dividimos en dos partes.
Hallamos el valor del área de R1.

$$Área\ \ R1 = \int_0^1 x^2 + 2x - \frac{x^2}{3}dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{3} + 2xdx = \left[\frac{2x^3}{9} + x^2\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{2 \cdot 1^3}{9} + 1^2\right] - \left[\frac{2 \cdot 0^3}{9} + 0^2\right] = \frac{2}{9} + 1 = \boxed{\frac{11}{9} \simeq 1.22\ u^2}$$

Hallamos el valor del área de R2.

$$Área\ \ R2 = \int_1^3 3 - \frac{x^2}{3}dx = \left[3x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[3x - \frac{x^3}{9}\right]_1^3 =$$

$$= \left[3 \cdot 3 - \frac{3^3}{9}\right] - \left[3 \cdot 1 - \frac{1^3}{9}\right] = 9 - 3 - 3 + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{28}{9} \simeq 3.111\ u^2}$$

El área total es la suma de las áreas obtenidas → $\frac{11}{9} + \frac{28}{9} = \frac{39}{9} = \frac{13}{3} \simeq 4.33u^2$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.
(a) **(0,5 p)** Identifica la distribución correspondiente al número de adultos que quedan protegidos, y determina sus parámetros.
(b) **(1 p)** Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.
(c) **(1 p)** Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.

(a) Llamamos X = "Número de adultos protegidos contra la tuberculosis pulmonar activa de un grupo de 3289 adultos"
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 3289 y la probabilidad de éxito es p = 0.54. X = B(3289, 0.54)
Como el número de repeticiones es muy alto esta variable binomial se puede aproximar con una distribución normal de media $\mu = np = 3289 \cdot 0.54 = 1776.06$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3289 \cdot 0.54 \cdot 0.46} \simeq 28.58$. Y = N(1776.06, 28.58).
Esta aproximación es buena pues $np = 1776.06 > 5$ y $nq = 3289 \cdot 0.46 = 1512.94 > 5$.

(b) Nos piden calcular $P(X = 1800)$.

$$P(X = 1800) = \binom{3289}{1800} 0.54^{1800} \cdot 0.46^{1489} = \text{¡}\mathit{Error\ en\ calculadora}\text{!}$$

Usamos la aproximación a la normal para calcular la probabilidad pedida.

$$P(X = 1800) = P(1799.5 \le Y \le 1800.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{1799.5 - 1776.06}{28.58} \le Z \le \frac{1800.5 - 1776.06}{28.58}\right) = P(0.82 \le Z \le 0.86)$$

$$= P(Z \le 0.86) - P(Z \le 0.82) = \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = 0.8051 - 0.7939 = \boxed{0.0112}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	[illegible]	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764
0'8	[illegible]	[illegible]	0'7939	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	[illegible]	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315

La probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos es de 0.0112.

(c) Nos piden calcular $P(X < 1700)$. Utilizamos la aproximación a la normal Y.

$$P\left(X<1700\right)=P\left(Y\le 1699.5\right)=\left\{Tipificamos\right\}=$$

$$=P\left(Z\le \frac{1699.5-1776.06}{28.58}\right)=P\left(Z\le -2.68\right)=P\left(Z\ge 2.68\right)=$$

$$=1-P\left(Z\le 2.68\right)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.9963=\boxed{0.0037}$$

La probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos es de 0.0037.

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5[illegible]19
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5[illegible]14
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6[illegible]03
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6[illegible]80
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6[illegible]44
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7[illegible]90
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7[illegible]17
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7[illegible]23
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8[illegible]06
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8[illegible]65
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8[illegible]99
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8[illegible]10
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8[illegible]97
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9[illegible]62
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9[illegible]06
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9[illegible]29
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9[illegible]35
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9[illegible]25
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9[illegible]99
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9[illegible]61
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9[illegible]12
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9[illegible]54
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9[illegible]87
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9[illegible]13
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9[illegible]34
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9[illegible]51
2'6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'9963
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973

Ejercicio B5

Sean A y B sucesos aleatorios independientes, siendo sus probabilidades $P(A)=0,7$ y $P(B)=0,1$, y sean $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los sucesos complementarios de A y B respectivamente. Calcula las siguientes probabilidades razonadamente, e indica claramente el proceso o ley aplicada:

(a) **(0,5 p)** $P(A\cup B)$,

(b) **(0,5 p)** $P(\overline{A}\cup \overline{B})$,

(c) **(0,5 p)** $P(\overline{A}\cap \overline{B})$,

(d) **(0,5 p)** $P(A\cap \overline{B})$,

(e) **(0,5 p)** $P(\overline{A}/\overline{B})$.

Si los sucesos A y B son independientes se cumple que $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.7\cdot 0.1=0.07$.

También sabemos que $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.7=0.3$ y $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.1=0.9$.

(a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.1-0.07=\boxed{0.73}$$

(b) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A}\cup \overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0.07=\boxed{0.93}$$

(c) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.73=\boxed{0.27}$$

(d) Utilizamos que $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B}) \\ P(A)=0,7 \\ P(A\cap B)=0.07 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.7=0.07+P(A\cap \overline{B}) \Rightarrow P(A\cap \overline{B})=0.7-0.07=\boxed{0.63}$$

(e) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.27}{0.9}=\boxed{0.3}$$