Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2023-2024

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El **estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar.

Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

PREGUNTAS

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $A+A^t$ donde A^t es la traspuesta de A. (1 punto)

b) Encontrar la matriz X que verifica $XA+XA^t=C$. (1 punto)

2. Estudia el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$ según sea el valor de m. (2 puntos)

3. a) Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0), \vec{v}=(5,0,1)$ y $\vec{w}=(a,b,1)$ calcular a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. (1 punto)

b) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$. (1 punto)

4. Se consideran las rectas $r:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=-6\lambda \end{cases}$ y $s:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{a}=\dfrac{z}{3}$

a) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas. (1 punto)

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x+4y-4=0$. (1 punto)

5. Se considera la función $f(x)=\dfrac{4x+4}{x^2}$.

a) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos. (1.5 puntos)

b) Representarla gráficamente. (0.5 puntos)

6. Calcular *a*, *b* y *c* para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-b & si\ x<0 \\ a+cx & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2]. (2 puntos)

7. Hallar la integral $\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx$. (2 puntos)

8. Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=-x^3+3x^2+6,\ g(x)=2x+6$$ (2 puntos)

9. En una votación se registran 900 votos en total. El candidato A consigue 300 votos; el B consigue el 25% del total y el candidato C se lleva el resto. Se sabe que el 60% de los que han votado al candidato A eran mujeres; el 60% de los del B eran hombres, y el 20% de los del candidato C eran mujeres.

a) Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) Si un votante es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado al candidato A? (1 punto)

10. La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de 0.4. Si realiza 5 lanzamientos, calcula

a) La probabilidad de que no haga ningún hoyo. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos. (0.75 puntos)

c) El número medio de hoyos. (0.5 puntos)

SOLUCIONES

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $A+A^t$ donde A^t es la traspuesta de A. (1 punto)

b) Encontrar la matriz X que verifica $XA+XA^t=C$. (1 punto)

a) Determinamos la expresión de la matriz $A+A^t$.

$$A+A^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos su matriz inversa.

$$\left|A+A^t\right|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+1+1-2-0-2=-2\neq 0$$

$$\left(A+A^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A+A^t\right)^t\right)}{\left|A+A^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-2}=$$

$$=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $A+A^t$ es $\left(A+A^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XA+XA^t=C\Rightarrow X\left(A+A^t\right)=C\Rightarrow X=C\left(A+A^t\right)^{-1}$$

Realizamos las operaciones y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = C\left(A + A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2+1/2 & 1/2-1/2 & 1/2+3/2 \\ 3/2+0+1/2 & 3/2+0-1/2 & -3/2+0+3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Estudia el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$ según sea el valor de m. (2 puntos)

El rango de la matriz A es 3, 2 o 1.
Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix}=2m^3+2+2-2m-2m-2m=2m^3-6m+4$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^3-6m+4=0 \Rightarrow m^3-3m+2=0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow m^3-3m+2=(m-1)(m^2+m-2)$$

$$m^2+m-2=0 \Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{-1+3}{2}=\boxed{1=m} \\ \frac{-1-3}{2}=\boxed{-2=m} \end{cases}$$

El determinante se anula para $m = 1$ y para $m = -2$.
Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. $m=1$.

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como las tres filas son iguales el rango de A es 1.

CASO 3. $m=-2$.

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primeras → $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$ el rango de A es 3, si $m=1$ el rango de A es 1 y si $m=-2$ el rango de A es 2.

3. a) Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0), \vec{v}=(5,0,1)$ y $\vec{w}=(a,b,1)$ calcular *a* y *b* para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. (1 punto)
b) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$. (1 punto)

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (2,1,0)(a,b,1)=0 \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

Si los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes el producto mixto $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$ debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,0)\\ \vec{v}=(5,0,1)\\ \vec{w}=(a,b,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ a & b & 1\end{vmatrix}=0+a+0-0-5-2b=a-2b-5$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=a-2b-5\\ \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a-2b-5=0}$$

Planteamos un sistema con las dos ecuaciones obtenidas y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}2a+b=0\\ a-2b-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=-2a\\ a-2b-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow a-2(-2a)-5=0 \Rightarrow a+4a=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a=5 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Los valores buscados son *a = 1* y *b = –2*.

b) El volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$ es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,0)\\ \vec{v}=(5,0,1)\\ \vec{z}=(1,2,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v},\vec{z}\right]=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0+1+0-0-5-4=-8$$

El volumen del paralelepípedo es de 8 unidades cúbicas.

4. Se consideran las rectas $r:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=-6\lambda \end{cases}$ y $s:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{a}=\dfrac{z}{3}$

a) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas. (1 punto)
b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x+4y-4=0$. (1 punto)

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=-6\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-2,2,-6) \\ P_r(1,5,0) \end{cases}$$

$$s:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{a}=\frac{z-0}{3} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(1,a,3) \\ Q_s(-1,1,0) \end{cases}$$

Para que las rectas sean paralelas sus vectores directores deben tener coordenadas proporcionales y el punto P_r no debe pertenecer a la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,2,-6) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,a,3) \\ r \parallel s \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{1}=\frac{2}{a}=\frac{-6}{3} \Rightarrow -2=\frac{2}{a}=-2 \Rightarrow 2=-2a \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Comprobamos que para $a = -1$ el punto P_r no pertenece a la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} s:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{3} \\ ¿P_r(1,5,0)\in s? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{1+1}{1}=\frac{5-1}{-1}=\frac{0}{3}? \Rightarrow \frac{2}{1}\neq\frac{4}{-1}\neq\frac{0}{3}$$

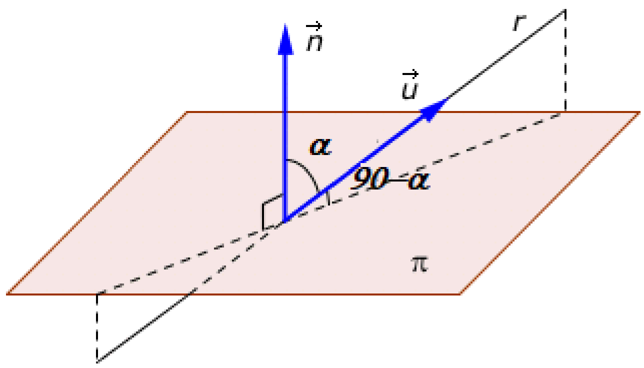
No son ciertas ninguna de las igualdades y el punto P_r no pertenece a la recta s, por lo que ambas rectas son paralelas para $a=-1$.

b) Hallamos el vector normal del plano $-3x+4y-4=0 \Rightarrow \vec{n}=(-3,4,0)$

Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,2,-6) \\ \vec{n}=(-3,4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{u_r},\vec{n}\right)=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{(-2,2,-6)(-3,4,0)}{\sqrt{(-2)^2+2^2+(-6)^2}\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{u_r},\vec{n}\right)=\frac{6+8}{\sqrt{44}\sqrt{25}}=\frac{7\sqrt{11}}{55} \Rightarrow \left(\overrightarrow{u_r},\vec{n}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{7\sqrt{11}}{55}\right)=65.02^{\circ}$$



El ángulo que forman la recta y el plano es de 90º – 65.02º = 24.98º.

5. Se considera la función $f(x)=\frac{4x+4}{x^2}$.

a) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos. (1.5 puntos)
b) Representarla gráficamente. (0.5 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{4x+4}{x^2}=\frac{4\cdot 0+4}{0^2}=\frac{4}{0}=\infty$$

La recta $x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1}=\frac{\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{1}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al existir asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

Estudiamos la monotonía de la función.
Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

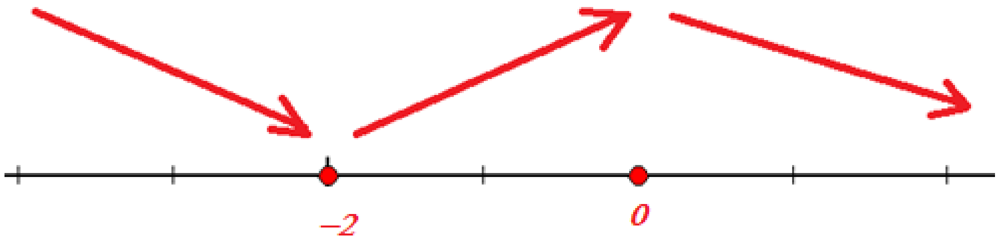
$$f(x)=\frac{4x+4}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^2-2x(4x+4)}{x^4}=\frac{4x^2-8x^2-8x}{x^4}=\frac{-4x^2-8x}{x^4}=\frac{-4x-8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x-8}{x^3}=0\Rightarrow -4x-8=0\Rightarrow 4x=-8\Rightarrow \boxed{x=\frac{-8}{4}=-2}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$ (excluido del dominio) y $x=-2$ (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x=-3$ y la derivada vale
  $f'(-3)=\frac{-4(-3)-8}{(-3)^3}=\frac{4}{-27}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale
  $f'(-1)=\frac{-4(-1)-8}{(-1)^3}=\frac{-4}{-1}=4>0$. La función crece en $(-2,0)$.
- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{-4(1)-8}{1^3}=-12<0$.
  La función decrece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y crece en $(-2,0)$.

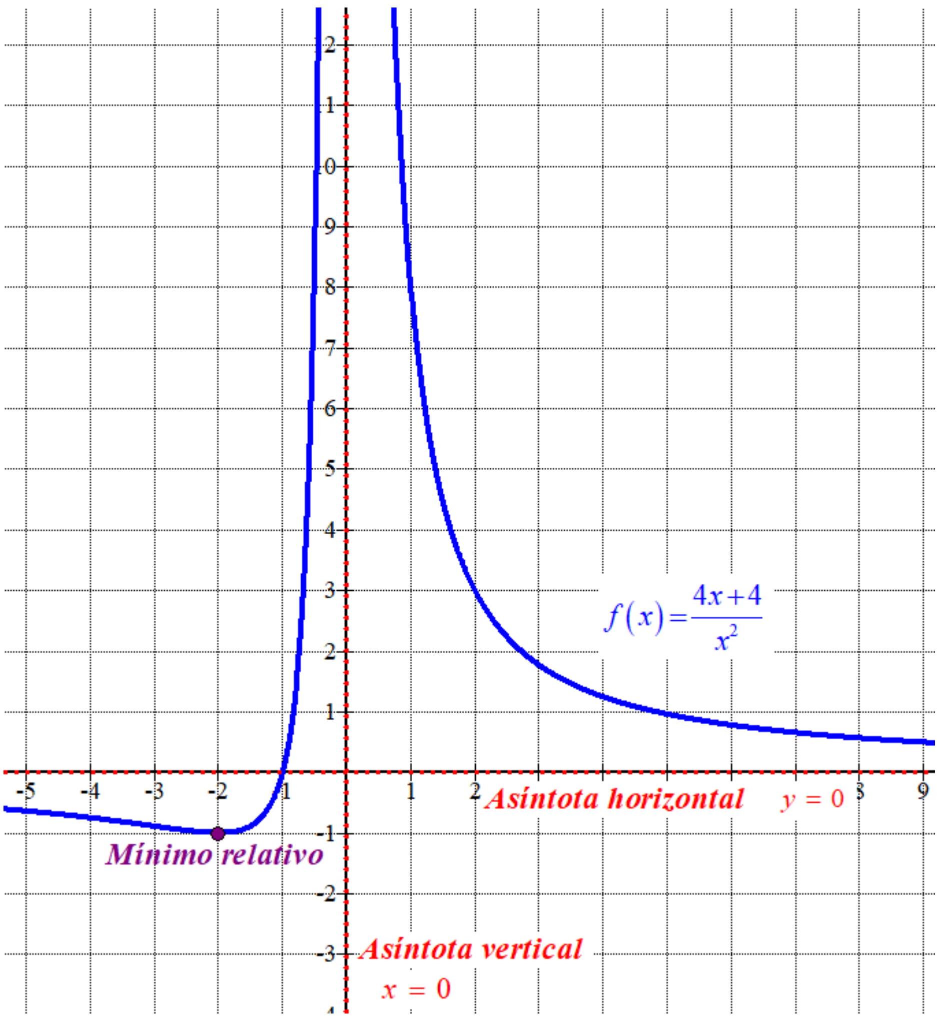
En $x = 0$ no hay máximo relativo pues este valor está excluido del dominio.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -2$.

Como $f(-2)=\dfrac{4(-2)+4}{(-2)^2}=-1$ el mínimo relativo tiene coordenadas (–2, –1).

b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$y=\dfrac{4x+4}{x^2}$
–4	–0.75
–2	–1
–1	0
1	8
2	3



6. Calcular a, b y c para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-b & si\ x<0 \\ a+cx & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2]. (2 puntos)

La función debe ser continua en el intervalo [–2, 2]. La función es continua en $[-2,0)$ por ser una función polinómica. La función es continua en $(0,2]$ por ser una función polinómica. Falta hacer que sea continua en $x = 0$.

- Existe $f(0)=a+c\cdot 0=a$.
- Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} a+cx=a$.
- Existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2+ax-b=-b$.
- Los tres valores deben ser iguales → $\boxed{a=-b}$.

Para que la función sea continua en el intervalo [–2, 2] debe ser $a=-b$.

La función debe ser derivable en $(-2,2)$. La función es derivable en $(-2,0)$ por ser una función polinómica, su derivada es $f'(x)=2x+a$. La función es derivable en $(0,2)$ por ser una función polinómica, su derivada es $f'(x)=c$. Falta hacer que sea derivable en $x = 0$. Para ello deben coincidir sus derivadas laterales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si\ x<0 \\ c & si\ x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 2x+a=a \\ f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} c=c \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=c}$$

Para que la función sea derivable en el intervalo (–2, 2) debe ser $a=c$.
El último requisito necesario para poder aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2] es que el valor de la función sea el mismo en los extremos del intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^2+a(-2)-b=4-2a-b \\ f(2)=a+2c \\ f(-2)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4-2a-b=a+2c \Rightarrow \boxed{-3a-b-2c=-4}$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a=-b \\ a=c \\ -3a-b-2c=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a=b \\ a=c \\ 3a+b+2c=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a-a+2a=4 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=-1} \\ \boxed{c=1} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$.

7. Hallar la integral $\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx$. (2 puntos)

Utilizamos el método de descomposición en fracciones simples para calcular la integral.

$$\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx = ..$$

$$x^3+x^2-2x = x\left(x^2+x-2\right) = \ldots$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2}=1=x \\ \frac{-1-3}{2}=-2=x \end{cases}$$

$$\ldots = x(x-1)(x+2)$$

$$\frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-x^2+7x+6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2+7x+6 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \to 6 = A(-1)(2) \to -2A=6 \to A=\frac{6}{-2}=-3 \\ x=1 \to 12=3B \to B=\frac{12}{3}=4 \\ x=-2 \to -12=C(-2)(-3) \to -12=6C \to C=\frac{-12}{6}=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-3}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{-2}{x+2}$$

$$\ldots = \int \frac{-3}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{-2}{x+2}dx = -3\int\frac{1}{x}dx+4\int\frac{1}{x-1}dx-2\int\frac{1}{x+2}dx =$$

$$= -3\ln|x|+4\ln|x-1|-2\ln|x+2|+C$$

Hemos obtenido que $\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx = -3\ln|x|+4\ln|x-1|-2\ln|x+2|+C$

8. Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones
$f(x)=-x^3+3x^2+6$, $g(x)=2x+6$ (2 puntos)

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^3+3x^2+6 \\ g(x)=2x+6 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -x^3+3x^2+6=2x+6 \Rightarrow 0=x^3-3x^2+2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-3x+2=0 \rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\boxed{2=x} \\ \boxed{1=x}\end{cases} \end{cases}$$

Al cortarse en tres puntos el recinto limitado por las gráficas lo dividimos en dos partes: una entre 0 y 1, otra entre 1 y 2.

Zona 1 (entre 0 y 1)

$$\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^1 -x^3+3x^2+6-(2x+6)\,dx=\int_0^1 -x^3+3x^2-2x\,dx=$$

$$=\left[\frac{-x^4}{4}+x^3-x^2\right]_0^1=\left[\frac{-1^4}{4}+1^3-1^2\right]-\left[\frac{-0^4}{4}+0^3-0^2\right]=\frac{-1}{4}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de 1/4 unidades cuadradas.

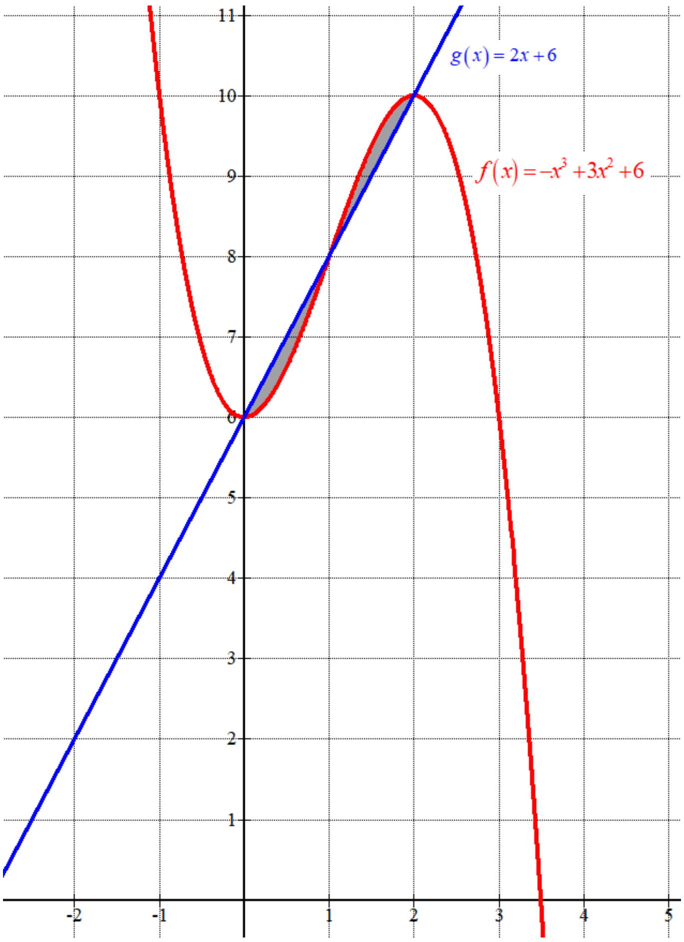
Zona 2 (entre 1 y 2)

$$\int_1^2 f(x)-g(x)\,dx=\left[\frac{-x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2=\left[\frac{-2^4}{4}+2^3-2^2\right]-\left[\frac{-1^4}{4}+1^3-1^2\right]=$$

$$=-4+8-4+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

El área de la zona 2 tiene un valor de 1/4 unidades cuadradas.

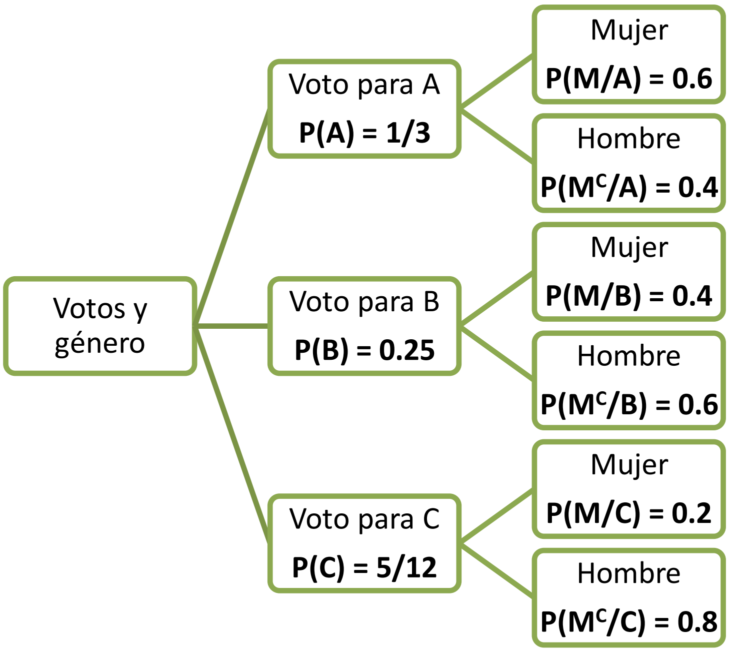
El área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=-x^3+3x^2+6$ y $g(x)=2x+6$ es la suma de las dos áreas calculadas y vale 1/4 + 1/4 = 1/2 = 0.5 unidades cuadradas.


$g(x)=2x+6$
$f(x)=-x^3+3x^2+6$

9. En una votación se registran 900 votos en total. El candidato A consigue 300 votos; el B consigue el 25% del total y el candidato C se lleva el resto. Se sabe que el 60% de los que han votado al candidato A eran mujeres; el 60% de los del B eran hombres, y el 20% de los del candidato C eran mujeres.
a) Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)
b) Si un votante es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado al candidato A? (1 punto)

Llamamos A, B y C al suceso "el voto es para el candidato A, B o C, respectivamente" y M a "el votante es mujer". Sabemos que $P(A)=\frac{300}{900}=\frac{1}{3}$, $P(B)=0.25$, $P(C)=1-\frac{1}{3}-0.25=\frac{5}{12}$, $P(M/A)=0.60$, $P\left(M^C/B\right)=0.60$ y $P(M/C)=0.20$.

Realizamos un diagrama de árbol con los datos del problema.



a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)+P(C)P(M/C)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0.6+0.25\cdot 0.4+\frac{5}{12}\cdot 0.2=\boxed{\frac{23}{60}\simeq 0.3833}$$

La probabilidad de que el votante elegido al azar sea mujer es de 0.3833.

b) Nos piden calcular $P\left(A/M^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A/M^C\right)=\frac{P\left(A\cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)}=\frac{P(A)P\left(M^C/A\right)}{1-P(M)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0.4}{1-\frac{23}{60}}=\boxed{\frac{8}{37}\simeq 0.2162}$$

La probabilidad de que un votante hombre sea votante del candidato A es de 0.2162.

10. La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de 0.4. Si realiza 5 lanzamientos, calcula

a) La probabilidad de que no haga ningún hoyo. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos. (0.75 puntos)

c) El número medio de hoyos. (0.5 puntos)

Sea X = número de hoyos en un lanzamiento de 5 intentos.
Es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 5 y la probabilidad de que haga hoyo en un lanzamiento es p = 0.4.
Es una variable binomial de parámetros *n = 5* y *p = 0.4*. X = B(5, 0.4)

a) La probabilidad de que no haya ningún hoyo es $P(X=0)$.

$$P(X=0)=\binom{5}{0}0.4^0\cdot 0.6^5=\boxed{0.07776}$$

La probabilidad de que no haga ningún hoyo es de 0.07776.

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos es $P(X\le 2)$.

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\binom{5}{0}0.4^0\cdot 0.6^5+\binom{5}{1}0.4^1\cdot 0.6^4++\binom{5}{2}0.4^2\cdot 0.6^3=$$

$$=0.6^5+5\cdot 0.4\cdot 0.6^4+10\cdot 0.4^2\cdot 0.6^3=\boxed{\frac{2133}{3125}=0.68256}$$

La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos es de 0.68256.

c) El número medio de hoyos es $np=5\cdot 0.4=2$ hoyos.