

OPCIÓN B**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas****Problema 1.** Dos matrices A y B satisfacen las siguientes igualdades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A y B .b) Calcula la matriz X sabiendo que $A X A = B$ *Solución:*

a) Debemos resolver el sistema matricial:

$$\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{Sumando ambas ecuaciones,} \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Despejando } B \text{ en la 1ª ecuación: } B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos una matriz X / $A X A = B$ Veamos si existe A^{-1} ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente } A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz X , $A X A = B$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $A^{-1} A X A = A^{-1} B$, como $A^{-1} A = I$, $I X A = A^{-1} B$, $X A = A^{-1} B$ Multiplicando, ahora, por A^{-1} por la derecha: $X A A^{-1} = A^{-1} B A^{-1}$, luego $X = A^{-1} B A^{-1}$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & -11/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & -11/4 \end{pmatrix}$$

Problema 1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz X que satisface la ecuación $A X - B C X = 3 C$.

b) Calcula la matriz inversa de $A^t + B$, donde A^t representa la matriz traspuesta de A .

Solución:

a) ¿Matriz X / $A X - B C X = 3 C$?

$A X - B C X = 3 C$, sacando factor X por la derecha,

$(A - B C) X = 3 C$, si existe $(A - B C)^{-1}$ entonces $X = (A - B C)^{-1} 3 C$

Calculemos $A - B C$,

$$\begin{aligned} A - B C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 10 = 4 \neq 0 \rightarrow \exists (A - B C)^{-1}$$

Cálculo de $(A - B C)^{-1}$,

$$\begin{aligned} A - B C &= \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\quad \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } (A - B C)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz X ,

$$X = (A - B C)^{-1} 3 C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -8 & 28 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $(A^t + B)^{-1}$.

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6 \neq 0 \rightarrow \exists (A^t + B)^{-1}$$

Cálculo de $(A^t + B)^{-1}$,

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } (A^t + B)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } (A^t + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $(A - I)^2$.

b) $A \cdot B^t$

c) $A - B^{-1}$

siendo I la matriz identidad y B^t y B^{-1} las matrices traspuesta e inversa de B, respectivamente.

Solución:

a) $(A - I)^2$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B^t$.

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$

c) $A - B^{-1}$.

Cálculo de B^{-1} ,

Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -1 & -7/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -1 & -7/2 \end{pmatrix}$

OPCIÓN A**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas****Problema 1.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y el vector } c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ se pide :}$$

- a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1} . (2 + 4 puntos)
 b) Determina el vector x que verifica $Ax = B^t c$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B. (4 puntos)

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 4 = 1. \text{ Por tanto, } |A| \neq 0$$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$ Cálculo de A^{-1} ,

$$A \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) ¿Vector x ? / $Ax = B^t c$ Calculamos $B^t c$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ luego } B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2) - 1(-1) + 2 \cdot 3 \\ -2(-2) + 2(-1) - 1 \cdot 3 \\ 0(-2) + 2(-1) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 1 + 6 \\ 4 - 2 - 3 \\ 0 - 2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ multiplicando por la izquierda por } A^{-1},$$

$$A^{-1} A x = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow I x = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow x = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 1(-1) + 6 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 - 1(-1) + 5 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 - 1(-1) + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 1 + 42 \\ 10 + 1 + 35 \\ 10 + 1 + 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un inversor decidió invertir un total de 42000 € entre tres productos:

- a) Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5%.
- b) Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7%.
- c) Unos bonos con unos intereses anuales del 9%.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €.

Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando x = cantidad invertida en cuenta de ahorro (5%)

y = cantidad invertida en depósito (7%)

z = cantidad invertida en bonos (9%)

De los datos del problema,

Invirtió un total de 42000 € entre tres productos:	$x + y + z = 42.000$
Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €:	$0'05 x + 0'07 y + 0'09 z = 2600$
Los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones:	$0'05 x = 0'07 y + 0'09 z - 200$

Arreglamos las dos últimas ecuaciones,

$$0'05 x + 0'07 y + 0'09 z = 2600 \rightarrow 5x + 7y + 9z = 260.000$$

$$0'05 x = 0'07 y + 0'09 z - 200 \rightarrow 5x = 7y + 9z - 20.000 \rightarrow 5x - 7y - 9z = -20.000$$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x + y + z = 42000 \\ 5x + 7y + 9z = 260000 \\ 5x - 7y - 9z = -20000 \end{cases}$$
 Lo resolvemos por Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 5 & 7 & 9 & 260000 \\ 5 & -7 & -9 & -20000 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 5F_1, F_3 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 0 & 2 & 4 & 50000 \\ 0 & -12 & -14 & -230000 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + 6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 0 & 2 & 4 & 50000 \\ 0 & 0 & 10 & 70000 \end{array} \right)$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow 10z = 70000 \rightarrow z = \frac{70000}{10} = 7000$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow 2y + 4z = 50000 \rightarrow 2y + 4 \cdot 7000 = 50000 \rightarrow 2y + 28000 = 50000 \rightarrow$$

$$2y = 50000 - 28000 \rightarrow 2y = 22000 \rightarrow y = \frac{22000}{2} = 11000$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x + y + z = 42000 \rightarrow x + 11000 + 7000 = 42000 \rightarrow x + 18000 = 42000 \rightarrow$$

$$x = 42000 - 18000 \rightarrow x = 24000$$

Solución: en la cuenta de ahorro invirtió 24000 euros, en el depósito 11000 euros y en los bonos 7000 euros.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A (3 puntos)

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal. (3 puntos)

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

Solución:

a) $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \left\{ \text{sacando el factor } \frac{1}{3} \text{ de cada fila} \right\} = \left(\frac{1}{3} \right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} (4 + 4 + 4 + 8 + 8 - 1) = \frac{1}{27} \cdot 27 = 1$$

Solución: $|A| = 1$.

b) ¿ A es ortogonal?

La matriz A es ortogonal si $\exists A^{-1}$ y $A^{-1} = A^t$

En el apartado anterior obtuvimos que $|A| = 1 \neq 0$, por lo tanto $\exists A^{-1}$.

Comprobemos que $A^{-1} = A^t$, lo haremos calculando $A \cdot A^t (= A \cdot A^{-1} = I)$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left\{ \text{sacamos el factor } \frac{1}{3} \text{ de las dos matrices} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{c.q.c.}$$

Solución: la matriz A es ortogonal.

c) Resolver el sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} ,

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow I \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Del apartado anterior sabemos que $A^{-1} = A^t$, luego
 {utilizaremos la matriz A^t como la escribimos en el apartado b)}, es decir:

$$A^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ y $z = \frac{3}{5}$.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcula la inversa de la matriz $A - B$. (3 puntos)
- Calcula la matriz X de dimensión 2×3 , que satisface la ecuación $XA + C = XB$. (4 puntos)
- ¿Es posible hacer el producto BC ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. (3 puntos)

Solución:

a) Cálculo de $(A - B)^{-1}$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } |A - B|, \quad |A - B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ existe $(A - B)^{-1}$. Procedamos a su cálculo,

$$A - B \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } (A - B)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X ? / $XA + C = XB$

Veamos si podemos despejar X ,

$$XA - XB = -C; \quad X(A - B) = -C$$

Como existe $(A - B)^{-1}$, multiplicando por la derecha por $(A - B)^{-1}$, $X(A - B)(A - B)^{-1} = -C(A - B)^{-1}$

$$\text{Como } (A - B)(A - B)^{-1} = I, \quad XI = -C(A - B)^{-1} \rightarrow X = -C(A - B)^{-1}$$

Procedamos al cálculo de X ,

$$C(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 & 5 \cdot 6 + 3 \cdot (-4) + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } X = -C(A-B)^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

c) ¿Es posible hacer el producto $B C$?

B es una matriz 3×3 y C es 2×3 , el producto $B C$ no puede realizarse porque el número de columnas de B (3) es distinto del número de filas de C (2).

¿Es posible hacer el producto $C B$?

C es una matriz 2×3 y B es 3×3 , el producto $C B$ puede efectuarse porque n° de columnas de $C = n^\circ$ de filas de $B = 3$ y el resultado será una matriz 2×3 .

$$C B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } C B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- Calcular la matriz A^2 y su inversa (5 puntos)
- Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$ (2 puntos)

*Solución:*a) Cálculo de A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa de A^2 ,

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 36 - 16 - 6 - 6 = 16 \neq 0 \rightarrow \exists (A^2)^{-1}$$

$$A^2 \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \\ -10 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ -10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } (A^2)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/16 & -1/16 & -10/16 \\ 10/16 & -3/16 & 2/16 \\ 6/16 & -5/16 & -2/16 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X ? / $2A^2X = 4B$ Despejemos X ,

$$A^2X = \frac{4}{2}B; \quad A^2X = 2B$$

Como existe $(A^2)^{-1}$, multiplicando por la izquierda por $(A^2)^{-1}$,

$$(A^2)^{-1}A^2X = (A^2)^{-1}2B; \quad \text{como } (A^2)^{-1}A^2 = I \rightarrow IX = 2(A^2)^{-1}B; \quad X = 2(A^2)^{-1}B$$

Procedamos al cálculo de X ,

$$X = 2 \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + (-10) \cdot 0 & -2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 + (-10) \cdot 0 & -2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-10) \cdot 1 \\ 10 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 10 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 10 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 & 6 \cdot (-2) + (-5) \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 6 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6+1 & 4-4 & -2-2-10 \\ 30+3 & -20-12 & 10-6+2 \\ 18+5 & -12-20 & 6-10-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -5/8 & 0 & -7/4 \\ 33/8 & -4 & 3/4 \\ 23/8 & -4 & -3/4 \end{pmatrix}$

Problema 2. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Analiza si la matriz $A B - 2 I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)
- b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2 X C = B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B . (4 puntos)
- c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $C D = D C$. (3 puntos)

Solución:

a) ¿ $A B - 2 I$ es invertible?

Cálculos:

$$A B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A B - 2 I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$A B - 2 I$ será invertible si su determinante es distinto de cero.

$$|A B - 2 I| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 12 + 18 = 30 \neq 0 \rightarrow \exists (A B - 2 I)^{-1}$$

Solución: la matriz $A B - 2 I$ es invertible.

b) ¿Matriz X ? / $A + 2 X C = B^t$

Despejemos X ,

$$2 X C = B^t - A; \quad X C = \frac{1}{2} (B^t - A); \quad \text{si existe } C^{-1} \text{ entonces, multiplicando por } C^{-1} \text{ por la derecha}$$

$$X C C^{-1} = \frac{1}{2} (B^t - A) C^{-1}; \quad X I = \frac{1}{2} (B^t - A) C^{-1}; \quad X = \frac{1}{2} (B^t - A) C^{-1}$$

$$\text{Como } |C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \exists C^{-1}$$

Cálculo de C^{-1} ,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X,

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B^t - A)C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente } X = \frac{1}{2}(B^t - A)C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Solución:
$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

c) ¿Valor de z ? / $CD = DC$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix}$$

Estas dos matrices serán iguales si $\begin{cases} -3+z=1 \\ 1=-3+z \end{cases}$ que es la misma ecuación, por tanto resolvamos:

$$-3+z=1; \quad z=1+3=4$$

Solución: la matriz D cumple la condición $CD = DC$ para $z=4$.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Cramer:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & -6 \\ x & + & z = 5 \\ 2x - y & = & 11 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 1 = 5 \neq 0 \quad \text{podemos resolverlo por el método de Cramer.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10 + 11 - 6}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-22 - 12 + 20 - 11}{5} = \frac{-25}{5} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6 + 10 + 5 - 11}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = -5$, $z = 2$

BLOQUE A**PROBLEMA A2.** Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + z = 3 \\ x + 5y - 7z = 4 \end{cases}$$

Si $(x, y, 0)$ es una solución del sistema anterior, ¿cuáles son los valores de x y de y ?*Solución:**Resolvemos el sistema por el método de Gauss,*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -7 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

*Como, al hacer ceros por debajo de la diagonal principal, obtenemos una fila de ceros el sistema es Compatible Indeterminado.**Para resolverlo utilizamos x e y como incógnitas principales.**De la última matriz del método de Gauss nos queda el sistema,*

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + 3z = -1 \end{cases}$$

pasamos la incógnita z a la derecha,

$$\begin{cases} x + y = 2 + z \\ -2y = -1 - 3z \end{cases}$$

$$\text{de la 2ª} \rightarrow y = \frac{-1 - 3z}{-2} = \frac{1 + 3z}{2}$$

sustituyendo en la 2ª ecuación,

$$x + \frac{1 + 3z}{2} = 2 + z \rightarrow x = 2 + z - \frac{1 + 3z}{2} = \frac{4 + 2z - 1 - 3z}{2} = \frac{3 - z}{2}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{3 - \lambda}{2} \\ y = \frac{1 + 3\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $(x, y, 0)$ es una solución sabemos que $z = 0$, es decir, que $\lambda = 0$, por lo que, sustituyendo en la solución general obtenida anteriormente obtenemos los valores de x e y pedidos,

$$x = \frac{3 - 0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1 + 3 \cdot 0}{2} = \frac{1}{2}$$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calcular A^{-1} .
b) Determina la matriz X tal que $A X = A + B$.

Solución:

a) A^{-1} .

Calculamos el determinante de la matriz A ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (F_2 - F_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y, \text{ finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -5/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) Determina la matriz X tal que $A X = A + B$.

Multiplicamos la expresión anterior por A^{-1} por la izquierda,

$$A^{-1} A X = A^{-1} (A + B); \quad I X = A^{-1} A + A^{-1} B; \quad X = I + A^{-1} B$$

En primer lugar, calculamos $A^{-1} B$

$$A^{-1} B = \begin{pmatrix} 8/3 & -5/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 & -\frac{8}{3} - \frac{5}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{8}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 & -\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & -9/3 & 21/3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/3 & 0 & 3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/3 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1/3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 1. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Calcula A^{-1} . (5 puntos)
 b) Calcula una matriz X , de orden 3×3 , que cumpla $A X = C$. (5 puntos)

Solución:

a) Cálculo de A^{-1} .

$$\text{Calculamos } |A|, \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 15 + 10 - 25 + 4 + 9 = 19$$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1} . Procedamos a su cálculo,

$$A \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 19 & -2 \\ -8 & -19 & 7 \\ -3 & -19 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 5 & -19 & -2 \\ 8 & -19 & -7 \\ -3 & 19 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/19 & 8/19 & -3/19 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2/19 & -7/19 & 5/19 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X ? / $A X = C$

Como existe A^{-1} , multiplicando por la izquierda por A^{-1} , $A^{-1} A X = A^{-1} C$

Como $A^{-1} A = I$, $I X = A^{-1} C \rightarrow X = A^{-1} C$

Procedamos al cálculo de X ,

$$X = \begin{pmatrix} 5/19 & 8/19 & -3/19 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2/19 & -7/19 & 5/19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35+8-24}{19} & \frac{35+8-24}{19} & \frac{35+8-24}{19} \\ -7-1+8 & -4+1+4 & -1-4+6 \\ \frac{-14-7+40}{19} & \frac{-8+7+20}{19} & \frac{-2-28+30}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$. (4 puntos)
- Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3 (4 puntos)
- Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$. (2 puntos)

Solución:

a) ¿Matriz X ? / $X^{-1}A + A = B$.

$$X^{-1}A + A = B \rightarrow X^{-1}A = B - A; \text{ multiplicando por la izquierda por } X: X X^{-1}A = X(B - A)$$

$$\{ \text{como } X X^{-1} = I \} \rightarrow IA = X(B - A) \rightarrow A = X(B - A)$$

$$\text{Si existe } (B - A)^{-1} \rightarrow \text{multiplicando por la derecha por } (B - A)^{-1}: A(B - A)^{-1} = X(B - A)(B - A)^{-1}$$

$$\{ \text{como } (B - A)(B - A)^{-1} = I \} \rightarrow A(B - A)^{-1} = X$$

Cálculos:

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad |B - A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \exists (B - A)^{-1}$$

Cálculo de la inversa de $(B - A)$,

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (B - A)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X = A(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz Y ? / $(A - B)Y - AY = I$

Despejemos Y ,

$AY - BY - AY = I$; $-BY = I$; $BY = -I$; si existe B^{-1} entonces, multiplicando por B^{-1} la izquierda
 $B^{-1}BY = B^{-1}(-I)$; $IY = -B^{-1}I$; $Y = -B^{-1}I$

Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$

Cálculo de B^{-1} ,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente: $Y = -B^{-1}I = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Solución: $Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) ¿Matriz Z ? / $AZA^{-1} = I$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

Despejemos Z , multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $A^{-1}AZA^{-1} = A^{-1}I$; $IZA^{-1} = A^{-1}$; $ZA^{-1} = A^{-1}$;
 multiplicando por A por la derecha: $ZA^{-1}A = A^{-1}A$; $ZI = I$; $Z = I$

Solución: $Z = I$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Obtén todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x + 7y + z = -4 \end{array} \right\}$$

Solución:

Resolveremos el sistema por el método de Gauss. Utilizaremos la matriz ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 + 2.F_1]{F_2 - 2.F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + 3.F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es un sistema compatible indeterminado, lo resolvemos utilizando la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y .

El sistema a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = -1 - z \\ -3y = 2 + z \end{array} \right.$$

Lo resolvemos por Cramer,

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

Las soluciones del último sistema,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-z & 1 \\ 2+z & -3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3+3z-2-z}{-3} = \frac{1+2z}{-3} = \frac{-1-2z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-z \\ 0 & 2+z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2+z}{-3} = \frac{-2-z}{3}$$

El sistema planteado tiene por soluciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1-2\lambda}{3} \\ y = \frac{-2-\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

OPCIÓN A

Problema 1. Plantea y escribe el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y cuyo término independiente es } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Resuelve el sistema.}$$

Solución:

El sistema será:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto matricial,
$$\begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ -4x+2y+z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y, finalmente, el sistema es:
$$\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ -4x+2y+z=0 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ F_2 + 2xF_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Esta preparado para resolver,

de $F_3 \rightarrow -y = -2 \rightarrow y = 2$

de $F_2 \rightarrow 8y - z = 6$, sustituyendo el valor obtenido de y
 $8 \cdot 2 - z = 6; \quad 16 - z = 6; \quad 16 - 6 = z; \quad z = 10$

de $F_1 \rightarrow 2x + 3y - z = 3$, sustituyendo los valores obtenidos de z e y

$$2x + 3 \cdot 2 - 10 = 3; \quad 2x + 6 - 10 = 3; \quad 2x - 4 = 3; \quad 2x = 3 + 4; \quad 2x = 7; \quad x = \frac{7}{2}$$

La solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 2 \\ z = 10 \end{cases}$$

* * *

Resolvamos el sistema por el método de Cramer.

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 6 + 4 - 12 - 4 = 18 - 20 = -2 \neq 0$$

Aplicando la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6 + 3 + 2 - 6}{-2} = \frac{5 - 12}{-2} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4 + 6 - 2 - 12}{-2} = \frac{10 - 14}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4 - 24 - 12 + 12}{-2} = \frac{-20}{-2} = 10$$

$$\text{La solución del sistema es: } \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 2 \\ z = 10 \end{cases}$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Calcula $(AB)^{-1}$. (4 puntos)
 b) Calcula $C + AB$. (2 puntos)
 c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (AB)^{-1}$ y $(C + AB)^{-1}$? (4 puntos)

Solución:

a) $(AB)^{-1}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } |AB| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists (AB)^{-1}$$

Cálculo de $(AB)^{-1}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } (AB)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿ $C + AB$?

$$C + AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Solución: $C + AB = I$

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (AB)^{-1}$ y $(C + AB)^{-1}$?

En el apartado anterior hemos obtenido que $C + AB = I$, por tanto $(C + AB)^{-1} = I^{-1} = I$

Calculamos $C^{-1} + (AB)^{-1}$

Cálculo de C^{-1}

$$\text{Como } |C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists C^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } C^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$$

Hemos comprobado que $C^{-1} + (A B)^{-1} = I = (C + A B)^{-1}$. Por lo que, **las dos matrices dadas son iguales**.