OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x} & 2\le x<5 \\ x^2-3x-8 & 5\le x\le 7 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en el intervalo $[\,2\,,\,7\,]$.
b) Para $a = 15$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo $[\,2\,,\,7\,]$.
c) Calcula $\int_5^6 f(x)\,dx$.

Solución:
a) ¿a? / f(x) sea continua en [2 , 7]

Para $2\le x<5$, $f(x)=\dfrac{a}{x}$, *como* $x\neq 0$, *f(x) es continua.*
Para $5<x\le 7$, $f(x)=x^2-3x-8$, *como f(x) es un polinomio, f(x) es continua.*
Veamos la continuidad en $x = 5$,

1) $f(5)=5^2-3\,.\,5-8=25-15-8=2$, *luego* $\exists f(5)$

2) $\underset{x\to 5}{Lím}\, f(x)=\begin{cases} \underset{x\to 5^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 5^-}{Lím}\,\dfrac{a}{x}=\dfrac{a}{5} \\ \underset{x\to 5^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 5^-}{Lím}\left(x^2-3x-8\right)=5^2-3\,.\,5-8=2 \end{cases}$, *para que exista el límite deben coincidir*

los dos límites laterales, es decir, $\dfrac{a}{5}=2 \;\rightarrow\; a=10$.

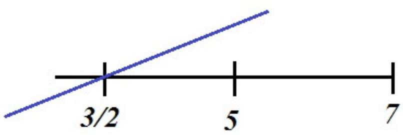
Por tanto, para $a = 10$ *se cumple:* $\underset{x\to 5}{Lím}\, f(x)=f(5)$, *luego f(x) es continua en* $x = 5$.

Solución: ***f(x) es continua en [2 , 7] para a = 10.***

b) a = 15, ¿monotonía de f(x) en [2 , 7]?.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{15}{x} & 2\le x<5 \\ x^2-3x-8 & 5\le x\le 7 \end{cases} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-15}{x^2} & 2<x<5 \\ 2x-3 & 5<x<7 \end{cases}$$

Para $2<x<5$, $f'(x)=\dfrac{-15}{x^2}$, *por tanto,* $f'(x)<0 \;\rightarrow\;$ *f(x) es decreciente.*
Para $5<x<7$, $f'(x)=2x-3$,
$2x-3=0$, $2x=3$, $x=3/2$
Estudiemos el signo de $2x-3$ *en* $[\,5\,,\,7\,]$: $2x-3$ *es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y raíz 3/2, gráficamente:*



Por tanto, entre 5 y 7 $2x-3$ *es positivo; luego* $f'(x)$ *es positiva.*

Para $5<x<7$, *f(x) es crciente.*

Solución: ***f(x) es decreciente en (2 , 5) y creciente en (5 , 7).***

c) ¿ $\int_5^6 f(x)\,dx$?

Entre 5 y 6, f(x) = $x^2 - 3x - 8$, por tanto

$$\int_5^6 f(x)\ dx = \int_5^6 \left(x^2 - 3x - 8\right)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 8x\right]_5^6 == \left(\frac{6^3}{3} - 3\frac{6^2}{2} - 8\,.\,6\right) - \left(\frac{5^3}{3} - 3\frac{5^2}{2} - 8\,.\,5\right) =$$

$$= (72 - 54 - 48) - \left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2} - 40\right) = -30 - \left(\frac{250-225}{6} - 40\right) - 30 - \frac{25}{6} + 40 = 10 - \frac{25}{6} = \frac{60-25}{6} = \frac{35}{6} \approx 5'8333$$

Solución: $\int_5^6 f(x)\,dx = \frac{35}{6}$

Problema 2. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x-20 & x\le 3 \\ \dfrac{2}{a-x} & x>3 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en $x = 3$.
b) Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
c) Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

Solución:

a) ¿a? / f(x) sea continua en x = 3.

Condiciones de continuidad

1) $f(3) = 3^3 - 3\,.\,3 - 20 = 27 - 9 - 20 = -2$, *existe f(3)*

2) $$\underset{x\to 3}{Lím}\, f(x)=\begin{cases} \underset{x\to 3^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 3^-}{Lím}\left(x^3-3x-20\right)=3^3-3\,.\,3-20=-2 \\ \underset{x\to 3^+}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 3^+}{Lím}\left(\dfrac{2}{a-x}\right)=\dfrac{2}{a-3} \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales deben coincidir, $-2=\dfrac{2}{a-3}$,

$$-2(a-3)=2 \;\rightarrow\; a-3=\frac{2}{-2} \;\rightarrow\; a-3=-1 \;\rightarrow\; a=-1+3 \;\rightarrow\; a=2$$

Luego, ***para que f(x) sea continua en x = 3 debe ser a = 2.***

b) Para a = 0, ¿monotonía?.

Para $a=0$, $$f(x)=\begin{cases} x^3-3x-20, & x\le 3 \\ \dfrac{2}{-x}=\dfrac{-2}{x}, & x>3 \end{cases}$$

Por ser función definida a trozos estudiemos la monotonía en cada trozo.

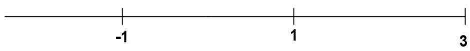
Para $x < 3$

$f(x) = x^3 - 3x - 20$, *estudiemos el signo de* $f´(x)$

$f´(x) = 3x^2 - 3$

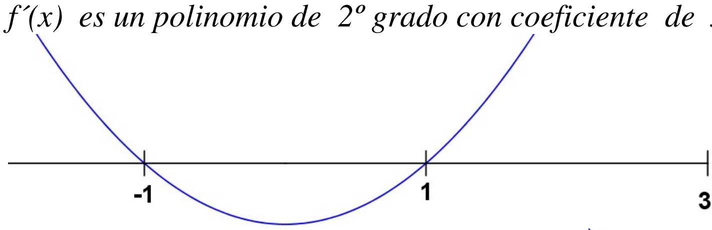
$$3x^2-3=0 \;\rightarrow\; 3x^2=3 \;\rightarrow\; x^2=\frac{3}{3} \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Hay que estudiar el signo de $f´(x)$ *en los siguientes intervalos:*

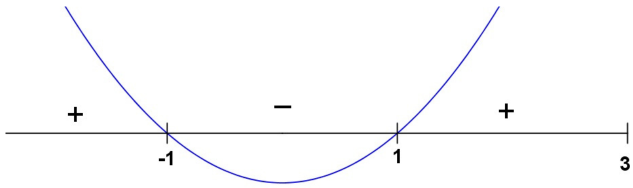


y´ es una línea recta de pendiente negativa y que pasa por $x = 4´5$:

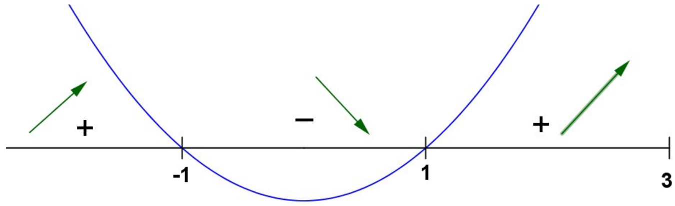
$f´(x)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *positivo y raíces* -1 *y* 1*, por tanto:*



En cada intervalo el signo de $f´(x)$ *es:*



Y el crecimiento y decrecimiento será



Para $x > 3$

$$f(x) = \frac{-2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - (-2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$, *es una fracción, numerador positivo y como el denominador está elevado al cuadrado (es positivo). Por tanto el signo de* $f'(x)$ *es positivo.*

Para $x > 3$, *la función es creciente.*

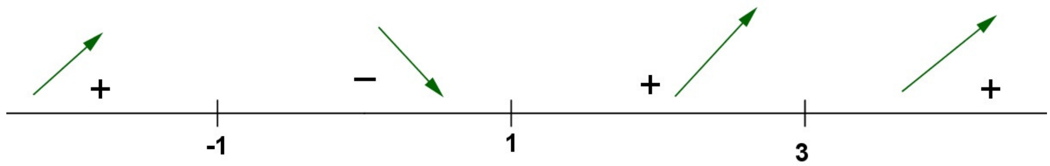
Veamos si existe $f'(3)$

$$f'(3) = \begin{cases} f'(3^-) = 3 \cdot 3^2 - 3 = 24 \\ f'(3^+) = \dfrac{2}{3^2} = \dfrac{2}{9} \end{cases} \qquad 24 \neq \frac{2}{9} \quad \rightarrow \quad No\ existe \quad f'(3)$$

Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $\boldsymbol{(-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)}$ ***y decreciente en*** $\boldsymbol{(-1, 1)}$.

c) Para $a = 0$, *¿extremos?*

De lo estudiado en el apartado anterior:



Por tanto $f(x)$ *tiene un máximo local en* $x = -1$ *y un mínimo local en* $x = 1$.

$x = -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 20 = -1 + 3 - 20 = -18$

$x = 1 \rightarrow f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 20 = 1 - 3 - 20 = -22$

Finalmente, f(x) tiene un máximo local en $\boldsymbol{(-1, -18)}$ ***y un mínimo local en*** $\boldsymbol{(1, -22)}$.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{a\,x^2}{x^2+1} & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio. *(2 puntos)*
b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. *(3 puntos)*
c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

d) Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$. *(3 puntos)*

Solución:
En la definición de la función f(x) hay dos ramas,
para $x\le 1$ $f(x) = x^2 - 3x + 3$ y esta función se puede calcular para cualquier valor de x.
para $x>1$ $f(x)=\dfrac{a\,x^2}{x^2+1}$, como $x^2+1>0$ (para cualquier valor de x) el cociente se puede calcular.
Por tanto Dom f(x) = $\Re$

a) ¿Valor de a para que f(x) sea continua en su dominio?
Para $x\le 1$ f(x) es un polinomio luego es continua.
Para $x>1$ f(x) es un cociente con el denominador distinto de cero luego es continua.
El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en x = 1.
Continuidad en x = 1,
a) $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$

b) $$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-3x+3\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a\,x^2}{x^2+1}=\dfrac{a\cdot 1^2}{1^2+1}=\dfrac{a}{2} \end{cases}$$ *Para que exista el límite* $1=\dfrac{a}{2} \rightarrow a=2$

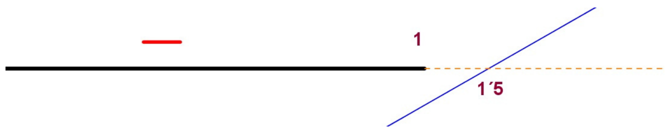
c) Para a = 2 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Solución: para que f(x) sea continua en su dominio debe ser a = 2.

b) Para a = 2 ¿monotonía de f(x)?
Como f(x) tiene dos ramas estudiamos la monotonía en cada una de ellas.
Primera rama, $y = x^2 - 3x + 3$, $x\le 1$
$y' = 2x - 3$, estudiemos el signo de y'.

$2x-3=0 \rightarrow 2x=3 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}=1'5$

$y' = 2x - 3$ es una recta de pendiente positiva que pasa por x = 1´5, luego



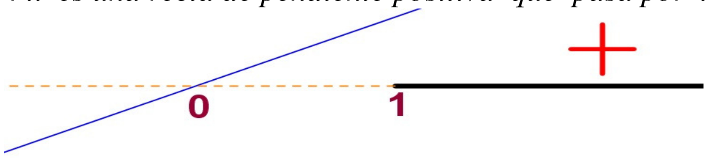
Segunda rama, $y = \dfrac{2\,x^2}{x^2+1}$, $\quad x > 1$

$$y' = \frac{4x\left(x^2+1\right) - 2\,x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x^3 + 4x - 4\,x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado, es positivo; el signo de y' *depende del numerador.*

$4\,x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$4\,x$ *es una recta de pendiente positiva que pasa por* $x = 0$*, luego*



Por tanto, ***f(x) es decreciente en*** $(-\infty, 1)$ ***y es creciente en*** $(1, +\infty)$.

c) Para $a = 2$*, asíntotas horizontales o verticales.*

La rama polinómica de f(x) no aporta asíntotas. Las posibles asíntotas estarán en la rama para $x > 1$*.*

Calculémoslas,

Asíntota vertical,

$\dfrac{2\,x^2}{x^2+1}$, *como* $x^2 + 1 > 0$*, el denominador no se anula, por lo que no hay asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (2) = 2, \quad \text{entonces } y = 2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Por tanto, ***f(x) no tiene asíntota vertical y su asíntota horizontal es y = 2.***

d) $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

En el intervalo $[-2, 1]$, $f(x) = x^2 - 3\,x + 3$*. Entonces,*

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} \left(x^2 - 3x + 3\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\,\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot\frac{1^2}{2} + 3\cdot 1\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 3\,\frac{(-2)^2}{2} + 3\cdot(-2)\right) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 - \left(\frac{-8}{3} - 6 - 6\right) = \frac{33}{2} = 16'5$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 16'5$.

Problema 4. El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+14 & si\ x\in [0,6] \\ -x^2+24x-82 & si\ x\in]6,18] \\ -x+34 & si\ x\in]18,24] \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,24]. *(3 puntos)*
b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? *(4 puntos)*
c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. (3 *puntos)*

Solución:
a) Continuidad de esta función en el intervalo [0,24].
Como cada una de las definiciones de f(x) es un polinomio de 1er o 2º grado, son continuas en sus correspondientes intervalos. Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.
Continuidad en x = 6,
a) $f(6) = 2 . 6 + 14 = 26$
b) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(2x+4)=26 \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+}(-x^2+24x-82)=-6^2+24\cdot 6-82=26 \end{array}\right\}=26$
c) $f(6) = 26 = \lim\limits_{x\to 6} f(x)$
Por tanto f(x) es continua en x = 6.

Continuidad en x = 18,
d) $f(18) = -18^2 + 24 . 18 - 82 = 26$
e) $\lim\limits_{x\to 18} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 18^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 18^-}(-x^2+24x-82)=26 \\ \lim\limits_{x\to 18^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 18^+}(-x+34)=-18+34=16 \end{array}\right\}\neq \ \to$ *no existe* $\lim\limits_{x\to 18} f(x)$
Por tanto f(x) no es continua en x =18

Solución: f(x) es continua en [0 , 24] ~{18}.

b) ¿A qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo?
Representemos gráficamente la función (algunos cálculos están realizados en el apartado a))

x	$2x+14$
0	14
6	26

x	$-x^2+24x-82$
6	26
18	26

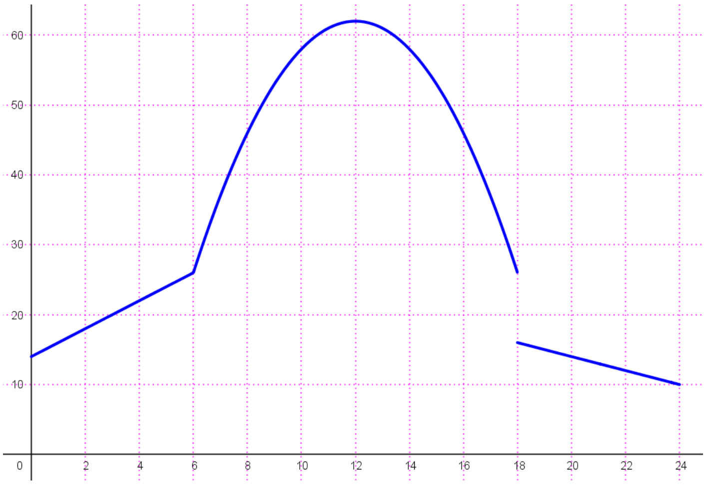
x	$-x+34$
18	16
24	10

Para completar la representación de la parábola necesitamos algún punto más. Como el polinomio de 2º grado tiene coeficiente de x^2 *negativo, la parábola tiene la forma* $\bigcap$, *obtengamos el máximo.*

$g(x)=-x^2+24x-82$

$g'(x)=-2x+24;\quad -2x+24=0;\quad -2x=-24;\quad x=\frac{-24}{-2}=12\in(6,18)$

$g(12)=-12^2+24\cdot 12-82=62 \qquad \to \qquad$ *máximo de la parábola* $(12,62)$



Solución: el consumo máximo se alcanza a las 12h y es de 62 Mwh y el consumo mínimo se alcanza a las 24h y es de 10 Mwh.

c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Entre las 8 y las diez de la mañana la definición de f(x) es $-x^2 + 24x - 82$.

El consumo que se realiza entre esas horas lo obtendremos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_8^{10}\left(-x^2+24x-82\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+24\frac{x^2}{2}-82x\right]_8^{10}=\left[-\frac{x^3}{3}+12x^2-82x\right]_8^{10}=$$

$$=\left(-\frac{10^3}{3}+12\cdot 10^2-82\cdot 10\right)-\left(-\frac{8^3}{3}+12\cdot 8^2-82\cdot 8\right)=\frac{140}{3}-\left(-\frac{176}{3}\right)=\frac{316}{3}\cong 105'3333$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es de $\frac{316}{3}$ ***Mwh.***

EJERCICIO B

PROBLEMA 3.

a) Estudia la continuidad en el intervalo [-3,3] de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+10 & -3\le x<-2 \\ x^2 & -2\le x<1 \\ \dfrac{x+3}{2} & 1\le x\le 3 \end{cases}$$

b) Halla la integral entre 2 y 3 de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$.

Solución:

a)

En el intervalo [– 3 , 3] f(x) está definida mediante tres trozos, estudiemos la continuidad de cada trozo y en los puntos de cambio de definición.

En el intervalo (– 3 , – 2) f(x) está definida como 3 x + 10, un polinomio, luego es continua.

En el intervalo (– 2 ,1) f(x) está definida como x^2, un polinomio, luego es continua.

En el intervalo (1 ,3) f(x) está definida como (x + 3)/2 , un polinomio, luego es continua.

Veamos la continuidad de f(x) en los puntos de cambio de definición.

Para x = – 2	*$f(-2) = (-2)^2 = 4$* $\displaystyle \underset{x\to -2}{Lím}\, f(x)=\left\{\begin{array}{l} \underset{x\to -2^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to -2^-}{Lím}\,(3x+10)=3(-2)+10=4 \\ \underset{x\to -2^+}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to -2^+}{Lím}\, x^2=(-2)^2=4 \end{array}\right\}=4$ $f(-2)=\underset{x\to -2}{Lím}\, f(x)$ *Luego f(x) es continua en x = – 2*
Para x = 1	$f(1)=\dfrac{1+3}{2}=2$ $\displaystyle \underset{x\to 1}{Lím}\, f(x)=\left\{\begin{array}{l} \underset{x\to 1^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 1^-}{Lím}\, x^2=1^2=1 \\ \underset{x\to 1^+}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 1^+}{Lím}\,\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2 \end{array}\right\}1\neq 2 \quad No\ \ existe\ \ \underset{x\to 1}{Lím}\, f(x)$ *Luego f(x) no es continua en x = 1.* *En x = 1 f(x) presenta una discontinuidad de salto finito ya que existen los límites laterales pero son distintos.*

En conclusión f(x) es continua en (– 3 , 3) ~ { 1 } y en x = 1 tiene una discontinuidad de salto finito.

Como f(x) está definida en un intervalo cerrado, [– 3 , 3], en sentido estricto no podemos hablar de continuidad de f(x) en los extremos de este intervalo; en sentido no estricto podemos considerar que f(x) es continua en x = – 3 por ser continua a la derecha de este valor y que f(x) es continua en x = 3 por serlo a la izquierda de este valor. Con esta consideración de continuidad en los extremos del intervalo de definición de una función, podemos concluir que f(x) es continua en [– 3 , 3] ~ { 1 } y en x = 1 tiene una discontinuidad de salto finito.

b)

$$\int_2^3 \left(2x^3-3x+2\right)dx=\left[\frac{2x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3=\left(\frac{81}{2}-\frac{27}{2}+6\right)-\left(\frac{16}{2}-\frac{12}{2}+4\right)=$$

$$=\frac{54}{2}+6-(8-6+4)=27+6-6=27$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) Estudia la continuidad de la función y = f(x) en el intervalo [– 4 , 2], siendo

$$f(x)=\begin{cases} 2 & x \le -3 \\ x^2 & -3 < x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función y = f(x), las rectas x = – 3, x = 2 y el eje de abcisas.

Solución:

a) Continuidad en [– 4 , 2],

Para $-4 \le x < -3$, f(x) = 2, función constante, luego es continua.

Para $-3 < x < 1$, $f(x) = x^2$, función polinómica, luego continua.

Para $1 < x \le 2$, f(x) =1, función constante, luego es continua.

Debemos estudiar la continuidad en los cambios de definición.

Para x = – 3

a) f(– 3) = 2

$$b)\ \lim_{x\to -3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} 2 = 2 \\ \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} x^2 = (-3)^2 = 9 \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos no existe el $\lim_{x\to -3} f(x)$

Luego, f(x) es discontinua en x = – 3, por existir los dos límites laterales es una discontinuidad de salto finito.

Para x = 1

a) f(1) = 1

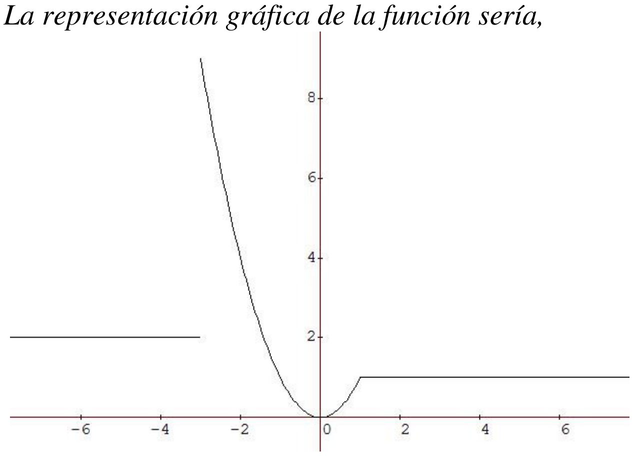
$$b)\ \lim_{x\to 1} f(x) = \left.\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \end{cases}\right\} = 1$$

$$c)\ f(1) = 1 = \lim_{x\to 1} f(x)$$

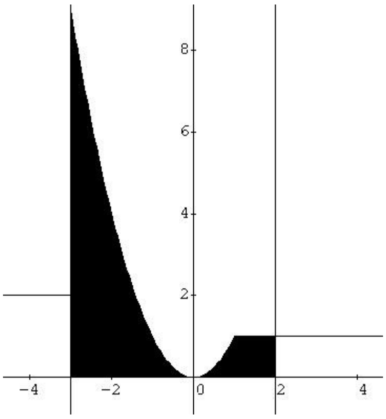
Luego, f(x) es continua en x =1.

En resumen, f(x) es continua en [– 4 , 2]~{ – 3} y en x = – 3 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) La representación gráfica de la función sería,



El área a calcular es,



$$A=\int_{-3}^{1}x^2\,dx+\int_{1}^{2}1\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1}+\left[x\right]_{1}^{2}=\frac{1}{3}-\frac{(-3)^3}{3}+2-1=\frac{1}{3}-\frac{-27}{3}+1=\frac{1}{3}+9+1=\frac{1}{3}+10=\frac{31}{3}\,u.\,a.$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3.

a) Calcula los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo [1 , 4]. Justifica que los puntos encontrados son máximos o mínimos absolutos.

b) Estudia la continuidad en el intervalo [0,4] de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & 0 \le x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

Solución:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

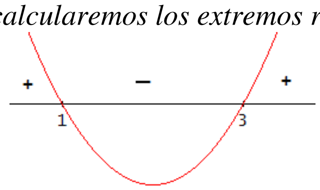
Calculemos, previamente, los extremos relativos de esta función polinómica.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Estudiando el signo de f´ calcularemos los extremos relativos de f. Lo haremos gráficamente

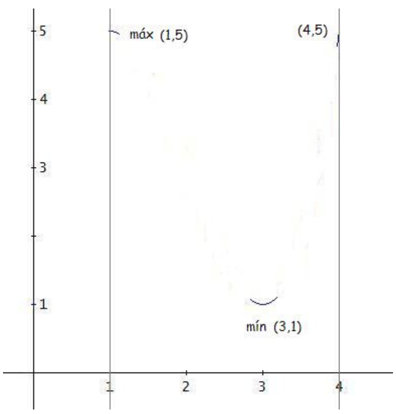


Por lo que f(x) tiene un máximo relativo en x = 1 y un mínimo relativo en x = 3.

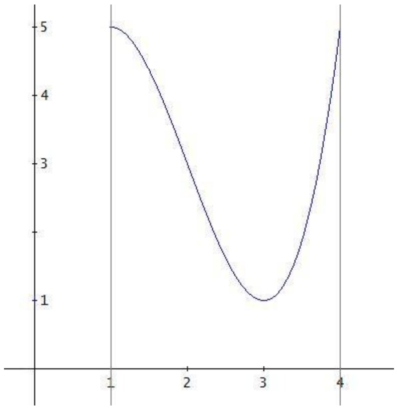
Para encontrar los máximos y mínimos absolutos de f(x) en [1 , 4] representaremos, de forma aproximada, f(x) en este intervalo.

x	$f(x)$
1	$1^3 - 6.1^2 + 9.1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5 \quad$ *máx. rel.*
3	$3^3 - 6.3^2 + 9.3 + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = 1 \quad$ *mín. rel.*
4	$4^3 - 6.4^2 + 9.4 + 1 = 64 - 96 + 36 + 1 = 5$

Representando los datos de que disponemos:



La función f(x) en [1,4] será:



Por lo tanto la función f(x) en el intervalo [1 , 4] tiene:

un mínimo absoluto en el punto (3 , 1) y

dos máximos absolutos en los puntos (1 , 5) y (4 , 5)

b) *La función de la que debemos estudiar su continuidad está definida "a trozos" por lo que estudiaremos su continuidad en cada trozo y en los puntos de cambio de definición.*

Para $0 \leq x < 1$, $f(x) = 2x + 3$, *es un polinomio luego es continua*

Para $1 < x \leq 4$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, *es un polinomio luego es continua*

Para $x = 1$, *en* $x = 1$ *hay un cambio de definición, procedemos como sigue,*

a) $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

b) $$\lim_{x \to 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x+3) = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) = 5 \end{array} \right\} = 5$$

c) *Función y límite coinciden*

En consecuencia f(x) es continua en x = 1.

Luego hemos obtenido que f(x) es continua en el intervalo [1 , 4]

BLOQUE B

PROBLEMA B1. Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -x & x<-1 \\ x-1 & -1\le x<4 \\ x^2-2x-6 & 4\le x<6 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función *f(x)* en el intervalo $]-2\,,6\,[$.
b) Calcula el área de la región del plano limitada por *y = f(x)* y por las rectas y = 0, x = 1 y x = 5.

Solución:

a) Continuidad de la función f(x) en el intervalo] – 2 , 6 [

Por ser f(x) una función definida a trozos estudiamos su continuidad en cada uno de los trozos y en los puntos de cambio de definición.

Para x Є] – 2 , – 1 [, f(x) = – x, una función polinómica de primer grado, luego es continua.
Para x Є] – 1 , 4 [, f(x) = x – 1, una función polinómica de primer grado, luego es continua.
Para x Є] 4 , 6 [, f(x) =x^2 *– 2 x – 6, una función polinómica de segundo grado, luego es continua.*

Veamos que pasa en x = – 1 y en x = 4.

x = – 1

f(– 1) = – 1 – 1 = – 2, existe f(– 1).

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-x)=-(-1)=1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)=-1-1=-2 \end{cases}$$

como los resultados de los límites laterales no son iguales, no existe el límite de la función en x = – 1
Por lo tanto f(x) no es continua en x = – 1
Como existen los dos límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

x = 4

f(4) = 4^2 *– 2 . 4 – 6 =16 – 8 – 6 = 2 , existe f(4).*

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(x-1)=4-1=3 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(x^2-2x-6)=4^2-2\,.\,4-6=16-8-6=2 \end{cases}$$

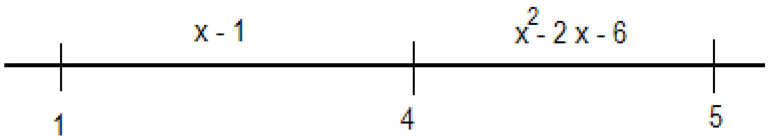
como los resultados de los límites laterales no son iguales, no existe el límite de la función en x = 4
Por lo tanto f(x) no es continua en x = 4
Como existen los dos límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

Luego f(x) es continua en] – 2 , 6 [~ { – 1 , 4 } y en x = – 1 y en x = 4 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Área de la región del plano limitada por y = f(x) y por las rectas y = 0, x = 1 y x = 5.

Para calcular el área pedida es conveniente representar la función f(x), aunque sólo para valores de x desde 1 hasta 5.

En el intervalo [1 , 5] la función f(x) está definida como se indica a continuación,



En el primer trozo f(x) está definida como x – 1, que gráficamente es una línea recta, la dibujamos a partir de una tabla de valores,

x	y
1	0
4	3

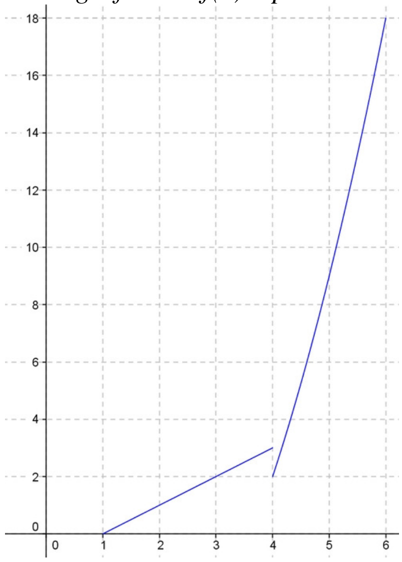
En el segundo trozo f(x) está definida como x^2 *– 2 x – 6, gráficamente es una parábola, usamos tabla de valores para conocer el principio y el final y el calculamos el vértice de la parábola para dibujarla correctamente,*

x	y
4	$4^2-2\,.\,4-6=2$
5	$5^2-2\,.\,5-6=9$

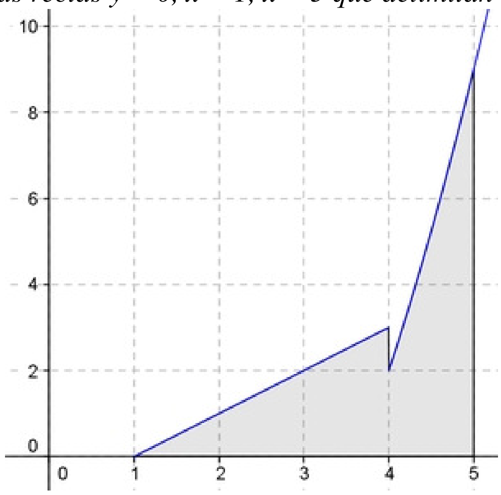
Vértice $(1,-7)$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2.1}=1$$
$$y=1^2-2\,.\,1-6=-7$$

La representación gráfica de f(x) a partir de x = 1 será,



Añadiendo las rectas y = 0, x = 1, x = 5 que delimitan la región obtenemos,



El área de la región indicada la obtendremos mediante el siguiente cálculo integral,

$$A=\int_1^4 (x-1)\,dx+\int_4^5 (x^2-2x-6)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4-\left[\frac{x^3}{3}-x^2-6x\right]_4^5=$$

$$=\left(\frac{4^2}{2}-4\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)+\left(\frac{5^3}{3}-5^2-6\,.\,5\right)-\left(\frac{4^3}{3}-4^2-6\,.\,4\right)=4+\frac{1}{2}+\frac{125}{3}-55-\frac{64}{3}+40=\frac{1}{2}+\frac{61}{3}-11=$$

$$=\frac{3+122-66}{6}=\frac{59}{6}\,u.a.$$

BLOQUE D

PROBLEMA D1. El rendimiento de cierto producto en función del tiempo de uso (medido en años) viene dado por la expresión:

$$f(x) = 8{,}5 + \frac{3x}{1+x^2}, \quad x \geq 0$$

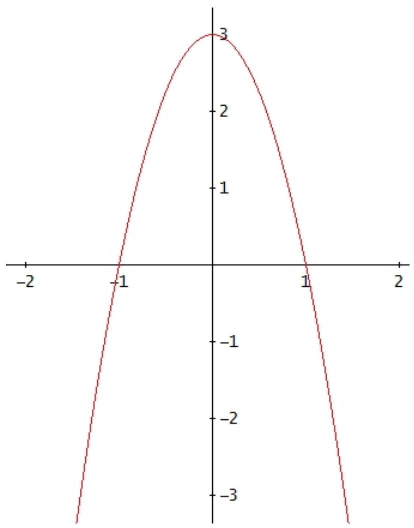
a) ¿Existen intervalos de tiempo en los que el rendimiento crece? ¿Y en los que decrece? ¿Cuáles son?
b) ¿En qué punto se alcanza el rendimiento máximo? ¿Cuánto vale éste?
c) Por mucho que pase el tiempo, ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al rendimiento que el producto tenía inicialmente? ¿Por qué?

Solución:
En la definición de la función hay un cociente cuyo denominador es $1 + x^2$, que siempre es distinto de cero. Por lo que el dominio de f(x), teniendo en cuenta su definición, será $[\ 0\ ,\ +\infty\ )$
a) Crecimiento, decrecimiento.
Estudiemos el signo de f´(x).

$$f'(x) = \frac{3(1+x^2) - 2x\,.\,3x}{(1+x^2)^2} = \frac{3+3x^2-6x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$$

Puesto que el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, el signo de f´(x) depende del numerador.
$3 - 3x^2 = 0;\quad 3 = 3x^2;\quad 1 = x^2;\quad x = \pm 1$
Considerando el dominio de definición de la función, debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:

Como hemos dicho anteriormente el signo de f´(x) depende del numerador que es un polinomio de 2º grado de raíces – 1 y 1. Por lo que podemos obtener el signo del numerador mediante la representación gráfica de la correspondiente parábola,



Luego el signo de f´(x) en los intervalos a estudiar es,

Por lo tanto, f(x) es creciente en el intervalo $(\ 0\ ,\ 1\ )$ y decreciente en $(\ 1\ ,\ +\infty\ )$.

b) Máximo.
Según lo estudiado anteriormente como f(x) es creciente en el intervalo (0,1) y decreciente en (1,+∞), alcanza su máximo para x = 1.

$$f(1) = 8{,}5 + \frac{3.1}{1+1^2} = 8{,}5 + \frac{3}{2} = 8{,}5 + 1{,}5 = 10$$

El valor máximo es 10.

c) Rendimiento.
Calculemos el rendimiento inicial, será para x = 0,

$$f(0) = 8{,}5 + \frac{3.0}{1+0^2} = 8{,}5 + \frac{0}{1} = 8{,}5 + 0 = 8{,}5$$

El rendimiento a largo plazo lo calculamos mediante el siguiente límite,

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(8{,}5+\frac{3x}{1+x^2}\right) = 8{,}5 + \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3x}{1+x^2} \overset{(a)}{=}$$

Calculemos ahora el límite pendiente,

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3x}{1+x^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3x}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

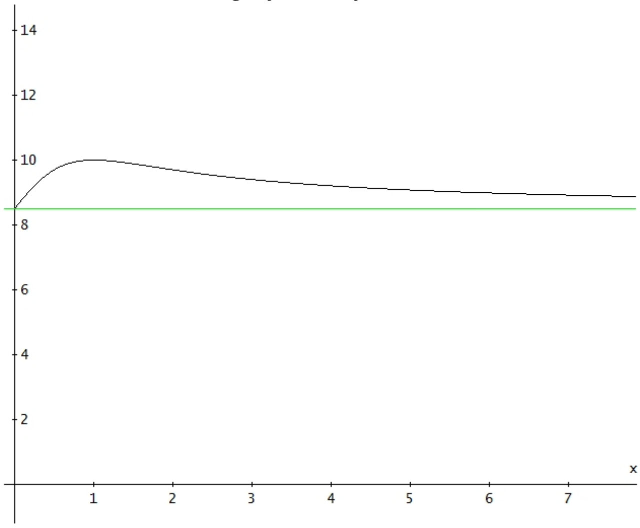
luego $\overset{(a)}{=} 8{,}5 + 0 = 8{,}5$

Respondamos a la pregunta del ejercicio,

para $x \geq 0$ $\quad \dfrac{3x}{1+x^2} \geq 0$ *, luego* $f(x) \geq 8{,}5$ *cuando* $x \geq 0$

por lo que por mucho que pase el tiempo el rendimiento del producto se mantiene por encima del rendimiento inicial y va acercándose a este valor inicial.

Esto lo podemos observar en la gráfica de f(x),



OPCIÓN B

PROBLEMA 2. La siguiente función representa la valoración de una empresa en millones de euros en función del tiempo, t, a lo largo de los últimos 13 años:

$$f(t)=\begin{cases}5-0{,}1\,t & 0\le t<5\\ 4{,}5+0{,}05\,(t-5) & 5\le t<10\\ 4{,}75+0{,}1\,(t-10)^2 & 10\le t\le 13\end{cases}$$

Estudia analíticamente en el intervalo [0, 13]:

a) Si la función f(t) es o no continua, indicando en caso negativo los puntos de discontinuidad.
b) Instante t en el que la valoración de la empresa es máxima y dicha valoración máxima.
c) Instante t en el que la valoración de la empresa es mínima y dicha valoración mínima.

Solución:
a) La función f(t) está definida mediante tres ramas que son funciones polinómicas y, por tanto, funciones continuas en sus correspondientes intervalos abiertos de definición.
Estudiemos la continuidad en los puntos de cambio de definición,
t=5
f(5) = 4´5 + 0´05 (5 – 5) = 4´5

$$\underset{t\to 5}{Lím}\, f(t)=\left.\begin{cases}\underset{t\to 5^-}{Lím}\, f(t)=\underset{t\to 5^-}{Lím}(5-0´1t)=5-0´1\,.\,5=4´5\\ \underset{t\to 5^+}{Lím}\, f(t)=\underset{t\to 5^+}{Lím}(\ 4´5+0´05(t-5)\ )=4´5+0´05(5-5)=4{,}5\end{cases}\right\}=4´5$$

Como los valores de la función y del límite coinciden, f(t) es continua en t = 5

t=10
f(10) = 4´75 + 0´1 (10 – 10)² = 4´75

$$\underset{t\to 10}{Lím}\, f(t)=\left.\begin{cases}\underset{t\to 10^-}{Lím}\, f(t)=\underset{t\to 10^-}{Lím}\left(\ 4´5+0´05(t-5)\ \right)=4´5+0´05(10-5)=4´75\\ \underset{t\to 10^+}{Lím}\, f(t)=\underset{t\to 10^+}{Lím}\left(\ 4´75+0´1(t-10)^2\ \right)=4´75+0´1(10-10)^2=4´75\end{cases}\right\}=4´75$$

Como los valores de la función y del límite coinciden, f(t) es continua en t = 10

La función está definida en el intervalo cerrado [0 , 13], entendemos que en t = 0 f(t) es continua por la derecha y en t = 13 lo es por la izquierda.
Finalmente, f(t) es continua en [0 , 13].

Para resolver los apartados b) y c) representamos gráficamente la función.
Las dos primeras ramas de la función son polinomios de primer grado, gráficamente líneas rectas, utilizaremos una tabla de valores para los valores inicial y final.
La tercera rama es un polinomio de segundo grado, gráficamente una parábola, utilizaremos tabal de valores y cálculo de su vértice.

recta

t	$5-0´1t$
0	5
5	4´5

recta

t	$4´5+0´05(t-5)$
5	4´5
10	4´75

parábola

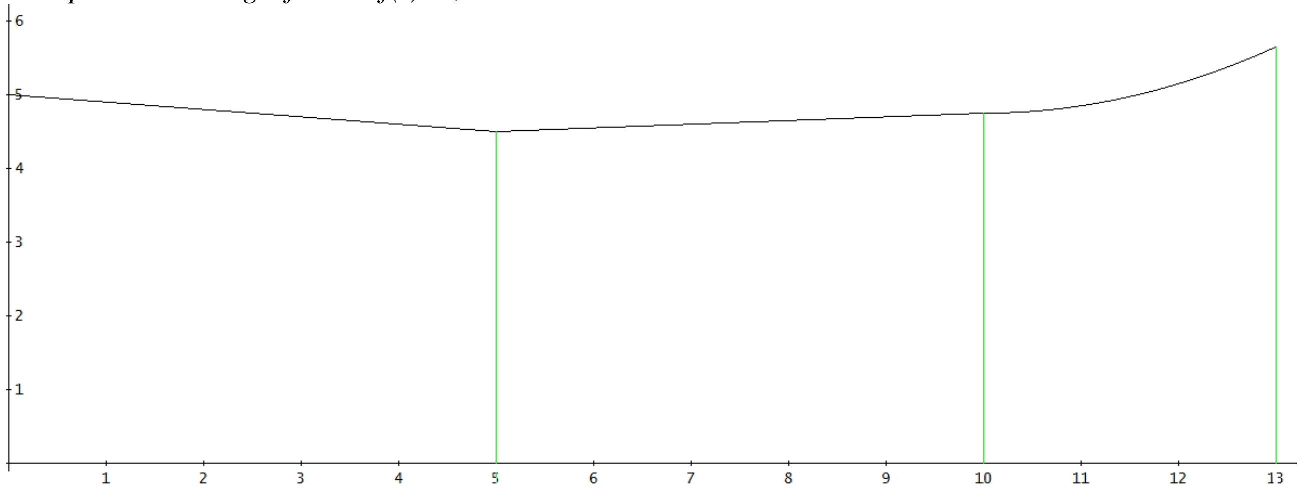
t	$4´75+0´1(t-10)^2$
10	4´75
13	$4´75+0´1(13-10)^2=5´65$

La mayoría de los cálculos están escritos directamente porque están realizados en el apartado anterior.
Obtengamos el vértice de la parábola,

$4'75 + 0'1(t - 10)^2 = 4'75 + 0'1 (t^2 - 20 t + 100) = 4'75 + 0'1 t^2 - 2 t + 10 = 0'1 t^2 - 2 t + 14'75$

Y el vértice de la parábola será, $t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2 \, . \, 0'1} = \dfrac{2}{0'2} = 10 \quad \rightarrow \quad (10 \, , 4'75)$

La representación gráfica de f(t) es,



b) La valoración máxima se alcanza a los 13 años y es de 5´65 millones de euros.

c) La valoración mínima se alcanza a los 5 años y es de 4´5 millones de euros.

PROBLEMA 2. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+3 & si \quad 0\le x<1\\ x-1 & si \quad 1\le x\le 3\end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo [0 , 3].
b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f(x).
c) Calcula el área de la región determinada por la gráfica de la función y las rectas x = 0, y = 0 y x = 3.

Solución:

a) f(x) es una función definida a trozos, cada trozo es un polinomio luego cada trozo es continuo; el problema de continuidad está en el punto de cambio de definición, es decir, para x = 1. Estudiemos la continuidad en x = 1:

1ª) f(1) = 1 – 1 = 0, luego ∃ f(1).

$$2^{\text{a}})\quad \underset{x\to 1}{Lím}\, f(x)=\left.\begin{cases}\underset{x\to 1^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 1^-}{Lím}\left(-x^2-2x+3\right)=-1^2-2\,.\,1+3=-1-2+3=0\\ \underset{x\to 1^+}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 1^+}{Lím}(x-1)=1-1=0\end{cases}\right\}=0\,,$$

$$3^{\text{a}})\quad f(1)=\underset{x\to 1}{Lím}\, f(x)$$

Se cumplen las tres condiciones de continuidad, f(x) es continua en x = 1. Por lo tanto f(x) es continua en [0 , 3].

b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos de f(x) representamos gráficamente esta función. Considerando que el primer trozo de f(x) es una parábola y el segundo una línea recta obtendremos una tabla de valores de la función y calcularemos el vértice de a parábola.

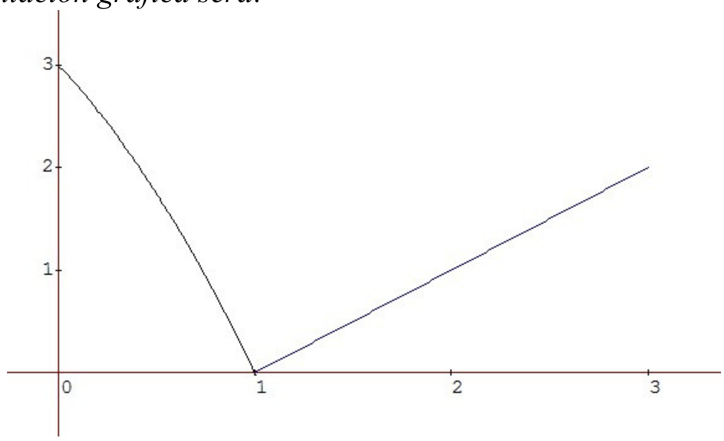
x	$f(x)$
0	$-0^2-2.0+3=3$
1	0
3	$3-1=2$

Vértice de la parábola $y=-x^2-2x+3$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$$

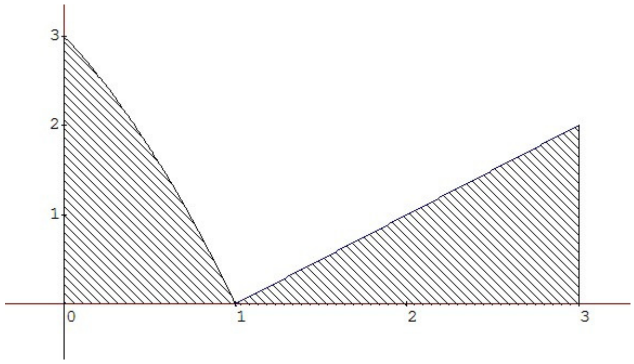
el vértice no es del dominio de la función f(x)

La representación gráfica será:



Por lo tanto, el máximo absoluto de f(x) es el punto (0 , 3) y el mínimo absoluto es el punto (1 , 0).

c) El área a calcular es:



Este área podemos calcularla mediante las siguientes integrales:

$$A=\int_0^1\left(-x^2-2x+3\right)dx+\int_1^3(x-1)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=$$

$$=\left(-\frac{1^3}{3}-1^2+3.1\right)+\left(\frac{3^2}{2}-3\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\left(-\frac{1}{3}+2\right)+\left(\frac{9-6}{2}\right)-\left(\frac{1-2}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{-1+6}{3}\right)+\frac{3}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{3}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}+\frac{4}{2}=\frac{5}{3}+2=\frac{5+6}{3}=\frac{11}{3}$$

Finalmente este área mide $\frac{11}{3}u^2$

OPCIÓN B

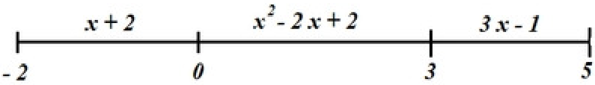
Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad -2\le x<0 \\ x^2-2x+2 & si \quad 0\le x<3 \\ 3x-1 & si \quad 3\le x\le 5 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en todos los puntos del intervalo [– 2 , 5].
b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f(x) en el intervalo [– 2 , 5/2]
c) Calcula $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:
a) f(x) está definida en el intervalo [– 2 , 5] mediante tres trozos que son:



En cada uno de los trozos la definición de f(x) es un polinomio, por lo tanto en cada trozo la función es continua. Tenemos que estudiar la continuidad en los cambios de definición.
x = 0
1) f(0) = 0^2 – 2 . 0 + 2 = 2

$$2)\ \lim_{x\to 0} f(x)=\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-2x+2)=0^2-2.0+2=2 \end{cases}\right\}=2$$

$$3)\ f(0)=2=\lim_{x\to 0} f(x)$$

Luego f(x) es continua en x = 0

x = 3
1) f(3) = 3 . 3 – 1 = 8

$$2)\ \lim_{x\to 3} f(x)=\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-2x+2)=3^2-2.3+2=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x-1)=3.3-1=8 \end{cases}\right\}5\ne 8 \quad \to \quad \text{No existe el límite}$$

Luego f(x) no es continua en x = 3

Finalmente, f(x) es continua en [– 2 , 5] – { 3 } y en x = 3 tiene una discontinuidad de salto finito.

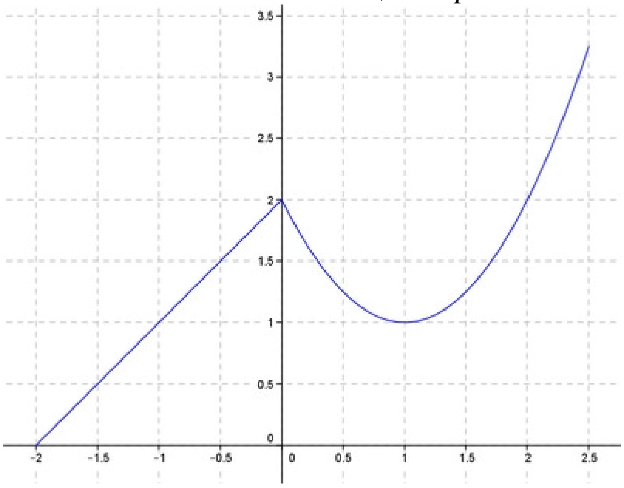
b) Para obtener los máximos y mínimos absolutos de f(x) en [– 2 , 5/2], representemos f(x) en este intervalo. Tengamos en cuenta que f(x) es continua en x = 0.
En [– 2 , 0), f(x) = x + 2, gráficamente una línea recta, para representarla basta con calcular dos puntos:
x = – 2, y = – 2 + 2 = 0
x = 0, y = 0 + 2 = 2
En [0 , 5/2], f(x) = x^2 – 2 x + 2, gráficamente una parábola.

$$\text{Calculemos su vértice, } x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2.1}=\frac{2}{2}=1 \quad \to \quad y=1^2-2.1+2=1-2+2=1 \quad \to \quad \text{Vértice } (1,1)$$

Como x = 1 ∈ [0 , 5/2], obtengamos los puntos de la parábola en los extremos del intervalo [0 , 5/2]
Para x = 0, y = 2 porque la función es continua en x = 0, (0 , 2)

$$\text{Para } x=\frac{5}{2}, \quad y=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2.\frac{5}{2}+2=\frac{25}{4}-5+2=\frac{25}{4}-3=\frac{13}{4}=3'25, \quad \left(\frac{5}{2},\frac{13}{4}\right)=(2'5,3'25)$$

A partir de los cálculos anteriores, la representación gráfica de f(x) en el intervalo [0 , 5/2] será:



La gráfica nos indica que en el intervalo [0 , 5/2] la función f(x) tiene:

un mínimo absoluto en el punto (– 2 , 0) y

un máximo absoluto en $\left(\frac{5}{2},\frac{13}{4}\right)$

c)

$\int_1^2 f(x)\,dx$ = *como en el intervalo [1 , 2] f(x) =* $x^2 - 2x + 2$ $= \int_1^2 \left(x^2 - 2x + 2\right)dx =$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_1^2=\left(\frac{2^3}{3}-2^2+2.2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1^2+2.1\right)=\left(\frac{8}{3}-4+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+2\right)=\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)=$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

Por lo tanto $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{4}{3}$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. En una sesión, el valor de cierta acción, en euros, vino dado por la función:

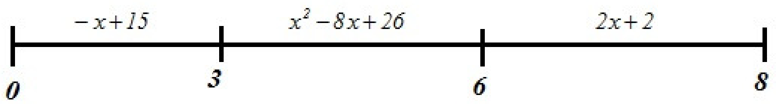
$$f(x)=\begin{cases} -x+15 & 0\le x\le 3 \\ x^2-8x+26 & 3<x\le 6 \\ 2x+2 & 6<x\le 8 \end{cases}$$

Donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde el inicio de la sesión. Se pide:

a) Estudiar la continuidad de *f(x)*.
b) Calcular el valor máximo y el valor mínimo que alcanzó la acción.
c) ¿En qué momentos convino comprar y vender para maximizar el beneficio? ¿Cuál hubiera sido este?

Solución:

a) f(x) está definida en el intervalo [0 , 8] mediante tres trozos que son:



En cada uno de los trozos la definición de f(x) es un polinomio, por lo tanto en cada trozo la función es continua. Tenemos que estudiar la continuidad en los cambios de definición.

x = 3

1) f(3) = – 3 + 15 = 12

$$2)\ \lim_{x\to 3} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(-x+15)=-3+15=12 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x^2-8x+26)=3^2-8.3+26=11 \end{array}\right\} 12\neq 11,\ \text{no existe } \lim_{x\to 3} f(x)$$

Luego f(x) no es continua en x = 3, en x = 3 f(x) tiene una discontinuidad de salto finito.

x = 6

1) f(6) = 6^2 – 8 . 6 + 26 = 36 – 48 + 26 = 14

$$2)\ \lim_{x\to 6} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}(x^2-8x+26)=6^2-8.6+26=14 \\ \lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+}(2x+2)=2.6+2=14 \end{array}\right\}=14$$

$$3)\ f(6)=\lim_{x\to 6} f(x)=14$$

Luego f(x) es continua en x = 6

Finalmente, ***f(x) es continua en [0 , 8] – { 3 } y en x = 3 tiene una discontinuidad de salto finito****.*

Para responder a los siguientes apartados, vamos a representar gráficamente la función.

Primer trozo, y = – x + 15, gráficamente es una línea recta. Tabla de valores para obtener principio y final,

x	$y=-x+15$
0	15
3	12

Segundo trozo, y = x^2 – 8 x + 26, gráficamente es una parábola. Tabla de valores para obtener principio y final y además el vértice de la parábola,

x	$y=x^2-8x+26$
3	11
6	18

Vértice $(4\,,10)$

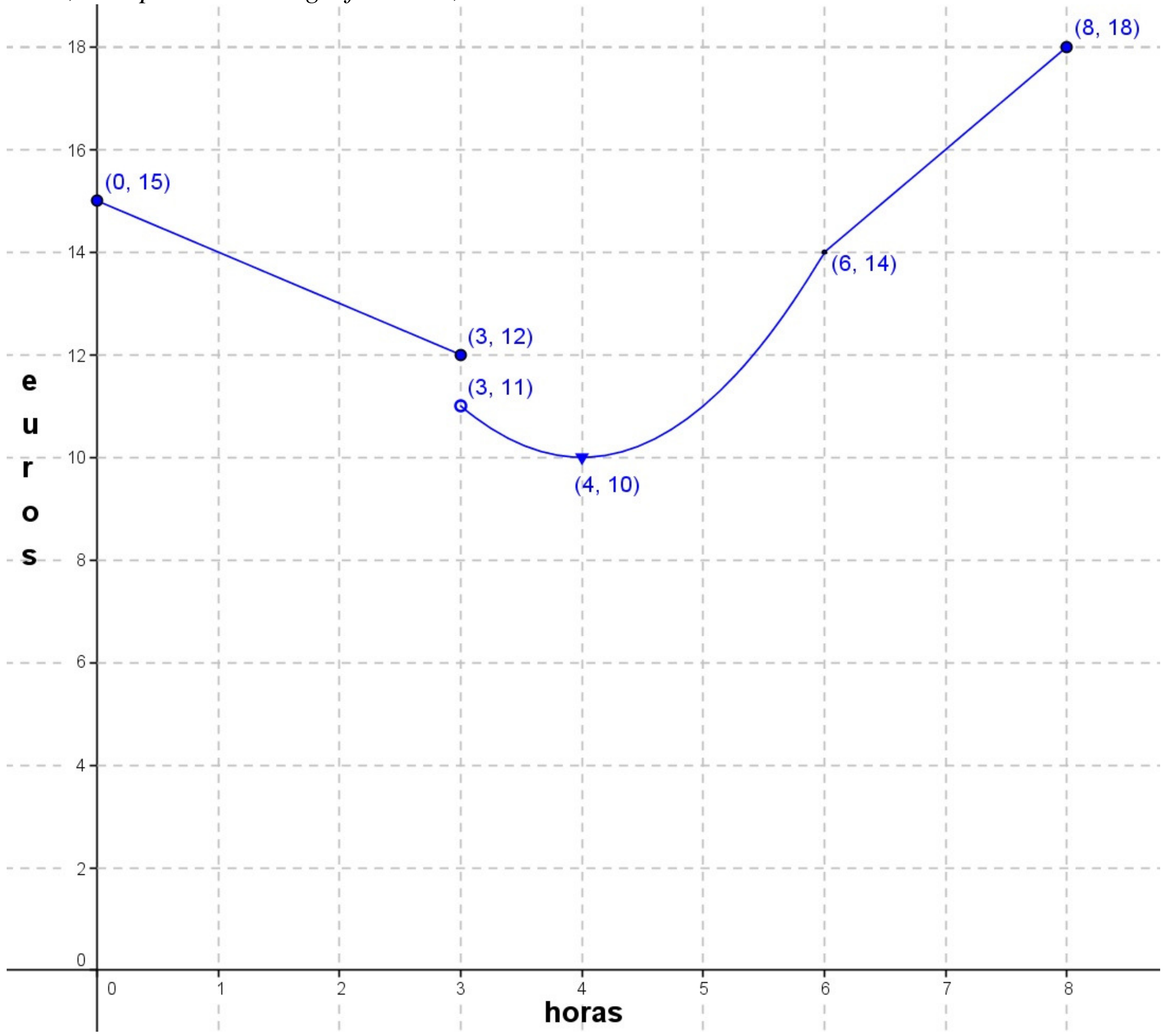
$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{8}{2}=4$$

$$y=4^2-8.4+26=10$$

Tercer trozo, $y = 2x + 2$, gráficamente es una línea recta. Tabla de valores para obtener principio y final,

x	$y = 2x + 2$
6	14
8	18

Finalmente, la representación gráfica será,



Considerando los cálculos realizados anteriormente y la representación gráfica de la función $f(x)$:

b) La acción alcanzó un ***valor máximo de 18 euros*** *y un* ***valor mínimo de 10 euros****.*

c) Para maximizar el beneficio habría que ***haber comprado a las 4 horas del inicio de la sesión*** *(que la acción estaba a 10 euros, mínimo) y* ***vender a las 8 horas del inicio de la sesión*** *(que la acción estaba a 18 euros, máximo). En este caso* ***el beneficio habría sido de 8 euros*** *(18 – 10 = 8).*

Problema 2. Calcula:

a) Todas las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x)=\dfrac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$.

c) Los máximos y mínimos de la función $g(x)$ del apartado anterior.

Solución:

a) Asíntotas verticales.

Primero resolvemos: $x^3 - 9x = 0 \;\rightarrow\; x\left(x^2-9\right)=0 \begin{cases} x=0 \\ x^2-9=0 \;\rightarrow\; x^2=9 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \end{cases}$

Por tanto, hay tres posible asíntotas verticales: $x = -3$, $x = 0$ *y* $x = 3$.

Veamos si lo son. El límite de la función para cada valor de x *debe dar infinito.*

$x = -3$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\frac{2(-3)^3+2(-3)-1}{(-3)^3-9(-3)}=\frac{-54-6-1}{-27+27}=\frac{-61}{0}=\infty,\ \text{por tanto } x=-3 \text{ es a.v.}$$

$x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\frac{2\,.\,0^3+2\,.\,0-1}{0^3-9\,.\,0}=\frac{-1}{0}=\infty,\ \text{por tanto } x=0 \text{ es a.v.}$$

$x = 3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\frac{2\,.\,3^3+2\,.\,3-1}{3^3-9\,.\,3}=\frac{54+6-1}{27-27}=\frac{59}{0}=\infty,\ \text{por tanto } x=3 \text{ es a.v.}$$

Asíntota horizontal

Debemos calcular los siguientes límites,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to -\infty}2=2 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to +\infty}2=2 \end{array}\right\}\ \text{por tanto, } y=2 \text{ es la a.h.}$$

Luego, ***f(x) tiene tres asíntotas verticales*** $\mathbf{x = -3}$, $\mathbf{x = 0}$ ***y*** $\mathbf{x = 3}$ ***y una asíntota horizontal*** $\mathbf{y = 2}$.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$.

En primer lugar, como $g(x)$ *es una función polinómica* $\text{Dom } g(x) = \Re$

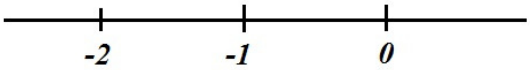
Debemos estudiar el signo de $g'(x)$

$g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x$

$4x^3 + 12x^2 + 8x = 0;\quad 4x\,(x^2 + 3x + 2) = 0 \begin{cases} 4x=0 \;\rightarrow\; x=0 \\ x^2+3x+2=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1}= \end{cases}$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-3+1}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \\ x_2=\dfrac{-3-1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

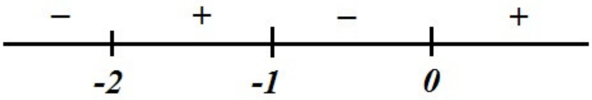
Hay que estudiar el signo de $g'(x)$ en los siguientes intervalos



Como $g'(x)$ es un polinomio de tercer grado con tres raíces reales, calculando el signo de $g'(x)$ en uno de los intervalos los demás salen de forma alterna,

$x = 1 \rightarrow g'(1) = 4 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 4 + 12 + 8 = 24 > 0$

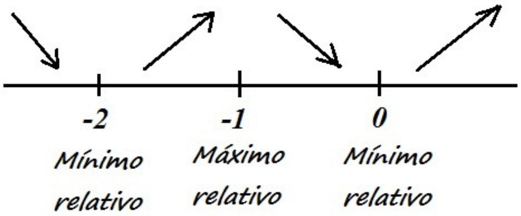
Por tanto:



Luego **g(x) es creciente en** $(-2,-1)\cup(0,+\infty)$ **y decreciente en** $(-\infty,-2)\cup(-1,0)$**.**

c) Máximos y mínimos de $g(x)$

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos:



$x=-2 \quad \rightarrow \quad g(-2)=(-2)^4+4\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)^2-8=16-32+16-8=-8$

$x=-1 \quad \rightarrow \quad g(-1)=(-1)^4+4\cdot(-1)^3+4\cdot(-1)^2-8=1-4+4-8=-7$

$x=0 \quad \rightarrow \quad g(0)=0^4+4\cdot0^3+4\cdot0^2-8=-8$

Es decir, ***g(x) tiene un máximo relativo en (– 1 , – 7) y mínimos relativos en (– 2 , – 8) y (0 , – 8).***

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. El departamento de análisis financiero de una consultora determina que la rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, de cierta inversión, en función de la cantidad invertida en miles de euros, x, viene dada por la siguiente expresión:

$$R(x) = -0{,}01\,x^2 + 0{,}1\,x + 1, \quad x > 0$$

a) ¿Cuántos euros conviene invertir para maximizar la rentabilidad? ¿Cuál será dicha rentabilidad máxima?

b) Determina la función que proporciona la rentabilidad media (es decir, el cociente entre la rentabilidad y la cantidad invertida) de dicha inversión y estudia la evolución de dicha rentabilidad media en función de la cantidad invertida.

Solución:

a) Busquemos el máximo de R(x).

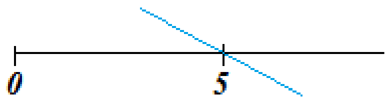
x y R(x) son miles de euros.

Por definición, $Dom\ R(x) = (0, +\infty)$ *{intervalo abierto}*

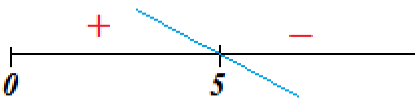
$R'(x) = -0'02\,x + 0'1$

$-0'02\,x + 0'1 = 0 \;\rightarrow\; -0'02\,x = -0'1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-0'1}{-0'02} = 5$

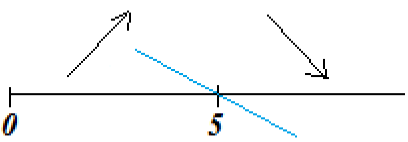
Estudiemos el signo de $R'(x)$. $R'(x)$, gráficamente, es una línea recta de pendiente negativa que pasa por (5 , 0), luego:



Por tanto, el signo de $R'(x)$ es:



Y R(x)



es creciente a la izquierda de 5 y decreciente a la derecha.

Luego en x = 5 hay un máximo relativo, pero como a la izquierda de x = 5 la función es creciente y a la derecha decreciente este máximo relativo es el absoluto de R(x).

Para x = 5, $R(5) = -0{,}01 \cdot 5^2 + 0{,}1 \cdot 5 + 1 = 1'25$ *{x = 5 miles de euros; R(5) = 1´25 miles de euros}*

Finalmente, para maximizar la rentabilidad conviene invertir 5000€ y la rentabilidad máxima será de 1250€.

b) La función de rentabilidad media (RM) será: $RM(x) = \dfrac{R(x)}{x} = \dfrac{-0'01\,x^2 + 0'1\,x + 1}{x} = -0'01x + 0'1 + \dfrac{1}{x}$, $x>0$

Para estudiar la evolución de RM(x) en función de x, estudiémosla para representarla gráficamente.

Por definición, $Dom\ RM(x) = (0, +\infty)$

Puntos de corte con ejes coordenados,

$$y=0 \quad\rightarrow\quad -0'01x+0'1+\frac{1}{x}=0 \quad\rightarrow\quad -0'01x^2+0'1x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-0'1\pm\sqrt{0'1^2-4.(-0'01).1}}{2.(-0'01)}=$$

$$=\frac{-0'1\pm\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=\left\langle\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-0'1+\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=-6'...\notin Dom\,RM(x) \\ x_2=\dfrac{-0'1-\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=16'1803 \end{array}\right. \quad\rightarrow\quad \textit{Punto de corte} \quad (16'1803\,,0)$$

Monotonía,

$RM'(x)=-0'01-\dfrac{1}{x^2}$, *por lo tanto* $\forall\, x\in Dom\,RM(x)$, $RM'(x)<0$

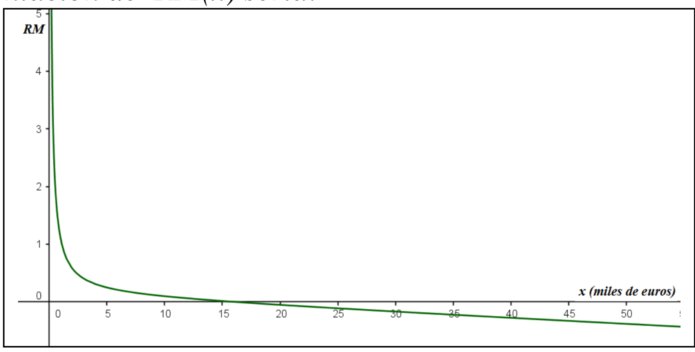
Luego RM(x) es decreciente en su dominio.

Asíntotas,

$$\lim_{x\to 0^+} RM(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-0'01x+0'1+\frac{1}{x}\right)=0+0'1+\frac{1}{0}=+\infty \quad\Rightarrow\quad x=0 \textit{ es asíntota vertical por la derecha.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} RM(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(-0'01x+0'1+\frac{1}{x}\right)=-\infty+0'1+\frac{1}{+\infty}=-\infty+0=-\infty \quad\Rightarrow\quad \textit{No hay asíntota horizontal}$$

La representación de RM(x) sería:



Por tanto, la rentabilidad media es decreciente y a partir de 16´1803 miles de euros de inversión es negativa.

Problema 2. Un analista pronostica que el beneficio *B(x)* en miles de euros de cierto fondo de inversión, donde *x* representa la cantidad invertida en miles de euros, viene dado por la siguiente expresión:

$$B(x)=\begin{cases} -0'01\,x^2+0'09\,x+0'1 & 0<x\le 8 \\ 1'26\dfrac{x}{x^2-1}+0'02 & x>8 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de *B(x)*.
b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) ¿Qué capital, en euros, conviene invertir en este fondo para maximizar el beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo?
d) Si se invierte un capital muy elevado, ¿cuál sería como mínimo su beneficio? ¿Por qué?

Solución:

a) Continuidad de B(x).

B(x) es una función definida a trozos. Estudiemos la continuidad de la función en cada trozo y en el punto de cambio de definición.

Para $0 < x < 8$, $B(x) = -0´01\,x^2 + 0´09\,x + 0´1$ *que es un polinomio, por tanto continua.*

Para $x > 8$, $B(x)=1'26\dfrac{x}{x^2-1}+0'02$ *, los problemas para continuidad se presentan en las raíces del denominador,* $x^2 - 1$*, calculémoslas:*

$$x^2-1=0 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Pero como esta definición de B(x) es para x > 8, el denominador no se anula, por tanto B(x) es continua.

Estudiemos la continuidad en x = 8,

1) $B(8) = -0´01\,.\,8^2 + 0´09\,.\,8 + 0´1 = 0´18$, *existe B(8)*

2) $\lim_{x\to 8} B(x) =$ *(como a la izquierda y derecha de 8 B(x) tiene dos definiciones diferentes, calculamos límites laterales)*

$$\text{límites laterales)}=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 8^-} B(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}\left(-0'01\,x^2+0'09\,x+0'1\right)=-0'01\cdot 8^2+0'09\cdot 8+0'1=0'18 \\ \lim\limits_{x\to 8^+} B(x)=\lim\limits_{x\to 8^+}\left(1'26\dfrac{x}{x^2-1}+0'02\right)=1'26\dfrac{8}{8^2-1}+0'02=1'26\dfrac{8}{63}+0'02=0'18 \end{cases}$$

como los límites laterales coinciden, $\lim_{x\to 8} B(x)=0'18$, *existe el límite.*

3) $\lim_{x\to 8} B(x)=0'18=B(8)$

Se cumplen las tres condiciones, B(x) es continua en x = 8

Luego, ***B(x) es continua en su dominio de definición, es decir, en (0 , + ∞).***

b) Monotonía. Por se función definida a trozos estudiemos la monotonía en cada trozo.

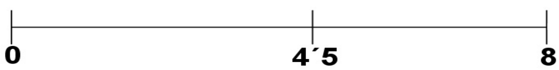
Para $0 < x < 8$

$y = -0´01\,x^2 + 0´09\,x + 0´1$, *estudiemos el signo de* $y´$

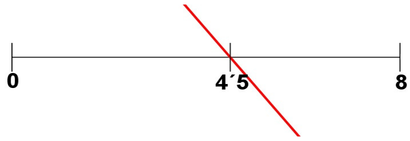
$y´ = -0´02\,x + 0´09$

$$-0´02\,x + 0´09 = 0 \;\rightarrow\; -0´02\,x = -0´09 \;\rightarrow\; x=\frac{-0'09}{-0'02}=4'5$$

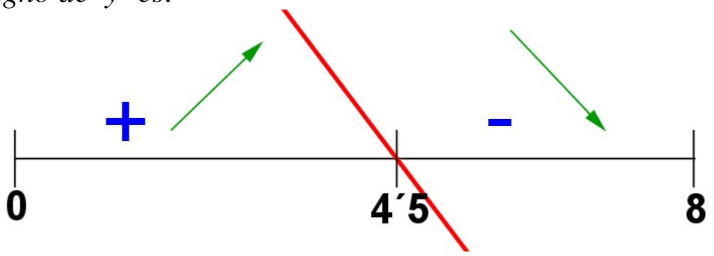
Hay que estudiar el signo en los siguientes intervalos:



y´ es una línea recta de pendiente negativa y que pasa por x = 4´5:



El signo de y´ es:



Para x > 8

$$y = 1'26\,\frac{x}{x^2-1} + 0'02$$

$$y' = 1'26\,\frac{1\left(x^2-1\right) - x\cdot 2\,x}{\left(x^2-1\right)^2} = 1'26\,\frac{x^2-1-2\,x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = 1'26\,\frac{-\,x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

Estudiemos el signo de y´. 1´26 es positivo. Veamos la fracción, como el denominador está elevado al cuadrado (es positivo) el signo de y´ sólo depende del numerador, $-x^2-1 = -\left(x^2+1\right)$*; como* $x^2 + 1$ *siempre es positivo,* $-\left(x^2+1\right)$ *es negativo, por tanto y´ es negativa.*

Para x > 8, la función es decreciente.

Para x = 8

$$y'(8) = \begin{cases} y'(8^-) = -0'02\cdot 8 + 0'09 = -0'07 \\ y'(8^+) = 1'26\,\dfrac{-\,8^2-1}{\left(8^2-1\right)^2} = 0'020634... \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{No existe} \quad y'(8)$$

Finalmente, como B(x) es continua,

B(x) es creciente en (0 , 4´5)   y   decreciente en (4´5 , 8) $\cup$ ***(8 , +*** ∞***).***

c) Del estudio realizado en el apartado anterior se deduce que el máximo relativo se alcanza para x = 4´5.

x = 4´5, $B(4'5) = -\,0'01\ .\ 4'5^2 + 0'09\ .\ 4'5 + 0'1 = 0'3025$

Como a la derecha de 4´5 la función es creciente y a la derecha decreciente el máximo relativo es el absoluto.

Por tanto, hay que invertir 4´5 miles de euros se obtendría un beneficio de 0´´3025 miles de euros.

Es decir, hay que invertir   4500 euros y obtendríamos un beneficio de   302´50 euros.

d) Cuando se invierte un capital muy elevado el beneficio lo podemos obtener calculando el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} B(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1'26\,\frac{x}{x^2-1} + 0'02\right) \stackrel{*}{=}$$

$$\text{calculemos} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\stackrel{*}{=} 1'26\cdot 0 + 0'02 = 0'02$$

Podemos afirmar que el mínimo beneficio, cuando se invierte un capital muy elevado, es 0´02 miles de euros (20 euros) porque de lo estudiado en los apartados anteriores sabemos que a partir de x = 8 la función es decreciente.

Luego, ***si se invierte un capital muy elevado el beneficio será, como mínimo, de 20 euros.***

Problema 4. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+a\,x^2+24x & si \quad x\le -1 \\ (x-1)^2+3 & si \quad x>-1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. *(2 puntos)*

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimo locales que tiene esta función en el intervalo $\left(\frac{-9}{2},\frac{-3}{2}\right)$. *(4 puntos)*

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿Valor de a para que $f(x)$ sea continua?

Para $x < -1$ $f(x) = x^3 + a\,x^2 + 24\,x$ es, independientemente del valor de a, un polinomio luego es continua.

Para $x > -1$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ es un polinomio luego es continua.

El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en $x = -1$.

Continuidad en $x = -1$,

a) $f(1) = (-1)^3 + a\,(-1)^2 + 24\,(-1) = -1 + a - 24 = a - 25$

b) $$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(x^3+a\,x^2+24x\right)=(-1)^3+a(-1)^2+24(-1)=a-25 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[(x-1)^2+3\right]=(-1-1)^2+3=7 \end{cases}$$

Para que exista el límite $a-25=7 \rightarrow a=7+25=32$

c) *Para* $32 = 2$ $f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$

Solución: para que $f(x)$ sea continua debe ser $a = 32$.

b) Para $a = 9$, máximos y mínimos locales de f(x) en $\left(\frac{-9}{2},\frac{-3}{2}\right)=(-4'5,-1'5)$.

Como $(-4'5, -1'5) \subset \{x \le -1\} \rightarrow f(x) = x^3 + 9\,x^2 + 24\,x$

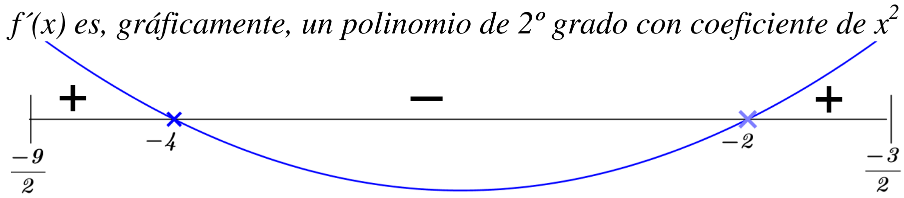
$f'(x) = 3\,x^2 + 18\,x + 24$

estudiemos el signo de $f'(x)$

$$3x^2+18x+24=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-18\pm\sqrt{12^2-4\cdot 3\cdot 24}}{2\cdot 3}=\frac{-18\pm 6}{6}=\begin{cases} x_1=\frac{-18+6}{6}=-2 \\ x_2=\frac{-18-6}{6}=-4 \end{cases}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en:

$f'(x)$ es, gráficamente, un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces -4 y -2, luego,



En $x = -4$ hay un máximo local
y
en $x = -2$ hay un mínimo local

Para x = – 4 → f(– 4) = (– 4)^3 + 9 (– 4)^2 + 24 (– 4) = – 16
Para x = – 2 → f(– 2) = (– 2)^3 + 9 (– 2)^2 + 24 (– 2) = – 20

Solución: ***para a = 9 los máximos y mínimos locales de f(x) en*** $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ***son:***

(– 4 , – 16) máximo local y (– 2 , – 20) mínimo local.

c) Si a = 0 ¿área de la región delimitada por f(x), x=2, x = 3 y eje OX?

Si a = 0 → $f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & si \ \ x \le -1 \\ (x-1)^2 + 3 & si \ \ x > -1 \end{cases}$

Entre x = 2 y x = 3 f(x) = (x – 1)^2 + 3 y, además, como f(x) es algo al cuadrado más tres: f(x) > 0.
Por tanto el área pedida la obtenemos mediante el siguiente cálculo:

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx$$

$$\text{Cálculo auxiliar}: \int (x-1)^2 dx = \left\{ \text{cambio de variable} \quad \begin{matrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{matrix} \right\} \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x\right]_2^3 = \left(\frac{(3-1)^3}{3} + 3 \cdot 3\right) - \left(\frac{(2-1)^3}{3} + 3 \cdot 2\right) = \frac{8}{3} + 9 - \left(\frac{-1}{3} + 6\right) = \frac{16}{3}$$

Por tanto, ***el área de la región pedida es*** $\frac{16}{3}$ *u.a.*

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) Determina el valor de a para que la función sea continua en x = – 1:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & x<-1 \\ a\,x+2 & -1\le x<1 \\ \dfrac{2x-11}{x-3} & x\ge 1 \end{cases}$$

b) Estudia la continuidad de la función anterior para a = 0.
c) Halla la integral entre – 2 y 2 de la función f(x) = x^3 – 2.

Solución:
a) ¿a? para que f sea continua en x = – 1
1) ¿Existe f(– 1)?
f(– 1) = a (– 1) + 2 = 2 – a, por lo tanto existe f(– 1).
2) ¿Existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+a)=-3+a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax+2)=-a+2 \end{cases}$$ *para que exista* $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *debe ser*

– 3 + a = – a + 2; a + a = 2 + 3; 2 a = 5; $a=\dfrac{5}{2}$

Para que exista el límite $a=\dfrac{5}{2}$.

Para este valor de a se cumple:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & f(-1)=2-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-1}{2} \\ 2) & \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{-1}{2} \\ 3) & f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x) \end{array}\right\}\ \textit{luego para } a=\frac{5}{2}\ f(x) \textit{ es continua en } x=-1.$$

b) a = 0

Para a = 0 la función es: $$f(x)=\begin{cases} 3x & x<-1 \\ 2 & -1\le x<1 \\ \dfrac{2x-11}{x-3} & x\ge 1 \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad de esta función.
Para x < – 1 f(x) = 3 x, función polinómica, luego continua.
Para – 1 < x < 1 f(x) = 2, función constante, luego continua.
Para x > 1 $f(x)=\dfrac{2x-11}{x-3}$ *, función racional, es continua excepto en x = 3 (valor que anula el denominador)*
Veamos en los cambios de definición de la función,
x = – 1
1) f(– 1) = 2

$$2)\quad \lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 3x=-3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 2=2 \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos, no existe el límite.

f(x) no es continua en   x = – 1. Por existir los límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

x = 1

1) $f(1) = \dfrac{2\,.\,1 - 11}{1-3} = \dfrac{-9}{-2} = \dfrac{9}{2}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-11}{x-3} = \dfrac{2-11}{1-3} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

como los límites laterales son distintos, no existe el límite.

f(x) no es continua en   x = 1. Por existir los límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

Veamos el tipo de discontinuidad en x = 3,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2x-11}{x-3} = \frac{2\,.\,3-11}{3-3} = \frac{-5}{0} = \infty$$

discontinuidad de salto infinito.

En resumen, para a = 0, f(x) es continua en $\Re - \{-1, 1, 3\}$

en x = – 1   y   x = 1 presenta una discontinuidad de salto finito

y en   x = 3   presenta una discontinuidad de salto infinito.

c)

$$\int_{-2}^{2} \left(x^3 - 2\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{2^4}{4} - 2\,.\,2\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2\,.\,(-2)\right) = (4-4) - (4+4) = -8$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & 0\le x<2 \\ x^2-6x+12 & 2\le x\le 4 \\ -2x+a & 4\le x\le 8 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a para que la función y = f(x) sea continua en el intervalo [0,8].
b) Halla los máximos y mínimos absolutos de y = f(x) en el intervalo [0,4]. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos absolutos.
c) Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas de ecuación y = 0, x = 0, x = 3 y la gráfica de y = f(x).

Solución:

a) Estudiamos la función en cada trozo de definición y en los puntos de cambio de definición.

En [0 , 2), f(x) = x + 2 es un polinomio, luego es continua
En (2 , 4), f(x) = x^2 – 6 x + 12 es un polinomio, luego es continua
En (4 , 8], f(x) = – 2 x + a es un polinomio, luego es continua

Veamos si es continua en x = 2,
i) $f(2) = 2^2 - 6.\ 2 + 12 = 4$
ii)

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-6x+12)=4 \end{cases}\right\}=4$$

iii)

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$$

Por lo que f(x) es continua en x = 2

Veamos si es continua en x = 4
i) $f(4) = 4^2 - 6.\ 4 + 12 = 16 - 24 + 12 = 4$
ii)

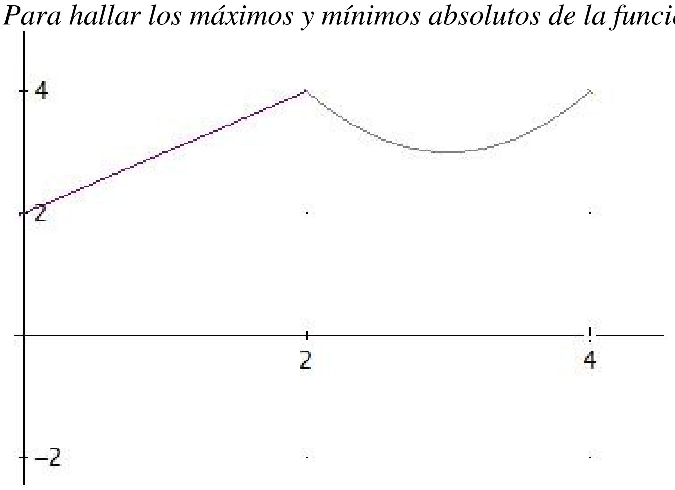
$$\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-6x+12)=4 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-2x+a)=-2.4+a=-8+a \end{cases}$$

Para que exista el límite debe ser 4 = – 8 + a; a = 12

Para a = 12 se cumple que $f(4)=\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ *, por lo que f(x) es continua en x = 4*

En conclusión, para que f(x) sea continua en el intervalo [0 , 8] debe ser a = 12

b)
Para hallar los máximos y mínimos absolutos de la función en el intervalo [0 , 4] podemos representar la función,



En [0 , 2] f(x) = x + 2, es una función creciente, el mínimo absoluto está en su extremo inferior y el máximo absoluto en su extremo superior.
En [2 , 4] f(x) = x^2 – 6 x + 12 que por ser una parábola con coeficiente de x^2 positivo alcanza su mínimo absoluto en el vértice, $x=\dfrac{-(-6)}{2.1}=3\in[2,4]$

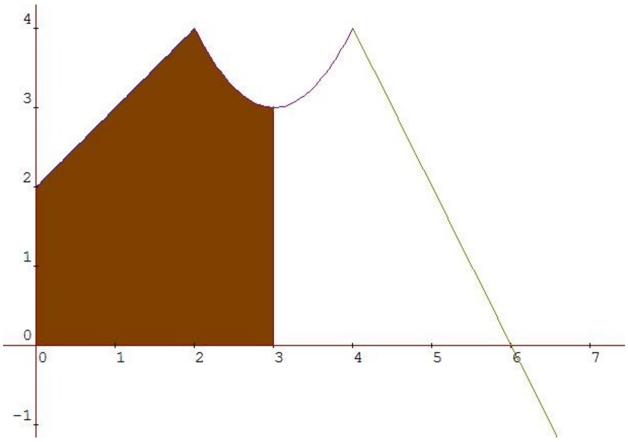
y el máximo absoluto en alguno de lo extremos del intervalo.
Calculemos el valor de la función en los puntos indicados.

x	$f(x)$
0	2
2	4
3	$3^2-6.3+12=3$
4	4

Por lo tanto el mínimo absoluto está en el punto (0 , 2) y los máximos absolutos en los puntos (2 , 4) y (4 , 4).

c)

El área a calcular es la de la zona sombreada



El cálculo del área es:

$$A=\int_0^2 (x+2)dx+\int_2^3 \left(x^2-6x+12\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+12x\right]_2^3=$$

$$=\frac{4}{2}+4+\left(\frac{27}{3}-27+36\right)-\left(\frac{8}{3}-12+24\right)=2+4+\frac{27}{3}+9-\frac{8}{3}-12=3+\frac{19}{3}=\frac{28}{3}\ u.a.$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. La cuenta de resultados (pérdidas o ganancias) en millones de euros, y , de una empresa vienen dadas por la siguiente función de los años de existencia de la misma:

$$y = \frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7}$$

a) ¿A partir de qué año deja la empresa de tener pérdidas?
b) ¿En qué momento alcanza la empresa sus ganancias máximas? ¿A cuánto ascienden éstas?
c) Describe la evolución de la cuenta de resultados de la empresa. ¿Cuáles serán sus beneficios a muy largo plazo?

Solución:

Por definición de x , años de existencia de la empresa, $x \geq 0$

y *como* $\forall x \in \Re \quad x^2 + 7 \neq 0 \quad \rightarrow \quad Dom\ y = [\,0, +\infty)$

a) La empresa dejará de tener pérdidas cuando y > 0, luego debemos resolver la siguiente inecuación,

$$\frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7} > 0$$

como para cualquier valor de x, $x^2 + 7$ es positivo, sólo necesitamos estudiar el signo del numerador.

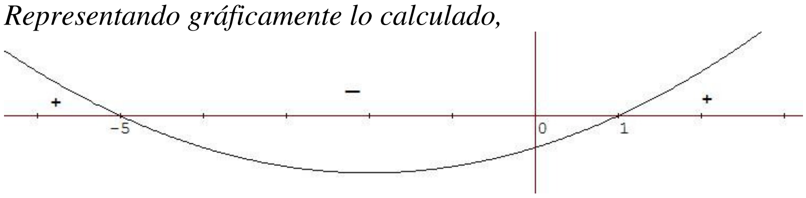
$5x^2 + 20x - 25 > 0$ Resolvamos esta inecuación,

$5x^2 + 20x - 25 = 0$, simplificando entre 5

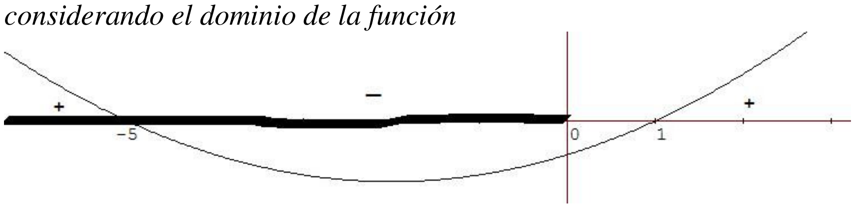
$x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\,.\,1\,.\,(-5)}}{2\,.\,1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+6}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\[2mm] x_2 = \dfrac{-4-6}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

Representando gráficamente lo calculado,



considerando el dominio de la función



Por lo tanto y > 0 para x > 1. Es decir que la empresa dejará de tener perdidas a partir del primer año de existencia

b) Ganancias máximas y a cuánto ascienden.

Busquemos los extremos de la función y

$$y' = \frac{(10x + 20)(x^2 + 7) - (5x^2 + 20x - 25)2x}{(x^2 + 7)^2} = \frac{10x^3 + 20x^2 + 70x + 140 - 10x^3 - 40x^2 + 50x}{(x^2 + 7)^2} =$$

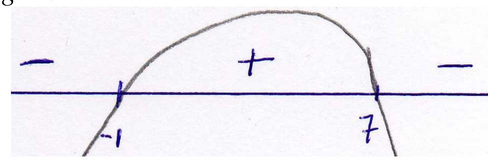
$$= \frac{-20x^2 + 120x + 140}{(x^2 + 7)^2}$$

$$y' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-20x^2 + 120x + 140}{(x^2 + 7)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -20x^2 + 120x + 140 = 0 \quad \textit{simplificando entre 20}$$

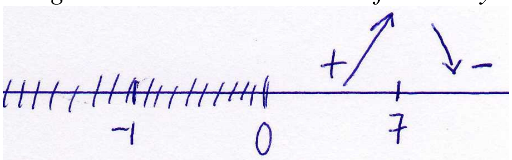
$$-x^2+6x+7=0 \quad \to \quad x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(-1)7}}{2(-1)}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{-2}=\frac{-6\pm\sqrt{64}}{-2}=\frac{-6\pm 8}{-2}=$$

$$=\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-6+8}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1 \\ \dfrac{-6-8}{-2}=\dfrac{-14}{-2}=7 \end{array}\right.$$

Estudiemos el signo de y´. Como el denominador de y´ es $(x^2+7)^2$*, siempre es positivo; el signo de y´ depende del numerador que gráficamente es una parábola, por ser un polinomio de 2º grado, y como el coeficiente de* x^2 *es negativo será*



Restringiéndonos al dominio de la función y



Luego en x = 7 hay un máximo relativo. Como la función y en el intervalo (0 , 7) es creciente y en el intervalo (7 , +∞) es decreciente, este máximo relativo es el absoluto de la función.

Por lo tanto la empresa alcanza sus ganancias máximas a los 7 años de su creación y estas ganancias son de

$$y=\frac{5\,.\,7^2-20\,.\,7-25}{7^2+7}=\frac{360}{56}=6´428571 \quad \textit{millones de euros}$$

es decir, unas ganancias de 6 428 571 €

c) Para obtener los beneficios a muy largo plazo calculamos el siguiente límite,

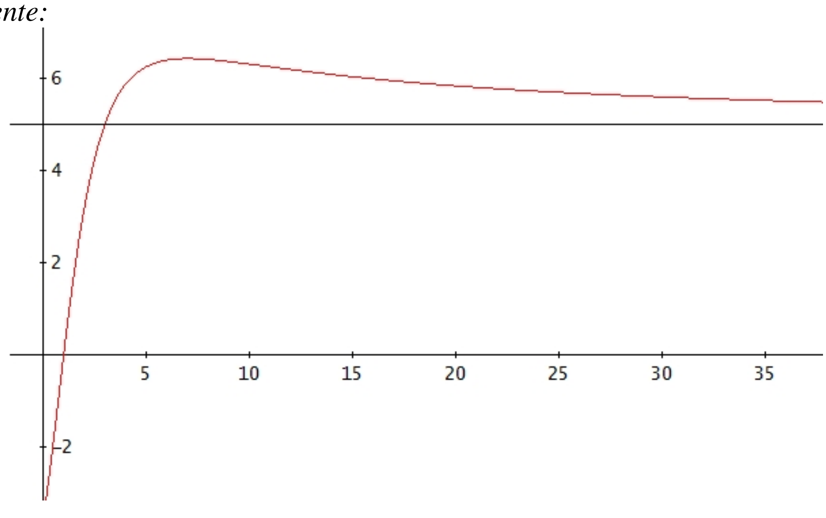
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+20x-25}{x^2+7}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}5=5$$

Esto quiere decir que a muy argo plazo los beneficios se estabilizan e 5 millones de euros.

Podemos describir la evolución de la cuenta de resultados de la empresa de la siguiente forma:

- *Durante el primer año tiene pérdidas.*
- *A partir del segundo año y hasta el séptimo los beneficios crecen hasta alcanzar un máximo de 6´4 millones de euros y a partir del séptimo año los beneficios desciende pero se mantienen por encima de los 5 millones de euros.*

Gráficamente:



OPCIÓN B

PROBLEMA 2. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & 1\le x\le 2\\ 1 & 2<x\le 3\\ -x^2+6x-8 & 3<x\le 4\\ 0 & 4<x\le 5\end{cases}$$

definida en el intervalo [1 , 5]. Se pide:

a) Estudia la continuidad en todos los puntos del intervalo [1 , 5].

b) Calcula el área de la región del plano limitada por el eje de abcisas, las rectas x = 2 y x = 4 y la gráfica de y = f(x).

Solución:

a) Continuidad en [1 , 5]

En [1 , 2), f(x) = 2/x que es continua ya que 2/x no se puede calcular únicamente para x = 0 y 0 no pertenece al intervalo [1 , 2).

En (2 , 3), f(x) = 1, función constante, luego continua.

En (3 , 4), f(x) = – x^2 *+ 6 x – 8, función polinómica, luego continua.*

En (4 , 5], f(x) = 0, función constante, luego continua.

Estudiemos la continuidad en los cambios de definición.

En x = 2

$$f(2)=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{2}=1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 1=1\end{cases}\right\}=1$$

$$f(2)=1=\lim_{x\to 2} f(x)$$

Por lo tanto f(x) es continua en x = 2

En x = 3

$$f(3)==1$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(-x^2+6x-8\right)=-3^2+6\,.\,3-8=1\end{cases}\right\}=1$$

$$f(3)=1=\lim_{x\to 3} f(x)$$

Por lo tanto f(x) es continua en x = 3

En $x = 4$

$$f(4) = -4^2 + 6\,.\,4 - 8 = 0$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}\left(-x^2 + 6x - 8\right) = -4^2 + 6\,.\,4 - 8 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 0 = 0 \end{cases} \Bigg\} = 0$$

$$f(4) = 1 = \lim_{x\to 4} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ *es continua en* $x = 4$

En consecuencia, $f(x)$ *es continua en* $[\,1\,,\,5\,]$

b) Para calcular el área pedida debemos representar gráficamente la función en el intervalo $[\,2\,,\,4\,]$

En $[\,2\,,\,3\,]$, $f(x) = 1$, *recta horizontal.*

En $[\,3\,,\,4\,]$, $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, *una parábola.*

Representemos la parábola completamente y utilicemos el trozo correspondiente

$y = -x^2 + 6x - 8$

$x = 0 \;\rightarrow\; y = -8 \;\rightarrow\;$ *Corte eje OY* $(\,0\,,\,-8\,)$

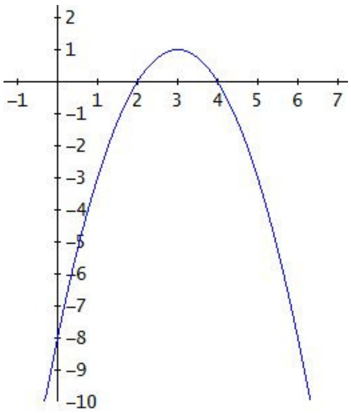
$$y = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 6x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} =$$

$$= \frac{-6 \pm 2}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-6+2}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ \dfrac{-6-2}{-2} = \dfrac{-8}{-2} = 4 \end{cases}$$

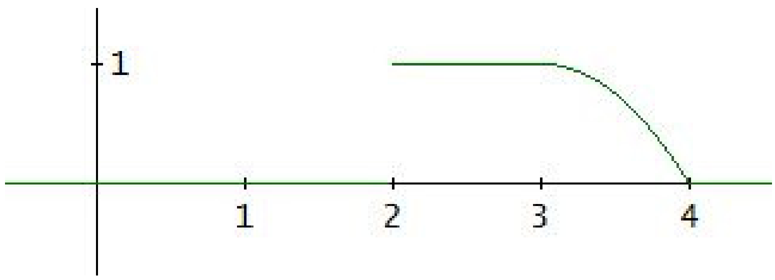
Corte eje OX $(\,2\,,\,0\,)$ *y* $(\,4\,,\,0\,)$

Vértice $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2(-1)} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \;\rightarrow\; y = -3^2 + 6\,.\,3 - 8 = 1 \;\rightarrow\; (3\,,1)$

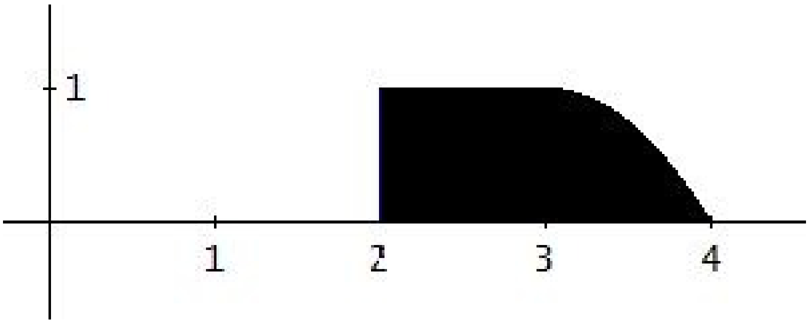
La representación de la parábola es:



Y la representación de $f(x)$ *en* $[\,2\,,\,4\,]$:



El área pedida será:



que la obtenemos a partir del siguiente cálculo integral:

$$A = \int_2^3 1\, dx + \int_3^4 \left(-x^2 + 6x - 8\right) dx = [x]_2^3 + \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x\right]_3^4 =$$

$$= (3-2) + \left(\frac{-4^3}{3} + 3\,.\,4^2 - 8\,.\,4 - \left(\frac{-3^3}{3} + 3\,.\,3^2 - 8\,.\,3\right)\right) =$$

$$= 1 - \frac{64}{3} + 48 - 32 - (-9 + 27 - 24) = 17 - \frac{64}{3} - (-6) = 23 - \frac{64}{3} = \frac{69-64}{3} = \frac{5}{3}$$

El área mide $\frac{5}{3}$ *u.a.*

OPCIÓN A

Problema 2. Se estima que el beneficio anual *B(t)*, en %, que produce cierta inversión viene determinado por el tiempo *t* en meses que se mantiene dicha inversión a través de la siguiente expresión:

$$B(t)=\frac{36t}{t^2+324}+1,\ t\ge 0.$$

a) Describe la evolución del beneficio en función del tiempo durante los primeros 30 meses.
b) Calcula, razonadamente, cuánto tiempo debe mantenerse dicha inversión para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?
c) ¿Cuál sería el beneficio de dicha inversión si ésta se mantuviera en el tiempo de forma indefinida?

Solución:

Estudiemos la función $B(t)=\frac{36t}{t^2+324}+1,\ t\ge 0.$

$B(0)=\frac{36\,.\,0}{0^2+324}+1=\frac{0}{324}+1=0+1=1$, *la función B(t) pasa por el punto (0 , 1)*

Estudiemos su monotonía

$$B'(t)=\frac{36\,.\left(t^2+324\right)-36\,.\,t\,.\,2t}{\left(t^2+324\right)^2}=\frac{36\,t^2+11664-72\,t^2}{\left(t^2+324\right)^2}=\frac{-36\,t^2+11664}{\left(t^2+324\right)^2}$$

$$B'(t)=0\ \rightarrow\ \frac{-36\,t^2+11664}{\left(t^2+324\right)^2}=0\ \rightarrow\ -36\,t^2+11664=0$$

$$36\,t^2=11664$$

$$t^2=\frac{11664}{36}=324$$

$$t=\pm\sqrt{324}=\pm 18$$

Como la función B(t) está definida para $t\ge 0$, $t = 18$.
Estudiemos el signo de B´(t) a la izquierda y derecha de 18,

$$B'(1)=\frac{-36\,.\,1^2+11664}{\left(1^2+324\right)^2}=\frac{-36+11664}{325^2}=\frac{11628}{325^2}=+$$

$$B'(20)=\frac{-36\,.\,20^2+11664}{\left(20^2+324\right)^2}=\frac{-2376}{\left(20^2+324\right)^2}=-$$

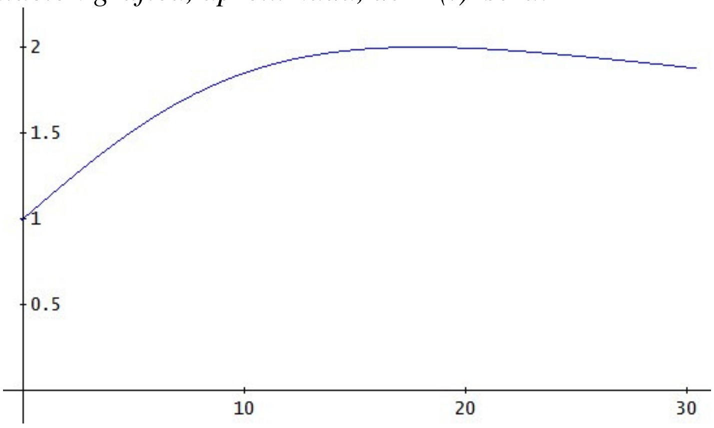
Es decir:

Por lo tanto, B(t) es creciente en (0 , 18) y decreciente en (18 , +∞) y para t = 18 alcanza su máximo.

$B(18)=\frac{36\,.\,18}{18^2+324}+1=2$, *el máximo está en el punto (18 , 2)*

Para responder al apartado a) calculemos el valor de B(t) para t = 30, $B(30)=\frac{36\,.\,30}{30^2+324}+1=1'8824$

La representación gráfica, aproximada, de $B(t)$ será:



Respondamos a los apartados.

a) Durante los 30 primeros meses la evolución del beneficio es: empieza proporcionando un beneficio del 1% y va creciendo hasta los 18 meses en que alcanza su valor máximo, un 2%. A partir de los 18 meses, a medida que aumenta el tiempo que se mantiene la inversión el beneficio desciende y manteniéndola 30 meses alcanza el valor de 1´8824%.

b) Según hemos calculado anteriormente el beneficio máximo se alcanza manteniendo la inversión durante 18 meses. Este beneficio máximo es del 2%.

c) Para obtener el beneficio de esta inversión si se mantuviera de forma indefinida debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{t \to +\infty}\left(\frac{36t}{t^2+324}+1\right)=\lim_{t \to +\infty}\frac{36t+t^2+324}{t^2+324}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t \to +\infty}\frac{t^2}{t^2}=\lim_{t \to +\infty} 1=1$$

Si la inversión se mantuviera en el tiempo de forma indefinida, el beneficio sería del 1%.