UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024
Convocatoria: Ordinaria/Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO 5 ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x)=|x|\exp(-x).$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

3.- (2 puntos) Dada la función

$$f(x)=(1-x^2)\tan(x).$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0,\pi/2)$.

4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA+B=B(2A+I)$$

donde $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 2.

5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases}x-y+az=a\\ax+y-z=a\\(a+1)x+z=a+2\end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A, siendo A la matriz de coeficientes y b la de términos independientes.

6.- (2 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla a para que $A^2-A=12I+B$ con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA=AX=I$.

7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

8.- (2 puntos) Dado el punto $P\equiv(2,-1,3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P.

(i) Paralelo a $\pi: 4x+3y-2z+4=0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r\equiv\frac{x-3}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-4}$.

9.- (2 puntos) Una máquina de café está regulada de modo que la cantidad de café que echa está distribuida por una normal de media 125 ml y una desviación típica de 20 ml. Calcula:

(i) el porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml.

(ii) entre que capacidades (ml) está el 60% de los cafés que dispensa la máquina.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

10.- (2 puntos) El 2% de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable. En el 98% de los casos da positivo en personas enfermas. Y en el 4% de los casos da positivo en personas sanas. Halla

(i) la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva.

(ii) habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x)=|x|\exp(-x).$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

La función la podemos expresar como una función a trozos.

$$f(x)=|x|\exp(-x)=\begin{cases} -xe^{-x} & si\ x<0 \\ xe^{-x} & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ siendo su derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x}-x(-1)e^{-x}=e^{-x}(x-1) & si\ x<0 \\ e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x) & si\ x>0 \end{cases}$$

Comprobamos si la función es derivable en $x = 0$. Para ser derivable deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x}(x-1)=e^0(-1)=-1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}(1-x)=e^0(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=-1\neq 1=f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$ y por tanto no existe la recta tangente a la curva en $x = 0$.
La función si es derivable en un entorno de $x = -1$, siendo la función $f(x)=-xe^{-x}$ y la derivada $f'(x)=e^{-x}(x-1)$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.

La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

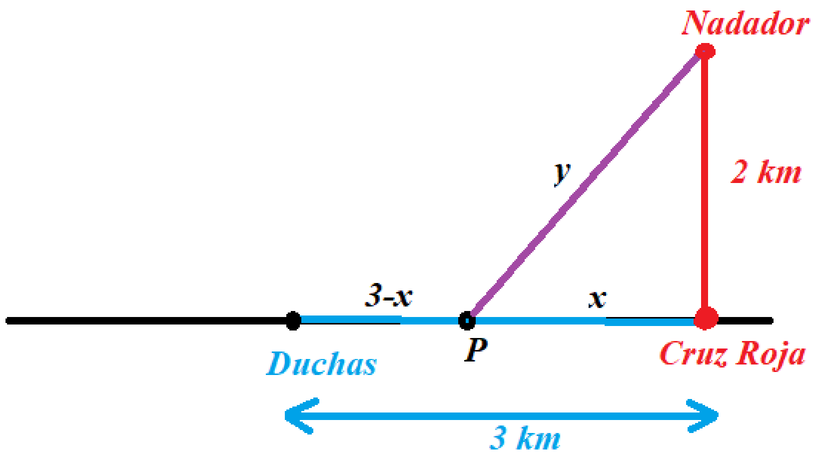
$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=1\cdot e^1=e \\ f'(x)=e^{-x}(x-1)\to f'(-1)=e(-1-1)=-2e \\ y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-e=-2e(x+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=e-2ex-2e\Rightarrow \boxed{y=-2ex-e}$$

La recta tangente a la curva en $x = -1$ tiene ecuación $y=-2ex-e$.

2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



La distancia que debe recorrer a nado es "y". Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$y^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2+4}$$

La distancia que debe recorrer andando es $3 - x$.

Como $velocidad = \dfrac{espacio}{tiempo} \Rightarrow espacio = velocidad \cdot tiempo \Rightarrow tiempo = \dfrac{espacio}{velocidad}$.

Deseamos minimizar el tiempo que tarda en recorrer "y" kilómetros a nado y "$3 - x$" kilómetros andando.

$$t(x,y) = \frac{y}{3} + \frac{3-x}{5} \Rightarrow \left\{ y = \sqrt{x^2+4} \right\} \Rightarrow t(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{3-x}{5};\ 0 \le x \le 3$$

Derivamos la función y averiguamos donde se anula (puntos críticos).

$$t(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+4} + \frac{3-x}{5} \Rightarrow t'(x) = \frac{1}{3}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 9\left(x^2+4\right) \Rightarrow 25x^2 - 9x^2 = 36 \Rightarrow 16x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5 \in [0,3]$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1.5$.

- En el intervalo $(0,1.5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $t'(1)=\frac{1}{3\sqrt{1^2+4}}-\frac{1}{5}=-0.05<0$. La función decrece en $(0,1.5)$.
- En el intervalo $(1.5,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $t'(2)=\frac{2}{3\sqrt{2^2+4}}-\frac{1}{5}=0.03>0$. La función crece en $(1.5,3)$.

Como la función decrece antes de $x = 1.5$ y crece después tenemos un mínimo relativo en dicho valor.

El nadador para minimizar el tiempo que tarda en llegar a las duchas debe nadar hasta el punto situado a mitad de distancia entre duchas y cruz roja (a 1.5 km de la cruz roja).

3.- (2 puntos) Dada la función

$$f(x)=\left(1-x^2\right)\tan(x).$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0,\pi/2)$.

La función tangente es discontinua en $x=\pi/2$ por lo que cogemos un intervalo más pequeño que el del ejercicio, utilizamos el intervalo $[0,1]$ contenido en el intervalo $[0,\pi/2]$.

La función $f(x)=\left(1-x^2\right)\tan(x)$ es una función continua en el intervalo $[0,1]$ pues es producto de funciones continuas. También es derivable siendo su derivada $f'(x)=(-2x)\tan(x)+\left(1-x^2\right)\left(1+\tan^2(x)\right)$.

Como $f(0)=\left(1-0^2\right)\tan(0)=0$ y $f(1)=\left(1-1^2\right)\tan(1)=0$ se cumple las condiciones exigidas en el teorema de Rolle y podemos aplicarlo.

La función $f(x)=\left(1-x^2\right)\tan(x)$ es continua en $[0,1]$, derivable en $(0,1)$ y $f(0)=f(1)=0$, por lo que aplicando el teorema de Rolle existe $c\in(0,1)$ tal que $f'(x)=0$.

Este valor $x = c$ es un punto crítico de la función.

- En el intervalo $[0,c)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=(-2\cdot 0)\tan(0)+\left(1-0^2\right)\left(1+\tan^2(0)\right)=1>0$. La función crece en $[0,c)$.
- En el intervalo $(c,1]$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=(-2\cdot 1)\tan(1)+\left(1-1^2\right)\left(1+\tan^2(1)\right)=-2\tan(1)=-3.1<0$. La función decrece en $(c,1]$.

La función crece antes de $x = c$ y decrece después, por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = c$,

Este valor c es mayor que 0 y menor que 1 por lo que pertenece al intervalo $(0,\pi/2)$.

4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA+B=B(2A+I)$$

donde $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 2.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AXA+B=B(2A+I)\Rightarrow AXA+B=2BA+B\Rightarrow AXA=2BA+B-B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AXA=2BA\Rightarrow A^{-1}AXAA^{-1}=2A^{-1}BAA^{-1}\Rightarrow\left\{AA^{-1}=A^{-1}A=I\right\}\Rightarrow X=2A^{-1}B$$

Comprobamos que A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$X=2A^{-1}B=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1-1 & 2-1\\ 0-1 & 0-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

La matriz X buscada tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$.

5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} x-y+az=a \\ ax+y-z=a \\ (a+1)x+z=a+2 \end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A, siendo A la matriz de coeficientes y *b* la de términos independientes.

El sistema planteado tiene la expresión matricial:

$$AX=b$$

siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a+2 \end{pmatrix}$.

La solución del sistema cuando existe la inversa de A es $X=A^{-1}b$.
Lo que se nos piden en el ejercicio es resolver el sistema cuando sea posible e indicar las soluciones.

Hallamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+a+1+0-a(a+1)+a-0=2+2a-a^2-a=-a^2+a+2$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2+a+2=0\Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)(2)}}{-2}=\frac{-1\pm 3}{-2}=\begin{cases} \frac{-1+3}{-2}=\boxed{-1=a} \\ \frac{-1-3}{-2}=\boxed{2=a} \end{cases}$$

La matriz inversa de A solo existe para valores de *a* distintos de –1 y 2.

Resolvemos el sistema para estos valores. Como el sistema es compatible determinado utilizamos el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{a+a+2-a(a+2)+a}{-a^2+a+2}=\frac{3a+2-a^2-2a}{-a^2+a+2}=\frac{-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a\\ a & a & -1\\ a+1 & a+2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & -1\\ a+1 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a-a(a+1)+a^2(a+2)-a^2(a+1)-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=$$

$$=\frac{a-a^2-\cancel{a}+\cancel{a^3}+\cancel{2a^2}-\cancel{a^3}-\cancel{a^2}-\cancel{a^2}+\cancel{a}+2}{-a^2+a+2}=\frac{-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & a\\ a+1 & 0 & a+2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & -1\\ a+1 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a+2-a(a+1)-a(a+1)+a(a+2)}{-a^2+a+2}=$$

$$=\frac{\cancel{a}+2-a^2-\cancel{a}-\cancel{a^2}-a+\cancel{a^2}+2a}{-a^2+a+2}=\frac{-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=1$$

La solución del sistema es *x* = *y* = *z* = *1*.

La matriz $A^{-1}b$ es la matriz $A^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\begin{cases}x-y+az=a\\ ax+y-z=a\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y+az=a\\ y=a+z-ax\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-a-z+ax+az=a\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a+1)x+(a-1)z=2a\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+1)x=2a-(a-1)z\\ (a+1)x=a+2-z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a-(a-1)z=a+2-z\Rightarrow 2a-a-2=(a-1-1)z\Rightarrow a-2=(a-2)z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{a-2\neq 0\}\Rightarrow\boxed{z=\frac{a-2}{a-2}=1}\Rightarrow(a+1)x=a+2-1\Rightarrow(a+1)x=a+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{a+1\neq 0\}\Rightarrow\boxed{x=\frac{a+1}{a+1}=1}\Rightarrow y=a+1-a\Rightarrow\boxed{y=1}$$

6.- (2 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla a para que $A^2-A=12I+B$ con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA=AX=I$.

Realizamos las operaciones indicadas en la igualdad matricial y obtenemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a-a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-A=12I+B\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+8 & -1 \\ 0 & 2a+12 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \bullet\ a^2-a=a+8\rightarrow a^2-2a-8=0\rightarrow \\ \quad\rightarrow a=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-8)}}{2}= \\ \quad=\dfrac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} \dfrac{2+6}{2}=\boxed{4=a} \\ \dfrac{2-6}{2}=\boxed{-2=a} \end{cases} \\ \bullet\ -1=-1 \\ \bullet\ 0=0 \\ \bullet\ a^2+a=2a+12\rightarrow a^2-a-12=0\rightarrow \\ \quad\rightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-12)}}{2}= \\ \quad=\dfrac{1\pm 7}{2}=\begin{cases} \dfrac{1+7}{2}=\boxed{4=a} \\ \dfrac{1-7}{2}=\boxed{-3=a} \end{cases} \end{cases}$$

Deben cumplirse todas las igualdades y esto solo es posible cuando $a = 4$.

La matriz X tal que $XA=AX=I$ es la matriz inversa de A. Hallamos su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix}=-a^2\neq 0\Rightarrow a\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}}{-a^2}=\frac{-1}{a^2}\begin{pmatrix} -a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor $a \neq 0$ la matriz X buscada tiene la expresión $X=\begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$

7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los planos.
Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema equivalente más sencillo de resolver.

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 4^a - 2\cdot \text{Ecuación } 3^a \\ \begin{array}{rrrl} 6x & -y & +z & =3a \\ -6x & +2y & +2z & =-2 \\ \hline & y & +3z & =3a-2 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 4^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 3\cdot \text{Ecuación } 2^a \\ \begin{array}{rrrl} 3x & -y & -z & =1 \\ -3x & +3y & -3z & =-3 \\ \hline & 2y & -4z & =-2 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 2y-4z=-2 \to y-2z=-1, \\ y+3z=3a-2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 4^a - \text{Ecuación } 3^a \\ \begin{array}{rrl} y & +3z & =3a-2 \\ -y & +2z & =1 \\ \hline & 5z & =3a-1 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 4^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ y-2z=-1, \\ 5z=3a-1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 3^a \\ \begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =1 \\ & y & -2z & =-1 \\ \hline x & & -z & =0 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^a - \text{Ecuación } 3^a \\ \begin{array}{rrrl} ax & +y & +z & =a^2 \\ & -y & +2z & =1 \\ \hline ax & & +3z & =a^2+1 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 1^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+3z=a^2+1, \\ x-z=0, \\ y-2z=-1, \\ 5z=3a-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+3z=a^2+1, \\ \boxed{x=z}, \\ y=-1+2z, \\ \boxed{z=\dfrac{3a-1}{5}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\dfrac{3a-1}{5}+3\dfrac{3a-1}{5}=a^2+1, \\ \boxed{x=\dfrac{3a-1}{5}} \\ y=-1+2\dfrac{3a-1}{5}=\dfrac{-5+6a-2}{5}=\dfrac{6a-7}{5}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\frac{3a-1}{5}+3\frac{3a-1}{5}=a^2+1\Rightarrow \frac{3a^2-a}{5}+\frac{9a-3}{5}=a^2+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2-a+9a-3=5a^2+5\Rightarrow -2a^2+8a-8=0\Rightarrow a^2-4a+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Para $a = 2$ el sistema formado por los cuatro planos tiene solución lo que significa que los cuatro planos coinciden en un único punto.

Como $a = 2$ la solución del sistema es $x=\frac{3\cdot 2-1}{5}=1;\ y=\frac{6\cdot 2-7}{5}=1;\ z=1$. Los cuatro planos se cortarían en el punto (1, 1, 1).

Para $a = -3$ los planos quedan $\begin{cases} -3x+y+z=9, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=-9, \end{cases}$. El plano 1 y el plano 3 son paralelos. Los otros dos planos los cortan.

Para $a\neq 2$ y $a\neq -3$ los planos son secantes entre si en rectas paralelas.

8.- (2 puntos) Dado el punto $P \equiv (2,-1,3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a *P*.
(i) Paralelo a $\pi : 4x+3y-2z+4=0$.
(ii) Perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$.

(i) Si el plano π´ es paralelo a $\pi : 4x+3y-2z+4=0$ tiene ecuación $\pi´ : 4x+3y-2z+D=0$.
Como debe contener el punto $P \equiv (2,-1,3)$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \pi´ : 4x+3y-2z+D=0 \\ P \equiv (2,-1,3) \in \pi´ \end{array}\right\} \Rightarrow 8-3-6+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow \pi´ : 4x+3y-2z+1=0$$

El plano buscado es $\pi´ : 4x+3y-2z+1=0$.

(ii) Si el plano π´´ es perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$ el vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (3,2,-4)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (3,2,-4) \Rightarrow \pi´´ : 3x+2y-4z+D=0$$

Como debe contener el punto $P \equiv (2,-1,3)$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \pi´´ : 3x+2y-4z+D=0 \\ P \equiv (2,-1,3) \in \pi´´ \end{array}\right\} \Rightarrow 6-2-12+D=0 \Rightarrow D=9 \Rightarrow \pi´´ : 3x+2y-4z+8=0$$

El plano buscado es $\pi´´ : 3x+2y-4z+8=0$.

9.- (2 puntos) Una máquina de café está regulada de modo que la cantidad de café que echa está distribuida por una normal de media 125 ml y una desviación típica de 20 ml. Calcula:
(i) el porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml.
(ii) entre que capacidades (ml) está el 60% de los cafés que dispensa la máquina.
(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

(i) Sea X = La cantidad de café en ml que echa una cafetera. X = N(125, 20)

Nos piden calcular $P(X>150)$.

$$P(X>150)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{matrix}\right\}=P\left(Z>\frac{150-125}{20}\right)=P(Z>1.25)=$$

$$=1-P(Z\le 1.25)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.8944=\boxed{0.1056}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5[illegible]99	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5[illegible]96	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5[illegible]87	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6[illegible]68	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6[illegible]36	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7[illegible]88	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7[illegible]22	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7[illegible]34	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8[illegible]23	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8[illegible]89	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8[illegible]31	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8[illegible]49	0,8
1,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8944	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9

El porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml es de 10.56 %.

(ii) Nos piden hallar el valor "a" tal que $P(125-a\le X\le 125+a)=0.60$.

$$P(125-a\le X\le 125+a)=0.60\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{125-a-125}{20}\le Z\le\frac{125+a-125}{20}\right)=0.6\Rightarrow P\left(\frac{-a}{20}\le Z\le\frac{a}{20}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{20}\right)-P\left(Z\le\frac{-a}{20}\right)=0.6\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{20}\right)-P\left(Z\ge\frac{a}{20}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{a}{20}\right)\right] = 0.6 \Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) - 1 = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) = 1.6 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

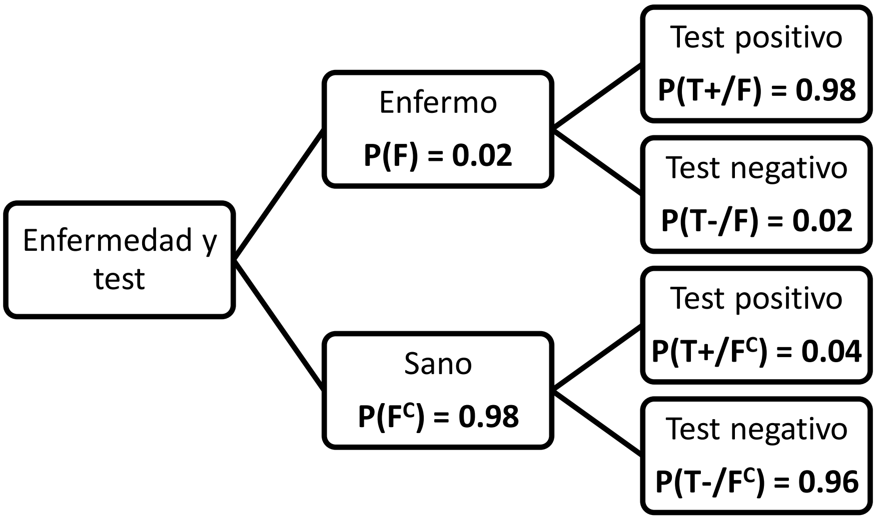
$$\Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{0.84 + 0.85}{2} = 0.845 \Rightarrow \boxed{a = 0.845 \cdot 20 = 16.9}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8

La capacidad en la que están el 60% de los cafés que dispensa la máquina es entre $125 - 16.9 = 108.1$ ml y 125 + 16.9 = 141.9 ml.

10.- (2 puntos) El 2% de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable. En el 98% de los casos da positivo en personas enfermas. Y en el 4% de los casos da positivo en personas sanas. Halla
(i) la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva.
(ii) habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

Llamamos F al suceso “la persona está enferma”, T+ a “el test da positivo” y T– a “el test da negativo”.
Hacemos un diagrama de árbol.



(i) Nos piden determinar $P\left(F^C/T+\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(F^C/T+\right)=\frac{P\left(F^C\cap T+\right)}{P(T+)}=\frac{P\left(F^C\right)P\left(T+/F^C\right)}{P(F)P(T+/F)+P\left(F^C\right)P\left(T+/F^C\right)}=$$

$$=\frac{0.98\cdot 0.04}{0.02\cdot 0.98+0.98\cdot 0.04}=\boxed{\frac{2}{3}\simeq 0.6667}$$

La probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva es de $\frac{2}{3}\simeq 0.6667$.

(ii) Nos piden determinar $P(F/T-)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(F/T-)=\frac{P(F\cap T-)}{P(T-)}=\frac{P(F)P(T-/F)}{P(F)P(T-/F)+P\left(F^C\right)P\left(T-/F^C\right)}=$$

$$=\frac{0.02\cdot 0.02}{0.02\cdot 0.02+0.98\cdot 0.96}=\boxed{\frac{1}{2353}\simeq 0.0004}$$

La probabilidad de que una persona esté enferma, habiendo salido la prueba negativa es de $\frac{1}{2353}\simeq 0.0004$.