CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	ABAU Convocatoria extraordinaria 2024 MATEMÁTICAS II	CÓDIGO 20

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **<u>MÁXIMO DE 5</u>**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ dé respuesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx + 3z = m \end{cases}$

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+bx-1 & si\ x\le 0 \\ \dfrac{k-xe^x}{x} & si\ x>0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b?

b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$?

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y=-2x$ y la parábola $y=ax^2+4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano $\pi : x+2y-2z=0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r. Se piden las ecuaciones paramétricas de r, la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π.

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ x & y\end{pmatrix}$ dé respuesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

a) Si X es una matriz antisimétrica cumple que $X^T = -X$.

$$X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow X^T=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

$$X^T=-X \Rightarrow \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=-a \to 2a=0 \to a=0\\ c=-b\\ b=-c\\ d=-d \to 2d=0 \to d=0 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}$$

Si la matriz A conmuta con la matriz X se cumple $AX = XA$.

$$AX=XA \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ x & y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-b & b\\ -by & bx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bx & by\\ -b & -b\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b=bx\\ b=by\\ -by=-b\\ bx=-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b=bx\\ b=by \end{cases} \Rightarrow \{b\neq 0\} \Rightarrow \begin{cases} -1=x\\ 1=y \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Los valores buscados son $x = -1$, $y = 1$.

b) La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Multiplicamos la igualdad por la matriz A y despejamos M.

$$2M = A^{-1} - AM \Rightarrow 2AM = AA^{-1} - AAM \Rightarrow 2AM = I - A^2M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2AM + A^2M = I \Rightarrow \left(2A + A^2\right)M = I \Rightarrow M = \left(2A + A^2\right)^{-1}$$

Hallamos la expresión de $2A + A^2$.

$$2A+A^2 = 2\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-1 & 1+1\\ -1-1 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la inversa de $2A+A^2$ que es la matriz M buscada.

$$\left|2A+A^2\right| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4+16 = 20$$

$$\left(2A+A^2\right)^{-1} = \frac{Adj\left(\left(2A+A^2\right)^T\right)}{\left|2A+A^2\right|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}{20} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$$

La matriz M buscada es $M = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx + 3z = m \end{cases}$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{pmatrix}$.y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2m + 0 + m - 3 - 0 = 3m - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3m - 9 = 0 \Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow m = \frac{9}{3} = 3$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $m \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 3$

Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,3^a - 3 \cdot Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & -6 & -18 \\ \hline 0 & 3 & -3 & -15 \end{array} \to Nueva\ Fila\,3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fila\,1^a - 2 \cdot Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & -12 \\ \hline 0 & 3 & -3 & -9 \end{array} \to Nueva\ Fila\,2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} Fila\,3^{a} - Fila\,2^{a} \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad -15 \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 9 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \to Nueva\,Fila\,3^{a} \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & -6 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado y si $m = 3$ el sistema es incompatible.

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+bx-1 & si\ x\leq 0 \\ \dfrac{k-xe^x}{x} & si\ x>0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en x = 0 para cualquier valor de b?

b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en x = 0?

a) Para que la función sea continua en x = 0 deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

- Existe $f(0)=0^2+b\cdot 0-1=-1$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+bx-1=-1$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{k-xe^x}{x}=\dfrac{k-0}{0}=\dots$, para que exista el límite debe ser $k = 0$, en caso contrario el límite vale ∞ y la función no sería continua.

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-xe^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}-e^x=-e^0=-1$$
- Los tres valores son iguales. Se cumple para $k = 0$.

El valor de k que hace que f sea continua en x = 0 para cualquier valor de b es $k = 0$.

b) Para que la función sea derivable en $x = 0$ debe ser continua, por lo que $k = 0$.

La función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+bx-1 & si\ x\leq 0 \\ \dfrac{-xe^x}{x}=-e^x & si\ x>0 \end{cases}$

Para que sea derivable en x = 0 deben coincidir las derivadas laterales.

Obtenemos la derivada de la función en $\mathbb{R}-\{0\}$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+b & si\ x<0 \\ -e^x & si\ x>0 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en x = 0 y hacemos que tengan el mismo valor.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+b=b \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}-e^x=-e^0=-1 \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

Los valores que hacen que f derivable en x = 0 son $k = 0$ y $b = -1$.

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)
Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y=-2x$ y la parábola $y=ax^2+4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Hallamos los puntos de corte de recta y parábola.

$$\left.\begin{array}{l} y=-2x \\ y=ax^2+4x \end{array}\right\} \Rightarrow -2x=ax^2+4x \Rightarrow ax^2+6x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(ax+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ ax+6=0 \to ax=-6 \to \{a>0\} \to \boxed{x=\dfrac{-6}{a}<0} \end{cases}$$

Hallamos el área de la región encerrada por la recta $y=-2x$ y la parábola $y=ax^2+4x$ que calculamos como el valor absoluto de la integral definida entre $x=\dfrac{-6}{a}$ y $x=0$ de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-6/a}^{0} ax^2+4x-(-2x)\,dx=\int_{-6/a}^{0} ax^2+6x\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+3x^2\right]_{-6/a}^{0}=$$

$$=\left[\frac{a\cdot 0^3}{3}+3\cdot 0^2\right]-\left[\frac{a\left(\frac{-6}{a}\right)^3}{3}+3\left(\frac{-6}{a}\right)^2\right]=-\left[\frac{-a\frac{6^3}{a^3}}{3}+3\frac{36}{a^2}\right]=$$

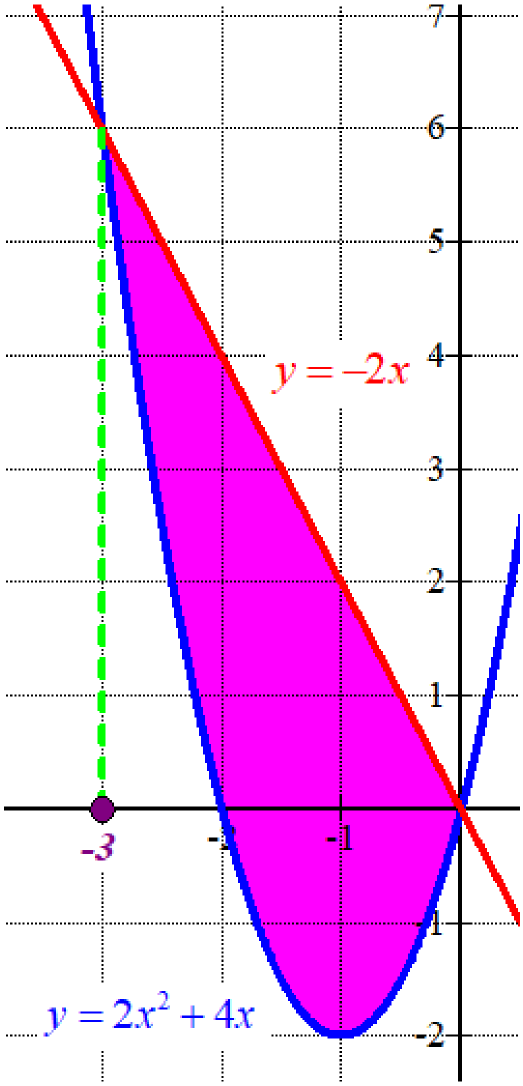
$$=-\left[\frac{-\frac{216}{a^2}}{3}+\frac{108}{a^2}\right]=\frac{216}{3a^2}-\frac{108}{a^2}=\frac{72}{a^2}-\frac{108}{a^2}=\boxed{\frac{-36}{a^2}}$$

El área del recinto tiene un valor de $\dfrac{36}{a^2}$ unidades cuadradas.

Igualamos el área a 9 y despejamos a.

$$\frac{36}{a^2}=9 \Rightarrow 36=9a^2 \Rightarrow a^2=\frac{36}{9}=4 \Rightarrow a=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \{a>0\} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

El valor buscado es $a = 2$.
La parábola queda $y=2x^2+4x$ y los puntos de corte de ambas gráficas son $x=0$ y $x=-3$.
Dibujamos las gráficas y la región para comprobar la bondad de la solución.



$y = -2x$
$y = 2x^2 + 4x$
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)
Considérense el plano $\pi : x+2y-2z=0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$.
Se pide:
a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π.
b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

a) Hallamos la ecuación de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(0,1,1)-(2,1,2)=(-2,0,-1)\\ B(0,1,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-2\lambda\\ y=1 & ;\lambda\in\mathbb{R}\\ z=1-\lambda\end{cases}$$

Comprobamos si el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+2y-2z=0\rightarrow \vec{n}=(1,2,-2)\\ \vec{v_r}=(-2,0,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_r}=(1,2,-2)(-2,0,-1)=-2+0+2=0$$

Al ser el producto escalar nulo la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto $B(0,1,1)$ de la recta pertenece al plano o no.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+2y-2z=0\\ ¿B(0,1,1)\in\pi ?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿0+2-2=0?$$

Como la igualdad es cierta el punto B pertenece al plano, al igual que el resto de puntos de la recta. La recta r está contenida en el plano π.

b) El plano π´ perpendicular al plano π tiene como uno de sus vectores directores el vector normal del plano π.
Como el plano π´ contiene a la recta r el otro vector director del plano π´ es el vector director de la recta r y el punto B pertenece al plano π´.

$$\left.\begin{array}{l}B(0,1,1)\in\pi ´\\ \vec{u}=\vec{n}=(1,2,-2)\\ \vec{v}=\vec{v_r}=(-2,0,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi ´:\begin{vmatrix}x & y-1 & z-1\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+4(y-1)+0+4(z-1)+y-1-0=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+4y-4+4z-4+y-1=0\Rightarrow \boxed{\pi ´:-2x+5y+4z-9=0}$$

La ecuación implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π es $\pi ´:-2x+5y+4z-9=0$.

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)
Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r. Se piden las ecuaciones paramétricas de r, la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π.

Hallamos la ecuación de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(1,2,-5)-(-1,3,-5)=(2,-1,0)\\ B(1,2,-5)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=2-\lambda\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=-5\end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano π que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r. Al ser perpendicular a la recta el vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{v_r}=(2,-1,0)\\ C(5,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi:2x-y+D=0\\ C(5,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 10-0+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-10\Rightarrow\boxed{\pi:2x-y-10=0}$$

El plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r tiene ecuación $\pi:2x-y-10=0$.

Hallamos el punto D de corte de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus respectivas ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:2x-y-10=0\\ r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=2-\lambda\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=-5\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2(1+2\lambda)-(2-\lambda)-10=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+4\lambda-2+\lambda-10=0\Rightarrow 5\lambda=10\Rightarrow\lambda=\frac{10}{5}=2\Rightarrow\begin{cases}x=1+4=5\\ y=2-2=0\Rightarrow\boxed{D(5,0,-5)}\\ z=-5\end{cases}$$

El punto de corte de r con π tiene coordenadas $D(5,0,-5)$.

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)
En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

Llamamos X a la variable que cuenta el número de huevos infértiles de un grupo de 7 huevos.
Esta variable aleatoria es binomial pues cada repetición es independiente de la otra y en cada repetición solo puede pasar que el huevo sea fértil o infértil.
Esta binomial tiene parámetros n = 7 y p = 0.13.
X = B(7, 0.13)

Nos piden calcular $P(X \geq 2)$. Como esta probabilidad es laboriosa de calcular utilizamos el suceso contrario.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{7}{0} 0.13^0 \cdot 0.87^7 + \binom{7}{1} 0.13^1 \cdot 0.87^6\right] = 1 - \left[0.87^7 + 7 \cdot 0.13 \cdot 0.87^6\right] \simeq \boxed{0.2281}$$

La probabilidad de que entre los 7 huevos haya por lo menos 2 infértiles tiene un valor aproximado de 0.2281.

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)
La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.
a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?
b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

X es la durabilidad de un determinado aparato electrónico (en horas). X = N(20000, 2500)

a) Nos piden calcular $P(X<17000)$.

$$P(X<17000)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{matrix}\right\}=P\left(Z<\frac{17000-20000}{2500}\right)=P(Z<-1.2)=$$

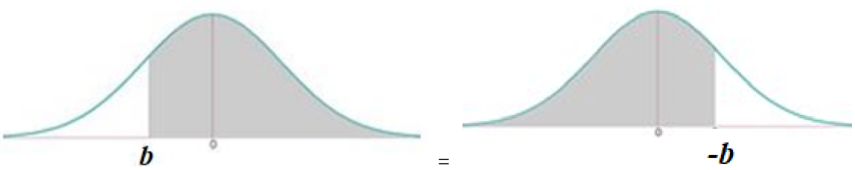
$$=P(Z>1.2)=1-P(Z<1.2)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.8849=\boxed{0.1151}$$

La probabilidad de que un aparato dure menos de 17000 horas es de 0.1151.

b) Nos piden hallar "a" tal que $P(X\geq a)=0.985$.

$$P(X\geq a)=0.985\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{matrix}\right\}\Rightarrow P\left(Z\geq\frac{a-20000}{2500}\right)=0.985\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Probabilidad mayor que 0.5}\rightarrow\\ \dfrac{a-20000}{2500}<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ldots$$



$$\ldots\Rightarrow P\left(Z\leq-\frac{a-20000}{2500}\right)=0.985\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{a-20000}{2500}=2.17\Rightarrow-a+20000=2.17\cdot2500\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20000-5425=a\Rightarrow\boxed{a=14575\,horas}$$

La durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos es 14 575 horas.