OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Cierta persona invierte un total de 7000 € en acciones de las empresas A y B y en un depósito a 12 meses al 1 %. Pasado un año, vende sus acciones, obteniendo una rentabilidad del 5 % en las acciones de la empresa A y del 3 % en las de B. El beneficio total de sus tres inversiones es 202 €. Determina qué cantidad destinó a cada inversión si sabemos que el dinero total destinado a comprar acciones superó en 2600 € al dinero del depósito.

Solución:

Llamando: x = *cantidad invertida en acciones de la empresa A*
y = *cantidad invertida en acciones de la empresa B*
z = *cantidad invertida en el depósito a 12 meses*

Escribamos las ecuaciones correspondientes al enunciado del problema:

"invierte un total de 7000€" $\rightarrow$ $x + y + z = 7000$

Pasado un año,

"rentabilidad del 5% en acciones de la empresa A" $\rightarrow$ $0{\acute{}}05\,x$

"rentabilidad del 3% en acciones de la empresa B" $\rightarrow$ $0{\acute{}}03\,y$

"rentabilidad del 1% en depósito" $\rightarrow$ $0{\acute{}}01\,z$

"el beneficio total de las tres inversiones es de 202€" $\rightarrow$ $0{\acute{}}05\,x + 0{\acute{}}03\,y + 0{\acute{}}01\,z = 202$ $\rightarrow$
(multiplicando por 100) $5x + 3y + z = 20200$

"el dinero total destinado a comprar acciones superó en 2600€ al dinero del depósito" $\rightarrow$ $x + y = 2600 + z$
$x + y - z = 2600$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y + z = 7000 \\ 5x + 3y + z = 20200 \\ x + y - z = 2600 \end{cases}$. *Lo resolvemos por Gauss.*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7000 \\ 5 & 3 & 1 & 20200 \\ 1 & 1 & -1 & 2600 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 5xF_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7000 \\ 0 & -2 & -4 & -14800 \\ 0 & 0 & -2 & -4400 \end{array}\right)$$ *, podemos resolver el sistema:*

De $F_3 \rightarrow -2z = -4400 \rightarrow z = \frac{-4400}{-2} = 2200$

De $F_2 \rightarrow -2y - 4z = -14800$, *sustituyendo el valor de* z *obtenido antes,*

$-2y - 4 \cdot 2200 = -14800$
$-2y - 8800 = -14800$
$-2y = -14800 + 8800$
$-2y = -6000$
$y = \frac{-6000}{-2} = 3000$

De $F_1 \rightarrow x + y + z = 7000$, *sustituyendo el valor de* z *e* y *obtenidos anteriormente,*

$x + 3000 + 2200 = 7000$
$x + 5200 = 7000$
$x = 7000 - 5200$
$x = 1800$

Solución: ***Destinó 1800€ a acciones de la empresa A, 3000€ a acciones de la empresa B y 2200€ en un depósito a 12 meses.***

Problema 1. Un restaurante ofrece cada día desayunos, comidas y cenas. Los desayunos cuestan 4 euros, las comidas 8 y las cenas 10. El último sábado se sirvieron tantas comidas como desayunos y cena juntos. La recaudación total fue de 1116 euros. La recaudación obtenida con las comidas superó a la de las cenas en 156 euros.

a) ¿Cuántos desayunos, comidas y cenas se sirvieron?
b) ¿Qué beneficio se obtuvo si las ganancias de un desayuno son 2,50 euros, las de una comida 4 euros y las de una cena 5 euros?

Solución:
Llamando: *precio*

x = número de desayunos servidos	*4€*
y = número de comidas servidas	*8€*
z = número de cenas servidas	*10€*

De la información del problema:

"se sirvieron tantas comidas como desayunos y cena juntos" $\rightarrow\ y = x + z \ \rightarrow\ x - y + z = 0$

"la recaudación total fue de 1116 €" $\rightarrow\ 4x + 8y + 10z = 1116 \ \rightarrow\ 2x + 4y + 5z = 558$

"La recaudación obtenida con las comidas superó a la de las cenas en 156 €" $\rightarrow\ 8y = 10z + 156 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 8y - 10z = 156 \ \rightarrow\ 4y - 5z = 78$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 558 \\ \quad 4y - 5z = 78 \end{cases}$

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 8 - 20 - 10 = -42 \neq 0$

Por tanto el sistema es compatible y determinado. Lo resolvemos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 558 \\ 0 & 4 & -5 & 78 \end{array}\right) F_2 - 2\cdot F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 558 \\ 0 & 4 & -5 & 78 \end{array}\right) F_3/3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 186 \\ 0 & 4 & -5 & 78 \end{array}\right) F_3 - 2\cdot F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 186 \\ 0 & 0 & -7 & -294 \end{array}\right)$$

$$\text{De } F_3 \ \rightarrow\ -7z = -294 \ \rightarrow\ z = \frac{-294}{-7} = 42$$

$$\text{De } F_2 \ \rightarrow\ 2y + z = 186 \ \rightarrow\ 2y + 42 = 186 \ \rightarrow\ 2y = 186 - 42 \ \rightarrow\ 2y = 144 \ \rightarrow\ y = \frac{144}{2} = 72$$

$$\text{De } F_1 \ \rightarrow\ x - y + z = 0 \ \rightarrow\ x - 72 + 42 = 0 \ \rightarrow\ x - 30 = 0 \ \rightarrow\ x = 30$$

Contestemos los apartados,

a) ***Se sirvieron 30 desayunos, 72 comidas y 42 cenas.***

b) El beneficio lo obtendremos calculando: $30 \,.\, 2´5 + 72 \,.\, 4 + 42 \,.\, 5 = 573$

Se obtuvo un beneficio de 573 €.

Problema 1. Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Solución:

Llamando x = *puntuación obtenida en la 1ª pregunta*
y = *puntuación obtenida en la 2ª pregunta*
z = *puntuación obtenida en la 3ª pregunta*

De los datos del problema:

"Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos" $\rightarrow\ x + y + z = 7'5$

"En la 3ª pregunta obtuvo un punto más que en la 2ª" $\rightarrow\ z = y + 1 \ \rightarrow\ y - z = -1$

"los puntos que consiguió en la 1ª quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la 3ª y 1ª"
$\rightarrow\ x = 5(z - x) \ \rightarrow\ x = 5z - 5x \ \rightarrow\ x + 5x - 5z = 0 \ \rightarrow\ 6x - 5z = 0$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y + z = 7'5 \\ \quad\ y - z = -1 \\ 6x \quad -5z = 0 \end{cases}$

Este sistema podemos resolverlo por sustitución, despejando la y de la 2ª ecuación y la x de la 3ª.

$$\begin{cases} x + y + z = 7'5 \\ \quad\ y - z = -1 & \qquad y = z - 1 \\ 6x \quad -5z = 0 & \qquad 6x = 5z \ \rightarrow\ x = \dfrac{5z}{6} \end{cases}$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación:

$$\frac{5z}{6} + z - 1 + z = 7'5$$

$$\frac{5z}{6} + z + z = 7'5 + 1$$

$$\frac{5z + 6z + 6z}{6} = 8'5$$

$$17z = 6 \cdot 8'5$$

$$17z = 51$$

$$z = \frac{51}{17} = 3$$

$$y = 3 - 1 = 2$$

$$x = \frac{5 \cdot 3}{6} = \frac{15}{6} = 2'5$$

Solución: $x = 2'5,\quad y = 2,\quad z = 3$

También podemos resolverlo por determinantes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 6 - 6 = -17 \neq 0$, *podemos resolverlo por Cramer.*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7'5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-17}=\frac{-5\cdot 7'5-5}{-17}=\frac{-42'5}{-17}=2'5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7'5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-17}=\frac{5-6\cdot 7'5+6}{-17}=\frac{-34}{-17}=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7'5 \\ 0 & - & -1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-17}=\frac{-6-6\cdot 7'5}{-17}=\frac{-51}{-17}=3$$

Solución: $x = 2'5$, $y = 2$, $z = 3$

Solución: en la primera pregunta obtuvo 2´5 puntos, en la segunda 2 puntos y en la tercera 3 puntos.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniata, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.
(Planteamiento correcto 5 puntos - Solución correcta 5 puntos)

Solución:
Llamando: x = *porcentaje de café colombiano*
y = *porcentaje de café brasileño*
z = *porcentaje de café keniata*

Del enunciado del problema obtenemos:

	Porcentaje de kg.	
café colombiano	x	10 €/kg
café brasileño	y	6 €/kg
café keniata	z	8 €/kg
Paquete	1	8´50 €/paquete

Y las ecuaciones serán:
Por la composición del paquete, $x + y + z = 1$
Por el valor del café, $10x + 6y + 8z = 8'50$
La cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, $x = 3y$; $x - 3y = 0$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 10x+6y+8z=8'5 \\ x-3y=0 \end{cases}$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 & 8'5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 - 8\,F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0'5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad F_3 - 1'5\,F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0'5 \\ -2 & 0 & 0 & -0'75 \end{array}\right)$$

De $F_3 \rightarrow -2x = -0'75 \rightarrow x = \dfrac{-0'75}{-2} = 0'375$, $x = 37'5\ \%$

De $F_2 \rightarrow 2x - 2y = 0'5$ *sustituyendo el valor de* $x \rightarrow$
$2 \cdot 0'375 - 2y = 0'5$; $0'75 - 2y = 0'5$; $0'75 - 0'5 = 2y$; $0'25\,y = 2 \rightarrow$
$y = \dfrac{0'25}{2} = 0'125$, $y = 12'5\%$

De $F_1 \rightarrow x + y + z = 1$ *sustituyendo los valores de* x *e* $y \rightarrow$
$0'375 + 0'125 + z = 1$; $0'5 + z = 1$; $z = 1 - 0'5 = 0'5$; $z = 50\%$

Solución: en la mezcla hay que utilizar un 37´5% de café colombiano, un 12´5% de café brasileño y un 50% de café keniata.

Problema 2. Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: *x = millones de euros dejados a la hija mayor*
y = millones de euros dejados a la hija mediana
z = millones de euros dejados a la hija pequeña

Del enunciado del problema obtenemos:

"A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos", $x=9+\dfrac{y+z}{2} \rightarrow 2x=18+y+z \rightarrow 2x-y-z=18$

"A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos"

$y=\dfrac{x+z}{2} \rightarrow 2y=x+z \rightarrow x-2y+z=0$

"A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos"

$z=\dfrac{35}{100}(x+y) \rightarrow z=\dfrac{7}{20}(x+y) \rightarrow 20z=7x+7y \rightarrow 7x+7y-20z=0$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y-z=18 \\ 7x+7y-20z=0 \end{cases}$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 18 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2-2\cdot F_1 \\ F_3-7\cdot F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 21 & -27 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3-7\cdot F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & -6 & -126 \end{array}\right)$$

De $F_3 \rightarrow -6z=-126 \rightarrow z=\dfrac{-126}{-6}=21$

De $F_2 \rightarrow 3y-3z=18 \rightarrow 3y-3\,.\,21=18 \rightarrow 3y=18+63 \rightarrow 3y=81 \rightarrow y=\dfrac{81}{3}=27$

De $F_1 \rightarrow x-2y+z=0 \rightarrow x-2\,.\,27+21=0 \rightarrow x-33=0 \rightarrow x=33$

Solución: el millonario ha dejado 33 millones de euros a su hija mayor, 27 millones de euros a su hija mediana y 21 millones de euros a su hija menor.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Junio 2002

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 2115 €. Calcular de forma razonada cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 9 €, cuántos han pagado el 20% del billete y cuántos el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20% es el doble del número de viajeros que ha pagado el billete entero.

Solución:
Utilizamos las siguientes incógnitas:

		precio del billete
viajeros que pagan el total	*x*	*9 €*
“ “ “ 20 %	*y*	*1’80 €*
“ “ “ 50 %	*z*	*4’50 €*

Las frases del enunciado nos proporcionaran la ecuación correspondiente,
Un tren transporta 500 viajeros, $x + y + z = 500$
La recaudación asciende a 2115 €, $9x + 1'80y + 4'50z = 2115$
El número de viajeros que han pagado el 20 %
es el doble de los que han pagado el 50 %; $y = 2x$; $2x - y = 0$

El sistema a resolver es, $\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 9x + 1'8y + 4'5z = 2115 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Calculamos el determinante del sistema para comprobar si podemos resolverlo por el método de Cramer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1'8 & 4'5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 9 - 3'6 + 4'5 = 0'9 \neq 0$$

Podemos resolverlo por el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 500 & 1 & 1 \\ 2115 & 1'8 & 4'5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{0'9} = \frac{-2115 + 2250}{0'9} = \frac{135}{0'9} = 150$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 500 & 1 \\ 9 & 2115 & 4'5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{0'9} = \frac{4500 - 4230}{0'9} = \frac{270}{0'9} = 300$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 500 \\ 9 & 1'8 & 2115 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{0'9} = \frac{-4500 + 4230 - 1800 + 2115}{0'9} = \frac{45}{0'9} = 50$$

Solución: 150 viajeros han pagado el importe total del billete, 300 el 20% del billete y 50 el 50% del mismo.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Cinco amigos suelen tomar café juntos. El primer día tomaron 2 cafés, 2 cortados y un café con leche y debieron pagar 3 €. Al día siguiente tomaron un café, un cortado y tres cafés con leche, por lo que pagaron 3´25 €. El tercer día sólo acudieron cuatro de ellos y tomaron un café, dos cortados y un café con leche, ascendiendo la cuenta a 2´45 €. Calcular de forma razonada el precio del café, del cortado y del café con leche.

Solución:
Utilizando las siguientes incógnitas,

x = precio del café
y = precio del cortado
z = precio del café con leche

el problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 2x+2y+x=3 \\ x+y+3z=3´25 \\ x+2y+z=2´45 \end{cases}$$

el determinante de la matriz de coeficientes es,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

la solución será:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3´25 & 1 & 3 \\ 2´45 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-2´75}{-5}=0´55 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3´25 & 3 \\ 1 & 2´45 & 1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-3}{-5}=0´6 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3´25 \\ 1 & 2 & 2´45 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-3´5}{-5}=0´75$$

Por lo tanto, el café costó 0´55 €, el cortado 0´60 € y el café con leche 0´75 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Juan decide invertir una cantidad de 12.000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas, A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4%, las de B un 5% y las de C han perdido un 2% de su valor original. Con resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,50 €. Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas.

Solución:
Utilizando las siguientes incógnitas,

x = inversión en la empresa A
y = inversión en la empresa B
z = inversión en la empresa C

el problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x+y+z=12000 \\ x=2\,(y+z) \\ \dfrac{4}{100}x+\dfrac{5}{100}y-\dfrac{2}{100}z=432'5 \end{cases}$$

efectuando las operaciones indicadas en la 2ª y 3ª ecuación queda,

$$\begin{cases} x+y+z=12000 \\ x-2\,y-2z=0 \\ 4x+5y-2z=43250 \end{cases}$$

el determinante de la matriz de coeficientes es,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}=4+5-8-8+10+2=21\neq 0$$

la solución será: (para resolver los determinantes efectuaré las operaciones indicadas entre paréntesis)

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 12000 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 43250 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{21}=(C_2-C_3)=\frac{\begin{vmatrix} 12000 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 43250 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{21}=\frac{14\,.\,12000}{21}=8000$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 12000 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 43250 & -2 \end{vmatrix}}{21}=\frac{43250-96000+86500+24000}{21}=\frac{57750}{21}=2750$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12000 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 43250 \end{vmatrix}}{21}=(C_2-C_1)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 12000 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 43250 \end{vmatrix}}{21}=\frac{-3\,.\,43250+12000+12\,.\,12000}{21}=\frac{26250}{21}=1250$$

Por lo tanto, en la empresa A invirtió 8000 €, en la B 2750 € y en la C 1250 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Elena, Pedro y Juan colocan diariamente hojas de propaganda sobre los parabrisas de los coches aparcados en la calle. Pedro reparte siempre el 20% del total de la propaganda, Juan reparte 100 hojas más que Elena y entre Pedro y Elena colocan 850 hojas en los parabrisas. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántas hojas reparten, respectivamente, Elena, Pedro y Juan y calcular estos valores.

Solución:
Utilizamos las siguientes incógnitas,

x = Número de hojas repartidas por Elena
y = “ “ “ “ “ Pedro
z = “ “ “ “ “ Juan

Pasemos las frases del problema a ecuaciones,

“Pedro reparte siempre el 20% del total de la propaganda” $y = \frac{20}{100}(x + y + z)$

“Juan reparte 100 hojas más que Elena” $z = 100 + x$

“entre Pedro y Elena colocan 850 hojas en los parabrisas” $x + y = 850$

El sistema a plantear es:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{10}(x + y + z) \\ z = 100 + x \\ x + y = 850 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10y = 2x + 2y + 2z \\ x - z = -100 \\ x + y = 850 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 8y + 2z = 0 \\ x - z = -100 \\ x + y = 850 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ x - z = -100 \\ x + y = 850 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema; calculamos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 = 6$$

como es distinto de cero podemos resolver el sistema por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -100 & 0 & -1 \\ 850 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-100 + 3400}{6} = \frac{3300}{6} = 550$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -100 & -1 \\ 1 & 850 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{850 + 100 + 850}{6} = \frac{1800}{6} = 300$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -100 \\ 1 & 1 & 850 \end{vmatrix}}{6} = \frac{400 + 100 + 3400}{6} = \frac{3900}{6} = 650$$

Elena reparte 550 hojas, Pedro 300 y Juan 650.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Tres constructoras invierten en la compra de terrenos de la siguiente forma: la primera invirtió medio millón de euros en terreno urbano, 250.000 euros en terreno industrial y 250.000 euros en terreno rústico. La segunda, invirtió 125.000, 250.000 y 125.000 euros en terreno urbano, industrial y rústico, respectivamente, y la tercera, 100.000, 100.000 y 200.000 euros en estos mismos tipos de terreno, respectivamente. Transcurrido un año, venden todos los terrenos. La rentabilidad que obtiene la primera constructora es del 13,75%, la de la segunda del 11,25% y, finalmente, la de la tercera es del 10%. Determina la rentabilidad de cada uno de los tipos de terreno por separado.

Solución:

Los datos del problema resumidos en una tabla son:

	Urbano	*Industrial*	*Rústico*	*Inversión total de la constructora*	*rentabilidad de la constructora (%)*
1ª constructora	*500.000 €*	*250.000 €*	*250.000 €*	*1.000.000 €*	*13,75*
2ª constructora	*125.000 €*	*250.000 €*	*125.000 €*	*500.000 €*	*11,25*
3ª constructora	*100.000 €*	*100.000 €*	*200.000 €*	*400.000 €*	*10*
rentabilidad terreno (%)	*x*	*y*	*z*		

Las incógnitas que utilizamos son x, y, z rentabilidades (%) de los terrenos urbano, industrial y rústico, respectivamente.

El sistema que se plantea es:

$$\begin{cases} 500.000\ x + 250.000\ y + 250.000\ z = 13{,}75\ \ 1.000.000 \\ 125.000\ x + 250.000\ y + 125.000\ z = 11{,}25\ \ 500.000 \\ 100.000\ x + 100.000\ y + 200.000\ z = 10\ \ 400.000 \end{cases}$$

Simplificando por 1000,

$$\begin{cases} 500\ x + 250\ y + 250\ z = 13.750 \\ 125\ x + 250\ y + 125\ z = \ \ 5625 \\ 100\ x + 100\ y + 200\ z = \ \ 4000 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por Gauss. Escribiremos como primera fila de la matriz la correspondiente a la tercera ecuación,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 100 & 200 & 4000 \\ 500 & 250 & 250 & 13750 \\ 125 & 250 & 125 & 5625 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 - 5xF_1 \\ F_3 - 1{,}25xF_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 100 & 200 & 4000 \\ 0 & -250 & -750 & -6250 \\ 0 & 125 & -125 & 625 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3 + \frac{1}{2}xF_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 100 & 200 & 4000 \\ 0 & -250 & -750 & -6250 \\ 0 & 0 & -500 & -2500 \end{array}\right)$$

De la tercera fila: $-500z = -2500$; $\mathbf{z = 5}$

De la segunda fila:

$-250y - 750z = -6250$

$-250y - 750 \cdot 5 = -6250$

$-250y - 3750 = -6250$

$-250y = -6250 + 3750$

$-250y = -2500$; $\mathbf{y = 10}$

De la primera fila:

$100x + 100y + 200z = 4000$

$100x + 100 \cdot 10 + 200 \cdot 5 = 4000$

$100x + 1000 + 1000 = 4000$

$100x + 2000 = 4000$

$100x = 4000 - 2000$; $100x = 2000$; $\mathbf{x = 20}$

Solución: El terreno urbano produce una rentabilidad de 20%, el industrial del 10% y el rústico del 5%.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Los tres modelos existentes de una marca de automóviles cuestan 12.000, 15.000 y 22.000 euros, respectivamente. Un concesionario ha ingresado 1.265.000 euros por la venta de automóviles de esta marca. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos y del más caro la tercera parte de los coches que cuestan 15.000 euros?

Solución:

Utilizamos como incógnitas,

x = nº de coches a 12000€

y = nº de coches a 15000€

z = nº de coches a 22000€

De las frases del problema obtenemos las ecuaciones,

"ha ingresado 1265000€", 12000 x + 15000 y + 22000 z = 1265000

"del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos", x = y + z

"del más caro la tercera parte de los coches que cuestan 15.000€", z = y/3

El sistema a resolver será,

$$\begin{cases} 12000x + 15000y + 22000z = 1265000 \\ x = y + z \\ z = \dfrac{y}{3} \end{cases} \to \begin{cases} 12x + 15y + 22z = 1265 \\ x - y - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\textit{como} \quad \begin{vmatrix} 12 & 15 & 22 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -36 - 22 - 12 - 45 = -115 \neq 0$$

el sistema tiene solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1265 & 15 & 22 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265(-3-1)}{-115} = 44$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1265 & 22 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{-1265 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265 \,.\, 3}{-115} = 33$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 15 & 1265 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265(-1)}{-115} = 11$$

Solución: ha vendido 44 coches de 12000€, 33 de 15000€ y 11 de 22000€.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de garaje entre urbanizaciones diferentes. Las ganancias por la venta de una plaza de garaje en la urbanización A son de 2.000 euros, 4.000 euros por una en la urbanización B y 6.000 por una en la urbanización C. Se sabe que se han vendido un 50% más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C. Calcula el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio por las vendidas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las vendidas en las urbanizaciones A y B.

Solución:

Utilizamos como incógnitas,
x = nº de plazas de garaje vendidas en la urb. A
y = nº de plazas de garaje vendidas en la urb. B
z = nº de plazas de garaje vendidas en la urb. C

De las frases del problema obtenemos las ecuaciones,
"ha vendido un total de 65 plazas", $x + y + z = 65$
"se han vendido un 50% más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C", $x = 1,5\ z$; $x - 1,5\ z = 0$
"el beneficio por las vendidas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las vendidas en las urbanizaciones A y B", $6000\ z = 2000\ x + 4000\ y$; $6\ z = 2\ x + 4\ y$; $3\ z = x + 2\ y$; $x + 2\ y - 3\ z = 0$

El sistema a resolver será,

$$\begin{cases} x+y+z=65 \\ x+2y-3z=0 \\ x-1,5z=0 \end{cases}$$

$$como\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1,5 \end{vmatrix} = -3-3-2+1,5=-6,5 \neq 0$$

el sistema tiene solución

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 65 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1,5 \end{vmatrix}}{-6,5}=\frac{-3\,.\,65}{-6,5}=30$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 65 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1,5 \end{vmatrix}}{-6,5}=\frac{-65\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1,5 \end{vmatrix}}{-6,5}=\frac{-65\,(-1,5+3)}{-6,5}=\frac{-65\,.\,1,5}{-6,5}=15$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 65 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-6,5}=\frac{-65\ .\,2}{-6,5}=20$$

Solución: ha vendido 30 plazas de garaje en la urbanización A, 15 en la B y 20 en la C.

BLOQUE A

PROBLEMA A2. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+z=3 \\ x+5y-7z=4 \end{cases}$$

Si (x , y , 0) es una solución del sistema anterior, ¿cuáles son los valores de x y de y?

Solución:
Resolvemos el sistema por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -7 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ F_2-2xF_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ \\ F_3+2xF_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como, al hacer ceros por debajo de la diagonal principal, obtenemos una fila de ceros el sistema es Compatible Indeterminado.
Para resolverlo utilizamos x e y como incógnitas principales.
De la última matriz del método de Gauss nos queda el sistema,

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ -2y+3z=-1 \end{cases}$$

pasamos la incógnita z a la derecha,

$$\begin{cases} x+y=2+z \\ -2y=-1-3z \end{cases}$$

$$\text{de la } 2^{\text{a}} \quad \rightarrow y=\frac{-1-3z}{-2}=\frac{1+3z}{2}$$

sustituyendo en la 2ª ecuación,

$$x+\frac{1+3z}{2}=2+z \quad \rightarrow \quad x=2+z-\frac{1+3z}{2}=\frac{4+2z-1-3z}{2}=\frac{3-z}{2}$$

$$\textit{Solución}: \begin{cases} x=\dfrac{3-\lambda}{2} \\ y=\dfrac{1+3\lambda}{2} \quad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$$

Si (x , y , 0) es una solución sabemos que z = 0, es decir, que $\lambda = 0$, por lo que, sustituyendo en la solución general obtenida anteriormente obtenemos los valores de x e y pedidos,

$$x=\frac{3-0}{2}=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{1+3\,.\,0}{2}=\frac{1}{2}$$

PROBLEMA 1. Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los del tipo A los vende a 200 euros, los del tipo B a 500 euros y los del tipo C a 250 euros. En un mes determinado vendió 200 relojes en total. Si la cantidad de los que vendió ese mes del tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y de tipo C conjuntamente, calcula cuántos vendió de cada tipo si la recaudación de ese mes fue de 73500 euros.

Solución:

Utilizamos las siguientes incógnitas:

x = nº de relojes del tipo A, 200€
y = nº de relojes del tipo B, 500€
z = nº de relojes del tipo C, 250€

De los datos del problema:

"un mes determinado vendió 200 relojes en total" $\rightarrow$ $x + y + z = 200$

"la cantidad de los que vendió ese mes del tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y de tipo C conjuntamente" $\rightarrow$
$y = x + z$; *arreglando esta ecuación:* $x - y + z = 0$

"la recaudación de ese mes fue de 73500 euros" $\rightarrow$ $200x + 500y + 250z = 73500$; *simplificando por 10:*
$20x + 50y + 25z = 7350$

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x+y+z=200 \\ x-y+z = 0 \\ 20x+50y+25z=7350 \end{cases}$$

Resolviéndolo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 20 & 50 & 25 & 7350 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-20F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -2 & 0 & -200 \\ 0 & 30 & 5 & 3350 \end{array}\right)$$ *y ya podemos resolver el sistema:*

De la 2ª fila $\rightarrow$ $-2y = -200$ $\rightarrow$ $y = 100$

De la 3ª fila $\rightarrow$ $30y + 5z = 3350$, *sustituyendo el valor de obtenido anteriormente:*
$30 \cdot 100 + 5z = 3350$
$3000 + 5z = 3350$
$5z = 3350 - 3000$
$5z = 350$
$z = \frac{350}{5} = 70$

De la 1ª fila $\rightarrow$ $x + y + z = 200$, *sustituyendo los valores obtenidos anteriormente:*
$x + 100 + 70 = 200$
$x + 170 = 200$
$x = 200 - 170$
$x = 30$

Solución: vendió 30 relojes del tipo A, 100 relojes del tipo B y 70 relojes del tipo C.

* * * *

Resolviéndolo por el método de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 20 & 50 & 25 \end{vmatrix} = -25+50+20+20-50-25 = 40-50 = -10 \neq 0$$ *por lo tanto resoluble por Cramer.*

$$x=\frac{\begin{vmatrix}200 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 7350 & 50 & 25\end{vmatrix}}{-10}=\frac{\overset{C_2+C_3}{}\begin{vmatrix}200 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 7350 & 75 & 25\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-\begin{vmatrix}200 & 2\\ 7350 & 75\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-(15000-14700)}{-10}=\frac{-300}{-10}=30$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 200 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 20 & 7350 & 25\end{vmatrix}}{-10}=\frac{\overset{C_3-C_1}{}\begin{vmatrix}1 & 200 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 20 & 7350 & 5\end{vmatrix}}{-10}=\frac{5\begin{vmatrix}1 & 200\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{-10}=\frac{5\,(-200)}{-10}=100$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 200\\ 1 & -1 & 0\\ 20 & 50 & 7350\end{vmatrix}}{-10}=\frac{\overset{C_2+C_1}{}\begin{vmatrix}1 & 2 & 200\\ 1 & 0 & 0\\ 20 & 70 & 7350\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-\begin{vmatrix}2 & 200\\ 70 & 7350\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-(14700-14000)}{-10}=\frac{-700}{-10}=70$$

Solución: vendió 30 relojes del tipo A, 100 relojes del tipo B y 70 relojes del tipo C.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una persona adquirió en el mercado cierta cantidad de unidades de memoria externa, de lectores de libros electrónicos y de tabletas gráficas a un precio de 100, 120 y 150 euros la unidad, respectivamente. El importe total de la compra fue de 1160 euros y el número total de unidades adquiridas 9. Además, compró una unidad más de tabletas gráficas que de lectores de libros electrónicos. ¿Cuántas unidades adquirió de cada producto?

Solución:

Llamando: x = *número de unidades de memoria externa*
y = *número de libros electrónicos*
z = *número de tabletas gráficas*

De los datos del problema obtenemos:

El importe total de la compra fue de 1160 € $\rightarrow$ $100x + 120y + 150z = 1160$
El número total de unidades adquiridas 9 $\rightarrow$ $x + y + z = 9$
Compró una unidad más de tabletas gráficas que de lectores de libros electrónicos $\rightarrow$ $z = y + 1$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ 100x+120y+150z=1160 \\ z=y+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=9 \\ 10x+12y+15z=116 \\ -y+z=1 \end{cases}$$

Resolviéndolo por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 10 & 12 & 15 & 116 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \; F_2 - 10.F_1 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 26 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \; F_3 + \frac{1}{2}.F_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 14 \end{array}\right)$$

De $F_3 \rightarrow \frac{7}{2}z = 14 \rightarrow z = \frac{28}{7} = 4$

De $F_2 \rightarrow 2y + 5z = 26$; *sustituyendo el valor de* $z \rightarrow 2y + 5.4 = 26$
$2y + 20 = 26$
$2y = 26 - 20$
$2y = 6 \rightarrow y = 3$

De $F_1 \rightarrow x + y + z = 9$; *sustituyendo los valores de* z *e* $y \rightarrow x + 3 + 4 = 9$
$x + 7 = 9$
$x = 9 - 7 \rightarrow x = 2$

Solución: ***Adquirió 2 unidades de memoria externa, 3 libros electrónicos y 4 tabletas gráficas***.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Después de aplicar un descuento del 10% a cada uno de los precios originales, se ha pagado por un rotulador, un cuaderno y una carpeta 3,96 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula el precio original de cada objeto.

Solución:

Utilizamos las siguientes incógnitas:

x = precio original de un rotulador
y = precio original de un cuaderno
z = precio original de una carpeta

De los datos del problema:

"tras aplicar un descuento del 10% a los precios originales, se ha pagado por un rotulador, un cuaderno y una carpeta 3´96 €" $\rightarrow$ $0´90\,(x+y+z) = 3´96$ $\rightarrow$ $x+y+z=\dfrac{3´96}{0´90}$ $\rightarrow$ $x+y+z=4´4$

"el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador" $\rightarrow$ $y=\dfrac{x}{2}$ $\rightarrow$ $2y=x$ $\rightarrow$ $-x+2y=0$

"el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador" $\rightarrow$

$z = y + 0´20\,x$; *multiplicando por 5:* $5z = 5y + x$ $\rightarrow$ $x + 5y - 5z = 0$

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x+y+z=4´4 \\ -x+2y=0 \\ x+5y-5z=0 \end{cases}$$

Resolviéndolo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4´4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) F_3+5F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4´4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 22 \end{array}\right) F_3-5F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4´4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right)$$ *y ya podemos resolver el sistema:*

De la 3ª fila $\rightarrow$ $11x = 22$ $\rightarrow$ $x=\dfrac{22}{11}=2$

De la 2ª fila $\rightarrow$ $-x + 2y = 0$, *sustituyendo el valor de obtenido anteriormente:*

$-2 + 2y = 0$
$2y = 2$
$y=\dfrac{2}{2}=1$

De la 1ª fila $\rightarrow$ $x + y + z = 4´4$, *sustituyendo los valores obtenidos anteriormente:*

$2 + 1 + z = 4´4$
$3 + z = 4´4$
$z = 4´4 - 3$
$z = 1´4$

Solución: El precio original de un rotulador era 2 €, el de un cuaderno 1 € y el de una carpeta 1´40 €.

* * * *

Resolviéndolo por el método de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -10-5-2-5=-22 \neq 0 \text{ por lo tanto resoluble por Cramer.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4'4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{4'4 \,.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{4'4\,.(-10)}{-22} = \frac{-44}{-22} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4'4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-4'4 \,.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-4'4\,.5}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4'4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{4'4 \,.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{4'4\,.(-5-2)}{-22} = \frac{4'4\,.(-7)}{-22} = \frac{-30'8}{-22} = 1'4$$

Solución: El precio original de un rotulador era 2 €, el de un cuaderno 1 € y el de una carpeta 1´40 €.

Problema 1. En una sucursal de una agencia de viajes se vende un total de 60 billetes de avión con destino a Londres, París y Roma. Sabiendo que el número de billetes para París es el doble de los vendidos para los otros dos destinos conjuntamente y que para Roma se emiten dos billetes más que la mitad de los vendidos para Londres, ¿cuántos billetes se han vendido para cada uno de los destinos?

Solución:

Llamando:

x = número de billetes vendidos con destino a Londres
y = " " " " " " " París
z = " " " " " " " Roma

Del enunciado del problema:

"se vende un total de 60 billetes" $\rightarrow$ $x + y + z = 60$

"el número de billetes para París es el doble de los vendidos para los otros dos destinos conjuntamente" $\rightarrow$ $y = 2(x + z)$ $\rightarrow$ $y = 2x + 2z$ $\rightarrow$ $2x - y + 2z = 0$

"para Roma se emiten dos billetes más que la mitad de los vendidos para Londres" $\rightarrow$ $z = \dfrac{x}{2} + 2$ $\rightarrow$ $2z = x + 4$ $\rightarrow$ $x - 2z = -4$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x \quad\ - 2z = -4 \end{cases}$

El determinante del sistema: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 + 4 = 9 \neq 0$, *por tanto es un sistema compatible determinado y podemos resolverlo por Cramer.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{120 - 8 - 4}{9} = \frac{108}{9} = 12$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-8 + 120 + 8 + 240}{9} = \frac{360}{9} = 40$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{9} = \frac{4 + 60 + 8}{9} = \frac{72}{9} = 8$$

Luego, ***se han vendido 12 billetes para Londres, 40 para París y 8 para Roma.***

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un comerciante compró 200 kilos de melocotones, 100 de manzanas y 300 de peras. Los vende incrementando un 25% el precio de los melocotones y de las manzanas y un 40% el de las peras. Por la venta de todo el género obtuvo 1087 euros de los que 257 fueron beneficio. Sabiendo que el precio de compra del kilo de melocotones fue 50 céntimos más caro que el del kilo de peras, ¿cuál fue el precio de compra del kilo de cada una de las frutas?

Solución:

Llamando: x = *precio de compra del kilo de melocotones*
y = *precio de compra del kilo de manzanas*
z = *precio de compra del kilo de peras*

Del enunciado del problema obtenemos:

		PVP
Los vende incrementado un 25%	*melocotones*	$1'25\,x$
Los vende incrementado un 25%	*manzanas*	$1'25\,y$
Los vende incrementado un 40%	*peras*	$1'40\,z$

Por la venta de todo el genero cobra 1087€, $200 \cdot 1'25\,x + 100 \cdot 1'25\,y + 300 \cdot 1'40\,z = 1087$
$\boldsymbol{250\,x + 125\,y + 420\,z = 1087}$

De 1087€, 257€ es beneficio; por tanto: $1087 - 257 = 830$€ *es el coste de la compra,*
$200\,x + 100\,y + 300\,z = 830$, *simplificando entre 10*
$\boldsymbol{20\,x + 10\,y + 30\,z = 83}$

El precio de compra del kilo de melocotones fue 50 céntimos más caro que el del kilo de peras: $x = 0'50 + z$;
$\boldsymbol{x - z = 0'5}$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} 250x + 125y + 420z = 1087 \\ 20x + 10y + 30z = 83 \\ x - z = 0'5 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss. Para facilitar los cálculos escribimos las ecuaciones en orden inverso.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0'5 \\ 20 & 10 & 30 & 83 \\ 250 & 125 & 420 & 1087 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 - 20\,F_1 \\ F_3 - 250\,F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0'5 \\ 0 & 10 & 50 & 73 \\ 0 & 125 & 670 & 962 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 12'5\,F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0'5 \\ 0 & 10 & 50 & 73 \\ 0 & 0 & 45 & 49'5 \end{array}\right)$$

De $F_3 \;\rightarrow\; 45\,z = 49'5 \;\rightarrow\; z = \dfrac{49'5}{45} = 1'1$

De $F_2 \;\rightarrow\; 10\,y + 50\,z = 73 \;\rightarrow\; 10\,y + 50 \cdot 1'1 = 73 \;\rightarrow\; 10\,y + 55 = 73 \;\rightarrow\; 10\,y = 73 - 55 \;\rightarrow$
$10\,y = 18 \;\rightarrow\; y = \dfrac{18}{10} = 1'8$

De $F_1 \;\rightarrow\; x - z = 0'5 \;\rightarrow\; x - 1'1 = 0'5 \;\rightarrow\; x = 0'5 + 1'1 = 1'6$

Solución:

el precio de compra del kilo de melocotones fue de 1´60€, el de manzanas 1´80€ y el de peras 1´10€.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 2. En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4% el salario a los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10% el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2% inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

(Planteamiento correcto 5 puntos --- Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: x = *nº de trabajadores de la categoría A*
y = *nº de trabajadores de la categoría B*
z = *nº de trabajadores de la categoría C*

Del enunciado del problema obtenemos:

	Trabajadores	salario	Salario modificado
A	x	800	(↑4%) 800 . 1´04= 832
B	y	1000	(=) 1000
C	z	2000	(↓10%) 2000 . 0´90 =1800
Totales	57	62000	(↓2%) 6200 . 0´98 = 60760

Por el total de trabajadores, $x + y + z = 27$

Por el salario del mes, $800x + 1000y + 2000z = 62000$

Por el salario modificado, $832x + 1000y + 1800z = 60760$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+y+z=57 \\ 800x+1000y+2000z=62000 \\ 832x+1000y+1800z=60760 \end{cases}$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 800 & 1000 & 2000 & 62000 \\ 832 & 1000 & 1800 & 60700 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 - 800\,F_1 \\ F_3 - 832\,F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 200 & 1200 & 16400 \\ 0 & 168 & 968 & 13336 \end{array}\right) \; F_2/200 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 168 & 968 & 13336 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 168\,F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 0 & -40 & -440 \end{array}\right)$$

De $F_3 \rightarrow -40z = -440 \rightarrow z = \dfrac{-440}{-40} = 11$

De $F_2 \rightarrow y + 6z = 82 \rightarrow y + 6 \,.\, 11 = 82 \rightarrow y + 66 = 82 \rightarrow y = 82 - 66 = 16$

De $F_1 \rightarrow x + y + z = 57 \rightarrow x + 16 + 11 = 57 \rightarrow x + 27 = 57 \rightarrow x = 57 - 27 = 30$

Solución: en la empresa hay 30 trabajadores de la categoría A, 16 de la B y 11 de la C.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1650 euros en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: x = *euros cobrados de alquiler al primer local*
y = *euros cobrados de alquiler al segundo local*
z = *euros cobrados de alquiler al tercer local*

Del enunciado del problema obtenemos:

La agencia cobra en total 1650€, $x + y + z = 1650$

La agencia paga al propietario del primer local el 95%, al propietario del segundo local el 90% y al propietario del tercer local el 80% de lo cobrado, respectivamente, por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. $1650 - (0'95x + 0'90y + 0'80z) = 132$

El alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos, $x = 2(y + z)$

Arreglemos las dos última ecuaciones,
$1650 - (0'95x + 0'90y + 0'80z) = 132;\quad 1650 - 132 = 0'95x + 0'90y + 0'80z;$
$0'95x + 0'90y + 0'80z = 1518$
$x = 2(y + z);\quad x = 2y + 2z;\quad x - 2y - 2z = 0$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y + z = 1650 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 0'95x + 0'90y + 0'80z = 1518 \end{cases}$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0'95 & 0'90 & 0'80 & 1518 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 0'95\,F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & -3 & -3 & -1650 \\ 0 & -0'05 & -0'15 & -49'5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2/(-3) \\ F_3/(-0'05) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 1 & 1 & 550 \\ 0 & 1 & 3 & 990 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 1 & 1 & 550 \\ 0 & 0 & 2 & 440 \end{array}\right)$$

De $F_3 \to 2z = 440 \to z = \frac{440}{2} = 220$

De $F_2 \to y + z = 550 \to y + 220 = 550 \to y = 550 - 220 = 330$

De $F_1 \to x + y + z = 1650 \to x + 330 + 220 = 1650 \to x + 550 = 1650 \to x = 1650 - 550 = 1100$

Solución: la agencia cobra 1100€ por el primer local, 330€ por el segundo y 220€ por el tercero.

Problema 1. Una tienda de televisores ha obtenido *247250* euros por la venta de *220* televisores de sus modelos *ULED, QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta *1250* euros y los otros dos modelos son un 10% y un 20% más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

(Planteamiento correcto, 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: x *= número de televisores ULED vendidos*
y *= número de televisores QLED vendidos*
z *= número de televisores LD vendidos*

Calculemos el precio de cada tipo de televisor. P_x *precio del televisor ULED,* P_y *del QLED y* P_z *del LD.*

Del enunciado del problema obtenemos:

"un televisor del modelo ULED cuesta 1250 euros" $\rightarrow$ $P_x = 1250$

"los otros dos modelos son un 10% y un 20% más baratos que el modelo ULED, respectivamente" $\rightarrow$ $P_y = 0'90 \,.\, 1250 = 1125$ *y* $P_z = 0'80 \,.\, 1250 = 1000$

Las ecuaciones para resolver el problema las obtenemos a partir de:

"la suma de la cantidad de televisores QLED y de televisores LD vendidos es igual al triple de los televisores ULED vendidos" $\rightarrow$ $y + z = 3x$ $\rightarrow$ $3x - y - z = 0$

"ha obtenido 247250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos ULED, QLED y LD" $\rightarrow$ $1250x + 1125y + 100z = 247250$ *e* $x + y + x = 220$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ 3x - y - z = 0 \\ 1250x + 1125y + 1000z = 0 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1250 & 1125 & 1000 & 247250 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 1000 \cdot F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 4 & 0 & 0 & 220 \\ 250 & 125 & 0 & 27250 \end{array}\right)$$

De F_2 $\rightarrow$ $4x = 220$ $\rightarrow$ $x = \dfrac{220}{4} = 55$

De F_3 $\rightarrow$ $250x + 125y = 27250$ $\rightarrow$ $250 \,.\, 55 + 125y = 27250$ $\rightarrow$ $13750 + 125y = 27250$ $\rightarrow$
$125y = 27250 - 13750$ $\rightarrow$ $125y = 13500$ $\rightarrow$ $y = \dfrac{13500}{125} = 108$

De F_1 $\rightarrow$ $x + y + x = 220$ $\rightarrow$ $55 + 108 + z = 220$ $\rightarrow$ $z = 220 - 55 - 108$ $\rightarrow$ $z = 57$

Solución: se han vendido 55 tv ULED, 108 QLED y 57 LD.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. El precio del billete de una línea de autobús se obtiene sumando dos cantidades, una fija y otra proporcional a los kilómetros recorridos. Por un billete entre las poblaciones A y B se ha pagado 20 € y por un billete entre las poblaciones A y C se ha pagado 32 €. Si la distancia de A a C es el doble de la distancia de A a B, calcular de forma razonada cuánto se tendrá que pagar por un billete a una población que dista de A la mitad que B.

Solución:
Utilizamos las siguientes notaciones,

$P_{M,N}$ *= precio del billete de la ciudad M a la N*
$d_{M,N}$ *= distancia de la ciudad M a la N*

Con esta notación y considerando la primera frase del enunciado del problema tenemos: $P_{M,N} = f + k\, d_{M,N}$

En relación a las ciudades indicadas en el enunciado los datos del problema los podemos resumir como sigue (siendo D la población que dista de A la mitad que B):

$P_{A,B} = 20$ $\quad P_{A,C} = 32$ $\quad d_{A,B} = x$ $\quad d_{A,C} = 2\,x$ $\quad P_{A,D} = ¿?$ $\quad d_{A,D} = x/2$

$P_{A,D} = f + k\, d_{A,D} = f + k\, x/2$. *Para resolver el problema necesitamos conocer los valores de "f" y de "k x" .*

Los datos del problema se transforman en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} P_{A,B} = f + k\ d_{A,B} \\ P_{A,C} = f + k\ d_{A,C} \end{cases} \qquad \begin{cases} 20 = f + k\ x \\ 32 = f + k\ 2\ x \end{cases} \qquad \begin{cases} 20 = f + k\ x \\ 32 = f + 2\ k\ x \end{cases}$$

Resolvemos este sistema por reducción.

1º) Multiplicamos la 1ª ecuación por -1

$$\begin{cases} -20 = -f - k\ x \\ 32 = f + 2\ k\ x \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones $\quad 12 = k\,x$

2º) Multiplicamos la 1ª ecuación por -2

$$\begin{cases} -40 = -2f - 2\ k\ x \\ 32 = f + 2\ k\ x \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones $\quad -8 = -f$
Por lo que $\quad f = 8$

Por lo tanto: $P_{A,D} = f + k\, x/2 = 8 + 12/2 = 8 + 6 = 14$

Es decir, por un billete a una población que dista de A la mitad que B habrá que pagar 14 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dos hijos deciden hacer un regalo de 100€ a su madre. Como no tienen suficiente dinero, cuentan con la ayuda de su padre, decidiendo pagar el regalo de la siguiente forma: el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos y, por cada 2€ que paga el hermano menor, el mayor paga 3€. ¿Cuánto dinero ha de poner cada uno?

Solución:
Consideramos las siguientes incognitas:
dinero puesto por el padre = x
dinero puesto por el hijo mayor = y
dinero puesto por el hijo menor = z
De los datos del enunciado obtenemos las siguientes ecuaciones:
"hacer un regalo de 100€ a su madre"   x + y + z = 100
"el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos"   x = 3 (y + z)
"por cada 2€ que paga el hermano menor, el mayor paga 3€"   y = 3 (z / 2)

El sistema a resolver será,

$$\begin{cases} x+y+z+=100 \\ x-3y-3z=0 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9+2+6+3 = 20 \neq 0$$

Podemos resolver el sistema por la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{100\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{100\,(9+6)}{20} = 5\,.\,15 = 75$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{-100\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{20} = \frac{-100\,(-3)}{20} = -5\,.\,(-3) = 15$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{20} = \frac{100\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{20} = \frac{100\,(2)}{20} = 5\,.\,2 = 10$$

La solución es: el padre ha de poner 75 €, el hijo mayor 15 € y el menor 10 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dos hermanos deciden invertir 10000 € cada uno en distintos productos financieros. El mayor invirtió una cantidad A en un producto que ha proporcionado un beneficio del 6%, una cantidad B en otro que ha dado una rentabilidad del 5% y el resto en un plazo fijo al 2% de interés. El hermano menor invirtió esas mismas cantidades en otros productos que le han proporcionado, respectivamente, unos beneficios del 4, 3 y 7%. Determinar las cantidades A, B y C invertidas si las ganancias del hermano mayor han sido 415 € y las del pequeño 460 €.

Solución:
Utilizamos las incógnitas (A, B y C) del enunciado. Obtengamos la ganancia de cada hermano,

	invierte	*gana*
Hermano mayor		
	A al 6%	*0´06A*
	B al 5%	*0´05B*
	C al 2%	*0´02C*
Hermano menor		
	A al 4%	*0´04A*
	B al 3%	*0´03B*
	C al 7%	*0´07C*

Cada hermano invierte 10000€, luego   A + B + C = 10000
La ganancia del mayor es de 415€ luego   0´06 A + 0´05 B + 0´02 C = 415
La ganancia del mayor es de 460€ luego   0´04 A + 0´03 B + 0´07 C = 460
Multiplicamos las dos últimas ecuaciones por 100 para quitar decimales.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} A+B+C=10000 \\ 6A+5B+2C=41500 \\ 4A+3B+7C=46000 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema; calculamos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 35+18+8-20-6-42=-7$$

como es distinto de cero el sistema tiene solución, lo resolvemos por Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 6 & 5 & 2 & 41500 \\ 4 & 3 & 7 & 46000 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \\ F_2-6F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & -1 & -4 & -18500 \\ 0 & -1 & 3 & 6000 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & -1 & -4 & -18500 \\ 0 & 0 & 7 & 24500 \end{array}\right)$$

De la 3ª fila obtenemos la ecuación   7 C = 24500, luego   C = 3500

De la 2ª fila   *- B – 4 C = - 18500*
- B – 4 . 3500 = - 18500;   - B – 14000 = - 18500;
B = 18500 – 14000
B = 4500

De la 1ª fila   *A + B + C = 10000*
A + 4500 + 3500 = 10000
A + 8000 = 10000;   A = 10000 – 8000;   A = 2000

Solución: Las cantidades son   A = 2000 €, B = 4500 € y C = 3500 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. En el primer curso de bachillerato de un instituto hay matriculados un total de 65 alumnos divididos en tres grupos: A, B y C. Comen en el centro 42 de ellos, que corresponden a la mitad de los del grupo A, las cuatro quintas partes de los del B y las dos terceras partes de los del C. A una salida fuera del centro acudieron las tres cuartas partes de los alumnos del grupo A, todos los del B y las dos terceras partes de los del C, sumando en total 52 estudiantes. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

Solución:

Utilizamos las siguientes incógnitas:

x = número de alumnos en el grupo A

y = número de alumnos en el grupo B

z = número de alumnos en el grupo C

Del enunciado del problema obtenemos las siguientes ecuaciones,

Hay matriculados en total 65 alumnos: $x + y + z = 65$

Comen en el centro 42, corresponden a la mitad del A, 4/5 del B y 2/3 de C: $\frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y+\frac{2}{3}z=42$

A la salida acuden ¾ del A, todo B y 2/3 del C, siendo 52: $\frac{3}{4}x+y+\frac{2}{3}z=52$

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x+y+z=65 \\ \frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y+\frac{2}{3}z=42 \\ \frac{3}{4}x+y+\frac{2}{3}z=52 \end{cases} \quad \textit{operando} \quad \begin{cases} x+y+z=65 \\ 15x+24y+20z=1260 \\ 9x+12y+8z=624 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 15 & 24 & 20 & 1260 \\ 9 & 12 & 8 & 624 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2-15F_1 \\ F_3-9F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 9 & 5 & 285 \\ 0 & 3 & -1 & 39 \end{array}\right)$$

intercambiamos la segunda y tercera fila,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 3 & -1 & 39 \\ 0 & 9 & 5 & 285 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3-3F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 3 & -1 & 39 \\ 0 & 0 & 8 & 168 \end{array}\right)$$

$$de\ F_3: \quad 8z=168 \quad \rightarrow \quad z=\frac{168}{8}=21$$

$$de\ F_2: \quad 3y-z=39$$

$$3y-21=39$$

$$3y=60$$

$$y=\frac{60}{3}=20$$

$$de\ F_3: \quad x+y+x=65$$

$$x+20+21=65$$

$$x=65-41$$

$$x=24$$

Solución: hay 24 alumnos en el grupo A, 20 en el B y 21 en el C.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Se están preparando dosis con dos tipos de complementos para los astronautas de la nave *Enterprise*. Cada gramo del complemento A contiene 2 unidades de riboflavina, 3 de hierro y 2 de carbohidratos. Cada gramo del complemento B contiene 2 unidades de riboflavina, 1 de hierro y 4 de carbohidratos. ¿Cuántos gramos de cada complemento son necesarios para producir exactamente una dosis con 12 unidades de riboflavina, 16 de hierro y 14 de carbohidratos?

Solución:
Utilizamos las incógnitas:

x = gramos del complemento A
y = gramos del complemento B

De los datos del problema podemos sacar la siguiente tabla:

	Unidades de		
	Riboflavina	*Hierro*	*Carbohidratos*
1 g de A	*2*	*3*	*2*
1 g de B	*2*	*1*	*4*
Necesitamos	*12*	*16*	*14*

El sistema de ecuaciones a plantear será:

$$\begin{cases} 2x+2y=12 \\ 3x+y=16 \\ 2x+4y=14 \end{cases} \quad \textit{Simplificando las ecuaciones queda:} \quad \begin{cases} x+y=6 \\ 3x+y=16 \\ x+2y=7 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 16 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2-3F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3+\frac{1}{2}F_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego es un sistema compatible determinado.
Resolución,

De la segunda fila de la matriz: $-2y = -2;\quad y = \frac{-2}{-2} = 1$

De la primera fila de la matriz: $x + y = 6;\ x + 1 = 6;\ x = 6 - 1;\ x = 5$

Solución: Son necesarios 5 gramos del complemento A y 1 gramo del complemento B.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Antonio ha conseguido 1372 euros trabajando durante las vacaciones. Ese dinero puede gastarlo íntegramente comprando un ordenador portátil, una cámara y haciendo un viaje. El precio del ordenador portátil excede en 140 euros a la suma de los precios de la cámara y el viaje. Teniendo en cuenta que el precio de un segundo acompañante para el viaje es la mitad que el precio inicial, Antonio podría invitar a su hermano al viaje en caso de que no se comprara la cámara digital y todavía le quedarían 208 euros. Calcula los precios del ordenador, de la cámara y del viaje.

Solución:

Utilizamos como incógnitas,
x = precio del ordenador
y = precio de la cámara
z = precio del viaje

De las frases del problema obtenemos las ecuaciones,
"Antono ha conseguido 1372 € … Este dinero puede gastarlo íntegramente comprando …", x + y + z = 1372
"El precio del ordenador portátil excede en 140 € a la suma de los precios de la cámara y el viaje", x = y + z + 140;
x – y – z =140
"Teniendo en cuenta que el precio de un segundo acompañante para el viaje es la mitad que el precio inicial, Antonio podría invitar a su hermanos al viaje en caso de que no se comprara la cámara digital y todavía le quedarían 208 euros", x + z + z/2 + 208 = 1372; 2 x + 2 z + z + 416 = 2744: 2 x + 3 z = 2744 – 416; 2 x + 3 z = 2328

El sistema a resolver será,

$$\begin{cases} x+y+z=1372 \\ x-y-z=140 \\ 2x+3z=2328 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1372 \\ 1 & -1 & -1 & 140 \\ 2 & 0 & 3 & 2328 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2-F_1 \\ F_3-2xF_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1372 \\ 0 & -2 & -2 & -1232 \\ 0 & -2 & 1 & -416 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F_3-F_{21} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1372 \\ 0 & -2 & -2 & -1232 \\ 0 & 0 & 3 & 816 \end{array}\right)$$

$$F_3 \to \quad 3z=816 \to z=\frac{816}{3}=272$$

$$F_2 \to \quad -2y-2z=-1232$$
$$y+z=616$$
$$y+272=616$$
$$y=616-272=344$$

$$F_1 \to \quad x+y+z=1372$$
$$x+344+272=1372$$
$$x=1372-344-272=756$$

Solución: el ordenador le costó 756€, la cámara 344€ y el viaje 272€.

BLOQUE A

PROBLEMA A2. En un sondeo de opinión se obtiene que el número de individuos a favor de cierta normativa duplica a la suma de los que están en contra y los que no opinan. El total de entrevistados asciende a 360 personas y la diferencia entre los que expresan su opinión y los que no lo hacen duplica a la diferencia entre el número de individuos a favor y el número de los que están en contra de la citada normativa. Determina cuántos de los entrevistados estaban a favor de la normativa, cuántos en contra y cuántos no opinaron.

Solución:
Llamamos:
x = nº de entrevistados que están a favor de la normativa
y = nº de entrevistados que están en contra de la normativa
z = nº de entrevistados que no opinan

Del enunciado del problema deducimos las siguientes ecuaciones,
"… el número de individuos a favor de cierta normativa duplica a la suma de los que están en contra y los que no opinan." → $x = 2(y + z)$
"El total de entrevistados asciende a 360 personas …" → $x + y + z = 360$
"… la diferencia entre los que expresan su opinión y los que no lo hacen duplica a la diferencia entre el número de individuos a favor y el número de los que están en contra de la citada normativa." → $x + y - z = 2(x - y)$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+y+z=360 \\ x=2(y+z) \\ x+y-z=2(x-y) \end{cases}$ *efectuando operaciones:*

$$\begin{cases} x+y+z=360 \\ x=2y+2z \\ x+y-z=2x-2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=360 \\ x-2y-2z=0 \\ x-2x+y+2y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=360 \\ x-2y-2z=0 \\ -x+3y-z=0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -3 & -360 \\ 0 & 4 & 0 & 360 \end{array}\right)$$

De F_3 *obtenemos la siguiente ecuación:* $4y = 360 \rightarrow y = 90$
De F_2 *obtenemos la siguiente ecuación:* $-3y - 3z = -360$
sustituyendo el valor de y obtenido anteriormente
$-3 \cdot 90 - 3z = -360$
$-270 - 3z = -360$
$-3z = 270 - 360$
$-3z = -90$
$z = 30$
De F_1 *obtenemos la siguiente ecuación:* $x + y + z = 360$
sustituyendo los valores de z e y obtenidos anteriormente,
$x + 90 + 30 = 360$
$x = 360 - 120$
$x = 240$

La solución del sistema es: $x = 240$, $y = 90$ *y* $z = 30$.
Por lo que la solución del problema es: 240 entrevistados estaban a favor de la normativa, 90 en contra y 30 no opinaron.

OPCIÓN B

PROBLEMA 1. En un cine se han vendido en una semana un total de 1405 entradas y la recaudación ha sido de 7920 euros. El precio de la entrada normal es de 6 euros y la del día del espectador 4 euros. El precio de la entrada para los jubilados es siempre de 3 euros. Se sabe, además, que la recaudación de las entradas de precio reducido es igual al 10% de la recaudación de las entradas normales. ¿Cuántas entradas de cada tipo se han vendido?

Solución:
Utilizando las siguientes incógnitas:
x = número de entradas normales (a 6 euros)
y = número de entradas del día del espectador (a 4 euros)
z = número de entradas para jubilados (a 3 euros)
de los datos del problema podemos obtener las siguientes ecuaciones,
"se han vendido 1405 entradas" $\rightarrow$ $x + y + z = 1405$
"la recaudación ha sido de 7920 euros" $\rightarrow$ $6x + 4y + 3z = 7920$
"la recaudación de las entradas de precio reducido es igual al 10%
de la recaudación de las entradas normales" $\rightarrow$ $4y + 3z =$ *10% de 6x* $\rightarrow$ $4y + 3z = 0'6x$ $\rightarrow$
$-0'6x + 4y + 3z = 0$

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x + y + x = 1405 \\ 6x + 4y + 3z = 7920 \\ -0'6x + 4y + 3z = 0 \end{cases} \qquad su\ matriz\ ampliada: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1405 \\ 6 & 4 & 3 & 7920 \\ -0'6 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Como A, matriz de coeficientes, es 3x3, su máximo rango es 3. Como A´, matriz ampliada, es 3x4, su máximo rango es 3. Por lo tanto empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ -0'6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 24 - 1'8 + 2'4 - 12 - 18 = 6'6 \neq 0$$

Por lo tanto rang(A) = 3, en consecuencia también rang(A´) = 3.
Como rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incógnitas $\rightarrow$ *el sistema es compatible y determinado.*
Podemos resolver el sistema por el método de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1405 & 1 & 1 \\ 7920 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{6'6} = \frac{16860 + 31680 - 16860 - 23760}{6'6} = \frac{7920}{6'6} = 1200$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1405 & 1 \\ 6 & 7920 & 3 \\ -0'6 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{6'6} = \frac{23760 - 2529 + 4752 - 25280}{6'6} = \frac{693}{6'6} = 105$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1405 \\ 6 & 4 & 7920 \\ -0'6 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{6'6} = \frac{33720 - 4752 + 3372 - 31680}{6'6} = \frac{660}{6'6} = 100$$

Solución: se han vendido 1200 entradas normales, 105 del día del espectador y 100 para jubilados.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: x = *unidades de camiones producidas*
y = *unidades de marionetas producidas*
z = *unidades de rompecabezas producidas*

Del enunciado del problema obtenemos:

	Unidades	*Kg de madera/unidad*	*Horas de trabajo/unidad*
Camiones	*x*	*2*	*3*
Marionetas	*y*	*0´5*	*4*
rompecabezas	*z*	*0´8*	*3´5*
Totales	*89*	*91*	*313*

Por las unidades producidas, $x + y + z = 89$

Por la madera utilizada, $2x + 0'5y + 0'8z = 91$

Por las horas de trabajo, $3x + 4y + 3'5z = 313$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+y+z=89 \\ 2x+0'5y+0'8z=91 \\ 3x+4y+3'5z=313 \end{cases}$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 2 & 0'5 & 0'8 & 91 \\ 3 & 4 & 3'5 & 313 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & -1'5 & -1'2 & -87 \\ 0 & 1 & 0'5 & 46 \end{array}\right) \; F_2 + 1'5\,F_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & 0 & -0'45 & -18 \\ 0 & 1 & 0'5 & 46 \end{array}\right)$$

De $F_2 \rightarrow -0'45z = -18 \rightarrow z = \dfrac{-18}{-0'45} = 40$

De $F_3 \rightarrow y + 0'5z = 46 \rightarrow y + 0'5 \cdot 40 = 46 \rightarrow y + 20 = 46 \rightarrow y = 46 - 20 = 26$

De $F_1 \rightarrow x + y + z = 89 \rightarrow x + 26 + 40 = 89 \rightarrow x + 66 = 89 \rightarrow x = 89 - 66 = 23$

Solución: las piezas producidas han sido 23 camiones, 26 marionetas y 40 rompecabezas.