Universidad de Cantabria

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JUNIO 2024

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

- Debe escoger solo cuatro ejercicios entre los ocho de los que consta el examen.
- Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x \ln x$, con $x > 0$.

1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de *f(x)*.
2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de *f*(*x*).
3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por *f*(*x*), el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considere la recta $r: \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y - az = 3$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro *a* para que:

1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para *a*.
2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para *a*.
3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para *a* y dónde se cortan.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 (E1), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 (E2) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades.

La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	E1	E2	E3
Trat. A	0.6	1	0.4
Trat. B	0.65	0.5	0.9
Trat. C	0.75	0.2	0.5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la ecuación $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de *A*.
2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+x}, & si \ x \leq 10 \\ \sqrt{x+1}, & si \ x > 10 \end{cases}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.
2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.
3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

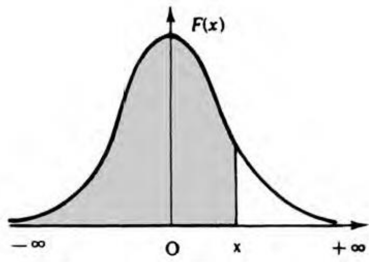
Sean A = (6, 2, –1), B = (3, 0, 5) y C = (–2, 1, 2) los vértices de un triángulo.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7.41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **y** mida más de 180 cm.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **o** mida más de 180 cm.

Distribución normal

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]
Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Llamamos "*a*" a la nota de Antonio, "*m*" a la nota de María y "*p*" a la nota de Paula.

Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María → $a=\frac{p}{2}+\frac{m}{3}$

El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula → $2m=a+p$.

Paula saca dos puntos más que Antonio → $p=a+2$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{p}{2}+\frac{m}{3} \\ 2m=a+p \\ p=a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a=3p+2m \\ 2m=a+p \\ p=a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a=3(a+2)+2m \\ 2m=a+a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a=3a+6+2m \\ 2m=2a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a=6+2m \\ m=a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a=6+2(a+1) \Rightarrow 3a=6+2a+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=8} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=8+1=9} \\ \boxed{p=8+2=10} \end{cases}$$

La nota de Antonio es 8, la de María es 9 y la de Paula es 10.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x \ln x$, con $x > 0$.

1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de *f(x)*.
2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de *f*(*x*).
3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por *f*(*x*), el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

1) Utilizamos la fórmula de la derivada de un producto de funciones.

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x, \text{ con } x > 0$$

2) Utilizamos el método de integración por partes.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

La primitiva de *f(x)* es $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

3) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre 1 y 2.

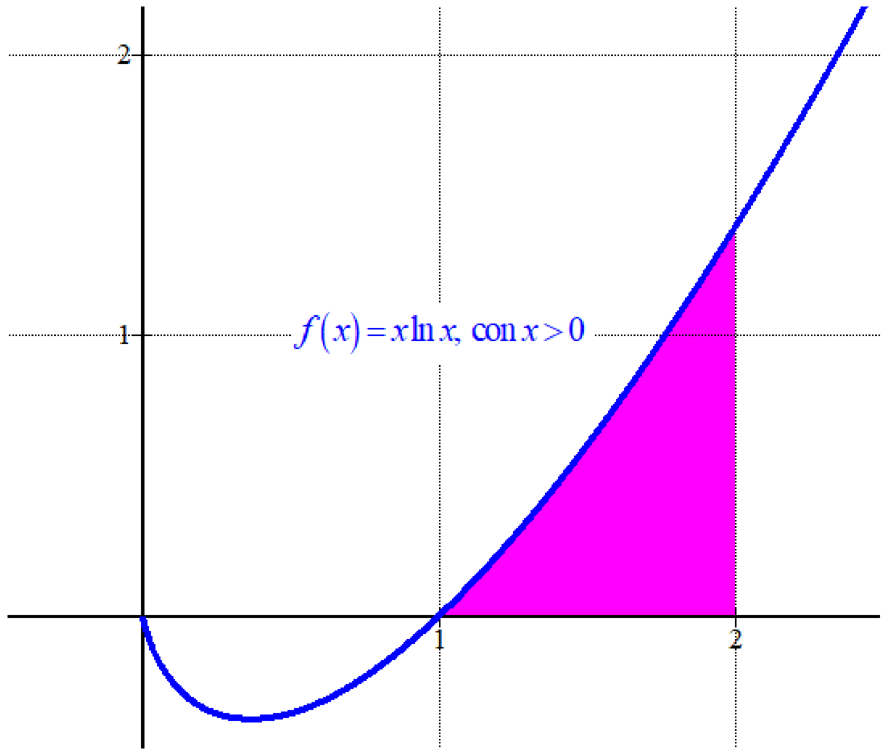
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \ln x \\ eje\,OX \to y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \notin (0, +\infty) \\ \ln x = 0 \to x = 1 \end{array} \right.$$

La función no corta el eje en (1, 2), por lo que el área del recinto limitado por *f*(*x*), el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ se obtiene con la integral definida entre 1 y 2 de la función. Sabemos que $f(x) = x \ln x > 0$, con $x > 1$.

$$Área = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^2}{2}\ln 2 - \frac{2^2}{4}\right] - \left[\frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1^2}{4}\right] = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{\ln 4 - \frac{3}{4} \simeq 0.64\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de $\ln 4 - \frac{3}{4} \simeq 0.64$ unidades cuadradas.


2
1
$f(x)=x\ln x$, con $x>0$
1
2

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considere la recta $r:\begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y-az=3$ en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro *a* para que:

1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para *a.*

2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para *a.*

3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para *a* y dónde se cortan.

1) Si la recta está contenida en el plano el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares, es decir, su producto escalar es nulo. Además, los puntos de la recta deben estar contenidos en el plano.

Hallamos el vector director de la recta y un punto de la misma y el vector normal del plano.

$$r:\begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x=-2y+z \end{cases} \Rightarrow -2y+z+y+z+5=0 \Rightarrow -y+2z+5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5+2z \Rightarrow x=-2(5+2z)+z=-10-4z+z=-10-3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} x=-10-3\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(-10,5,0) \\ \overrightarrow{v_r}=(-3,2,1) \end{cases}$$

$$\pi: 2x+y-az=3 \Rightarrow \vec{n}=(2,1,-a)$$

Aplicamos que el producto escalar es nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(2,1,-a) \\ \overrightarrow{v_r}=(-3,2,1) \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,1,-a)(-3,2,1)=0 \Rightarrow -6+2-a=0 \Rightarrow \boxed{-4=a}$$

Para *a* = –4 la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto $P_r(-10,5,0)$ de la recta está contenido en el plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(-10,5,0) \\ \pi: 2x+y+4z=3 \\ ¿P_r\in\pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿2(-10)+5+4\cdot 0=3? \Rightarrow ¿-20+5=3? \rightarrow ¡Falso!$$

La recta es paralela al plano y no existe ningún valor de *a* para el cual la recta esté contenida en el plano.

2) Lo hemos calculado en el apartado anterior. Para *a* = –4 la recta es paralela al plano.

3) Para cualquier valor distinto de –4 la recta y el plano no son paralelos ni la recta está contenida en el plano y por lo tanto son secantes.

Tomamos por ejemplo $a = 2 \neq -4$. El plano queda $\pi : 2x + y - 2z = 3$. Para este valor recta y plano se cortan en un punto. Hallamos las coordenadas de este punto resolviendo el sistema de ecuaciones formado por sus expresiones.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : 2x + y - 2z = 3 \\ r : \begin{cases} x = -10 - 3\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-10 - 3\lambda) + 5 + \cancel{2\lambda} - \cancel{2\lambda} = 3 \Rightarrow -20 - 6\lambda + 5 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = \frac{18}{-6} = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -10 - 3\cdot(-3) = -1 \\ y = 5 + 2\cdot(-3) = -1 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow P(-1, -1, -3)$$

El punto de corte de la recta $r : \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + y - 2z = 3$ es el punto de coordenadas $P(-1, -1, -3)$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 (E1), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 (E2) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades. La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	E1	E2	E3
Trat. A	0.6	1	0.4
Trat. B	0.65	0.5	0.9
Trat. C	0.75	0.2	0.5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Llamamos E1, E2 y E3 a tener las enfermedades E1, E2 y E3 respectivamente y llamamos A, B y C a curarse con el tratamiento A, B y C, respectivamente.
Por los datos proporcionados en el problema sabemos que P(E1) = 0.7, P(E2) = 0.2 y P(E3) = 0.1.
También sabemos que $P(A/E1)=0.6,\ P(A/E2)=1,\ P(A/E3)=0.4$, $P(B/E1)=0.65,\ P(B/E2)=0.5,\ P(B/E3)=0.9$, $P(C/E1)=0.75,\ P(C/E2)=0.2$ y $P(C/E3)=0.5$.
Calculamos la probabilidad de ser curado con cada uno de los tratamientos usando el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(E1)P(A/E1)+P(E2)P(A/E2)+P(E3)P(A/E3)=$$

$$=0.7\cdot 0.6+0.2\cdot 1+0.1\cdot 0.4=\boxed{0.66}$$

$$P(B)=P(E1)P(B/E1)+P(E2)P(B/E2)+P(E3)P(B/E3)=$$

$$=0.7\cdot 0.65+0.2\cdot 0.5+0.1\cdot 0.9=\boxed{0.645}$$

$$P(C)=P(E1)P(C/E1)+P(E2)P(C/E2)+P(E3)P(C/E3)=$$

$$=0.7\cdot 0.75+0.2\cdot 0.2+0.1\cdot 0.5=\boxed{0.615}$$

La probabilidad más alta es la de P(A) = 0.66. El tratamiento más eficaz en la cura sin saber que enfermedad padeces es el tratamiento A.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la ecuación $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de *A*.
2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

1) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+1-2-0-0 = -1$

2) El determinante de A tiene un valor distinto de cero, por lo cual tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) La matriz A tiene dimensiones 3×3, si la matriz X es de dimensiones $m\times n$ para que sea posible el producto AX el número columnas de A debe ser igual al número de filas de X → *m = 3*.
El resultado del producto es una matriz de dimensiones $3\times n$ que debe ser igual a B que es de dimensiones 3×2, por lo que debe ser *n = 2*.

$$\begin{matrix} A & \cdot & X & = & B \end{matrix}$$
$$3\times\boxed{3 \;\cdot\; m}\times n \to 3\times n = 3\times2$$

La matriz X debe tener 3 filas y 2 columnas.

4) Despejamos X de la ecuación: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-2 & 0-5+5 \\ 0+2-2 & 0-10+5 \\ -9-1+0 & 6+5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+x}, & si\ x\leq 10 \\ \sqrt{x+1}, & si\ x>10 \end{cases}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.
2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.
3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

1) En el intervalo $(-\infty,10]$ la función es $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$. Averiguamos cuando se anula el denominador.

$$x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \to x=-1 \end{cases}$$

La función no existe para $x=-1$ ni para $x=0$.
En el intervalo $(10,+\infty)$ la función es $f(x)=\sqrt{x+1}$ que existe para los valores del intervalo.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,0\}$.

2) En el intervalo $(-\infty,10)$ la función es $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$. La función es continua salvo para $x=-1$ y $x=0$ pues la función no existe.
En el intervalo $(10,+\infty)$ la función es $f(x)=\sqrt{x+1}$ que es continua para los valores del intervalo.
Estudiamos la continuidad en $x=10$.

$$\left.\begin{array}{l} f(10)=\dfrac{10+1}{10^2+10}=0.1 \\ \lim\limits_{x\to 10^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 10^-}\dfrac{x+1}{x^2+x}=0.1 \\ \lim\limits_{x\to 10^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 10^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{10+1}=\sqrt{11} \end{array}\right\} \Rightarrow f(10)=\lim_{x\to 10^-} f(x)=0.1\neq\sqrt{11}=\lim_{x\to 10^+} f(x)$$

Al no ser iguales los límites laterales la función no es continua en $x=10$.
La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,10)\cup(10,+\infty)$.

3) Asíntota vertical. $x=a$.
¿$x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{-1+1}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}=Indeterminación=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{x\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x}=\frac{1}{-1}=-1$$

$x=-1$ no es asíntota vertical.

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{0+1}{0^2+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

En +∞ calculamos el límite:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+1}=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando *x* tiende a +∞.

En –∞ calculamos el límite:

$$b=\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\cancel{x+1}}{x\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La función tiene la recta $y=0$ como asíntota horizontal cuando *x* tiende a –∞.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

Como en –∞ existe una asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.
Estudiamos solo cuando *x* tiende a +∞.

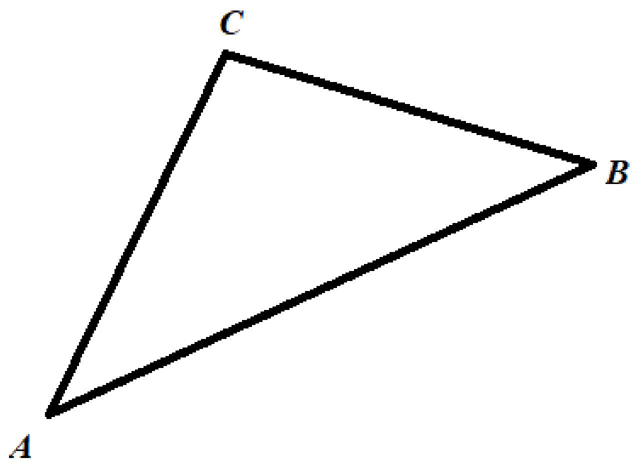
$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando *x* tiende a +∞.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x=0$, una asíntota horizontal cuando *x* tiende a –∞: $y=0$, y no tiene asíntota oblicua.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (6, 2, –1), B = (3, 0, 5) y C = (–2, 1, 2) los vértices de un triángulo.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.



1) Obtenemos el ángulo interno del vértice A usando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-2,1,2)-(6,2,-1)=(-8,-1,3)\\ \overrightarrow{AB}=(3,0,5)-(6,2,-1)=(-3,-2,6)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{(-8,-1,3)(-3,-2,6)}{\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{24+2+18}{\sqrt{74}\sqrt{49}}=\frac{44}{7\sqrt{74}}$$

$$A=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{44}{7\sqrt{74}}\right)=43.05^{\circ}$$

Obtenemos el ángulo interno del vértice B usando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(-2,1,2)-(3,0,5)=(-5,1,-3)\\ \overrightarrow{BA}=(6,2,-1)-(3,0,5)=(3,2,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{(-5,1,-3)(3,2,-6)}{\sqrt{(-5)^2+1^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}}=\frac{-15+2+18}{\sqrt{35}\sqrt{49}}=\frac{5}{7\sqrt{35}}$$

$$B=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{35}}\right)=83.06^{\circ}$$

El ángulo interno del vértice C lo obtenemos restando a 180º los dos ángulos obtenidos.

$$C = 180º - 43.05º - 83.06º = 53.89º$$

Los ángulos internos del triángulo son $A = 43.05º$, $B = 83.06º$ y $C = 53.89º$.

2) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$.

Obtenemos el producto vectorial.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-2,1,2) - (6,2,-1) = (-8,-1,3) \\ \overrightarrow{AB} = (3,0,5) - (6,2,-1) = (-3,-2,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = -6i - 9j + 16k - 3k + 48j + 6i = 39j + 13k = (0,39,13)$$

Calculamos el valor del área.

$$\text{Área } ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 39^2 + 13^2}}{2} = \boxed{\frac{13\sqrt{10}}{2} \simeq 20.55\ u^2}$$

El área del triángulo ABC tiene un valor de $\frac{13\sqrt{10}}{2} \simeq 20.55$ unidades cuadradas.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7.41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **y** mida más de 180 cm.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **o** mida más de 180 cm.

X = La altura de una mujer de 18 años en centímetros.

X = N(175, 7.41)

Llamamos L al suceso "Llamarse Lucía"

1) Nos piden calcular $P\left(\left(X>180\right)\cap L\right)$. Los sucesos "medir más de 180 cm" y "Llamarse Lucía" son independientes.

Sabemos que $P(L)=0.006$, calculamos $P(X>180)$.

$$P(X>180)=\left\{\begin{array}{l} Tipificamos \\ Z=\dfrac{X-175}{7.41} \end{array}\right\}=P\left(Z>\frac{180-175}{7.41}\right)=P(Z>0.67)=1-P(Z\leq 0.67)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array}\right\}=1-0.7486=0.2514$$

Calculamos la probabilidad pedida $P\left(\left(X>180\right)\cap L\right)$.

$$P\left(\left(X>180\right)\cap L\right)=\{Sucesos\, independientes\}=$$

$$=P(X>180)\cdot P(L)=0.2514\cdot 0.006=0.0015$$

La probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **y** mida más de 180 cm es de 0.0015.

2) Nos piden calcular $P\left(\left(X>180\right)\cup L\right)$.

$$P\left(\left(X>180\right)\cup L\right)=P(X>180)+P(L)-P\left(\left(X>180\right)\cap L\right)=$$

$$=0.2514+0.006-0.0015=0.2559$$

La probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **o** mida más de 180 cm es de 0.2559.