Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2023/2024

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.

a) **[1,25 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.

b) **[1,25 puntos]** Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & x<3 \\ \dfrac{2x}{x-4} & x \geq 3 \end{cases}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

3. Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2, 1, 1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x \qquad - z = 1 \end{cases}$.

a) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que define el toldo.

b) **[1,25 puntos]** Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2,-2, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

4.

a) [**1 punto**] Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx$.

b) [**1,5 puntos**] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante del producto de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

5.

a) [**1 punto**] Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X.

b) [**1,5 puntos**] Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$\pi_1 \equiv x + y = 1$; $\pi_2 \equiv x + y + z = 2$; $\pi_3 \equiv z = 0$.

6.

a) **[1 punto]** Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}$.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están mascadas con los dos puntos (verde y rojo).

b.1) [**0,75 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b.2) [**0,75 puntos**] Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

7.

a) [**1,25 puntos**] Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) [**1,25 puntos**] Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-2}$ y contiene al punto A(0, 1, 0).

8.

a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

n	k	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
5	0	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313

SOLUCIONES

1. Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.

a) **[1,25 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.

b) **[1,25 puntos]** Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

a) Llamamos "x" al número de helados de 1 bola, "y" al número de helados de 2 bolas y "z" al número de helados de 3 bolas.

"El viernes ha vendido 157 helados" → $x+y+z=157$.

"Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros" → $x+2y+3z=278$.

"El número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$" → $x=kz\,(k>0)$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=157 \\ x+2y+3z=278 \\ x=kz\,(k>0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=157 \\ x+2y+3z=278 \\ x\qquad -kz=0 \end{array}\right\}$$

b) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$. El sistema tiene solución única cuando el rango de A es 3, es decir cuando el determinante de A es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix}=-2k+3+0-2+k-0=1-k$$

$$|A|=0 \Rightarrow 1-k=0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

El sistema tiene solución única para cualquier valor de k distinto de 1 y mayor que 0.

Si se han vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas significa $x = z$. Sustituimos esta igualdad en el sistema y vemos como queda.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+x=157 \\ x+2y+3x=278 \\ x\qquad -kx=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=157 \\ 4x+2y=278 \\ (1-k)x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{k\neq 1\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=157 \\ 4x+2y=278 \\ \boxed{x=0} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 157 \\ 2y = 278 \rightarrow y = \dfrac{278}{2} = 139 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Con lo planteado surge un sistema que no tiene solución, pues obtenemos dos soluciones distintas para "y".

No es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas.

2. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & x<3 \\ \dfrac{2x}{x-4} & x\geq 3 \end{cases}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

a) En el intervalo $(-\infty,3)$ la función es $f(x)=x^2+2x+1$, que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(3,+\infty)$ la función es $f(x)=\dfrac{2x}{x-4}$ la función es discontinua en $x = 4$. Como no existe la función y $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x}{x-4}=\dfrac{8}{0}=\infty$ la función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 4$.

Estudiamos la continuidad en $x = 3$.

- Existe $f(3)=\dfrac{2\cdot 3}{3-4}=-6$
- Existe $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-4}=-6$
- Existe $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^2+2x+1=9+6+1=16$

Como los límites laterales no coinciden, pero son finitos la función es discontinua de salto finito en $x = 3$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{3,4\}$. En $x = 3$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito y en $x = 4$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$ tiene la expresión $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

La función en un entorno de $x = 2$ tiene la expresión $f(x)=x^2+2x+1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+2x+1 \Rightarrow f(2)=2^2+2\cdot 2+1=9 \\ f'(x)=2x+2 \Rightarrow f'(2)=2\cdot 2+2=6 \\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-9=6(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-9=6x-12 \Rightarrow \boxed{y=6x-3}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$ tiene la expresión $y=6x-3$.

3. Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2, 1, 1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x \quad\quad - z = 1 \end{cases}$.

a) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que define el toldo.

b) **[1,25 puntos]** Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2,-2, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

a) Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por A. El vector normal de este plano es el vector director de la recta.
Hallamos el vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x \quad\quad - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ \boxed{x - 1 = z} \end{cases} \Rightarrow 2x - y + x - 1 = 3 \Rightarrow 3x - y = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-4 + 3x = y} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -4, -1) \\ \vec{v_r} = (1, 3, 1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} A(2,1,1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v_r} = (1,3,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(2,1,1) \in \pi \\ \pi : x + 3y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 3 + 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -6 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 3y + z - 6 = 0}$$

La ecuación del plano que define el toldo es $\pi : x + 3y + z - 6 = 0$.

b) La distancia pedida es la distancia del punto F al plano π.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 3y + z - 6 = 0 \\ F(2, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(F, \pi) = \frac{|2 + 3(-2) + 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{11}} \simeq 2.71 unidades$$

La distancia del foco al toldo tiene un valor aproximado de 2.7 unidades.

4.

a) [**1 punto**] Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2x^2}{x^2+1}dx$.

b) [**1,5 puntos**] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante del producto de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

a) Calculamos la integral.

$$\int \frac{2x^2}{x^2+1}dx = 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = 2\left(\int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx \right) =$$

$$= 2\left(\int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx \right) = 2\left(x - arctgx\right) + K$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 0 = a$$

$$|A \cdot A| = |A| \cdot |A| = a \cdot a = a^2$$

Calculamos el determinante de A^n.

$$\left|A^n\right| = \left|A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \left(n\,veces\right) \ldots \cdot A\right| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot \ldots (n\,veces) \ldots \cdot |A| =$$

$$= a \cdot a \cdot a \cdot \ldots (n\,veces) \ldots \cdot a = a^n$$

El determinante del producto de n veces A (con $n > 2$ y entero) es a^n.

5.
a) [**1 punto**] Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x)=x$ entre los puntos $x=2$ y $x=3$ con respecto al eje X.
b) [**1,5 puntos**] Estudia la posición relativa de los siguientes planos:
$\pi_1 \equiv x+y=1;\ \pi_2 \equiv x+y+z=2;\ \pi_3 \equiv z=0$.

a) Utilizamos la fórmula del volumen de un cuerpo de revolución: $Volumen=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$

$$Volumen=\pi\int_2^3 (x)^2\,dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3=\pi\left(\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)=\boxed{\frac{19\pi}{3}\,u^3}$$

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y+z=2 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema formado por sus ecuaciones no tiene solución y los tres planos no coinciden en ningún punto.
Vemos que ocurre dos a dos.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x+y=1 \\ \pi_2 \equiv x+y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-y \\ x+y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-y+y+z=2 \Rightarrow z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,0) \\ P_r(1,0,1) \end{cases}$$

Los planos π_1 y π_2 no son paralelos y coinciden en una recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x+y=1 \\ \pi_3 \equiv z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(-1,1,0) \\ Q_s(1,0,0) \end{cases}$$

Los planos π_1 y π_3 no son paralelos y coinciden en una recta *s* paralela a *r*.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv x+y+z=2 \\ \pi_3 \equiv z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y=2 \Rightarrow x=2-y \Rightarrow t:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{w_t}=(-1,1,0) \\ R_t(2,0,0) \end{cases}$$

Los planos π_2 y π_3 no son paralelos y coinciden en una recta *t* paralela a *r*.

Los tres planos coinciden dos a dos en rectas paralelas.

6.

a) **[1 punto]** Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}$.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están mascadas con los dos puntos (verde y rojo).

b.1) [**0,75 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b.2) [**0,75 puntos**] Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}=\frac{(-2)^3+2(-2)^2-2+2}{(-2)^2+2(-2)}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+4x+1}{2x+2}=\frac{3(-2)^2+4(-2)+1}{2(-2)+2}=\frac{12-8+1}{-2}=\boxed{-2.5}$$

b) Llamamos V a "sacar carta con punto verde" y R a "sacar carta con punto rojo". Realizamos una tabla de contingencia.

	Cartas con punto rojo (R)	Cartas sin punto rojo ($\overline{R}$)	
Cartas con punto verde (V)	7	4	
Cartas sin punto verde ($\overline{V}$)	5		
			40

Completamos la tabla.

	Cartas con punto rojo (R)	Cartas sin punto rojo ($\overline{R}$)	
Cartas con punto verde (V)	7	4	**11**
Cartas sin punto verde ($\overline{V}$)	5	**24**	**29**
	12	**28**	40

b.1) En la primera extracción de la carta tenemos 40 cartas y 11 con punto verde, por lo que la probabilidad de que en la primera extracción la carta tenga un punto verde es $\frac{11}{40}$. En la segunda extracción solo quedan 39 cartas y 10 con punto verde la probabilidad de que en la segunda extracción (sin reemplazamiento) la carta tenga un punto verde es $\frac{10}{39}$.

La probabilidad de que al sacar dos cartas sin reemplazamiento ambas tengan un punto verde es $\frac{11}{40}\cdot\frac{10}{39}=\frac{11}{156}\simeq 0.0705$.

b.2) Si la carta extraída tiene un punto verde significa que es una de las 11 cartas con punto verde. Como de estas solo hay 7 con punto rojo tenemos que la probabilidad de que si la carta extraída tiene punto verde tenga también un punto rojo es de $\frac{7}{11} \simeq 0.6364$.

7.

a) [**1,25 puntos**] Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) [**1,25 puntos**] Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto A(0, 1, 0).

a) Calculamos lo pedido utilizando las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Fila 1ª = Fila 2ª} \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{matrix} \right\} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot 1 = \boxed{2}$$

b) La recta paralela a $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ tiene el mismo vector director. La recta pedida es la recta que pasa por A(0, 1, 0) y tiene como vector director $\vec{v} = (1,1,-2)$. Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{matrix} A(0,\ 1,\ 0) \in r \\ \vec{v} = (1,1,-2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

La ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto $A(0,\ 1,\ 0)$ es $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}$.

8.

a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

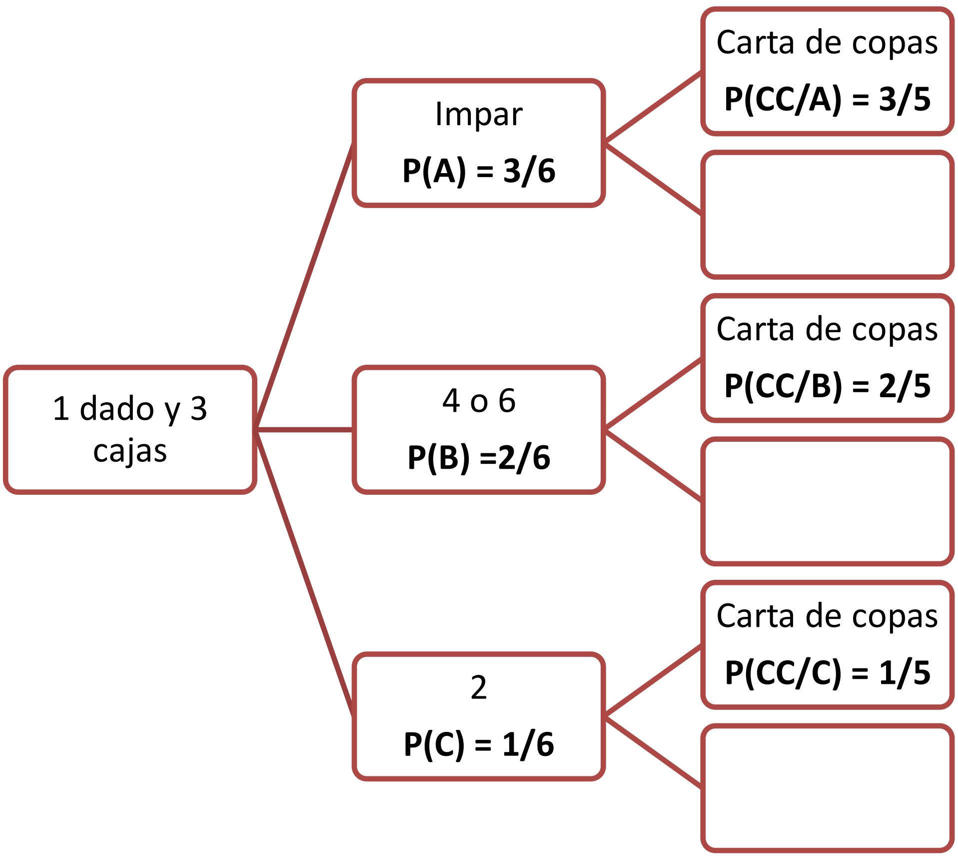
b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

n	k	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
5	0	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313

a) Llamamos A a "sacar impar al lanzar el dado", B a "sacar 4 o 6 al lanzar el dado", C a "sacar 2 al lanzar el dado" y CC a "sacar carta de copas".
Realizamos un diagrama de árbol para aclarar el experimento aleatorio y establecer las probabilidades de cada suceso.



a.1) Nos piden calcular $P(CC)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(CC) = P(A)P(CC/A) + P(B)P(CC/B) + P(C)P(CC/C) =$$

$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{14}{30} = \boxed{\frac{7}{15} \simeq 0.4667}$$

La probabilidad de que se obtenga una carta de copas es de 7/15.

a.2) Nos piden calcular $P(B/CC)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/CC) = \frac{P(B \cap CC)}{P(CC)} = \frac{P(B)P(CC/B)}{P(CC)} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}}{7/15} = \boxed{\frac{2}{7} \simeq 0.2857}$$

La probabilidad de que la carta de copas se haya extraído de la caja B es de $\frac{2}{7} \simeq 0.2857$.

b) Consideramos la variable aleatoria X = El número de veces que un paracaidista cae en el sitio correcto en 5 lanzamientos.
Esta variable es binomial de parámetros n = 5 y p = 0.25. X = B(5, 0.25).

b.1) Nos piden calcular $P(X = 2)$.

$$P(X = 2) = 0.2637$$

n	k	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
5	0	0.5905	0.4437	0.3277	[illegible]	0.16
	1	0.3281	0.3915	0.4096	[illegible]	0.36
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.2637	0.30
	3	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.13

La probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces es de 0.2637.

b.2) Nos piden calcular $P(X \geq 1)$. Utilizamos el suceso complementario para calcular esta probabilidad.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.2373 = \boxed{0.7627}$$

n	k	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
5	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.2373	0.1
	1	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3

La probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez es de 0.7627.