Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemáticas II

Modelo 2

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/0 no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[3 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

(b) **[2 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

(c) **[5 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

P2.– Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A+I=A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.

(a) **[3 puntos]** Calcula la expresión de la matriz inversa de A.

(b) **[3 puntos]** Dada la ecuación matricial

$$A+3AX=5I.$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad *I*, la matriz X. ¿Qué dimensión tiene la matriz X? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

P3.– Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

(a) **[3 puntos]** Calcula el punto D tal que ABDC es un paralelogramo.

(b) **[4 puntos]** Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.

(c) **[3 puntos]** Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.

P4.– (a) **[5 puntos]** Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1: 3x+ay-z=1 \;\; \text{y} \;\; \pi_2: 6x+y-2z=b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cruzan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta *s* y el mismo plano π, siendo

$$\pi:\begin{cases} x=2+4\alpha-\beta \\ y=3\beta \\ z=1+\alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

P5.– (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

P6.– Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} be^x+a+1 & x\le 0 \\ ax^2+b(x+3) & 0<x\le 1 \\ a\cos(\pi x)+7bx & x>1 \end{cases}$$

(a) **[5 puntos]** Calcula los valores *a* y *b* para que la función *f(x)* es continua.

(b) **[5 puntos]** Sea *a = 3* y *b = 2*, calcula el área comprendida entre $x=-1$, $x=0$ y el eje OX.

P7.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A\cup B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.1$ y $P(A\cap B^c)=0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

(a) **[3 puntos]** $P(A)$.

(b) **[3 puntos]** $P(B)$.

(c) **[2 puntos]** $P(A^C\cup B^C)$.

(d) **[2 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

P8.– La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,

(a) **[4 puntos]** ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?

(b) **[6 puntos]** Si nos fijamos en el 70% de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

SOLUCIONES

P1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[3 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

(b) **[2 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

(c) **[5 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

(a) Llamamos "x" al precio de la botella de vino tinto, "y" al precio de la botella de vino blanco y "z" al precio de la botella de vino rosado.

Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 € → $3x+2y=67$

Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 € → $2x+4y+z=85$.

Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 € → $x+z=21$.

Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 € → $4y+5z=85$.

El sistema de ecuaciones que permite obtener los precios quedaría:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=67 \\ 2x+4y+z=85 \\ x+z=21 \\ 4y+5z=85 \end{array}\right\}$$

Puesto en forma matricial quedaría:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

(b) El sistema tiene tres incógnitas y cuatro ecuaciones. No es necesaria una de las ecuaciones. Se supone que nos han cobrado bien y una de las informaciones es innecesaria.

(c) Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=67 \\ 2x+4y+z=85 \\ x+z=21 \\ 4y+5z=85 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\text{Ecuación } 3^{a} \leftrightarrow \text{Ecuación } 1^{a}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=21 \\ 3x+2y=67 \\ 2x+4y+z=85 \\ 4y+5z=85 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \; - \; 3 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 3x & +2y & & =67 \\ -3x & & -3z & =-63 \\ \hline & 2y & -3z & =4 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \; - \; 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +4y & +z & =85 \\ -2x & & -2z & =-42 \\ \hline & 4y & -z & =43 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x \qquad +z=21 \\ 2y-3z=4 \\ 4y-\;z=43 \\ 4y+5z=85 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 4^{\text{a}} \; - \; \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrl} 4y & +5z & =85 \\ -4y & +z & =-43 \\ \hline & 6z & =42 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 4^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \; - \; 2 \cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrl} 4y & -z & =43 \\ -4y & +6z & =-8 \\ \hline & 5z & =35 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \qquad +z=21 \\ 2y-3z=4 \\ \qquad 5z=35 \to \boxed{z=7} \\ \qquad 6z=42 \to \boxed{z=7} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} x+7=21 \\ 2y-21=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{x=21-7=14} \\ 2y=25 \to \boxed{y=\frac{25}{2}=12.5} \end{array} \right\}$$

La botella de vino tinto cuesta 14 euros, la de vino blanco cuesta 12.5 euros y la de vino rosado cuesta 7 euros.

P2.– Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A+I=A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.
(a) **[3 puntos]** Calcula la expresión de la matriz inversa de A.
(b) **[3 puntos]** Dada la ecuación matricial

$$A+3AX=5I.$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad *I*, la matriz X. ¿Qué dimensión tiene la matriz X? Justifica la respuesta.
(c) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

(a) Suponemos que la matriz A tiene inversa. Multiplicamos por la inversa de A la igualdad.

$$3A+I=A^2 \Rightarrow 3AA^{-1}+IA^{-1}=AAA^{-1} \Rightarrow 3I+A^{-1}=A\cdot I \Rightarrow 3I+A^{-1}=A \Rightarrow \boxed{A^{-1}=A-3I}$$

(b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A+3AX=5I \Rightarrow A-5I=-3AX \Rightarrow A^{-1}A-5A^{-1}I=-3A^{-1}AX \Rightarrow I-5A^{-1}=-3IX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I-5A^{-1}=-3X \Rightarrow \left\{\begin{matrix} Sabemos\ que \\ A^{-1}=A-3I \end{matrix}\right\} \Rightarrow I-5\left(A-3I\right)=-3X \Rightarrow I-5A+15I=-3X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X=5A-16I \Rightarrow \boxed{X=\frac{5}{3}A-\frac{16}{3}I}$$

(c) La matriz A debe cumplir la igualdad $3A+I=A^2$.

$$3A+I=A^2 \Rightarrow 3\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+1 & 3 & 0 \\ 3 & 3b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3c+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+1 & a+b & 0 \\ a+b & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3a+1=a^2+1 \\ 3=a+b \\ 3=a+b \\ 3b+1=b^2+1 \\ 3c+1=c^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} a^2-3a=0 \rightarrow a(a-3)=0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=0 \\ a=3 \end{array} \right. \\ a+b=3 \\ b^2-3b=0 \rightarrow b(b-3)=0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=0 \\ b=3 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=0\ y\ b=3 \\ o \\ a=3\ y\ b=0 \end{array} \right\} \\ c^2-3c-1=0 \rightarrow c=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-1)}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2} \end{array} \right.$$

Las soluciones del sistema son:

1ª solución: $a = 0$, $b = 3$ y $c=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2ª solución: $a = 0$, $b = 3$ y $c=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$

3ª solución: $a = 3$, $b = 0$ y $c=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

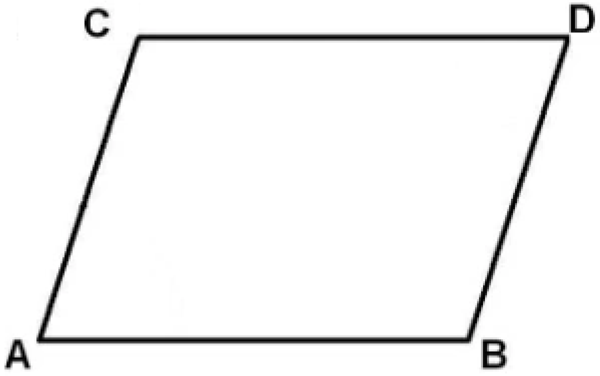
4ª solución: $a = 3$, $b = 0$ y $c=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$,

P3.– Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

(a) **[3 puntos]** Calcula el punto D tal que ABDC es un paralelogramo.

(b) **[4 puntos]** Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.

(c) **[3 puntos]** Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.



(a) Para que ABDC sea un paralelogramo los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ deben tener las mismas coordenadas. También podemos hallar el punto D sumando al punto B el vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = (-1,2,1) - (0,0,0) = (-1,2,1)$$

$$D = B + \overrightarrow{AC} = (2,-1,3) + (-1,2,1) = (1,1,4)$$

El punto D tiene coordenadas $(1,1,4)$.

(b) Para que la recta AE sea perpendicular al plano ABC el vector $\overrightarrow{AE}$ debe ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, por lo que debe ser proporcional al producto vectorial de ambos vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,-1,3) - (0,0,0) = (2,-1,3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,2,1) - (0,0,0) = (-1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -i - 3j + 4k - k - 2j - 6i = -7i - 5j + 3k = (-7,-5,3)$$

El vector $\overrightarrow{AE}$ tiene coordenadas $(-7a,-5a,3a)$.

Como además piden que la distancia entre los puntos A y E sea 1 el módulo del vector $\overrightarrow{AE}$ debe ser 1.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AE} = (-7a,-5a,3a) \\ \left|\overrightarrow{AE}\right| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(-7a)^2 + (-5a)^2 + (3a)^2} = 1 \Rightarrow 49a^2 + 25a^2 + 9a^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 83a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{83} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{83}} = \frac{1}{\sqrt{83}}$$

El vector $\overrightarrow{AE}$ tiene coordenadas $\left(\frac{-7}{\sqrt{83}},\frac{-5}{\sqrt{83}},\frac{3}{\sqrt{83}}\right)$.

Como el punto A tiene coordenadas (0, 0, 0) el punto E tiene las mismas coordenadas que el vector $\overrightarrow{AE}$.

El punto E tiene coordenadas $\left(\frac{-7}{\sqrt{83}},\frac{-5}{\sqrt{83}},\frac{3}{\sqrt{83}}\right)$ o $\left(\frac{7}{\sqrt{83}},\frac{5}{\sqrt{83}},\frac{-3}{\sqrt{83}}\right)$

(c) Hallamos la ecuación del plano ABC.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,-1,3)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,2,1)\\ A(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x-3y+4z-z-2y-6x=0\Rightarrow \boxed{\pi:-7x-5y+3z=0}$$

Un plano π´paralelo al plano ABC tiene como ecuación $\pi':-7x-5y+3z+D=0$.
Como los planos son paralelos la distancia entre ellos es la distancia del punto A del plano π al plano π´. Esta distancia debe valer 1.

$$\left.\begin{array}{l}\pi':-7x-5y+3z+D=0\\ A(0,0,0)\in\pi\\ \pi\,||\,\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow d(\pi,\pi')=d(A,\pi')=\frac{|0+0+0+D|}{\sqrt{(-7)^2+(-5)^2+3^2}}=\frac{|D|}{\sqrt{83}}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D|=\sqrt{83}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}D=\sqrt{83}\rightarrow\boxed{\pi':-7x-5y+3z+\sqrt{83}=0}\\ o\\ D=-\sqrt{83}\rightarrow\boxed{\pi':-7x-5y+3z-\sqrt{83}=0}\end{array}\right.$$

P4.– (a) **[5 puntos]** Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \text{ y } \pi_2 : 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cruzan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta *s* y el mismo plano π, siendo

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

(a) Hallamos el vector normal de cada plano.

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (3, a, -1)$$

$$\pi_2 : 6x + y - 2z = b \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (6, 1, -2)$$

Para que los planos sean paralelos o coincidentes los vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{n_1} = (3, a, -1) \\ \overrightarrow{n_2} = (6, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{1}{a} = \frac{-2}{-1} \Rightarrow \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow 1 = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Se nos plantean dos situaciones distintas:

CASO 1. $a = \frac{1}{2}$

Los vectores normales tienen coordenadas proporcionales y los planos son paralelos o coincidentes.

Los planos quedan $\pi_1 : 3x + 0.5y - z = 1$ y $\pi_2 : 6x + y - 2z = b$.

Multiplicamos la ecuación del plano π_1 por 2 y las ecuaciones de los planos son:

$$\pi_1 : 6x + y - 2z = 2 \text{ y } \pi_2 : 6x + y - 2z = b$$

Existen dos posibilidades diferentes:

Si b = 2 los planos tienen la misma ecuación y son coincidentes y si $b \neq 2$ los planos son paralelos.

CASO 2. $a \neq \frac{1}{2}$

En este caso las coordenadas de los vectores normales no son proporcionales y los planos no son ni paralelos ni coincidentes, por lo que son secantes.

Comprobamos si son perpendiculares calculando el producto escalar de sus vectores normales. Si este producto es nulo significa que son perpendiculares, en caso contrario no serán perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_1}=(3,a,-1)\\ \overrightarrow{n_2}=(6,1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=(3,a,-1)(6,1,-2)=18+a+2=20+a$$

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\Rightarrow 20+a=0\Rightarrow \boxed{a=-20}$$

Los planos son perpendiculares para *a = –20.*

Resumiendo: Si $a=\frac{1}{2}$ y $b=2$ los planos son coincidentes, si $a=\frac{1}{2}$ y $b\neq 2$ los planos son paralelos y si $a\neq\frac{1}{2}$ los planos son secantes, en particular para *a* = *–20* son perpendiculares.

(b)Hallamos la ecuación general del plano.

$$\pi:\begin{cases}x=2+4\alpha-\beta\\ y=3\beta\\ z=1+\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2+4\alpha-\beta\\ \frac{y}{3}=\beta\\ z-1=\alpha\end{cases}\Rightarrow x=2+4(z-1)-\frac{y}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2+4z-4-\frac{y}{3}\Rightarrow x=4z-2-\frac{y}{3}\Rightarrow 3x=12z-6-y\Rightarrow\boxed{\pi:3x+y-12z+6=0}$$

Hallamos la ecuación en paramétricas de la recta.

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}\Rightarrow\begin{cases}P_s(1,0,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,2,-1)\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Hallamos el punto P de corte entre la recta *s* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:3x+y-12z+6=0\\ s:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 3(1+2\lambda)+2\lambda-12(1-\lambda)+6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+6\lambda+2\lambda-12+12\lambda+6=0\Rightarrow 20\lambda-3=0\Rightarrow 20\lambda=3\Rightarrow\lambda=\frac{3}{20}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1+2\frac{3}{20}=\frac{26}{20}\\ y=2\frac{3}{20}=\frac{6}{20}\\ z=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}\end{cases}\Rightarrow P\left(\frac{26}{20},\frac{6}{20},\frac{17}{20}\right)$$

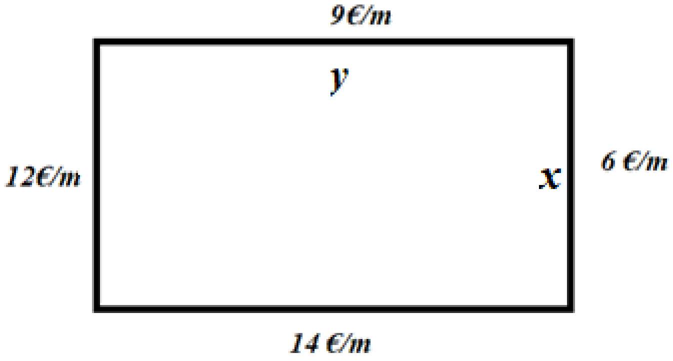
La recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta *s* y el mismo plano π es la recta *t* con vector director el vector normal del plano y que pasa por el punto P.

$$\pi : 3x + y - 12z + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3,1,-12)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_t} = \vec{n} = (3,1,-12) \\ P\left(\dfrac{26}{20},\dfrac{6}{20},\dfrac{17}{20}\right) \in t \end{array}\right\} \Rightarrow t : \begin{cases} x = \dfrac{13}{10} + 3\lambda \\ y = \dfrac{3}{10} + \lambda \\ z = \dfrac{17}{20} - 12\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

P5.– (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

La situación planteada es la del dibujo.



El coste del vallado sería:

$$C(x,y)=6x+9y+12x+14y=18x+23y$$

Como el gasto debe ser 1000 € tenemos:

$$C(x,y)=18x+23y=1000 \Rightarrow 23y=1000-18x \Rightarrow y=\frac{1000-18x}{23}$$

El área del campo rectangular es $A(x,y)=xy$. Sustituimos "y" y nos queda una expresión del área que depende solo de "x".

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1000-18x}{23} \\ A(x,y)=xy \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x\frac{1000-18x}{23}=\frac{1000x-18x^2}{23}$$

Hallamos el máximo de esta función usando la derivada.

$$A(x)=\frac{1000x-18x^2}{23} \Rightarrow A'(x)=\frac{1000-36x}{23}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{1000-36x}{23}=0 \Rightarrow 1000-36x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36x=1000 \Rightarrow x=\frac{1000}{36}=\frac{250}{9}\simeq 27.77\,m$$

Averiguamos si este punto crítico es máximo sustituyendo su valor en la derivada segunda.

$$A'(x)=\frac{1000-36x}{23} \Rightarrow A''(x)=\frac{-36}{23} \Rightarrow A''\left(\frac{250}{9}\right)=\frac{-36}{23}<0$$

Como la segunda derivada es negativa la función área tiene un máximo relativo en $x=\frac{250}{9}\simeq 27.77\,m$.

Para $x=\frac{250}{9}\simeq 27.77\,m$ el valor de "y" es:

$$y=\frac{1000-18\frac{250}{9}}{23}=\frac{1000-500}{23}=\frac{500}{23}\simeq 21.74\,m$$

Las dimensiones del campo con área máxima y cumpliendo lo pedido en el problema tiene aproximadamente 21.74 metros de ancho y 27.77 de largo.

P6.– Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} be^x+a+1 & x\le 0\\ ax^2+b(x+3) & 0<x\le 1\\ a\cos(\pi x)+7bx & x>1\end{cases}$$

(a)**[5 puntos]** Calcula los valores *a* y *b* para que la función *f(x)* es continua.
(b)**[5 puntos]** Sea *a* = *3* y *b* = *2*, calcula el área comprendida entre $x=-1$, $x=0$ y el eje OX.

(a)La función debe ser continua en *x* = *0*, por lo que deben coincidir los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} be^x+a+1=be^0+a+1=a+b+1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} ax^2+b(x+3)=a\cdot 0^2+b(0+3)=3b\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow a+b+1=3b\Rightarrow \boxed{a=2b-1}$$

La función debe ser continua en *x* = *1*, por lo que deben coincidir los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax^2+b(x+3)=a\cdot 1^2+b(1+3)=a+4b\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} a\cos(\pi x)+7bx=a\cos(\pi)+7b=-a+7b\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow a+4b=-a+7b\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2a-3b=0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}a=2b-1\\ 2a-3b=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2(2b-1)-3b=0\Rightarrow 4b-2-3b=0\Rightarrow \boxed{b=2}\Rightarrow \boxed{a=4-1=3}$$

Los valores que hacen continua la función son *a* = *3* y *b* = *2*.

(b)Si *a* = *3* y *b* = *2* la función queda $f(x)=\begin{cases} 2e^x+4 & x\le 0\\ 3x^2+2(x+3) & 0<x\le 1\\ 3\cos(\pi x)+14x & x>1\end{cases}$.

En el intervalo [–1, 0] la función es $f(x)=2e^x+4$.
Averiguamos si corta el eje OX en este intervalo.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=2e^x+4\\ OX\to y=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2e^x+4=0\Rightarrow e^x+2=0\Rightarrow e^x=-2\Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función no corta el eje OX y el área será el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 0 de la función.

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0} 2e^x+4dx=\left[2e^x+4x\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left[2e^0+4\cdot 0\right]-\left[2e^{-1}+4(-1)\right]=2-\frac{2}{e}+4=6-\frac{2}{e}\simeq 5.26$$

El área tiene un valor de $6-\frac{2}{e}\simeq 5.26$ unidades cuadradas.

P7.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A\cup B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.1$ y $P(A\cap B^c)=0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

(a) **[3 puntos]** $P(A)$.

(b) **[3 puntos]** $P(B)$.

(c) **[2 puntos]** $P(A^C\cup B^C)$.

(d) **[2 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

(a)Usamos la fórmula $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B^c)=0.35 \\ P(A\cap B)=0.1 \\ P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(A)=0.1+0.35=0.45}$$

(b) Utilizamos la fórmula $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0.7 \\ P(A\cap B)=0.1 \\ P(A)=0.45 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.7=0.45+P(B)-0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B)=0.7-0.45+0.1=0.35}$$

(c) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^C\cup B^C)=P\left((A\cap B)^C\right)=1-P(A\cap B)=1-0.1=\boxed{0.9}$$

(d) Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.1 \\ P(A)P(B)=0.45\cdot 0.35=0.1575 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=0.1\neq 0.1575=P(A)P(B)$$

Al no cumplirse la igualdad los sucesos A y B no son independientes.

P8.– La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,
(a)**[4 puntos]** ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?
(b)**[6 puntos]** Si nos fijamos en el 70% de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

X = La duración de los embarazos humanos en días. X = N(266, 16).

(a)Nos piden calcular $P(240 \le X \le 270)$.

$$P(240 \le X \le 270) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{matrix} \right\} = P\left(\frac{240-266}{16} \le Z \le \frac{270-266}{16} \right) =$$

$$= P(-1.625 \le Z \le 0.25) = P(Z \le 0.25) - P(Z \le -1.625) = P(Z \le 0.25) - P(Z \ge 1.625) =$$

$$= P(Z \le 0.25) - \left[1 - P(Z \le 1.625)\right] = \left\{ \begin{matrix} \text{Buscamos en} \\ \text{la tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 0.5987 - \left[1 - \frac{0.9474 + 0.9484}{2}\right] = \boxed{0.5466}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	[illegible]
0.0	0.5000	0.5040	[illegible]	[illegible]	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	[illegible]	0
0.2	0.5793	0.5832	[illegible]	[illegible]	0
0.3	0.6179	0.6217	[illegible]	[illegible]	0
0.4	0.6554	0.6591	[illegible]	[illegible]	0
0.5	0.6915	0.6950	[illegible]	[illegible]	0
0.6	0.7257	0.7291	[illegible]	[illegible]	0
0.7	0.7580	0.7611	[illegible]	[illegible]	0
0.8	0.7881	0.7910	[illegible]	[illegible]	0
0.9	0.8159	0.8186	[illegible]	[illegible]	0
1.0	0.8413	0.8438	[illegible]	[illegible]	0
1.1	0.8643	0.8665	[illegible]	[illegible]	0
1.2	0.8849	0.8869	[illegible]	[illegible]	0
1.3	0.9032	0.9049	[illegible]	[illegible]	0
1.4	0.9192	0.9207	[illegible]	[illegible]	0
1.5	0.9332	0.9345	[illegible]	[illegible]	0
1.6	[illegible]	[illegible]	0.9474	0.9484	0
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]
0.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]

La proporción de todos los embarazos que durarán entre 240 y 270 días es de 54.66 %.

(b)Nos piden hallar "a" tal que $P(X \ge a) = 0.70$.

$$P(X \ge a) = 0.70 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \ge \frac{a-266}{16} \right) = 0.7 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{La probabilidad es mayor que 0.5} \\ \dfrac{a-266}{16} < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow P\left(Z \le -\frac{a-266}{16} \right) = 0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{a-266}{16} = \frac{0.52+0.53}{2} = 0.525 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a+266 = 16 \cdot 0.525 \Rightarrow -a = -257.6 \Rightarrow \boxed{a = 257.6}$$

El 70 % de los embarazos que más duran es a partir de 257.6 días.