Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2024
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).
Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & si \;\; x\neq 0 \\ a & si \;\; x=0 \end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.
(b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

2. Calcula justificadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]$$

3. (a) (1,2 puntos) Calcula $a,\ b$ y $c\in\mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x)=ax+bsen(x)\cos(x)+c$$

sea una primitiva de $g(x)=sen^2(x)$.

(*Nota: recuerda que* $sen^2(x)+\cos^2(x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$.)

(b) (0,8 puntos) Sabiendo que $sen(2x)=2sen(x)\cos(x)$, demuestra que

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)$$

4. Demuestra que, entre todos los rectángulos de perímetro P cm, el de mayor área es el cuadrado.

5. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ C=A^T\cdot B+I_2$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A, e I_2 es la matriz identidad de orden 2.
(a) (0.8 puntos) Calcula C^{2n}, con $n\in\mathbb{N}$.
(b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $C\cdot X=5\left(A^T\cdot B\right)$.

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

(a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.
(b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $A \cdot X = 0$ cuando $m = 6$.

7. Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

8. Dados los puntos $P_1(-2,1,1)$, $P_2(0,a,-2)$, $P_3(-1,1,-1)\ y\ P_4(1,3,-3)$, se pide:

(a) (1,2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, $P_3\ y\ P_4$ tenga volumen 1/3.
(b) (0,8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

9. Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

(a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?, ¿y de alumnos?
(b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

10. Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55% llegó en avión, un 30% llegó en tren, un 10% llegó en autobús y un 5% llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50% de los que vinieron en avión, el 60% de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20% de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

(a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.
(b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1. Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & si \quad x\neq 0\\ a & si \quad x=0\end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.
(b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

a) Para $x\neq 0$ la función existe para todos los valores y es continua. Falta comprobar la continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{e^0-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=\frac{2e^0}{1}=\boxed{2}$$

Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función y el límite de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=a\\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=2\\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow a=2$$

La función es continua en x = 0 cuando a = 2.
La función es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = 2$.
La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ para cualquier valor de a distinto de 2.

b) Para el valor de $a = 1$ la función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & si \quad x\neq 0\\ 1 & si \quad x=0\end{cases}$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y-f(1)=f´(1)(x-1)$.

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{x}\Rightarrow f´(x)=\frac{2e^{2x}\cdot x-1\cdot\left(e^{2x}-1\right)}{x^2}=\frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{e^2-1}{1}=e^2-1\\ f´(1)=\dfrac{2e^2-e^2+1}{1^2}=e^2+1\\ y-f(1)=f´(1)(x-1)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\left(e^2-1\right)=\left(e^2+1\right)(x-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\left(e^2+1\right)x-e^2-1+e^2-1\Rightarrow\boxed{y=\left(e^2+1\right)x-2}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y=\left(e^2+1\right)x-2$.

Obtenemos los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} y=\left(e^2+1\right)x-2 \\ OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=\left(e^2+1\right)x-2 \Rightarrow \left(e^2+1\right)x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{e^2+1} \Rightarrow A\left(\frac{2}{e^2+1},0\right)$$

El punto de corte de la tangente con el eje OX es $A\left(\frac{2}{e^2+1},0\right)$.

Calculamos el punto de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con el eje OY.

$$\left.\begin{array}{l} y=\left(e^2+1\right)x-2 \\ OY \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\left(e^2+1\right)0-2=-2 \Rightarrow B\left(0,-2\right)$$

El punto de corte de la tangente con el eje OY es $B\left(0,-2\right)$.

2. Calcula justificadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]=\infty-\infty=\text{Indeterminación (conjugado)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]\left[\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right]}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5-\left(x^2+4x+4\right)}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+5-\cancel{x^2}-4x-4}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5}+x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-4x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}+\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1+\frac{2}{x}}=\frac{-4+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{5}{\infty^2}}+1+\frac{2}{\infty}}=\frac{-4+0}{\sqrt{1+0}+1+0}=\boxed{-2}$$

3. (a) (1,2 puntos) Calcula a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x) = ax + bsen(x)\cos(x) + c$$

sea una primitiva de $g(x) = sen^2(x)$.

(*Nota: recuerda que* $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.)

(b) (0,8 puntos) Sabiendo que $sen(2x) = 2sen(x)\cos(x)$, demuestra que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$$

(a) Si la función *f(x)* es una primitiva de *g(x)* → $\int g(x)dx = f(x)$ → la derivada de *f(x)* es la función *g(x)* → $f'(x) = g(x)$.

Calculamos la derivada de la función *f(x)*.

$$f(x) = ax + bsen(x)\cos(x) + c \Rightarrow f'(x) = a + b\cos(x)\cos(x) - bsen(x)sen(x)$$

$$f'(x) = a + b\cos^2(x) - bsen^2(x)$$

$$\boxed{Sabemos\ que\ sen^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - sen^2(x)}$$

$$f'(x) = a + b\left[1 - sen^2(x)\right] - bsen^2(x) = a + b - bsen^2(x) - bsen^2(x)$$

$$f'(x) = a + b - 2bsen^2(x)$$

Se debe cumplir la igualdad $f'(x) = g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = sen^2(x) \\ f'(x) = a + b - 2bsen^2(x) \\ f'(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow a + b - 2bsen^2(x) = sen^2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \to a = -b \\ -2b = 1 \to \boxed{b = \frac{-1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

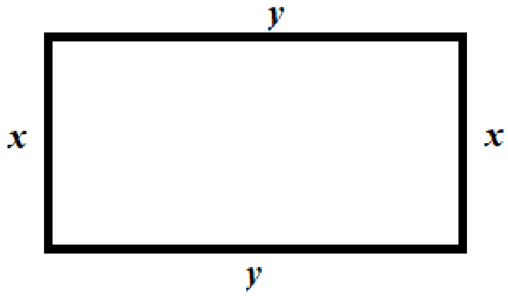
Los valores buscados son $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{-1}{2}$ y c puede ser cualquier valor real.

(b) Consideramos la función $f(x) = sen(2x) = 2sen(x)\cos(x)$ y la derivamos.

$$f'(x) = 2\cos(2x) = 2\cos(x)\cos(x) - 2sen(x)sen(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cos(2x) = \cancel{2}\cos^2(x) - \cancel{2}sen^2(x) \Rightarrow \boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)}$$

4. Demuestra que, entre todos los rectángulos de perímetro P cm, el de mayor área es el cuadrado.



El perímetro del rectángulo es P → $2x+2y=P$.
El área del rectángulo es $A(x,y)=xy$.
Sustituimos en esta expresión "y" para obtener una expresión del área en función solo de "x".

$$2x+2y=P \Rightarrow x+y=\frac{P}{2} \Rightarrow y=\frac{P}{2}-x$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=xy \\ y=\frac{P}{2}-x \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x\left(\frac{P}{2}-x\right)=\frac{P}{2}x-x^2$$

Derivamos la función $A(x)=\frac{P}{2}x-x^2$ y averiguamos cuando se anula.

$$\left.\begin{array}{r} A(x)=\frac{P}{2}x-x^2 \Rightarrow A'(x)=\frac{P}{2}-2x \\ A'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P}{2}-2x=0 \Rightarrow 2x=\frac{P}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{P}{4}}$$

En $x=\frac{P}{4}$ la función área tiene un punto crítico. Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$A'(x)=\frac{P}{2}-2x \Rightarrow A''(x)=-2 \Rightarrow A''\left(\frac{P}{4}\right)=-2<0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función área tiene un máximo relativo en $x=\frac{P}{4}$.
Averiguamos el valor de "y".

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{P}{2}-x \\ x=\frac{P}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{P}{2}-\frac{P}{4}=\frac{P}{4}$$

Las dimensiones del rectángulo de área máxima es un rectángulo de lados $x=\frac{P}{4}$ e $y=\frac{P}{4}$, es decir, un cuadrado de lado $x=\frac{P}{4}$.

5. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ C=A^T\cdot B+I_2$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A, e I_2 es la matriz identidad de orden 2.

(a) (0.8 puntos) Calcula C^{2n}, con $n\in\mathbb{N}$.

(b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $C\cdot X=5\left(A^T\cdot B\right)$.

Calculamos la expresión de la matriz C.

$$C=A^T\cdot B+I_2=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2+0+0 & 0+2+0\\ 1+0+1 & 0+0+0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz C tiene la expresión $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

(a)Calculamos las primeras potencias pares de la matriz C.

$$C^{2\cdot 1}=C^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & -2+2\\ -2+2 & 4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$C^{2\cdot 2}=C^4=C^2C^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25+0 & 0+0\\ 0+0 & 0+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^2 & 0\\ 0 & 5^2\end{pmatrix}$$

$$C^{2\cdot 3}=C^6=C^4C^2=\begin{pmatrix}5^2 & 0\\ 0 & 5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^3 & 0\\ 0 & 5^3\end{pmatrix}$$

...

$$C^{2n}=\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}$$

(b)Despejamos X de la ecuación matricial.

$$C\cdot X=5\left(A^T\cdot B\right)\Rightarrow X=5C^{-1}\left(A^T\cdot B\right)$$

Como $C^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5I_2\Rightarrow\frac{1}{5}C^2=I_2\Rightarrow\left(\frac{1}{5}C\right)\cdot C=I_2\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{5}C$.

Por otro lado, en la expresión $C=A^T\cdot B+I_2$ multiplicamos por C^{-1}.

$$C = A^T \cdot B + I_2 \Rightarrow C^{-1}C = C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) + C^{-1}I_2 \Rightarrow I_2 = C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) + C^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) = I_2 - C^{-1}$$

Sustituimos en la expresión de la matriz X.

$$\left.\begin{array}{l} X = 5C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) \\ C^{-1}\left(A^T \cdot B\right) = I_2 - C^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow X = 5\left(I_2 - C^{-1}\right) = 5I_2 - 5C^{-1} \Rightarrow \left\{C^{-1} = \frac{1}{5}C\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 5I_2 - 5\frac{1}{5}C = 5I_2 - C = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

La expresión de la matriz X es la siguiente $X = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m\in\mathbb{R}$ un parámetro.

(a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$.
(b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $A\cdot X=0$ cuando $m = 6$.

(a) Usamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente a la matriz A para establecer su rango.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a+2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{ccc} -4 & 6 & m-6 \\ 4 & -6 & 8 \\ \hline 0 & 0 & m+2 \end{array} \rightarrow Nueva\,Fila\,2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a-Fila\,1^a \\ \begin{array}{ccc} 2 & -3 & m+6 \\ -2 & 3 & -4 \\ \hline 0 & 0 & m+2 \end{array} \rightarrow Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a-Fila\,2^a \\ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & -m-2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Existen dos posibilidades.

1ª posibilidad. $m+2=0 \rightarrow m=-2$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El rango de A es 1

2ª posibilidad. $m+2\neq 0 \rightarrow m\neq -2$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2\neq 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El rango de A es 2.

(b) Cuando $m = 6$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$. Podemos resolver el sistema partiendo de esta matriz, pero lo resolvemos partiendo de la matriz equivalente obtenida en el apartado (a).

Cuando $m = 6$ la matriz queda $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y el sistema sería:

$$A \cdot X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2x-3y+4z=0 \\ 8z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2x-3y+4z=0 \\ \boxed{z=0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-3y=0 \Rightarrow 2x=3y \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}y}$$

Las soluciones del sistema planteado son: $x=\frac{3}{2}\lambda;\ y=\lambda;\ z=0;$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$

7. Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Llamamos "x" al precio sin IVA de un artículo A, "y" al precio sin IVA de un artículo B y "z" al precio sin IVA de un artículo C.

El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 € → $x+2y+5z=483$

El total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A (4 %), 10 productos de alimentación B (10 %) y 100 pequeños electrodomésticos C (21 %), es de 1954 € → $100x\cdot 0.04+10y\cdot 0.10+100z\cdot 0.21=1954$.

El precio sin IVA del pequeño electrodoméstico (C) es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad (A) más ocho artículos de alimentación (B) → $z=4x+8y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+5z=483 \\ 100x\cdot 0.04+10y\cdot 0.10+100z\cdot 0.21=1954 \\ z=4x+8y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+5z=483 \\ 4x+y+21z=1954 \\ z=4x+8y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+5(4x+8y)=483 \\ 4x+y+21(4x+8y)=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+20x+40y=483 \\ 4x+y+84x+168y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 21x+42y=483 \\ 88x+169y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=23 \\ 88x+169y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=23-2y \\ 88x+169y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 88(23-2y)+169y=1954 \Rightarrow 2024-176y+169y=1954 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7y=-70 \Rightarrow \boxed{y=\frac{70}{7}=10} \Rightarrow \boxed{x=23-20=3} \Rightarrow \boxed{z=12+80=92}$$

El precio con IVA de un producto A es 3 · 1.04 = 3.12 €, un producto B vale 10 · 1.10 = 11 € y un producto C vale 92 · 1.21 = 111.32 €.

8. Dados los puntos $P_1(-2,1,1)$, $P_2(0,a,-2)$, $P_3(-1,1,-1)$ y $P_4(1,3,-3)$, se pide:

(a) (1,2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen 1/3.

(b) (0,8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

(a) El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]$.

Calculamos el valor del producto mixto.

$$\left.\begin{array}{l} P_1(-2,1,1) \\ P_2(0,a,-2) \\ P_3(-1,1,-1) \\ P_4(1,3,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} = (0,a,-2)-(-2,1,1) = (2,a-1,-3) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (-1,1,-1)-(-2,1,1) = (1,0,-2) \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (1,3,-3)-(-2,1,1) = (3,2,-4) \end{cases}$$

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right] = \begin{vmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0-6(a-1)-6-0+4(a-1)+8 =$$

$$= -6a+6-6+4a-4+8 = -2a+4$$

Igualamos el volumen a 1/3.

$$Volumen = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|-2a+4|}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|-2a+4|}{2} = 1 \Rightarrow |-2a+4| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+4=2 \to -2a=-2 \to \boxed{a=1} \\ -2a+4=-2 \to -2a=-6 \to \boxed{a=3} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $a = 3$.

(b) Para que los cuatro puntos sean coplanarios el producto mixto $\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]$ debe ser nulo.

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right] = -2a+4=0 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

El valor buscado es $a = 2$.

9. Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

(a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?, ¿y de alumnos?

(b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

(a) De 54 alumnas aprueban 28. Es una proporción de $\frac{28}{54} \simeq 0.5185$. El porcentaje de alumnas que aprueban es de 51.89 %.

De 45 alumnos aprueban 21. Es una proporción de $\frac{21}{45} \simeq 0.4667$. El porcentaje de alumnos que aprueban es del 46.67 %.

(b) Han aprobado 49 personas y de ellas 28 son mujeres. La probabilidad de que al elegir una persona que haya aprobado sea una mujer es de $\frac{28}{49} = \frac{4}{7} \simeq 0.5714$.

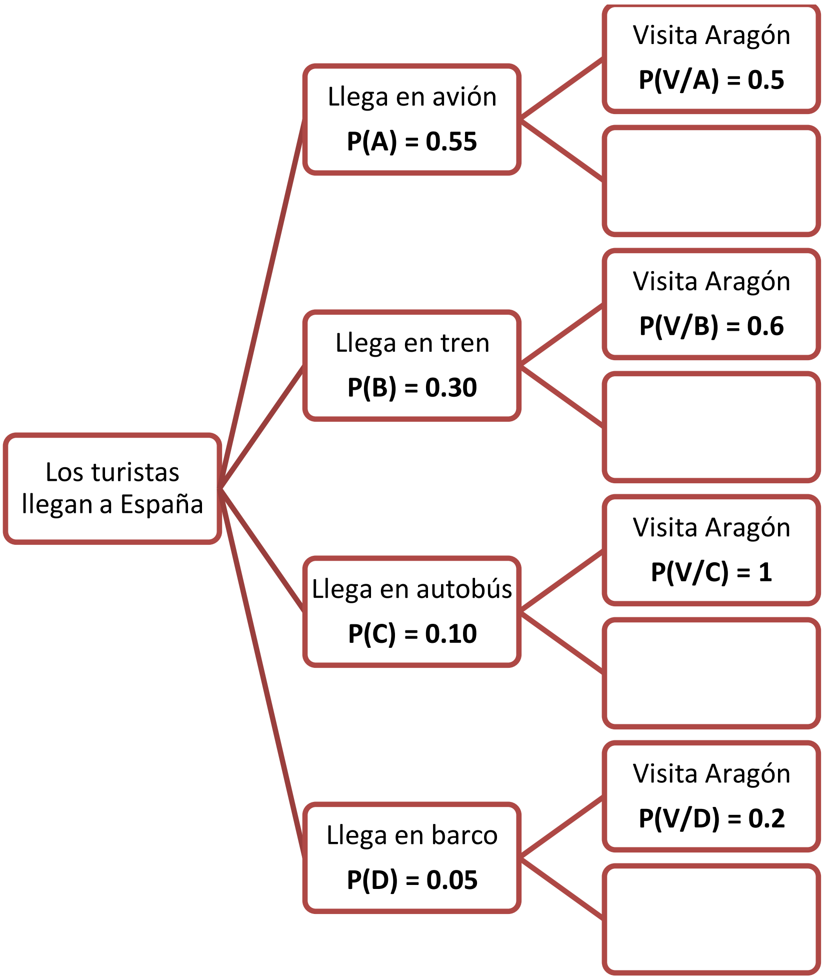
10. Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55% llegó en avión, un 30% llegó en tren, un 10% llegó en autobús y un 5% llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50% de los que vinieron en avión, el 60% de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20% de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

(a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.

(b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

Llamamos A al suceso "el turista llega a España en avión", B al suceso "el turista llega a España en tren", C al suceso "el turista llega a España en autobús", D al suceso "el turista llega a España en barco" y V al suceso "el turista visita Aragón".

Realizamos un diagrama de árbol para detallar las probabilidades de cada suceso.



(a)Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V)=P(A)P(V/A)+P(B)P(V/B)+P(C)P(V/C)+P(D)P(V/D)=$$

$$=0.55\cdot 0.5+0.30\cdot 0.6+0.10\cdot 1+0.05\cdot 0.2=\boxed{0.565}$$

La probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón es de 0.565.

(b)Nos piden calcular $P\left(\left(B\cup C\right)/V\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\left(B\cup C\right)/V\right)=\frac{P\left(\left(B\cup C\right)\cap V\right)}{P\left(V\right)}=\left\{B\cap C=\varnothing\right\}=\frac{P\left(B\cap V\right)+P\left(C\cap V\right)}{P\left(V\right)}=$$

$$=\frac{P\left(B\right)P\left(V/B\right)+P\left(C\right)P\left(V/C\right)}{P\left(V\right)}=\frac{0.30\cdot 0.6+0.10\cdot 1}{0.565}=\boxed{\frac{56}{113}\simeq 0.4956}$$

La probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren es de $\frac{56}{113}\simeq 0.4956$.