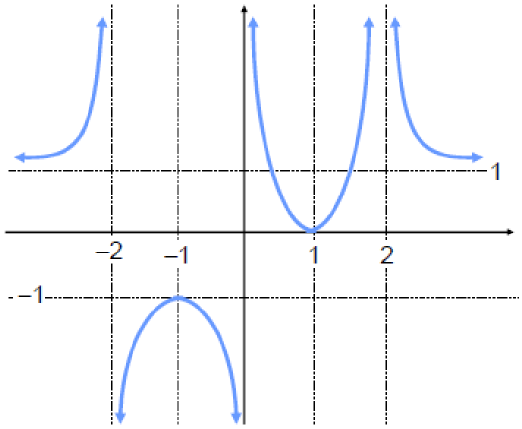
OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. La gráfica de la función *f(x)* es la siguiente:



Se pide:

a) Su dominio y puntos de intersección con los ejes coordenados.

b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

c) Valores de x para los que la función derivada de *f(x)* es positiva, negativa o nula, respectivamente.

d) El valor de los siguientes límites: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

e) Calcular $\int_0^1 \left(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4\right) dx$.

Solución:

a) Dom f(x) = $\Re - \{-2, 0, 2\}$*, ya que para* $x = -2$*,* $x = 0$ *y* $x = 2$ *la función no esta definida.*

El punto de intersección con eje OX es (1 , 0)

No hay punto de intersección con el eje OY

b) En la representación gráfica se observa que la función f(x) tiene dos asíntotas verticales y una horizontal.

Las ecuaciones de las asíntotas verticales son: $x = -2$ *y* $x = 2$

La ecuación de la asíntota horizontal es $y = 1$

c) f´(x) es positiva cuando f(x) es creciente, por lo tanto, $f'(x) > 0$ *en* $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, 2)$

f´(x) es negativa cuando f(x) es decreciente, por lo tanto, $f'(x) < 0$ *en* $(-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$

$f'(x) = 0$ *en los puntos en que la recta tangente a f(x) es horizontal, por lo tanto,* $f'(x) = 0$ *para* $x = -1$ *y* $x = 1$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ *ya que a medida que crece el valor de x la función se acerca a 1.*

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ *ya que dando a x valores positivos y cada vez más cercanos a 0, el valor de la función aumenta indefinidamente.*

e)

$$\int_0^1 \left(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4\right)dx = \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^1 = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - 2x^2 + 4x\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^4}{2} - 1^3 - 2.1^2 + 4.1\right) - \left(\frac{0^5}{5} + \frac{0^4}{2} - 0^3 - 2.0^2 + 4.0\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 1 - 2 + 4 - 0 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{2+5+10}{10} =$$

$$= \frac{17}{10} = 1'7$$

Solución: $\int_0^1 \left(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4\right)dx \;=\; 1'7$

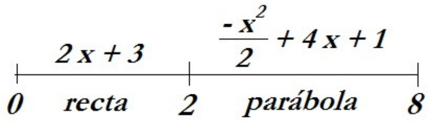
Problema 2. Dada la función continua $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & 0\le x<2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+4x+1 & 2\le x\le 8 \end{cases}$

a) Calcula sus máximos absolutos y mínimos absolutos, razonando que, efectivamente, lo son.

b) Calcula el valor de la integral de la función *f(x)* en el intervalo [5,7].

Solución:

Representemos la función,



x	y
0	3
2	7

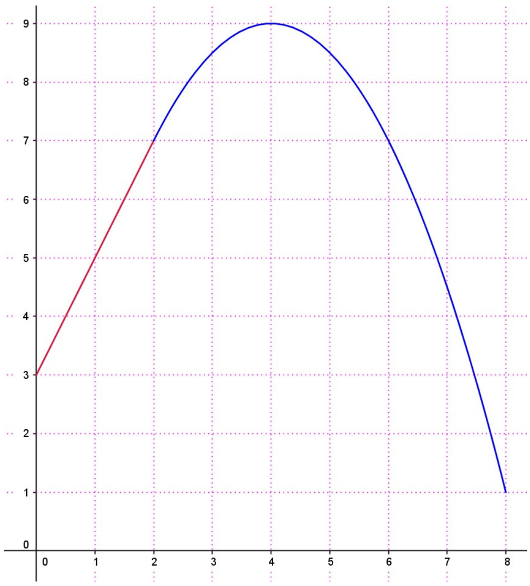
x	y
2	$-\dfrac{2^2}{2}+4\cdot 2+1=-2+8+1=7$
8	$-\dfrac{8^2}{2}+4\cdot 8+1=-32+32+1=1$

Vértice de la parábola: $(4\,,9)$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{-4}{-1}=4\in[2,8]$$

$$y=-\frac{4^2}{2}+4\cdot 4+1=-8+16+1=9$$

La representación gráfica de f(x) será:



Resolvamos las preguntas,

a) De la representación gráfica deducimos que:
El máximo absoluto se alcanza en el punto (4 , 9) y el mínimo absoluto en el (8 , 1).

b)

$$\int_5^7 f(x)\,dx=\int_5^7\left(-\frac{x^2}{2}+4x+1\right)dx=\left[-\frac{x^3/3}{2}+4\cdot\frac{x^2}{2}+x\right]_5^7=\left[-\frac{x^3}{6}+2x^2+x\right]_5^7=$$

$$=\left(-\frac{7^3}{6}+2\cdot 7^2+7\right)-\left(-\frac{5^3}{6}+2\cdot 5^2+5\right)=\frac{287}{6}-\frac{205}{6}=\frac{82}{6}$$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Los ingresos y costes anuales, en miles de euros, de una fábrica de mochilas vienen dados, respectivamente, por las funciones

$$I(x) = 4\,x - 9\,, \quad C(x) = 0{,}01\,x^2 + 3\,x$$

donde la variable x expresa en euros el precio de venta de una mochila. Se pide:

a) Calcula la función de beneficios. *(1 punto)*

b) ¿Cuál ha de ser el precio de venta x para que el beneficio sea máximo? *(1 punto)* ¿Cuál es dicho beneficio máximo? *(1 punto)*

c) Para la función de beneficios, determina los puntos de corte con los ejes y las zonas de crecimiento y decrecimiento. Representa gráficamente dicha función. *(5 puntos)*

d) Razona para qué precios de venta (valores de x) la empresa tendría pérdidas. *(2 puntos)*

Solución:

Tenemos las funciones: $I(x) = 4\,x - 9$, $C(x) = 0{,}01\,x^2 + 3\,x$, *en las que* x *es el precio de venta de la mochila (en euros), por lo que,* $x \geq 0$. $I(x)$ *y* $C(x)$ *representan miles de euros.*

a) Función de beneficios, $B(x)$, en miles de euros.

$B(x) = I(x) - C(x) = 4\,x - 9 - (\,0{,}01\,x^2 + 3\,x\,) = 4\,x - 9 - 0{,}01\,x^2 - 3\,x = -\,0{,}01\,x^2 + x - 9,\ x \geq 0.$

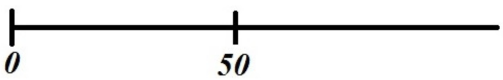
Solución: la función de beneficios es $\boldsymbol{B(x) = -\,0{,}01\,x^2 + x - 9,\ x \geq 0.}$

b) Máximo de $B(x)$

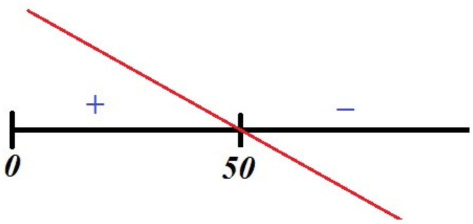
$B'(x) = -\,0'02\,x + 1$

$B'(x) = 0 \;\rightarrow\; -\,0'02\,x + 1 = 0 \;\rightarrow\; -\,0'02\,x = -\,1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-1}{-0'02} = 50$

Hay que estudiar el signo de $B'(x)$ en los intervalos:



$B'(x)$ es una línea recta de pendiente negativa que pasa por (50,0), por lo que:



Por tanto, en $x = 50$ hay un máximo relativo de $B(x)$ que, además es el absoluto ya que a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.

Para $x = 50$, $B(50) = -\,0{,}01\,.\,50^2 + 50 - 9 = 16.$

Solución: para que el beneficio sea máximo el precio de venta de las mochilas ha de ser de 50 euros y el beneficio máximo será de 16 miles de euros, es decir, 16000 euros.

c) $B(x) = -0{,}01\,x^2 + x - 9,\ x \geq 0.$ ¿Puntos de corte con ejes, monotonía y representación?

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$x = 0 \ \rightarrow\ B(0) = -9 \ \rightarrow\ (0, -9)$

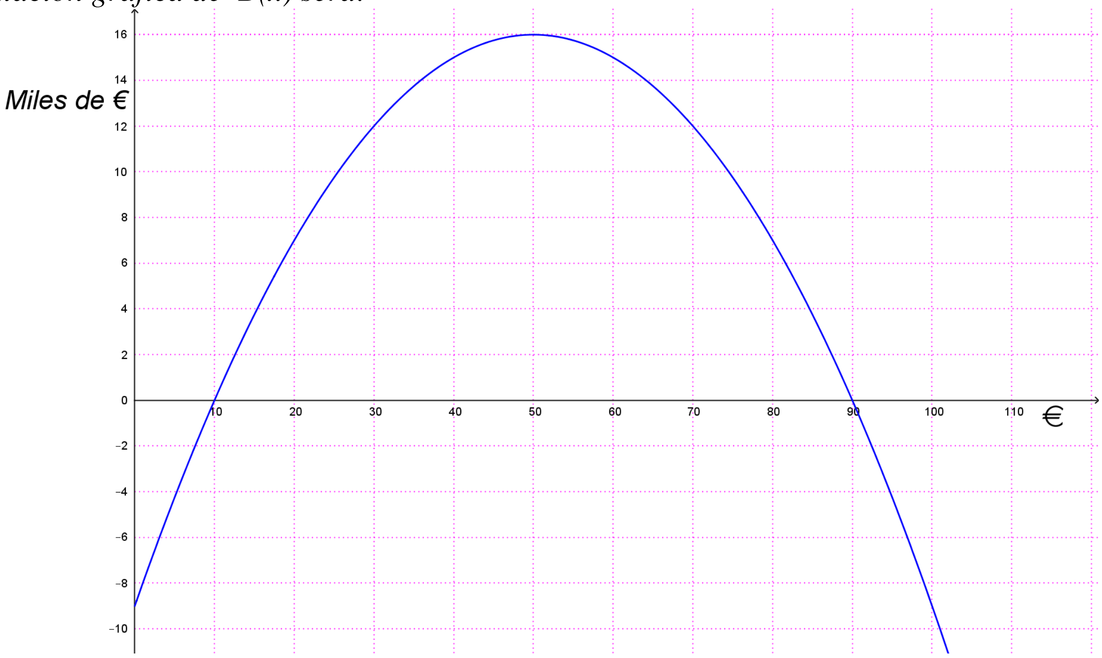
$$B(x)=0 \ \rightarrow\ -0'01x^2+x-9=0 \ \rightarrow\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-0'01)(-9)}}{2(-0'01)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-0'36}}{-0'02}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{0'64}}{-0'02}=\frac{-1\pm 0'8}{-0'02}=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1+0'8}{-0'02}=10 \ \rightarrow\ (10{,}0) \\ x_2=\dfrac{-1-0'8}{-0'02}=90 \ \rightarrow\ (90{,}0) \end{array}\right.$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , – 9), (10 , 0) y (90 , 0).

Según vimos en el apartado (b) ***B(x) es creciente en el intervalo (0 , 50) y decreciente en (50 , +∞)*** *y su máximo es (50 , 16).*

La representación gráfica de B(x) será:



d) La empresa tiene pérdidas cuando los valores de la función de beneficios son negativos.

Según lo visto en el apartado anterior, la empresa tendría pérdidas en los intervalos [0 , 10) y (90 , +∞).

Es decir, para precios de venta de las mochilas entre 0 € y 10€ y a partir de 90€ la empresa tendría pérdidas (10€ y 90€ excluidos, *para ellos el beneficio es nulo****).***

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una explotación minera extrae $f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{800}t^3$ Toneladas de carbón por año, donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde el inicio de la explotación. Se pide:

a) Calcula en qué año se alcanza el máximo de extracción y cuál es dicho valor. *(5 puntos)*

b) Si se necesita extraer como mínimo 10 Toneladas por año para que la explotación sea rentable, estudia si en el año t = 40 es rentable. *(2 puntos)*

c) ¿Existe algún periodo de tiempo, a partir de los 40 años, en el que la explotación es rentable? Razona tu respuesta. *(3 puntos)*

Solución:

$f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{800}t^3 \quad \begin{cases} t \equiv \textit{años desde inicio explotación} \\ f(t) \equiv \textit{Toneladas / año} \end{cases}$ *como t son años,* $t \geq 0$

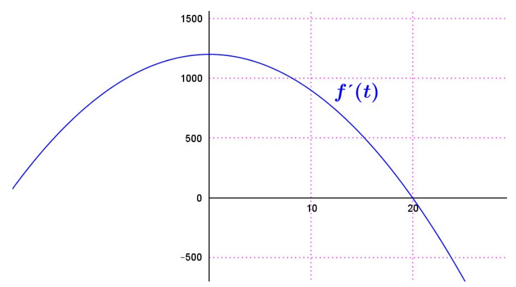
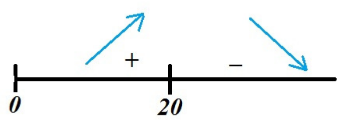
a) Máximo.

$$f'(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{800}3t^2 = \frac{1200 - 3t^2}{800}$$

$$\frac{1200 - 3t^2}{800} = 0 \rightarrow 1200 - 3t^2 = 0 \rightarrow 1200 = 3t^2 \rightarrow t^2 = \frac{1200}{3} \rightarrow t^2 = 400 \rightarrow$$

$$t = \pm\sqrt{400} = \pm 20, \quad \textit{como } t \geq 0, \quad t = 20$$

Estudiemos la monotonía de f(t),

f´(t) es un polinomio de 2º grado con coeficiente de t^2 *negativo y raíces – 20 y 20. Gráficamente f´(t) será:*		*Luego, el signo de f´(t):*	

Por tanto, f(t) es creciente en el intervalo (0 , 20) y decreciente en (20 , +∞). Luego el máximo relativo de f(t) se alcanza para t = 20 y, además, es el absoluto ya que f(t) a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.

Para $t = 20, \; f(20) = 30 + \frac{3}{2}\cdot 20 - \frac{1}{800}20^3 = 50$

Finalmente, ***el máximo de extracción se alcanza a los 20 años de inicio de la explotación y este máximo es de 50 toneladas.***

b) Para que la explotación sea rentable, según el enunciado, $f(t) \geq 10$

Para $t = 40, \; f(40) = 30 + \frac{3}{2}\cdot 40 - \frac{1}{800}40^3 = 10 \; (\geq 10)$

Luego, ***al cabo de 40 años de inicio de la explotación (t = 40) la explotación es rentable (f(40) = 10).***

c) Considerando lo estudiado en el apartado (a), como $f(t)$ es decreciente en $(20, +\infty)$ entonces para valores de $t > 40$ $f(t) < 10$ (en apartado (b) obtuvimos que $f(40) = 10$).
Por tanto, ***a partir de 40 años no hay periodo de tiempo en que la explotación sea rentable.***

Otra forma de resolverlo:

Representar la función $f(t)$.

De esta función sabemos:

$t = 0 \rightarrow f(0) = 30 \rightarrow (0, 30)$

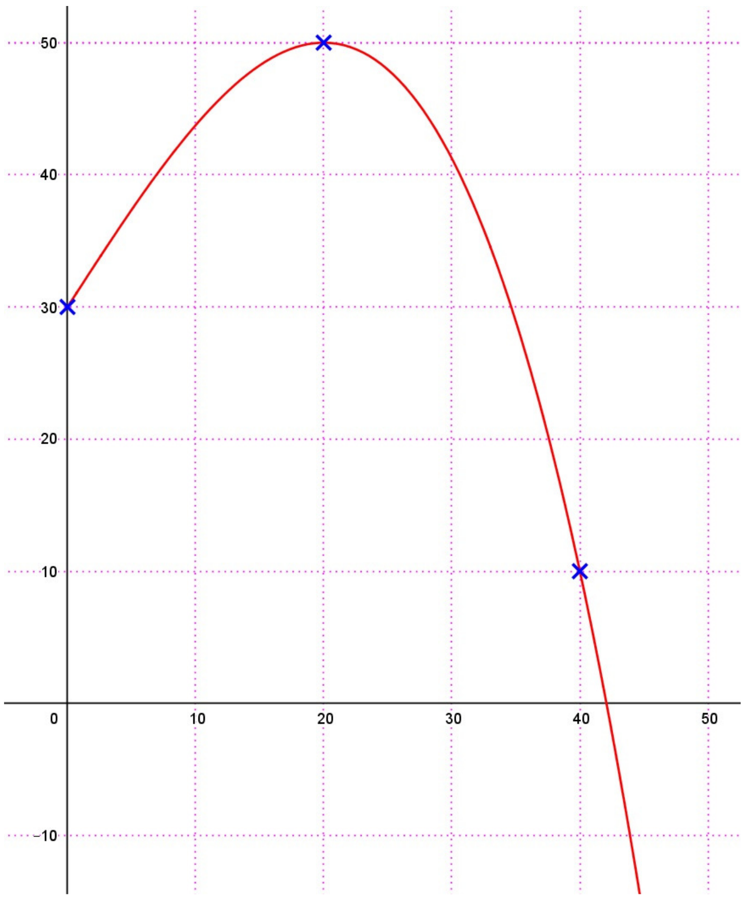
$t = 40 \rightarrow f(40) = 10 \rightarrow (40, 10)$

es creciente en $(0, 20)$ y

decreciente en $(20, +\infty)$

máximo $(20, 50)$

Su representación es:



A partir de $t = 40$ $f(t) < 10$, por lo que ***a partir de 40 años no hay periodo de tiempo en que la explotación sea rentable.***

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si\ \ x\le 1 \\ \dfrac{a\,x^2}{x^2+1} & si\ \ x>1 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio. *(2 puntos)*
b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. *(3 puntos)*
c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

d) Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$. *(3 puntos)*

Solución:
En la definición de la función f(x) hay dos ramas,
para $x\le 1$ $f(x)= x^2-3x+3$ *y esta función se puede calcular para cualquier valor de x.*

para $x>1$ $f(x)=\dfrac{a\,x^2}{x^2+1}$ *, como* $x^2+1>0$ *(para cualquier valor de x) el cociente se puede calcular.*

Por tanto $Dom\, f(x)=\Re$

a) ¿Valor de a para que f(x) sea continua en su dominio?
Para $x\le 1$ *f(x) es un polinomio luego es continua.*
Para $x>1$ *f(x) es un cociente con el denominador distinto de cero luego es continua.*
El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en x = 1.
Continuidad en x = 1,

a) $f(1)=1^2-3\cdot 1+3=1$

b) $\displaystyle Lím_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} Lím_{x\to 1^-} f(x)=Lím_{x\to 1^-}\left(x^2-3x+3\right)=1 \\ Lím_{x\to 1^+} f(x)=Lím_{x\to 1^+}\dfrac{a\,x^2}{x^2+1}=\dfrac{a\cdot 1^2}{1^2+1}=\dfrac{a}{2} \end{cases}$ *Para que exista el límite* $1=\dfrac{a}{2} \to a=2$

c) Para $a=2$ $f(1)=\displaystyle Lím_{x\to 1} f(x)$

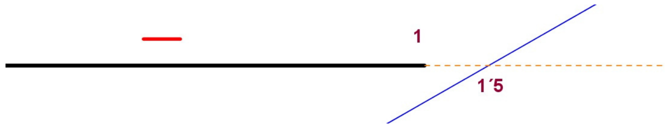
Solución: para que f(x) sea continua en su dominio debe ser a = 2.

b) Para a = 2 ¿monotonía de f(x)?
Como f(x) tiene dos ramas estudiamos la monotonía en cada una de ellas.
Primera rama, $y=x^2-3x+3,\ x\le 1$

$y'=2x-3$, *estudiemos el signo de y´.*

$2x-3=0 \to 2x=3 \to x=\dfrac{3}{2}=1'5$

$y'=2x-3$ *es una recta de pendiente positiva que pasa por x = 1´5, luego*



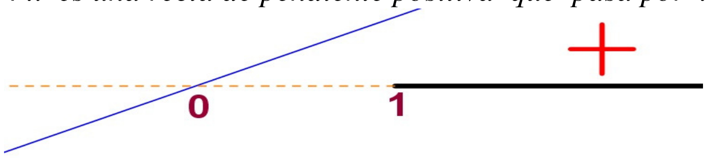
Segunda rama, $y = \dfrac{2\,x^2}{x^2+1}$, $\quad x > 1$

$$y' = \frac{4x\left(x^2+1\right) - 2\,x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x^3 + 4x - 4\,x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado, es positivo; el signo de y' *depende del numerador.*

$4\,x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

$4\,x$ *es una recta de pendiente positiva que pasa por* $x = 0$*, luego*



Por tanto, ***f(x) es decreciente en*** $(-\infty, 1)$ ***y es creciente en*** $(1, +\infty)$***.***

c) Para $a = 2$*, asíntotas horizontales o verticales.*

La rama polinómica de f(x) no aporta asíntotas. Las posibles asíntotas estarán en la rama para $x > 1$*.*

Calculémoslas,

Asíntota vertical,

$\dfrac{2\,x^2}{x^2+1}$, *como* $x^2 + 1 > 0$*, el denominador no se anula, por lo que no hay asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (2) = 2,$$ *entonces* $y = 2$ *es una asíntota horizontal.*

Por tanto, ***f(x) no tiene asíntota vertical y su asíntota horizontal es*** $y = 2$***.***

d) $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

En el intervalo $[-2, 1]$*,* $f(x) = x^2 - 3x + 3$*. Entonces,*

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} \left(x^2 - 3x + 3\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\,\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot\frac{1^2}{2} + 3\cdot 1\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 3\,\frac{(-2)^2}{2} + 3\cdot(-2)\right) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 - \left(\frac{-8}{3} - 6 - 6\right) = \frac{33}{2} = 16´5$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 16´5$.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55,$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros? *(2 puntos)*

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios? *(2 puntos)*

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo? *(2+1 puntos)*

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece? *(3 puntos)*

Solución:

$B(x) = -x^2 + 16x - 55$; x precio de venta de cada caja, $B(x)$ beneficio mensual. Como x es el precio de venta entonces $\text{Dom } B(x) = [\,0, +\infty\,)$

a) ¿$B(x)$ para $x = 6$?

$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = 5$

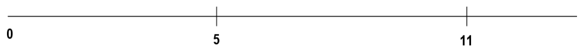
Al vender cada caja a 6€ obtiene un beneficio de 5€.

b) ¿x? / $B(x) > 0$

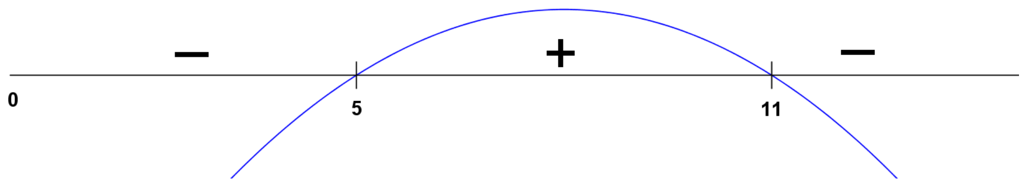
$$-x^2 + 16x - 55 > 0$$

$$-x^2 + 16x - 55 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-55)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-16 \pm 6}{-2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-16+6}{-2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{-16-6}{-2} = 11 \end{cases}$$

Hay que estudiar el signo de $B(x)$ en los intervalos:



Como $B(x)$ es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces 5 y 11,



Luego, ***para obtener beneficios el precio de venta de cada caja debe estar entre 5 y 11 euros.***

c) ¿x? / $B(x)$ sea máximo.

Como $B(x)$ es un polinomio de 2º grado y considerando lo calculado en el apartado anterior, el beneficio máximo se alcanza en el vértice de la parábola, $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-16}{2(-1)} = 8$.

Obtendremos el mismo resultado estudiando el signo de $B'(x)$:

$B'(x) = -2x + 16$

$-2x + 16 = 0; \quad 16 = 2x; \quad x = \dfrac{16}{2} = 8$

Estudiemos el signo de $B'(x)$ a ambos lados de $x = 8$,

x	$B'(x)=-2x+16$
7	$-2\cdot 7+16=\quad +$
9	$-2\cdot 9+16=\quad -$

A la izquierda positivo y a la derecha negativo, en x = 8 hay un máximo relativo que es el absoluto por ser la función B(x) a la izquierda creciente y a la derecha decreciente.

$B(8) = -8^2 + 16 \,.\, 8 - 55 = 9$

Por tanto, ***para que el beneficio sea máximo debe vender cada caja a 8 euros, en este caso el beneficio será de 9 euros mensuales.***

d) Según obtuvimos en el apartado c) (signo de B(x)):
El beneficio crece en el intervalo (0 , 8) y decrece en el intervalo (8 , +∞).

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

$$\text{Ingresos: } I(x) = 4x^2 + 800x, \qquad \text{Gastos: } G(x) = 6x^2 + 460x + 672$$

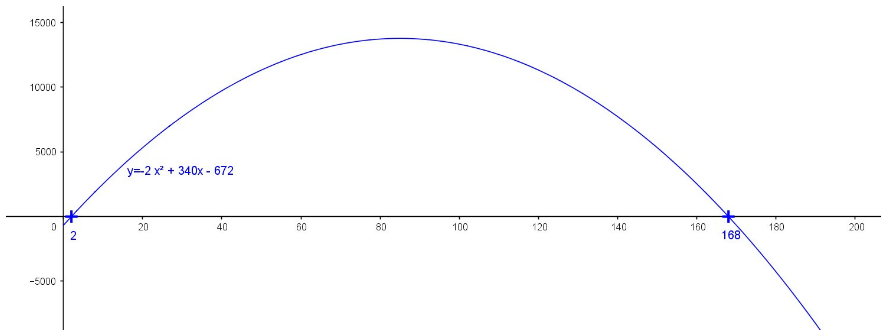
a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable? *(4 puntos)*
b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso? *(3 puntos)*
c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta. *(3 puntos)*

Solución:
Llamando $B(x)$ al beneficio proporcionado por x unidades,
$B(x) = I(x) - G(x) = 4x^2 + 800x - 6x^2 - 460x - 672 = -2x^2 + 340x - 672$
Como x es número de unidades, entonces $Dom\ B(x) = [\,0, +\infty\,)$

a) $¿x / B(x) \geq 0?$
Debemos resolver la inecuación: $-2x^2 + 340x - 672 \geq 0$

$$-2x^2 + 340x - 672 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-672)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-340 \pm 332}{-4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-340+332}{-4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-340-332}{-4} = 168 \end{cases}$$

$B(x)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces 2 y 168, gráficamente:



Por tanto $B(x) \geq 0$ cuando $x \geq 2$.

El número mínimo de unidades que debe fabricar para que el producto sea rentable es 2 (y como máximo 168).

b) $¿x? / B(x)$ *sea máximo.*
Como $B(x)$ es un polinomio de 2º grado, que hemos representado antes, el máximo se alcanza en el vértice de la parábola,

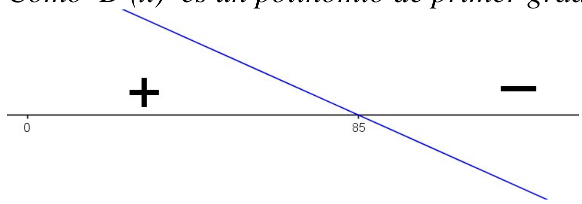
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-340}{2(-2)} = \frac{-340}{-4} = 85$$

Otra forma de encontrar el máximo de $B(x)$ es estudiar el signo de $B'(x)$:
$B'(x) = -4x + 340$

$$-4x + 340 = 0; \quad 4x = 340; \quad x = \frac{340}{4} = 85$$

Hay que estudiar el signo de $B´(x)$ en los intervalos: $(0, 85)$ y $(85, +\infty)$

Como $B´(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 85,

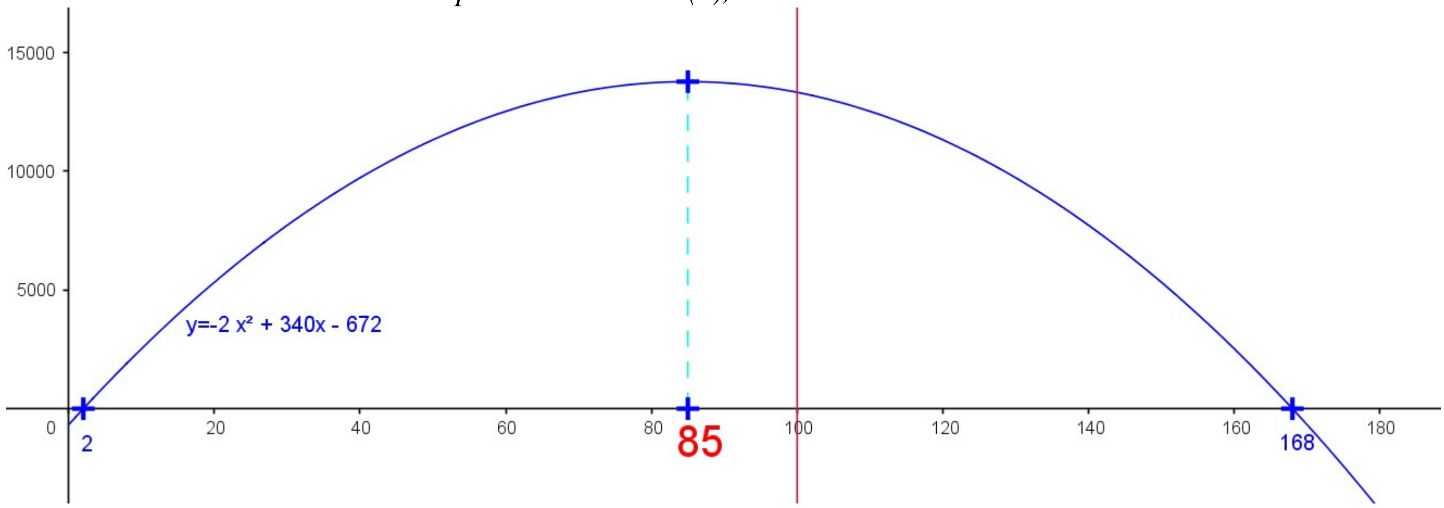


Luego, en $x = 85$ hay un máximo relativo que es el absoluto de $B(x)$ ya que la función a la derecha es creciente y a la izquierda decreciente.

Para $x = 85$, $B(85) = -2 \cdot 85^2 + 340 \cdot 85 - 672 = 13778$.

Solución: para que el beneficio sea máximo la empresa debe fabricar 85 unidades y, en este caso, el beneficio será de 13778 €.

c) La empresa debe fabricar, al menos, 100 unidades. ¿x? / B(x) sea máximo.
Añadiendo esta restricción en la representación de B(x),



Como $B(x)$, a partir de $x = 85$ es decreciente, cuando $x \geq 100$ la función alcanza su máximo en este valor $x = 100$.
$B(100) = -2 \cdot 100^2 + 340 \cdot 100 - 672 = 13328$.

Por tanto, ***el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de la nueva normativa es de 13328 €.***

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x) = \frac{1}{10}\left(800 + 15x + 6x^2 - x^3\right)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra? *(2 puntos)*

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo? *(4 puntos)*

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%? *(4 puntos)*

Solución:

$f(x) = \frac{1}{10}\left(800 + 15x + 6x^2 - x^3\right)$, *x meses después de compra* ($0 \le x \le 12$), *f(x) rendimiento en porcentaje.*

a)

$$f(1) = \frac{1}{10}\left(800 + 15 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 - 1^3\right) = 82$$

$$f(2) = \frac{1}{10}\left(800 + 15 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 - 2^3\right) = 84'6$$

Por tanto, ***el rendimiento de la máquina un mes desùés de su compra (82%) no es superior al que tiene dos meses después (84´6%).***

b) Máximo.

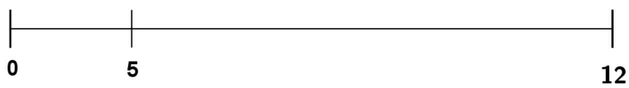
Debemos estudiar el signo de f´(t).

$$f(x) = \frac{1}{10}\left(800 + 15x + 6x^2 - x^3\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{10}\left(15 + 12x - 3x^2\right)$$

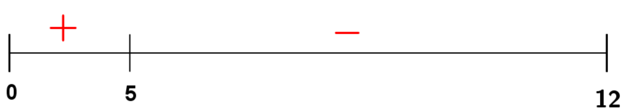
$$f'(x) = 0; \quad \frac{1}{10}\left(15 + 12x - 3x^2\right) = 0; \quad 15 + 12x - 3x^2 = 0; \quad 3x^2 - 12x - 15 = 0; \quad x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4+6}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{4-6}{2} = -1 \notin Dom\ f \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(t) en los intervalos:



	$f'(x) =$
1	$\frac{1}{10}\left(15 + 12 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2\right) = 2'4 > 0$
6	$\frac{1}{10}\left(15 + 12 \cdot 6 - 3 \cdot 6^2\right) = -2'1 < 0$



Luego, en x = 5 hay un máximo local que es el absoluto ya que la función a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.

$$f(5)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 5+6\cdot 5^2-5^3\right)=90$$

Solución: la máquina alcanza su mayor rendimiento 5 meses después de su compra y este rendimiento es del 90%.

c) *¿x? / f(x) < 10*

En el apartado anterior hemos obtenido que f(x) es creciente entre 0 y 5 y decreciente de 5 a 12.

$$f(0)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 0+6\cdot 0^2-0^3\right)=80 \quad y \quad f(12)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 12+6\cdot 12^2-12^3\right)=11'6$$

La función f(x) inicialmente vale 80 > 10, hasta x = 5 es creciente y después decreciente. Como f(12) es 11´6 > 10, la función nunca toma valores inferiores a 10.

Solución: la máquina nunca tiene un rendimiento inferior al 10%.

Problema 4. El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+14 & si\ x\in [0,6] \\ -x^2+24x-82 & si\ x\in]6,18] \\ -x+34 & si\ x\in]18,24] \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,24]. *(3 puntos)*
b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? *(4 puntos)*
c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. (3 *puntos)*

Solución:
a) Continuidad de esta función en el intervalo [0,24].
Como cada una de las definiciones de f(x) es un polinomio de 1er o 2º grado, son continuas en sus correspondientes intervalos. Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.
Continuidad en $x = 6$,
a) $f(6) = 2 . 6 + 14 = 26$

$$b)\quad \lim_{x\to 6} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(2x+4)=26 \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+}\left(-x^2+24x-82\right)=-6^2+24\cdot 6-82=26 \end{array}\right\}=26$$

c) $f(6) = 26 = \lim\limits_{x\to 6} f(x)$

Por tanto f(x) es continua en $x = 6$.

Continuidad en $x = 18$,
d) $f(18) = -18^2 + 24 . 18 - 82 = 26$

$$e)\quad \lim_{x\to 18} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 18^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 18^-}\left(-x^2+24x-82\right)=26 \\ \lim\limits_{x\to 18^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 18^+}\left(-x+34\right)=-18+34=16 \end{array}\right\}\neq \quad\rightarrow\quad no\ existe\quad \lim_{x\to 18} f(x)$$

Por tanto f(x) no es continua en $x = 18$

Solución: f(x) es continua en [0 , 24] ~{18}.

b) ¿A qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo?
Representemos gráficamente la función (algunos cálculos están realizados en el apartado a))

x	$2x+14$
0	14
6	26

x	$-x^2+24x-82$
6	26
18	26

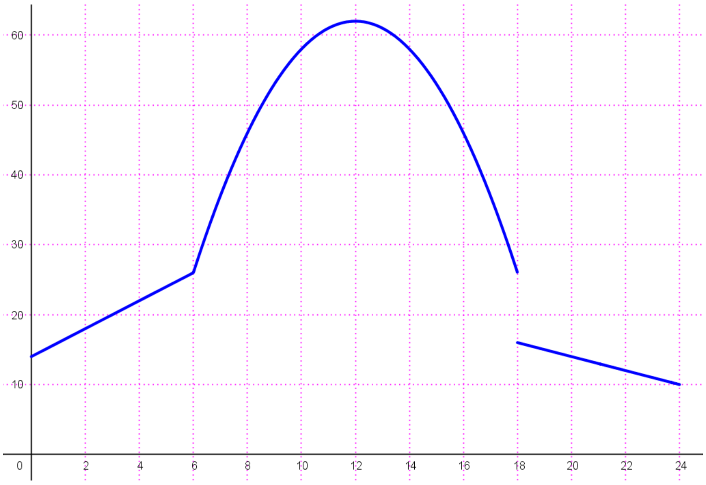
x	$-x+34$
18	16
24	10

Para completar la representación de la parábola necesitamos algún punto más. Como el polinomio de 2º grado tiene coeficiente de x^2 negativo, la parábola tiene la forma $\cap$, obtengamos el máximo.

$$g(x)=-x^2+24x-82$$

$$g'(x)=-2x+24;\quad -2x+24=0;\quad -2x=-24;\quad x=\frac{-24}{-2}=12\in(6,18)$$

$$g(12)=-12^2+24\cdot 12-82=62 \qquad\rightarrow\qquad máximo\ de\ la\ parábola\quad (12,62)$$



Solución: el consumo máximo se alcanza a las 12h y es de 62 Mwh y el consumo mínimo se alcanza a las 24h y es de 10 Mwh.

c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Entre las 8 y las diez de la mañana la definición de f(x) es $-x^2 + 24x - 82$.

El consumo que se realiza entre esas horas lo obtendremos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_8^{10}\left(-x^2+24x-82\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+24\frac{x^2}{2}-82x\right]_8^{10} = \left[-\frac{x^3}{3}+12x^2-82x\right]_8^{10} =$$

$$=\left(-\frac{10^3}{3}+12\cdot 10^2-82\cdot 10\right)-\left(-\frac{8^3}{3}+12\cdot 8^2-82\cdot 8\right)=\frac{140}{3}-\left(-\frac{176}{3}\right)=\frac{316}{3}\cong 105'3333$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es de $\frac{316}{3}$ ***Mwh.***

Problema 4. Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? *(3 puntos)*

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? *(4 puntos)*

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? *(2 puntos)*

Solución:

Los ingresos que obtiene son $I(x) = -x^2 + 60x + 100$; *x kilos de abono.*

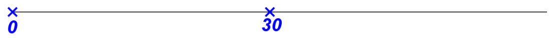
Como x representa kilos $\text{Dom } I(x) = [0, +\infty)$

a) ¿Cantidad de abono que maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos?

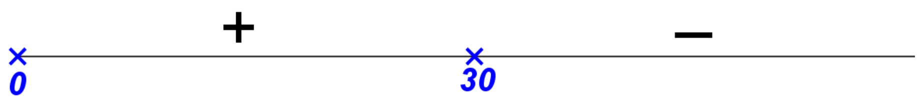
Buscamos el máximo de $I(x)$.

$$I'(x) = -2x + 60; \quad -2x + 60 = 0; \quad -2x = -60; \quad x = \frac{-60}{-2} = 30.$$

Debemos estudiar el signo de $I'(x)$ en los siguientes intervalos:



x	$I'(x) = -2x + 60$
10	$-2 \cdot 10 + 60 = 40 > 0$
40	$-2 \cdot 40 + 60 = -20 < 0$



Por tanto en $x = 30$ hay un máximo relativo. Además, como a la izquierda de $x = 30$ la función es creciente y a la derecha decreciente, el máximo relativo es el absoluto de $I(x)$.

Para $x = 30$, $I(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 + 100 = 1000$

Solución: la cantidad de abono que maximiza sus ingresos son 30 kg y estos ingresos máximos son de 1000€.

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos?

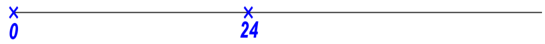
Beneficio = Ingresos – Costes, $B(x) = I(x) - 12x = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$

Como x representa kilos $\text{Dom } B(x) = [0, +\infty)$

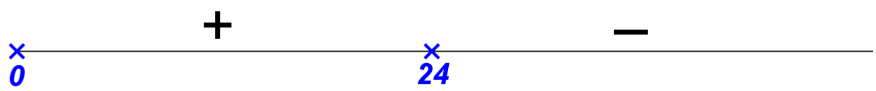
Buscamos el máximo de $B(x)$,

$$B'(x) = -2x + 48; \quad -2x + 48 = 0; \quad -2x = -48; \quad x = \frac{-48}{-2} = 24.$$

Debemos estudiar el signo de $B'(x)$ en los siguientes intervalos:



x	$B'(x) = -2x + 48$
10	$-2 \cdot 10 + 48 = 28 > 0$
30	$-2 \cdot 30 + 48 = -12 < 0$



Por tanto en $x = 24$ hay un máximo relativo. Además, como a la izquierda de $x = 24$ la función es creciente y a la derecha decreciente, el máximo relativo es el absoluto de $B(x)$.

Para $x = 24$, $B(24) = -24^2 + 48 \cdot 24 + 100 = 676$

Solución: la cantidad de abono que maximiza sus beneficios son 24 kg y estos beneficios máximos son de 676€.

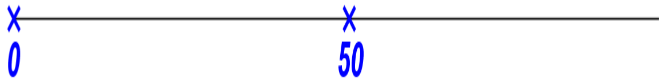
c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? ¿x? / B(x) > 0

$-x^2+48x+100>0$

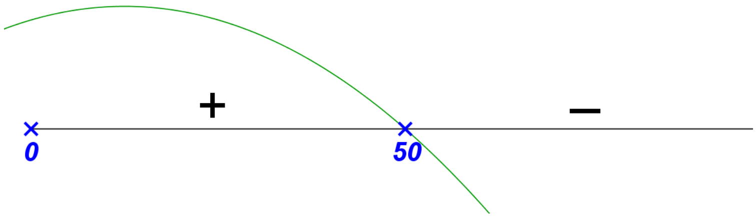
$$-x^2+48x+100=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-48\pm\sqrt{48^2-4\cdot(-1)\cdot 100}}{2\cdot(-1)}=\frac{-48\pm 52}{-2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-48+52}{-2}=-2 \\ x_2=\dfrac{-48-52}{-2}=50 \end{cases}$$

Dom B(x) = [0, +∞), por tanto {– 2} ∉ Dom B(x).

Hay que estudiar el signo de B(x) en los intervalos:



Como B(x) es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces – 2 y 50,



Luego, B(x) > 0 si x ∈ (0 , 50).

Solución: para garantizar beneficios positivos debe emplear menos de 50 kg de abono.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. En una sesión, el valor de cierta acción, en euros, vino dado por la función:

$$f(x)=\begin{cases} -x+15 & 0\le x\le 3 \\ x^2-8x+26 & 3<x\le 6 \\ 2x+2 & 6<x\le 8 \end{cases}$$

Donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde el inicio de la sesión. Se pide:

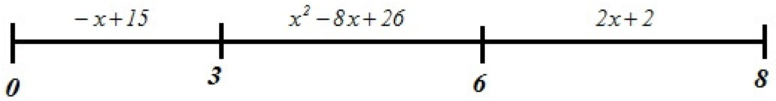
a) Estudiar la continuidad de $f(x)$.

b) Calcular el valor máximo y el valor mínimo que alcanzó la acción.

c) ¿En qué momentos convino comprar y vender para maximizar el beneficio? ¿Cuál hubiera sido este?

Solución:

a) f(x) está definida en el intervalo [0 , 8] mediante tres trozos que son:



En cada uno de los trozos la definición de f(x) es un polinomio, por lo tanto en cada trozo la función es continua. Tenemos que estudiar la continuidad en los cambios de definición.

x = 3

1) f(3) = – 3 + 15 = 12

$$2)\ \lim_{x\to 3} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(-x+15)=-3+15=12 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-8x+26)=3^2-8.3+26=11 \end{array}\right\} 12\neq 11,\ \text{no existe } \lim_{x\to 3} f(x)$$

Luego f(x) no es continua en x = 3, en x = 3 f(x) tiene una discontinuidad de salto finito.

x = 6

1) f(6) = 6^2 – 8 . 6 + 26 = 36 – 48 + 26 = 14

$$2)\ \lim_{x\to 6} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(x^2-8x+26)=6^2-8.6+26=14 \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+}(2x+2)=2.6+2=14 \end{array}\right\}=14$$

$$3)\ f(6)=\lim_{x\to 6} f(x)=14$$

Luego f(x) es continua en x = 6

*Finalmente, **f(x) es continua en [0 , 8] – { 3 } y en x = 3 tiene una discontinuidad de salto finito**.*

Para responder a los siguientes apartados, vamos a representar gráficamente la función.

Primer trozo, y = – x + 15, gráficamente es una línea recta. Tabla de valores para obtener principio y final,

x	$y=-x+15$
0	15
3	12

Segundo trozo, y = x^2 – 8 x + 26, gráficamente es una parábola. Tabla de valores para obtener principio y final y además el vértice de la parábola,

x	$y=x^2-8x+26$
3	11
6	18

Vértice $(4\,,10)$

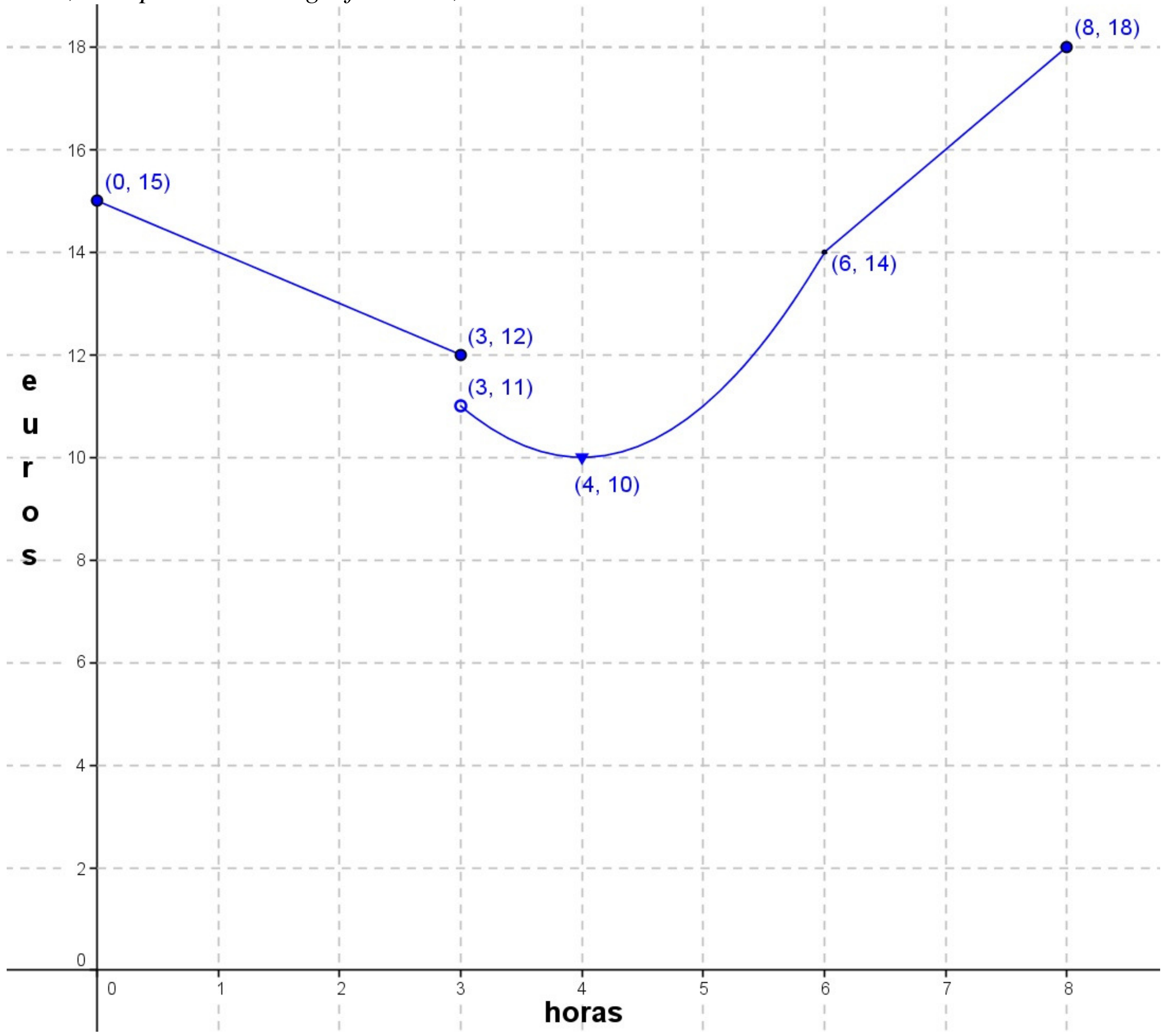
$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{8}{2}=4$$

$$y=4^2-8.4+26=10$$

Tercer trozo, $y = 2x + 2$, gráficamente es una línea recta. Tabla de valores para obtener principio y final,

x	$y = 2x + 2$
6	14
8	18

Finalmente, la representación gráfica será,



Considerando los cálculos realizados anteriormente y la representación gráfica de la función $f(x)$:

*b) La acción alcanzó un **valor máximo de 18 euros** y un **valor mínimo de 10 euros**.*

*c) Para maximizar el beneficio habría que **haber comprado a las 4 horas del inicio de la sesión** (que la acción estaba a 10 euros, mínimo) y **vender a las 8 horas del inicio de la sesión** (que la acción estaba a 18 euros, máximo). En este caso **el beneficio habría sido de 8 euros** (18 – 10 = 8).*

Problema 2. El rendimiento de un estudiante durante las primeras 6 horas de estudio viene dado (en una escala de 0 a 100) por la función:

$$R(t) = \frac{700\,t}{4t^2 + 9}$$

donde t es el número de horas transcurrido.

a) Calcula el rendimiento a las 3 horas de estudio.

b) Determina la evolución del rendimiento durante la primeras 6 horas de estudio (cuándo aumenta y cuándo disminuye). ¿Cuál es el rendimiento máximo?

c) Una vez alcanzado el rendimiento máximo, ¿en qué momento el rendimiento es igual a 35?

Solución:

Por definición, $R(t) = \frac{700\,t}{4t^2 + 9} \quad 0 \le t \le 6$

a) Rendimiento a las 3 horas de estudio.

Hay que calcular R(3), $R(3) = \frac{700\,.\,3}{4\,.\,3^2 + 9} = \frac{2100}{36 + 9} = \frac{2100}{45} = 46'6667$

Luego, ***a las tres horas de estudio el rendimiento es de 46´6667***.

b) Para determinar la evolución del rendimiento durante las seis primeras horas de estudio, calculamos la monotonía de la función R(t)

En primer lugar, Dom R(t) = [0 , 6] (por definición de R(t) y porque $4\,t^2 + 9 \ge 0$ *siempre)*

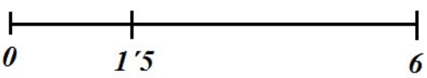
$$R'(t) = \frac{700(4t^2+9) - 700\,t\,.\,8t}{(4t^2+9)^2} = \frac{2800t^2 + 6300 - 5600t^2}{(4t^2+9)^2} = \frac{-2800t^2 + 6300}{(4t^2+9)^2}$$

Signo de R´(t), como el denominador está elevado al cuadrado siempre es positivo, por lo que el signo de R´(t) sólo depende del numerador.

$$-2800t^2 + 6300 = 0 \;\;\rightarrow\;\; -2800t^2 = -6300 \;\;\rightarrow\;\; t^2 = \frac{-6300}{-2800} = 2'25 \;\;\rightarrow\;\; t = \pm\sqrt{2'25} = \pm 1'5$$

Como Dom R(t) = [0 , 6] $\rightarrow$ *t = 1´5*

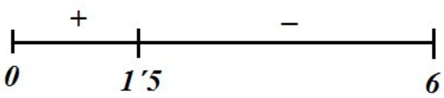
Hay que estudiar el signo de R´(t) en los intervalos:



Para t = 1 $\rightarrow$ $R'(1) = \frac{-2800\,.\,1^2 + 6300}{(4\,.\,1^2 + 9)^2} = \frac{3500}{169} > 0$

Para t = 2 $\rightarrow$ $R'(2) = \frac{-2800\,.\,2^2 + 6300}{(4\,.\,2^2 + 9)^2} = \frac{-11200 + 6300}{25^2} = \frac{-4900}{625} < 0$

Luego:



Es decir, R(t) es creciente en el intervalo (0 , 1´5) y decreciente en (1´5 , 6). En t = 1´5 R(t) tiene un máximo relativo, además como R(t) a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente es el máximo absoluto de R(t).

Para t = 1´5 $\rightarrow$ $R(1'5) = \frac{700\,.\,1'5}{4\,.\,1'5^2 + 9} = \frac{1050}{18} = 58'3333$

Para finalizar falta por calcular R(t) en los extremos del dominio,

$$Para\ \ t=0 \ \ \rightarrow \ \ R(0)=\frac{700\,.\,0}{4\,.\,0^2+9}=\frac{0}{9}=0$$

$$Para\ \ t=6 \ \ \rightarrow \ \ R(6)=\frac{700\,.\,6}{4\,.\,6^2+9}=\frac{4200}{153}=27'4501$$

Solución: durante las seis primeras horas de estudio el rendimiento aumenta desde el principio (R = 0) hasta hora y media después (R = 58´3333) y a partir de este momento disminuye (al final R = 27´4501).

El rendimiento máximo es de 58´3333 que se alcanza a la hora y media de empezar a estudiar.

c) Una vez alcanzado el rendimiento máximo, ¿en qué momento el rendimiento es igual a 35?

Debemos resolver la siguiente ecuación: $\frac{700\,t}{4t^2+9}=35$ *(y la solución que buscamos debe ser t > 1´5)*

Resolviendo,

$$700\,t=35\left(4t^2+9\right)$$

$$700\,t=140t^2+315$$

$$140t^2-700\,t+315=0$$

$$t=\frac{-(-700)\pm\sqrt{(-700)^2-4\,.\,140\,.\,315}}{2\,.\,140}=\frac{700\pm\sqrt{490000-176400}}{280}=\frac{700\pm\sqrt{313600}}{280}=\frac{700\pm 560}{280}=$$

$$=\left\langle \begin{array}{l} t_1=\frac{700+560}{280}=\frac{1260}{280}=4'5 \\ t_2=\frac{700-560}{280}=\frac{140}{280}=0'5 \quad \times \end{array}\right.$$

Es decir, una vez alcanzado el rendimiento máximo, el rendimiento es igual a 35 a las cuatro horas y media de empezar a estudiar.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas. *(3 puntos)*

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este? *(2+1 puntos)*

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta? *(2+1 puntos)*

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta. *(1 punto)*

Solución:

$f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t \quad 0 \le t \le 6$

a) La empresa tiene beneficios cuando $f(t) > 0$ *y pérdidas cuando* $f(t) < 0$.

$f(t) > 0$

$$t^3 - 8t^2 + 15t > 0$$

$$t^3 - 8t^2 + 15t = 0 \quad \to \quad t\left(t^2 - 8t + 15\right) = 0 \left\langle \begin{array}{l} t = 0 \\ t^2 - 8t + 15 = 0 \end{array} \right.$$

$$t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} t_1 = \dfrac{8+2}{2} = 5 \\ t_2 = \dfrac{8-2}{2} = 3 \end{array} \right.$$

Hay que estudiar el signo de $f(t)$ *en los intervalos:* 0 3 5

Como $f(t)$ *es un polinomio de tercer grado con tres raíces los signos van alternando.*

$f(-1) = (-1)^3 - 8(-1)^2 + 15(-1) = -1 - 8 - 15 = -24 < 0$

Por tanto el signo de $f(t)$ *es:*

$-$	0	$+$	3	$-$	5	$+$

Considerando que la función $f(t)$ *está definida en* $[0, 6]$, ***la empresa tuvo beneficios en los periodos*** $(0, 3) \cup (5, 6)$ ***y tuvo perdidas en*** $(3, 5)$.

Para resolver los apartados b) y c) debemos estudiar el signo de $f'(t)$.

$f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t \quad 0 \le t \le 6$

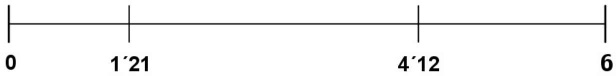
$f'(t) = 3t^2 - 16t + 15$

Signo de $f'(t)$,

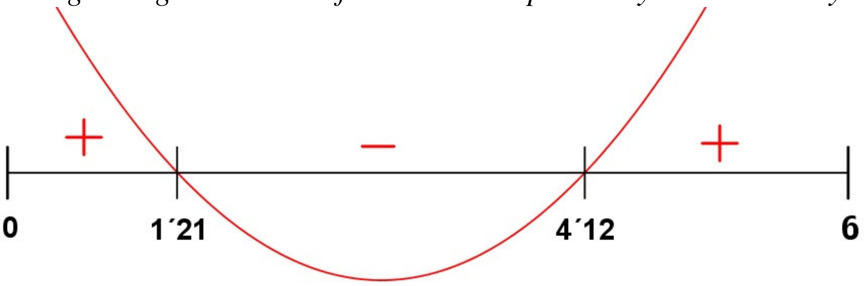
$$3t^2 - 16t + 15 = 0$$

$$t = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3} = \left\langle \begin{array}{l} t_1 = \dfrac{8+\sqrt{19}}{3} \cong 4'1196 \\ t_2 = \dfrac{8-\sqrt{19}}{3} \cong 1'2137 \end{array} \right.$$

Estudiemos el signo de $f'(t)$ en los intervalos:



$f'(t)$ es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces 1´21 y 4´12, por tanto



Entonces $f(t)$ tiene un máximo local en $t = 1´21$ (aprox.), pero como $f(t)$ es creciente de 4´12 a 6, el máximo de $f(t)$ podría alcanzarse para $t = 6$. Calculemos $f(t)$ para estos dos valores,

t	$f(t)$
$\frac{8-\sqrt{19}}{3} (\cong 1´21)$	$\left(\frac{8-\sqrt{19}}{3}\right)^3 - 8\cdot\left(\frac{8-\sqrt{19}}{3}\right)^2 + 15\cdot\left(\frac{8-\sqrt{19}}{3}\right) = 8´2088$
6	$6^3 - 8\cdot 6^2 + 15\cdot 6 = 18$

El máximo valor de $f(t)$ se alcanza en $t = 6$ años y $f(6) = 18$ decenas de miles de euros

El mínimo local está en $t = 4´12$ (aprox.), pero como $f(t)$ es creciente de 0 a 1´21, el mínimo de $f(t)$ podría alcanzarse en $t = 0$. Calculemos $f(t)$ para estos dos valores,

t	$f(t)$
0	$0^3 - 8\cdot 0^2 + 15\cdot 0 = 0$
$\frac{8+\sqrt{19}}{3} (\cong 4´12)$	$\left(\frac{8+\sqrt{19}}{3}\right)^3 - 8\cdot\left(\frac{8+\sqrt{19}}{3}\right)^2 + 15\cdot\left(\frac{8+\sqrt{19}}{3}\right) = -4´0607$

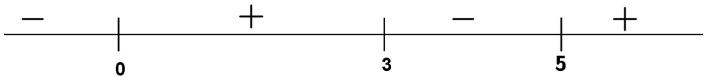
El mínimo valor de $f(t)$ se alcanza en $t = 4´1196$ años y $f(4´1196) = -4´0607$ decenas de miles de euros

Respondamos a los apartados b) y c).

b) ***El máximo beneficio se alcanza a los seis años y es de 180000 euros.***

c) ***La máxima pérdida se produjo al cabo de 4´1196 años y esta pérdida fue de 40607 euros.***

d) Según obtuvimos en el apartado a), el signo de $f(t)$ es:



Es decir, que a partir de 5 años la función $f(t)$ es positiva. Por tanto, ***a partir de los 6 años la empresa no volverá a tener periodos alternos de beneficios y pérdidas*** *sino que, a partir de ese momento, la empresa siempre tiene beneficios.*

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función

$$f(x) = 36600 + 1500\,x - 15\,x^2$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980. *(2 puntos)*

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos). *(4 puntos)*

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100},$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento. (4 *puntos)*

Solución:

$f(x) = 36600 + 1500\,x - 15\,x^2$;

x años transcurridos desde 1980 {luego $x \geq 0$}, f(x) gas extraído en miles de m^3.

a) ¿f(x) al inicio de 1980?

Al inicio de 1980, $x = 0 \rightarrow f(0) = 36600 + 1500 \cdot 0 - 15 \cdot 0^2 = 36600$

Al inicio de 1980, la capacidad de explotación era de 36600 miles de m^3 o 36600000 m^3.

b) ¿x? / f(x) sea máximo. Sabemos que Dom f(x) = [0 , +∞).

Estudiemos el signo de f´(x):

$f'(x) = 1500 - 30\,x$

$1500 - 30\,x = 0; \quad 1500 = 30\,x; \quad x = \frac{1500}{30} = 50$

Estudiemos el signo de f´(x) a ambos lados de x = 50,

x	$f'(x) = 1500 - 30x$	
20	$1500 - 30 \cdot 20 = 900$	+
60	$1500 - 30 \cdot 60 = -300$	−

A la izquierda positivo y a la derecha negativo, en x = 50 hay un máximo relativo que es el absoluto por ser la función f(x) a la izquierda creciente y a la derecha decreciente.

$x = 50 \rightarrow f(50) = 36000 + 1500 \cdot 50 - 15 \cdot 50^2 = 74100$

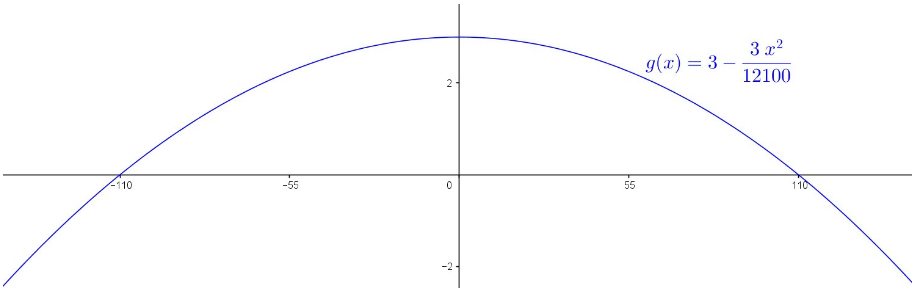
Por tanto, ***desde el inicio de 19080 han de pasar 50 años para que la capacidad alcance su valor máximo. Y este valor máximo será de 74100 miles de m^3.***

c) Beneficio por m^3 es $g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$,

¿x? / g(x) = 0

$$3 - \frac{3x^2}{12100} = 0; \quad 36300 - 3x^2 = 0; \quad 3x^2 = 36300; \quad x^2 = \frac{36300}{3} = 12100; \quad x = \pm\sqrt{12100} = \pm 110$$

Como g(x) es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces las anteriores, gráficamente g(x) será:



Luego para $x \geq 110$ $g(x) \leq 0$

Por tanto, ***la explotación deja de ser rentable al cabo de 110 años.***

$f(110) = 36000 + 1500 \cdot 110 - 15 \cdot 110^2 = 20100$

La capacidad de la explotación, al cabo de 110 años, será de 20100 miles de m³.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función

$$B(x)=50000+40x-\left(\frac{x}{10}\right)^2,$$

donde x es la inversión en publicidad ($x \geq 0$) y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo? *(4 puntos)*
b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad. *(3 puntos)*
c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo. (*3 puntos)*

Solución:

$$B(x)=50000+40x-\left(\frac{x}{10}\right)^2=50000+40x-\frac{x^2}{100} \qquad x \geq 0$$

a) Máximo

$$B'(x)=40-\frac{2x}{100}=40-\frac{x}{50}$$

$$B'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 40-\frac{x}{50}=0; \quad 40=\frac{x}{50}; \quad x=2000$$

Estudiemos el signo de B´(x) a ambos lados de x = 2000

x	$B'(x)=40-\frac{x}{50}$	
1000	$40-\frac{1000}{50}=20$	$+$
3000	$40-\frac{3000}{50}=-20$	$-$

A la izquierda positivo y a la derecha negativo, en x = 2000 hay un máximo relativo que es el absoluto por ser la función B(x) a la izquierda creciente y a la derecha decreciente.

Para x = 2000, $B(2000)=50000+40\cdot 2000-\frac{2000^2}{100}=90000$

Para obtener un beneficio máximo hay que invertir 2000€ en publicidad. En este caso el beneficio será de 90000€.

b) De lo calculado en el apartado anterior obtenemos que B(x) es creciente en el intervalo (0 , 2000) y decreciente en (2000 , +∞).
Por tanto, ***los beneficios crecen para una inversión entre 0 y 2000 € y decrecen para una inversión de más de 2000 €.***

c) ¿x? / B(x) < B(0)

$$B(x) = 50000 + 40x - \frac{x^2}{100}$$

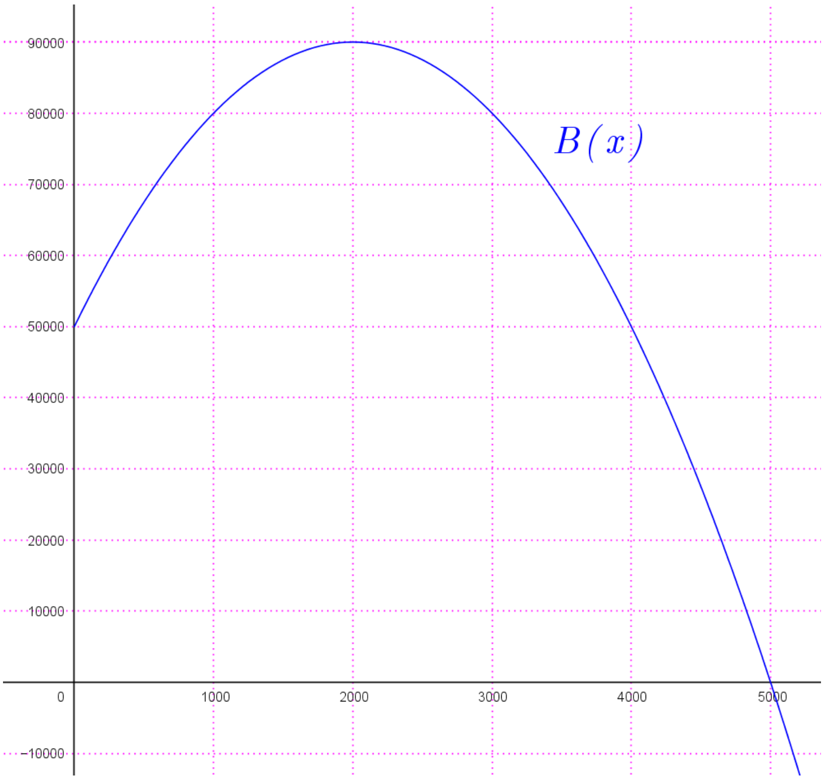
$$B(0) = 50000 + 40 \cdot 0 - \frac{0^2}{100} = 50000$$

Resolvamos la inecuación B(x) < B(0)

$$50000 + 40x - \frac{x^2}{100} < 50000; \quad 40x - \frac{x^2}{100} < 0; \quad 4000x - x^2 < 0$$

$$4000x - x^2 = 0; \quad x\,(4000 - x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ 4000 - x = 0; \quad x = 4000 \end{array} \right.$$

Representemos la función B(x).
Lo calculado antes nos dice que B(x) pasa por los puntos (0 , 50000) y (4000 , 50000).
En el apartado a) hemos obtenido que su máximo es (2000 , 90000)



Luego para x > 4000 B(x) < 50000

Por tanto, ***con una inversión en publicidad superior a 4000€ los beneficios obtenidos son menores que si no se invirtiera nada.***

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? *(2 puntos)*

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica. *(5 puntos)*

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. (3 *puntos)*

Solución:

a) Consumo de 400 kWh. 400 = 250 + 150

Por tanto el pago por este consumo será: P(400) = 1200 + 250 . 5 + 150 . 3 =2900

El recibo del mes en que la empresa consume 400 kWh asciende a 2900€.

b) Consumo de x kWh. El consumo de kWh es siempre mayor o igual a 0.

Si $0 \le x \le 250 \rightarrow P(x) = 1200 + 5x$

Si $250 < x \le 900 \rightarrow P(x) = 1200 + 250 \cdot 5 + (x - 250) \cdot 3 = 1200 + 1250 + 3x - 750 = 1700 + 3x$

Si $x > 900 \rightarrow P(x) = 1200 + 250 \cdot 5 + (900 - 250) \cdot 3 + (x - 900) \cdot 2 =$

$= 1200 + 1250 + 650 \cdot 3 + 2x - 1800 = 2600 + 2x$

La función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh es:

$$P(x) = \begin{cases} 1200 + 5x & 0 \le x \le 250 \\ 1700 + 3x & 250 < x \le 900 \\ 2600 + 2x & x > 900 \end{cases}$$

Veamos si es continua, los problemas de continuidad están en los cambio de definición.

$$\lim_{x \to 250} P(x) = \left\{ \begin{matrix} \lim_{x \to 250^-} (1200 + 5x) = 1200 + 5 \cdot 250 = 2450 \\ \lim_{x \to 250^+} (1700 + 3x) = 1700 + 3 \cdot 250 = 2450 \end{matrix} \right\} = 2450$$

$$\lim_{x \to 900} P(x) = \left\{ \begin{matrix} \lim_{x \to 900^-} (1700 + 3x) = 1700 + 3 \cdot 900 = 4400 \\ \lim_{x \to 900^+} (2600 + 2x) = 2600 + 2 \cdot 900 = 4400 \end{matrix} \right\} = 4400$$

Por tanto, la función es continua.

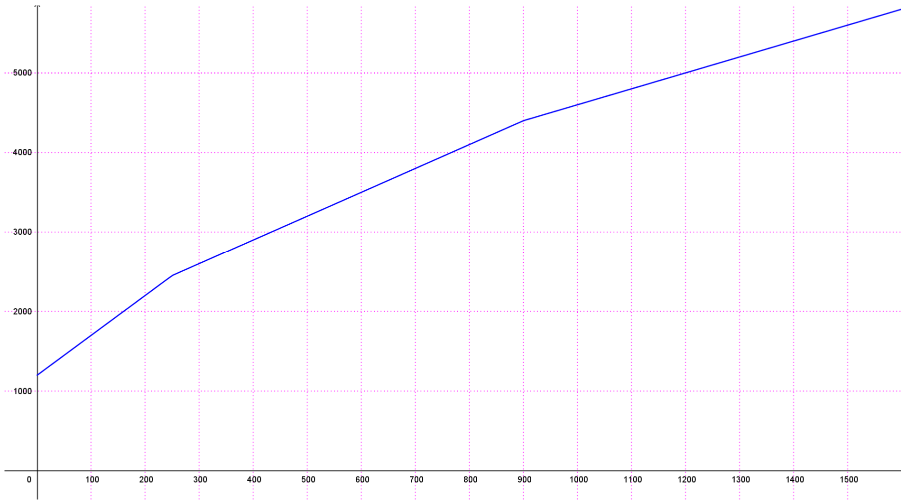
Representación gráfica de P(x). Las tres ramas de la función son polinomios de 1er grado que gráficamente son líneas rectas.

$x = 0 \rightarrow P(0) = 1200 + 5 \cdot 0 = 1200$

$x = 250 \rightarrow P(250) = 1200 + 5 \cdot 250 = 2450$

$x = 900 \rightarrow P(900) = 1700 + 3 \cdot 900 = 4400$

$x = 1000 \rightarrow P(1000) = 2600 + 2 \cdot 1000 = 4600$



c)

El recibo de la otra empresa es: $P_2(x) = 1200 + 3x$

¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan?

Debemos comparar $P(x)$ *y* $P_2(x)$.

Si $0 \leq x \leq 250 \;\rightarrow\; 1200 + 5x = 1200 + 3x; \;\; 5x - 3x = 1200 - 1200; \;\; 2x = 0;$ $\boldsymbol{x = 0}$.

$P(0) = 1200 + 5 \,.\, 0 = 1200$

Si $250 < x \leq 900 \;\rightarrow\; 1700 + 3x = 1200 + 3x; \;\; 1700 - 1200 = 3x - 3x; \;\; 500 = 0$ ***Sin solución***

Si $x > 900 \;\rightarrow\; 2600 + 2x = 1200 + 3x; \;\; 2600 - 1200 = 3x - 2x; \;\; 1400 = x \;\; (1400 > 900)$ $\boldsymbol{x = 1400}$

$P(1400) = 2600 + 2 \,.\, 1400 = 5400$

Puede ocurrir con dos consumos:

un consumo de 0 kWh y ambas pagan 1200€ o

un consumo de 1400 kWh y ambas pagan 5400€.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Una tienda de alquiler de bicicletas dispone mensualmente de 350 bicicletas. Haciendo un estudio entre los ingresos y los costes de explotación se ha determinado que los beneficios mensuales, en euros, se ajustan a la función

$$f(x) = 350\,x - x^2 - 15000,$$

siendo x el número de bicicletas alquiladas en un mes.

a) Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo *(3 puntos)*
b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? *(2 puntos)*
c) Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios. *(2´5 puntos)*
d) ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior? *(2´5 puntos)*

Solución:

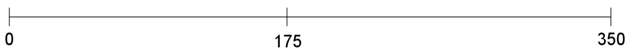
Como la tienda dispone de 350 bicicletas mensualmente, $Dom\, f(x) = \{0, 1, 2, \ldots, 350\}$

a) *¿x? / beneficio sea máximo.*
$f(x) = -x^2 + 350\,x - 15000$

Como $f(x)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo, si el vértice de la parábola está en el dominio de la función, esté será el máximo. Vértice* $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-350}{2(-1)} = 175$.

Obtendremos el mismo resultado estudiando el signo de $f´(x)$:
$f´(x) = -2\,x + 350$
$-2\,x + 350 = 0; \quad 350 = 2\,x; \quad x = \dfrac{350}{2} = 175$

Estudiemos el signo de $f´(x)$ *en los intervalos:*



x	$f'(x) = -2x + 350$
1	$-2\cdot 1 + 350 = \quad +$
180	$-2\cdot 180 + 350 = \quad -$

A la izquierda positivo y a la derecha negativo, en x = 175 hay un máximo relativo que es el absoluto por ser la función f(x) a la izquierda creciente y a la derecha decreciente.

Por tanto, ***para obtener un beneficio máximo hay que alquilar 175 bicicletas cada mes.***

b) $x = 175, \quad f(175) = -175^2 + 350 \cdot 175 - 15000 = 15625$

El beneficio máximo es de 15625€.

c) *¿A partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios?*

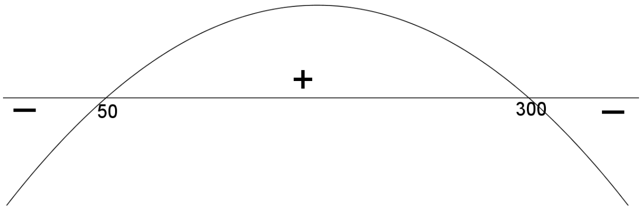
Debemos resolver ¿x? / f(x) > 0

$$-x^2+350x-15000>0$$

$$-x^2+350x-15000=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-350\pm\sqrt{350^2-4\cdot(-1)\cdot(-15000)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-350\pm 250}{-2}=$$

$$=\begin{cases} x_1=\dfrac{-350+250}{-2}=50 \\ x_2=\dfrac{-350-250}{-2}=300 \end{cases}$$

Como f(x) es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces 50 y 300, gráficamente f(x) es [Recordemos que Dom f(x) = {0, 1, 2, …, 350}]:



f(x) > 0 cuando $x \in (50, 300)$

*Luego, **el taller obtiene beneficios cuando alquila, mensualmente, más de 50 bicicletas (exactamente cuando alquila de 51 a 299).***

d) *¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior?*

De lo estudiado en el apartado anterior, si alquila más de 300 bicicletas tiene pérdidas.

*Por tanto, **si mensualmente alquila 301 o más bicicletas tendría pérdidas.***