Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2023-2024

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El **estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar.

Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

PREGUNTAS

1. Sea $b \in \mathbb{R}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b+1 \\ b+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de b para los que A tiene inversa. (1 punto)

b) Hallar A^{-1} para el caso $b = 0$ (debe justificarse adecuadamente la respuesta). (1 punto)

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a y b para que el producto $A \cdot M$ sea igual a la inversa de la matriz N. (2 puntos)

3. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-4z+1=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases}$ y es paralelo a la recta de ecuación $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{3}$. (2 puntos)

4. Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(0, 3, 1)$ y $C(1, 0, -1)$. Determinar:

a) Un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (1 punto)

b) El ángulo determinado por dichos vectores. (0.5 puntos)

c) El área del triángulo que forman A, B y C. (0.5 puntos)

5. Hallar los intervalos de crecimiento y los puntos extremos de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. (2 puntos)

6. Calcular el valor de a para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x) - x \cdot e^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2} & si\ x \neq 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. (2 puntos)

7. Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=(2x+5)\cdot e^{-2x}$ que cumpla $F(0) = 0$. (2 puntos)

8. Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-5x$ y $g(x)=-x$.
(2 puntos)

9. En una residencia de ancianos el 80% de los residentes tiene cuenta de correo electrónico, el 60% tiene redes sociales, y el 10% no tiene ni correo electrónico ni redes sociales. Se pide calcular la probabilidad

a) De que un residente use correo electrónico y redes sociales (0.5 puntos)
b) De que un residente use sólo una de las dos cosas. (0.75 puntos)
c) De que un residente use correo electrónico sabiendo que no usa redes sociales. (0.75 puntos)

10. Luis es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 10 días Luis llega tarde como mucho 3 días, le subirá 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Luis llegue tarde a clase cada día es 0.5, determinar:

a) El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Luis llega tarde a clase en los próximos 10 días. ¿Cuáles son sus parámetros? (0.5 puntos)
b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución? (0.75 puntos)
c) ¿Cuál es la probabilidad de que Luis consiga esa subida de 1 punto en la nota final? (0.75 puntos)

SOLUCIONES

1. Sea $b \in \mathbb{R}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b+1 \\ b+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de b para los que A tiene inversa. (1 punto)

b) Hallar A^{-1} para el caso $b = 0$ (debe justificarse adecuadamente la respuesta). (1 punto)

a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & b+1 \\ b+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 2b+2+(b+1)(b+2)-(b+1)-2b(b+2)-2 =$$

$$= \cancel{2b}+2+b^2+\cancel{2b}+\cancel{b}+\cancel{2}-\cancel{b}-1-2b^2-\cancel{4b}-\cancel{2} = -b^2+1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -b^2+1=0 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{1}=\pm 1}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de b distinto de –1 y 1.

b) Para $b = 0$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+2+2-1-0-2 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a y b para que el producto $A\cdot M$ sea igual a la inversa de la matriz N. (2 puntos)

Nos piden resolver la igualdad $A\cdot M = N^{-1}$.
Hallamos la inversa de la matriz N.

$$|N| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1=1\neq 0$$

$$N^{-1} = \frac{Adj\left(N^t\right)}{|N|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación planteada.

$$A\cdot M = N^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+0+a-b & 0+0+1 \\ -a+b+0 & 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 1 \\ -a+b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-b=2 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=2 \\ b=1+a \end{cases} \Rightarrow 2a-(1+a)=2 \Rightarrow 2a-1-a=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=3} \Rightarrow \boxed{b=1+3=4}$$

Los valores necesarios para que $A\cdot M = N^{-1}$ son $a = 3$ y $b = 4$.

3. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-4z+1=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases}$ y es paralelo a la recta de ecuación $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{3}$. (2 puntos)

Hallamos un punto y un vector de la recta *r*.

$$r \equiv \begin{cases} x-y-4z+1=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-4z+1=0 \\ x=-1+2z \end{cases} \Rightarrow -1+2z-y-4z+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2z = y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-1,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,-2,1) \end{cases}$$

Hallamos un vector de la recta *s*.

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(1,3,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-1,3) \end{cases}$$

El plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s* tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas. Este plano contiene a la recta *r* y por tanto, contiene al punto P_r de dicha recta.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{v_r} = (2,-2,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{u_s} = (2,-1,3) \\ P_r(-1,0,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6(x+1)+2y-2z+4z-6y+x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x-6+2y-2z+4z-6y+x+1=0 \Rightarrow -5x-4y+2z-5=0 \Rightarrow \boxed{\pi : 5x+4y-2z+5=0}$$

El plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s* es $\pi : 5x+4y-2z+5=0$.

4. Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(0, 3, 1)$ y $C(1, 0, -1)$. Determinar:
a) Un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (1 punto)
b) El ángulo determinado por dichos vectores. (0.5 puntos)
c) El área del triángulo que forman A, B y C. (0.5 puntos)

a) Determinamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (0,3,1)-(1,2,1) = (-1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1,0,-1)-(1,2,1) = (0,-2,-2)$$

Un vector ortogonal a ambos vectores es su producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2i+2k-2j = -2i-2j+2k = (-2,-2,2)$$

Para que sea unitario (módulo 1) dividimos el producto vectorial entre su módulo y tendremos el vector buscado.

$$\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-2,-2,2)}{\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{(-2,-2,2)}{\sqrt{12}} = \frac{(-2,-2,2)}{2\sqrt{3}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es el vector $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

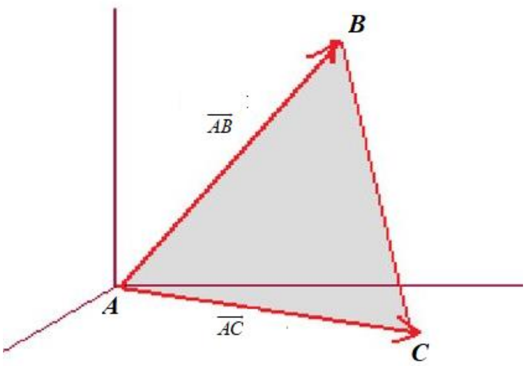
b) Utilizamos el producto escalar.

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-1,1,0)(0,-2,-2)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\sqrt{0^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \cos^{-1}(-0.5) = 120^{\circ}$$

El ángulo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es de 120º.

c) Utilizamos la fórmula del área de un triángulo definido por dos vectores.



$$\text{Área } ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$$

$$\acute{A}rea\ ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ u^2$$

El área del triángulo que forman A, B y C tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

5. Hallar los intervalos de crecimiento y los puntos extremos de la función $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$.
(2 puntos)

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

$$f(x)=x^2\cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x)=2x\cdot e^{-x}-x^2\cdot e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow xe^{-x}(2-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ e^{-x}=0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 2-x=0 \rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=(-1)e^{1}(2+1)=-3e<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=(1)e^{-1}(2-1)=e^{-1}>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=(3)e^{-3}(2-3)=-3e^{-3}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(0,2)$.
La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.
Como $f(0)=0^2\cdot e^{-0}=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0).

Como $f(2)=2^2\cdot e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(2,\dfrac{4}{e^2}\right)$.

6. Calcular el valor de a para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)-x\cdot e^x}{x^2-2\cos(x)+2} & si\ x\neq 0\\ a & si\ x=0\end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. (2 puntos)

Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función y el límite de la función cuando x tiende a 0.
Hallamos el límite de la función cuando x tiende a 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x\cdot e^x}{x^2-2\cos(x)+2}=\frac{sen(0)-0\cdot e^0}{0^2-2\cos(0)+2}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\left(e^x+x\cdot e^x\right)}{2x+2sen(x)}=\frac{\cos(0)-\left(e^0+0\cdot e^0\right)}{2\cdot 0+2sen(0)}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)-\left(e^x+e^x+x\cdot e^x\right)}{2+2\cos(x)}=\frac{-sen(0)-\left(e^0+e^0+0\cdot e^0\right)}{2+2\cos(0)}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

Aplicamos la condición de continuidad en $x = 0$: $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=a \\ \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(x)-x\cdot e^x}{x^2-2\cos(x)+2}=\dfrac{-1}{2} \\ f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=\frac{-1}{2}}$$

El valor que hace continua la función en $x = 0$ es $a=\dfrac{-1}{2}$.

7. Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=(2x+5)\cdot e^{-2x}$ que cumpla $F(0) = 0$. (2 puntos)

Utilizamos el método de integración por partes para calcular la integral de la función.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(2x+5)\cdot e^{-2x}dx=\left\{\begin{array}{l} u=2x+5\to du=2dx \\ dv=e^{-2x}dx\to v=\int e^{-2x}dx=\dfrac{-1}{2}e^{-2x}\end{array}\right\}=$$

$$=(2x+5)\frac{-1}{2}e^{-2x}-\int\frac{-1}{2}e^{-2x}2dx=\frac{-2x-5}{2}e^{-2x}+\int e^{-2x}dx=\frac{-2x-5}{2}e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}=$$

$$=\left(\frac{-2x-5}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}=(-x-3)e^{-2x}+C$$

La primitiva de la función es $F(x)=(-x-3)e^{-2x}+C$.

Para determinar el valor de C utilizamos que $F(0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=(-x-3)e^{-2x}+C \\ F(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=(-0-3)e^{0}+C\Rightarrow 0=-3+C\Rightarrow \boxed{C=3}$$

La primitiva buscada es $F(x)=(-x-3)e^{-2x}+3$.

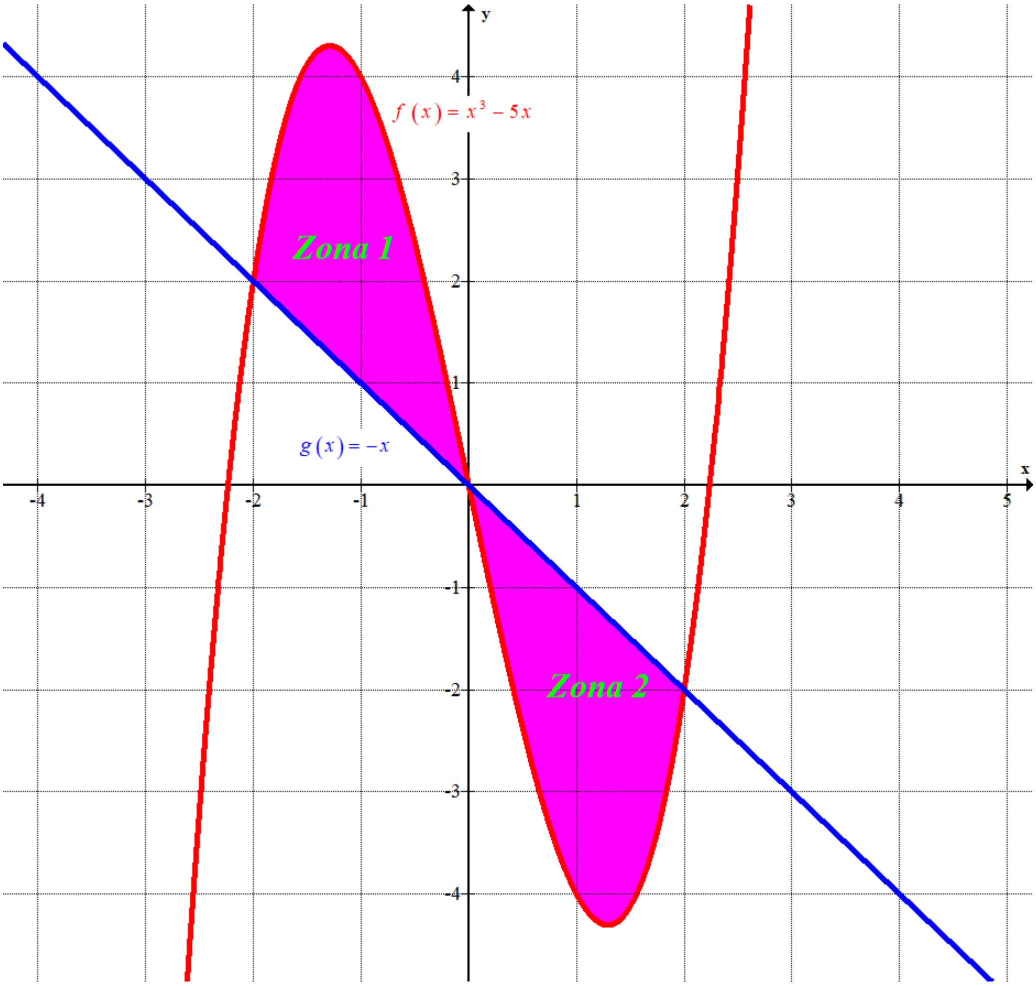
8. Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-5x$ y $g(x)=-x$.
(2 puntos)

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-5x \\ g(x)=-x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-5x=-x \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2} \end{cases}$$

Al cortarse en tres puntos el recinto limitado por las gráficas lo dividimos en dos partes.



Zona 1 (entre –2 y 0)

$$\int_{-2}^{0} f(x)-g(x)dx=\int_{-2}^{0} x^3-5x-(-x)dx=\int_{-2}^{0} x^3-4xdx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2\right]=-4+8=\boxed{4}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.

Zona 2 (entre 0 y 2)

$$\int_0^2 f(x)-g(x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_0^2=\left[\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]=4-8=\boxed{-4}$$

El área de la zona 2 es el valor absoluto de lo obtenido en la integral definida.
El área de la zona 2 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.

El área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-5x$ y $g(x)=-x$ es la suma de las dos áreas y vale 8 unidades cuadradas.

9. En una residencia de ancianos el 80% de los residentes tiene cuenta de correo electrónico, el 60% tiene redes sociales, y el 10% no tiene ni correo electrónico ni redes sociales. Se pide calcular la probabilidad

a) De que un residente use correo electrónico y redes sociales (0.5 puntos)

b) De que un residente use sólo una de las dos cosas. (0.75 puntos)

c) De que un residente use correo electrónico sabiendo que no usa redes sociales. (0.75 puntos)

Llamamos C al suceso "el residente tiene cuenta de correo electrónico" y R a "el residente tiene redes sociales"

Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Tienen correo electrónico	No tienen correo electrónico	
Tienen redes sociales (R)			60
No tienen redes sociales		10	
	80		100

Completamos la tabla.

	Tienen correo electrónico	No tienen correo electrónico	
Tienen redes sociales (R)	**50**	**10**	60
No tienen redes sociales	**30**	10	**40**
	80	**20**	100

Con los datos de la tabla y la regla de Laplace respondemos a las preguntas de cada apartado.

a) Hay un 50 % de los residentes que usan correo electrónico y redes sociales.

$$P(R \cap C) = 0.5$$

b) Hay un 30 % de residentes que usan el correo y no tienen redes sociales y otro 10 % que no tienen correo y tienen redes sociales. Hay 30 + 10 = 40 % de residentes que usan sólo una de las dos cosas.

$$P\left(\left(\overline{R} \cap C\right) \cup \left(R \cap \overline{C}\right)\right) = 0.4$$

c) Hay un 40 % de residentes que no usan redes sociales, de ellos 30 % tiene correo y 10 % no tiene correo.

$$P\left(C / \overline{R}\right) = \frac{P\left(C \cap \overline{R}\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{0.30}{0.40} = \frac{3}{4} = 0.75$$

10. Luis es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 10 días Luis llega tarde como mucho 3 días, le subirá 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Luis llegue tarde a clase cada día es 0.5, determinar:

a) El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Luis llega tarde a clase en los próximos 10 días. ¿Cuáles son sus parámetros? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución? (0.75 puntos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que Luis consiga esa subida de 1 punto en la nota final? (0.75 puntos)

a) Sea X = número de días que Luis llega tarde a clase en los próximos 10 días.
Es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 10 y la probabilidad de que llegue tarde un día es p = 0.5.
Es una variable binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.5$.
X = B(10, 0.5)

b) La media de esta distribución en $n \cdot p = 10 \cdot 0.5 = 5$ días y la desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 1.58$ días.

c) Para conseguir la subida debe llegar tarde como mucho 3 días. Debemos calcular $P(X \leq 3)$.

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$$

$$= \binom{10}{0} 0.5^0 \cdot 0.5^{10} + \binom{10}{1} 0.5^1 \cdot 0.5^9 + + \binom{10}{2} 0.5^2 \cdot 0.5^8 + \binom{10}{3} 0.5^3 \cdot 0.5^7 =$$

$$= 0.5^{10} + 10 \cdot 0.5^{10} + 45 \cdot 0.5^{10} + 120 \cdot 0.5^{10} = 176 \cdot 0.5^{10} = \frac{11}{64} \simeq 0.17$$

La probabilidad de que Luis consiga esa subida de 1 punto en la nota final es de 0.17.