UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema: $\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$

(1.2 puntos)

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0.8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB + CX = D$ **(2 puntos)**

E3.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1,1,1)$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π. **(1 punto)**

b) Hallar la recta perpendicular a r y contenida en π que pasa por P. **(1 punto)**

E4.- (Geometría)

Determinar el plano que pasa por los puntos $P = (1,1,2)$ y $Q = (3,-1,1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y = z$. **(2 puntos)**

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^x + x^3 - 2$ demostrar que *f(x)* se anula para algún valor de *x* y que ese valor es único. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x - a}{bx^2} & si\ \ x \neq 0 \\ 1 & si\ \ x = 0 \end{cases}$, ¿qué valores tienen que tomar los parámetros $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}-\{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$? **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

Calcular los valores de a, b y c para los cuales la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x = 1$.
(2 puntos)

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-3x+2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales. **(1 punto)**

b) Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$**.** **(1 punto)**

E9- (Probabilidad y estadística)

Entre los automóviles que se fabrican de una cierta marca, un 50% son convencionales (es decir, con motor de gasolina o de gasoil), un 30% híbridos y un 20% eléctricos. De ellos, un 70% de los convencionales, un 80% de los híbridos y un 85% de los eléctricos tienen potencia $<$140 CV y el resto la tienen $\geq$ 140 CV. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia $\geq$ 140 CV. Lo mismo para híbrido o eléctrico con potencia $\geq$ 140 CV. **(1 punto)**

b) Si se sabe que el coche elegido tiene al menos 140 CV, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo convencional? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

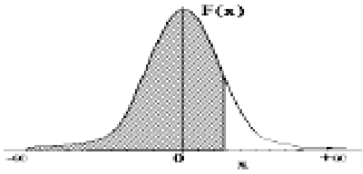
Suponiendo que el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos, calcular:

a) La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema: $\begin{cases} \lambda x+y-z=1 \\ -x+y+2z=0 \\ 2y+\lambda z=1 \end{cases}$

(1.2 puntos)

b) Resolverlo para $\lambda=1$. **(0.8 puntos)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+0+2-0+\lambda-4\lambda=\lambda^2-3\lambda+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} \frac{3+1}{2}=\boxed{2=\lambda} \\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=\lambda} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $\lambda=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,2^a+Fila\,1^a \\ -1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \rightarrow Nueva\,Fila\,2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a - Fila\,2^a\\ \begin{array}{cccc}0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1 & -1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 0\end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $\lambda = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,1^a + 2\cdot Fila\,2^a\\ \begin{array}{cccc}2 & 1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 4 & 0\\ \hline 0 & 3 & 3 & 1\end{array} \to Nueva\,Fila\,2^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3\cdot Fila\,3^a - 2\cdot Fila\,2^a\\ \begin{array}{cccc}0 & 6 & 6 & 3\\ 0 & -6 & -6 & -2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3 & 1\\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 1\end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $\lambda = 1$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $\lambda = 2$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2). Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado a).

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y-z=1\\ 2y+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y-z=1\\ z=1-2y\end{array}\right\}\Rightarrow x+y-1+2y=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2-3y\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=2-3\alpha\\ y=\alpha \qquad ;\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=1-2\alpha\end{cases}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión: $x=2-3\alpha;\ y=\alpha;\ z=1-2\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}$.

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB+CX=D$ **(2 puntos)**

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AB+CX=D \Rightarrow CX=D-AB \Rightarrow X=C^{-1}(D-AB)$$

Comprobamos que la matriz C es invertible, calculamos su inversa y hacemos las operaciones para obtener la expresión de la matriz X.

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^{T}\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$D-AB=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0+0-1 & 2+0+1\\ 0+1+0 & 2+0+0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=C^{-1}(D-AB)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz X buscada tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

E3.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1,1,1)$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de *r* y π. **(1 punto)**

b) Hallar la recta perpendicular a *r* y contenida en π que pasa por P. **(1 punto)**

a) Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + 2y - 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,2,-3)$$

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r} = (1,1,1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases}$$

Comprobamos si los vectores son perpendiculares o no.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (1,2,-3) \\ \vec{v_r} = (1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v_r} = (1,2,-3)(1,1,1) = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v_r}$$

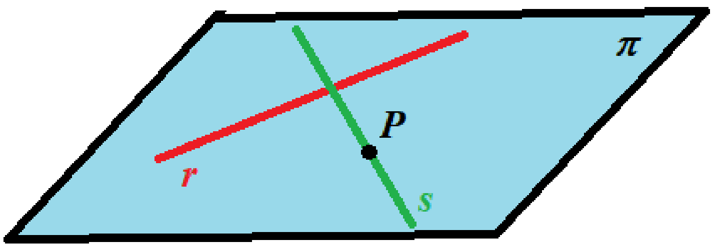
Como el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Averiguamos si el punto $P_r(0,0,0)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P_r(0,0,0) \in \pi ? \\ \pi \equiv x + 2y - 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0?$$

La igualdad es cierta, por lo que el punto pertenece al plano y la recta está contenida en el plano.

b) Queremos hallar la recta *s* del dibujo.



La recta *s* perpendicular a la recta *r* tiene como vector director un vector perpendicular al vector director de *r* y perpendicular al vector normal del plano (*s* está contenida en el plano), por lo que nos sirve como vector director de *s* el producto vectorial $\vec{n} \times \vec{v_r}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (1,2,-3) \\ \vec{v_r} = (1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 3j + k - 2k - j + 3i = 5i - 4j - k = (5,-4,-1)$$

Hallamos la ecuación de la recta *s* como la recta con vector director $\vec{n} \times \vec{v_r}$ y que pasa por el punto $P = (1,1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\vec{n}\times\overrightarrow{v_r}=(5,-4,-1)\\ P=(1,1,1)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1+5\lambda\\ y=1-4\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1-\lambda\end{cases}$$

La recta perpendicular a r y contenida en π que pasa por P es $s:\begin{cases}x=1+5\lambda\\ y=1-4\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1-\lambda\end{cases}$.

E4.- (Geometría)
Determinar el plano que pasa por los puntos $P=(1,1,2)$ y $Q=(3,-1,1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv x-1=y=z$. **(2 puntos)**

Si el plano es paralelo a la recta *r* uno de sus vectores directores es el vector director de la recta. El otro vector director es el vector $\overrightarrow{PQ}$.
Hallamos el vector director de la recta *r*.

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1} \Rightarrow \overrightarrow{w_r}=(1,1,1)$$

Hallamos la ecuación del plano pedido.

$$\left.\begin{array}{l} Q=(3,-1,1) \\ P=(1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(3,-1,1)-(1,1,2)=(2,-2,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(2,-2,-1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{w_r}=(1,1,1) \\ P(1,1,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1)-(y-1)+2(z-2)+2(z-2)-2(y-1)+x-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+2-y+1+2z-4+2z-4-2y+2+x-1=0 \Rightarrow \boxed{\pi:-x-3y+4z-4=0}$$

El plano que pasa por los puntos *P* y *Q* y es paralelo a la recta *r* es $\pi:-x-3y+4z-4=0$.

E5.- (Análisis)
Dada la función $f(x)=e^x+x^3-2$ demostrar que *f(x)* se anula para algún valor de *x* y que ese valor es único. **(2 puntos)**

La función tiene como dominio de definición $\mathbb{R}$. La función es continua en todo su dominio.
La función es derivable en todo su dominio siendo su derivada $f'(x)=e^x+3x^2$. Esta función derivada siempre es positiva pues es suma de valores positivos, por lo que la función es siempre creciente.

Consideremos el intervalo $[0,2]$. En este intervalo la función es continua. También es derivable en el intervalo $(0,2)$. Y tenemos que $f(0)=e^0+0^3-2=-1<0$ y $f(2)=e^2+2^3-2=e^2+6>0$. Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c\in(0,2)$ tal que $f(c)=0$.
Como la función siempre es creciente podemos decir que la función es negativa para cualquier valor menor que *c* y es positiva para cualquier valor mayor que *c*. No podemos aplicar el teorema de Bolzano en ningún intervalo que no incluya el intervalo (0, 2).
Por lo que no existe otro valor que anule la función.
Existe un único valor *c* tal que $f(c)=0$.

OTRA FORMA DE RAZONARLO
Si existiese otro valor *d* tal que $f(d)=0$ tendríamos que la función es continua en el intervalo $[c,d]$ y derivable en (c,d), además $f(c)=f(d)=0$, aplicando el teorema de Rolle existe $a\in(c,d)$ tal que $f'(a)=0$.
Y esto no es posible pues la derivada de la función nunca se anula.
Por lo tanto, existe un único valor *c* tal que $f(c)=0$.
He supuesto que $d>c$, se razonaría igualmente suponiendo $c>d$.

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x - a}{bx^2} & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$, ¿qué valores tienen que tomar los parámetros $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\mathbb{R}-\{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$? **(2 puntos)**

Para que esta función sea continua debe serlo en *x = 0.*

- Existe $f(0)=1$.
- Existe $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-a}{bx^2}=\dfrac{\cos 0-a}{b\cdot 0^2}=\dfrac{1-a}{0}=\ldots$

  Como debe existir el límite para que sea continua debe ser *a = 1*, en caso contrario el límite valdría ∞.

  $\ldots=\{a=1\}=\dfrac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-senx}{2bx}=\dfrac{0}{0}=$

  $=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-cosx}{2b}=\dfrac{-1}{2b}$
- El valor de la función y el límite deben ser iguales → $\dfrac{-1}{2b}=1\Rightarrow -1=2b\Rightarrow \boxed{b=\dfrac{-1}{2}}$

Los valores que hacen que la función sea continua son $a=1$ y $b=\dfrac{-1}{2}$.

E7.- (Análisis)
Calcular los valores de a, b y c para los cuales la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, tiene extremos relativos en $x=0$ y $x=2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x=1$.
(2 puntos)

Si la función tiene extremos relativos en $x=0$ y $x=2$ significa que la derivada se anula para estos valores → $f'(0)=0$ y $f'(2)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f'(x)=3x^2+2ax+b \end{array}\right\} \Rightarrow 0=0^2+2a\cdot 0+b \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2)=0 \\ b=0 \to f'(x)=3x^2+2ax \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3\cdot 2^2+2a\cdot 2 \Rightarrow 12+4a=0 \Rightarrow 4a=-12 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-12}{4}=-3}$$

Tenemos que $a=-3$ y $b=0$, la función queda $f(x)=x^3-3x^2+c$.
Como la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x=1$, esto implica que $f(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x^2+c \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1^3-3\cdot 1^2+c=0 \Rightarrow \boxed{c=2}$$

Los valores buscados son $a=-3$, $b=0$ y $c=2$.

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-3x+2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales. **(1 punto)**

b) Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función son todos los números reales mayores que 0 (debe existir lnx) que no anulen el denominador.

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=\boxed{2=x}\\ \dfrac{3-1}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

El dominio de la función es $(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

Asíntotas verticales. $x=a$.

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2-3x+2}=\frac{\ln 0^+}{2}=\frac{-\infty}{2}=-\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x(2x-3)}=\frac{1}{1(2-3)}=-1$$

$x=1$ no es asíntota vertical.

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\ln x}{x^2-3x+2}=\frac{\ln 2}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

Estudiamos la situación en $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2-3x+2}=\frac{+\infty}{+\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(2x-3)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la gráfica de f cuando x tiende a $+\infty$.

b) Calculamos la integral usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx = \ldots$$

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \to 1=-A \to A=-1 \\ x=2 \to 1=B \end{cases} \Rightarrow$$

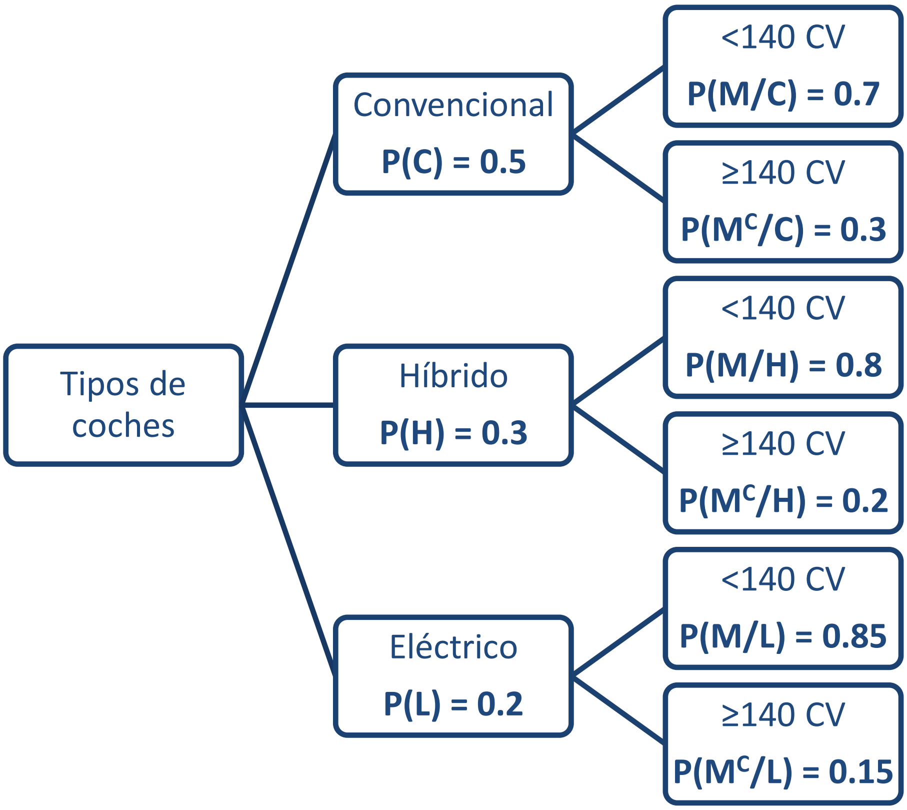
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\ldots = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}dx = -\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C$$

Tenemos que $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$.

E9- (Probabilidad y estadística)
Entre los automóviles que se fabrican de una cierta marca, un 50% son convencionales (es decir, con motor de gasolina o de gasoil), un 30% híbridos y un 20% eléctricos. De ellos, un 70% de los convencionales, un 80% de los híbridos y un 85% de los eléctricos tienen potencia <140 CV y el resto la tienen ≥ 140 CV. Se pide:
a) Calcular la probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV. Lo mismo para híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV. **(1 punto)**
b) Si se sabe que el coche elegido tiene al menos 140 CV, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo convencional? **(1 punto)**

Hacemos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada.
Llamamos C a “el coche es convencional”, H a “el coche es híbrido”, L a “el coche es eléctrico” y M a “el coche tiene potencia <140 CV”.



a) Nos piden calcular $P\left(C\cap M^C\right)$.

$$P\left(C\cap M^C\right)=P(C)P\left(M^C/C\right)=0.5\cdot 0.3=\boxed{0.15}$$

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV es de 0.15.

También nos piden calcular $P\left((H\cup L)\cap M^C\right)$.

$$P\left((H\cup L)\cap M^C\right)=P\left(H\cap M^C\right)+P\left(L\cap M^C\right)=$$

$$=P(H)P\left(M^C/H\right)+P(L)P\left(M^C/L\right)=0.3\cdot 0.2+0.2\cdot 0.15=\boxed{0.09}$$

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV es de 0.09.

b) Nos piden hallar $P\left(C/M^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(C/M^C\right)=\frac{P\left(C\cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)}=\frac{P\left(C\cap M^C\right)}{P\left(C\cap M^C\right)+P\left(H\cap M^C\right)+P\left(L\cap M^C\right)}=$$

$$=\frac{0.15}{0.15+0.09}=\boxed{\frac{5}{8}=0.625}$$

La probabilidad de que el coche elegido sea de tipo convencional sabiendo que tiene al menos 140 CV (≥ 140 CV) es de 0.625.

E10.- (Probabilidad y estadística)
Suponiendo que el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos, calcular:
a) La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas. **(1 punto)**
b) El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Llamamos X = el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez en minutos. X = N(160, 30)

a) Nos piden calcular $P(X<120)$.

$$P(X<120)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-160}{30}\end{matrix}\right\}=P\left(Z<\frac{120-160}{30}\right)=P(Z<-1.33)=P(Z>1.33)=$$

$$=1-P(Z\le 1.33)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla } N(0,1)\end{matrix}\right\}=1-0.9082=\boxed{0.0918}$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	[illegible]	0,8
1,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9082	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9

La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas es de 0.0918.

b) 3 horas y 50 minutos son 3 · 60 + 50 = 230 minutos. Nos piden calcular $P(X>230)$.

$$P(X>230)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-160}{30}\end{matrix}\right\}=P\left(Z>\frac{230-160}{30}\right)=P(Z>2.33)=$$

$$=1-P(Z\le 2.33)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla } N(0,1)\end{matrix}\right\}=1-0.9901=\boxed{0.0099}$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,[illegible]120	0,51
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,[illegible]517	0,55
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,[illegible]910	0,59
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,[illegible]293	0,63
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,[illegible]664	0,67
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,[illegible]019	0,70
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,[illegible]357	0,73
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,[illegible]673	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,[illegible]967	0,79
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,[illegible]238	0,82
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,[illegible]485	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,[illegible]708	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,[illegible]907	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,[illegible]082	0,90
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,[illegible]236	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,[illegible]370	0,93
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,[illegible]484	0,94
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,[illegible]582	0,95
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,[illegible]664	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,[illegible]732	0,97
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,[illegible]788	0,97
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,[illegible]834	0,98
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	[illegible]	0,98
2,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9901	0,99
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,99

El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos es del 0.99 %, aproximadamente un 1 %.