OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a) Dom f(x)

$$x^2-8x+15=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\,.\,1\,.\,15}}{2\,.\,1}=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{8\pm 2}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{8+2}{2}=5 \\ x_2=\dfrac{8-2}{2}=3 \end{cases}$$

Por tanto, Dom f(x) = $\Re$ ~{ 3 , 5 }

Puntos de corte con los ejes coordenados.
Corte con el eje OX

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15}= \quad\rightarrow\quad x^2-8x+16=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\,.\,1\,.\,16}}{2\,.\,1}=$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{8\pm 0}{2}=\frac{8}{2}=4 \quad\rightarrow\quad (4\,,0)$$

Corte con el eje OY

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2-8\,.\,0+16}{0^2-8\,.\,0+15}=\frac{16}{15} \quad\rightarrow\quad \left(0\,,\frac{16}{15}\right)$$

Por tanto, ***los puntos de corte con los ejes coordenados son: (4 , 0) y*** $\left(0\,,\dfrac{16}{15}\right)$**.**

b) Asíntotas verticales

Las posibles a.v. las buscamos entre los valores de x que anulan el denominador de f(x), es decir, x = 3 ó 5, según hemos obtenido en el apartado anterior.

x = 3

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15}=\frac{3^2-8.3+16}{3^2-8.3+15}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=3 \text{ es a.v.}$$

x = 5

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15}=\frac{5^2-8.5+16}{5^2-8.5+15}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=5 \text{ es a.v.}$$

Asíntotas horizontales,

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to-\infty}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to-\infty}{Lím} \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \underset{x\to-\infty}{Lím} \dfrac{x^2}{x^2} = \underset{x\to-\infty}{Lím}\, 1 = 1 \\ \underset{x\to+\infty}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to+\infty}{Lím} \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \underset{x\to+\infty}{Lím} \dfrac{x^2}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\, 1 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 1 \quad \text{es a.h.}$$

Por tanto, ***las asíntotas verticales de f(x) son x = 3 y x = 5, y su asíntota horizontal y = 1.***

Para resolver los apartados c) y d) calculamos f´(x) y estudiamos su signo,

$$f´(x) = \frac{(2x-8)\left(x^2-8x+15\right)-\left(x^2-8x+16\right)(2x-8)}{\left(x^2-8x+15\right)^2} = \frac{(2x-8)\left[\left(x^2-8x+15\right)-\left(x^2-8x+16\right)\right]}{\left(x^2-8x+15\right)^2} =$$

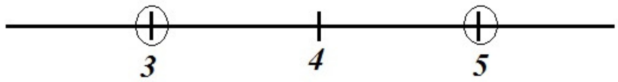
$$= \frac{(2x-8)\left[x^2-8x+15-x^2+8x-16\right]}{\left(x^2-8x+15\right)^2} = \frac{(2x-8)\,(-1)}{\left(x^2-8x+15\right)^2} = \frac{8-2x}{\left(x^2-8x+15\right)^2}$$

Para estudiar el signo de f´(x) obtengamos las raíces del numerador y del denominador.

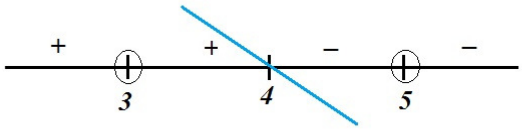
$8 - 2x = 0; \quad 8 = 2x; \quad x = 4$

$(x^2 - 8x + 15)^2 = 0; \quad x^2 - 8x + 15 = 0; \quad x = 3, 5$ *(hecho en a)).*

En la recta real marcamos las raíces obtenidas y los valores de x que no son del dominio de la función,



Hay que estudiar el signo de f´(x) es estos cuatro intervalos. f´(x) es un cociente cuyo denominador está elevado al cuadrado, luego siempre es positivo; por tanto el signo de f´(x) solo depende del numerador que es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 4, luego:



Resolvamos los apartados c) y d)

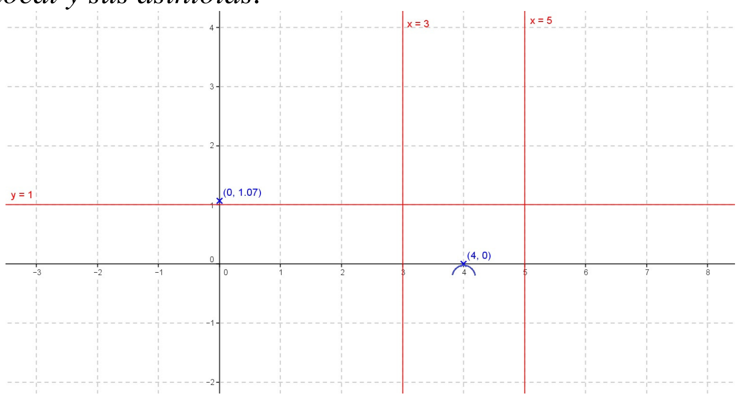
c) ***f(x) es creciente en (– ∞ , 3) ∪ (3 , 4) y f(x) es decreciente en (4 , 5) ∪ (5 , +∞)***

d) f(x) solo tiene un máximo local para x = 4,

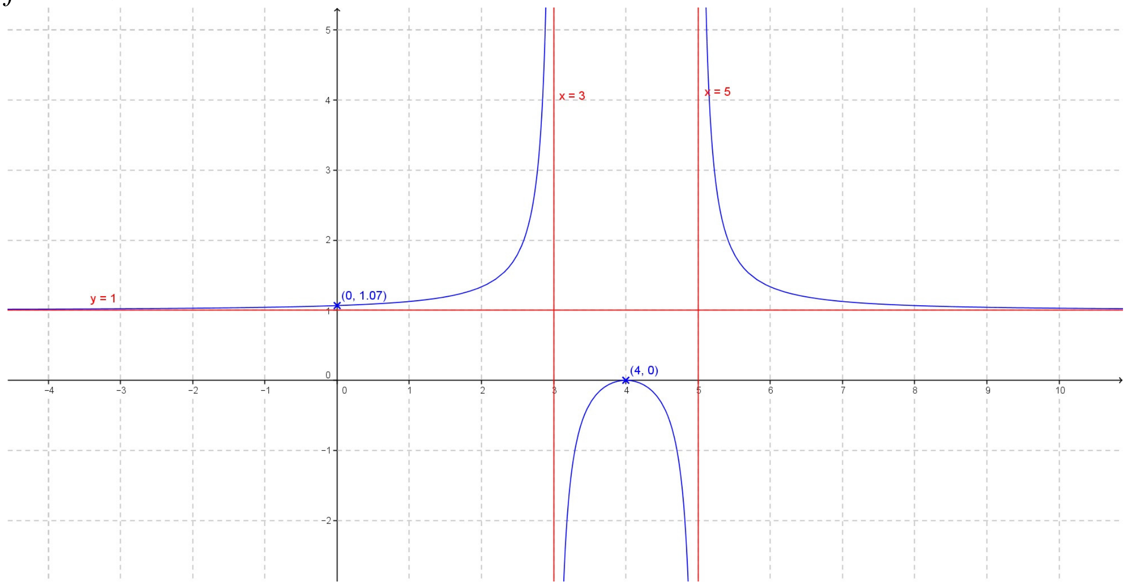
$$x = 4 \quad \rightarrow \quad f(4) = \frac{4^2-8.4+16}{4^2-8.4+15} = \frac{16-32+16}{16-32+15} = \frac{0}{-1} = 0$$

Por tanto, ***f(x) tiene un máximo local en (4 , 0) y no tiene mínimos locales.***

d) De lo estudiado en los apartados anteriores, conocemos los puntos de corte de f(x) con los ejes coordenados, su máximo local y sus asíntotas:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de la función será:



Si con los datos obtenidos no se supiese dibujar la función, se puede completar calculando la posición de la curva respecto de las asíntotas.

x = 3

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} \overset{x=2'9}{=} \frac{2'9^2-8.2'9+16}{2'9^2-8.2'9+15}\,\infty = \frac{+}{+}\,\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} \overset{x=3'1}{=} \frac{3'1^2-8.3'1+16}{3'1^2-8.3'1+15}\,\infty = \frac{+}{-}\,\infty = -\infty$$

$\rightarrow$ 

x = 5

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} \overset{x=4'9}{=} \frac{4'9^2-8.4'9+16}{4'9^2-8.4'9+15}\,\infty = \frac{+}{-}\,\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} \overset{x=5'1}{=} \frac{5'1^2-8.5'1+16}{5'1^2-8.5'1+15}\,\infty = \frac{+}{+}\,\infty = +\infty$$

$\rightarrow$ 

y = 1

$$x=-1000 \quad \rightarrow f(-1000) = \frac{(-1000)^2-8.(-1000)+16}{(-1000)^2-8.(-1000)+15} = \frac{1008016}{1008015} \cong 1'000...$$

$$x=1000 \quad \rightarrow f(1000) = \frac{1000^2-8.1000+16}{1000^2-8.1000+15} = \frac{992016}{990215} \cong 1'000...$$

$\rightarrow$

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, calcula:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Los máximos y mínimos locales.
e) Representa gráficamente la función a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio,

$$x^2-1=0 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1} \;\rightarrow\; x=\pm 1 \;\rightarrow\; Dom\ f(x)=\Re-\{-1\,,1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0^2}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{x^2-1}=0 \;\rightarrow\; x^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el (0 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x^2}{x^2}=\underset{x\to-\infty}{Lím}\,1=1$$

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x^2}{x^2}=\underset{x\to+\infty}{Lím}\,1=1$$

Luego, y = 1 es la asíntota horizontal

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. x = – 1 y x = 1

$x=-1$

$$\underset{x\to-1}{Lím}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{(-1)^2}{(-1)^2-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=-1 \quad es\ A.V.$$

$x=1$

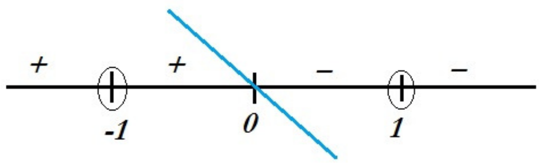
$$\underset{x\to 1}{Lím}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1^2}{1^2-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=1 \quad es\ A.V.$$

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de f´(x)

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es una línea recta de pendiente negativa (como – 2 x = 0 → x = 0) que pasa por (0 , 0). Es decir,



Por tanto,
f(x) es creciente en (–∞, – 1) ∪ (– 1 , 0) y
f(x) es decreciente en (0 , 1) ∪ (1 , +∞)

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 0$ hay un máximo local. Y la función no tiene mínimos locales.

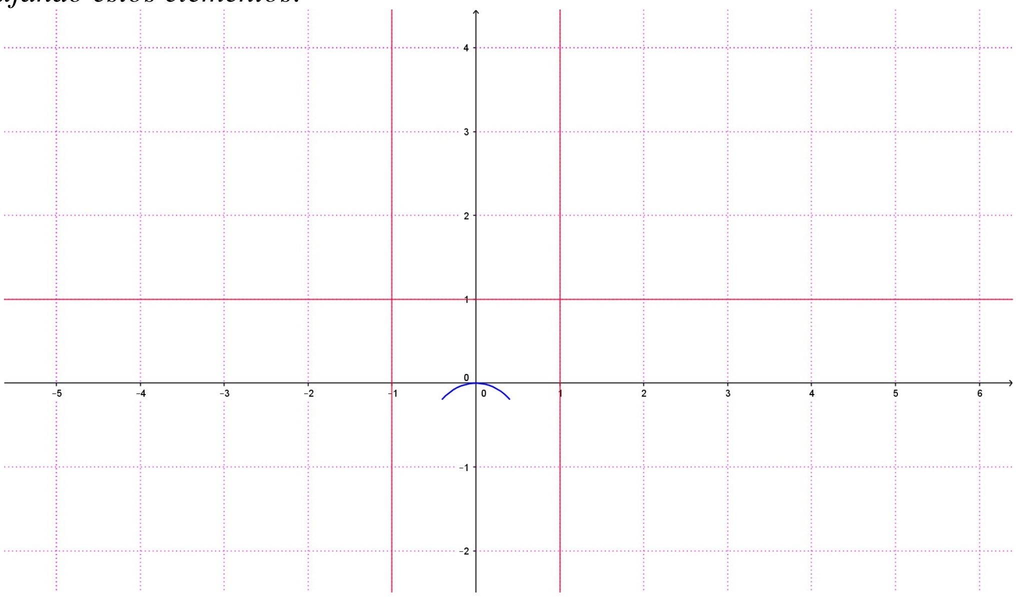
Máximo local en el punto (0 , 0)

e) Representación gráfica.

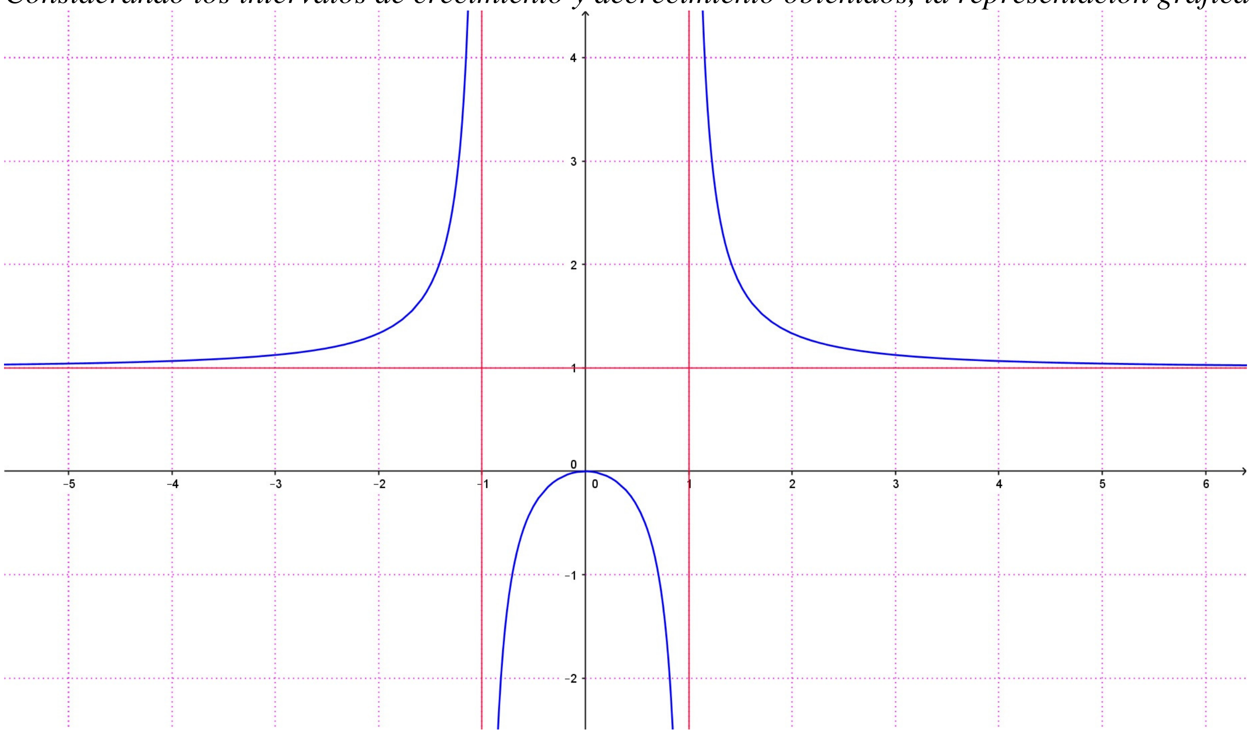
De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 0) que, además, es máximo local; a.h. $y = 1$ y a.v. $x = -1$ y $x = 1$.

Dibujando estos elementos:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x^2+x-2=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases}$$

Luego $Dom\, f(x)=\Re-\{-2,1\}$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0-3}{0^2+0-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2} \;\rightarrow\; \left(0,\frac{3}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=0 \;\rightarrow\; x^2-2x-3=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=$$

$$=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{2+4}{2}=3 \;\rightarrow\; (3,0) \\ x_2=\dfrac{2-4}{2}=-1 \;\rightarrow\; (-1,0) \end{cases}$$

Los puntos de corte de f(x) con los ejes coordenados son: $\left(0,\frac{3}{2}\right)$, $(-1,0)$ ***y*** $(3,0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}(1)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(1)=1$$

Luego la asíntota horizontal de f(x) es y = 1

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. $x=-2$ *y* $x=1$*. Veámoslo,*
$x=-2$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{(-2)^2-2(-2)-3}{(-2)^2+(-2)-2}=\frac{5}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=-2 \text{ es A.V.}$$

$x=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{1^2-2\cdot 1-3}{1^2+1-2}=\frac{-4}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \quad es\ A.V.$$

De la función su ***asíntota horizontal es y = 1*** *y* ***sus asíntotas verticales*** *son* ***x = – 2 y x = 1***.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de f´(x)

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot\left(x^2+x-2\right)-\left(x^2-2x-3\right)\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=$$

Efectuemos las operaciones del numerador,

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & x^2 & + & x & - & 2\\ & \otimes & & & 2x & - & 2\\ \hline & - & 2x^2 & - & 2x & + & 4\\ 2x^3 & + & 2x^2 & - & 4x & & \\ \hline 2x^3 & & & - & 6x & + & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} & & x^2 & - & 2x & - & 3\\ & \otimes & & & 2x & + & 1\\ \hline & + & x^2 & - & 2x & - & 3\\ 2x^3 & - & 4x^2 & - & 6x & & \\ \hline 2x^3 & - & 3x^2 & - & 8x & - & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} 2x^3 & & & - & 6x & + & 4\\ -2x^3 & + & 3x^2 & + & 8x & + & 3\\ \hline & & 3x^2 & + & 2x & + & 7 \end{array}$$

$$=\frac{3x^2+2x+7}{\left(x^2+x-2\right)^2}$$

El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, es positivo, por tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador. Busquemos las raíces del numerador,

$$3x^2+2x+7=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot 7}}{2\cdot 3}=\frac{-2\pm\sqrt{-80}}{6} \quad no\ existe$$

El numerador es un polinomio de 2º grado sin raíces y con coeficiente de x^2 *positivo, por tanto el numerador es positivo. Obtenemos que f´(x) es positiva, por tanto* ***f(x) es creciente en su dominio.***

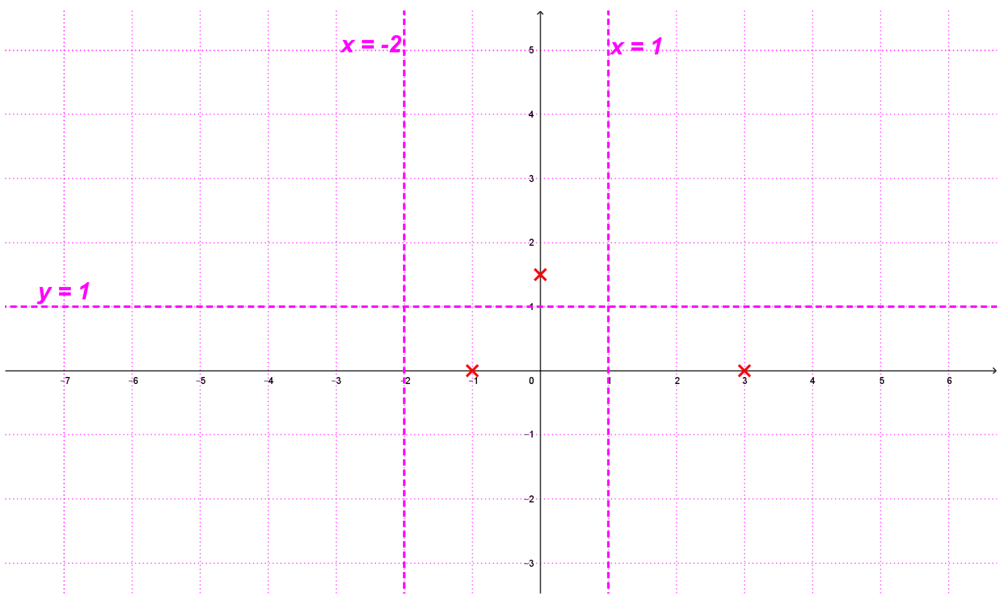
d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior, como f(x) es creciente en su dominio, ***f(x) no tiene ni máximos ni mínimos locales.***

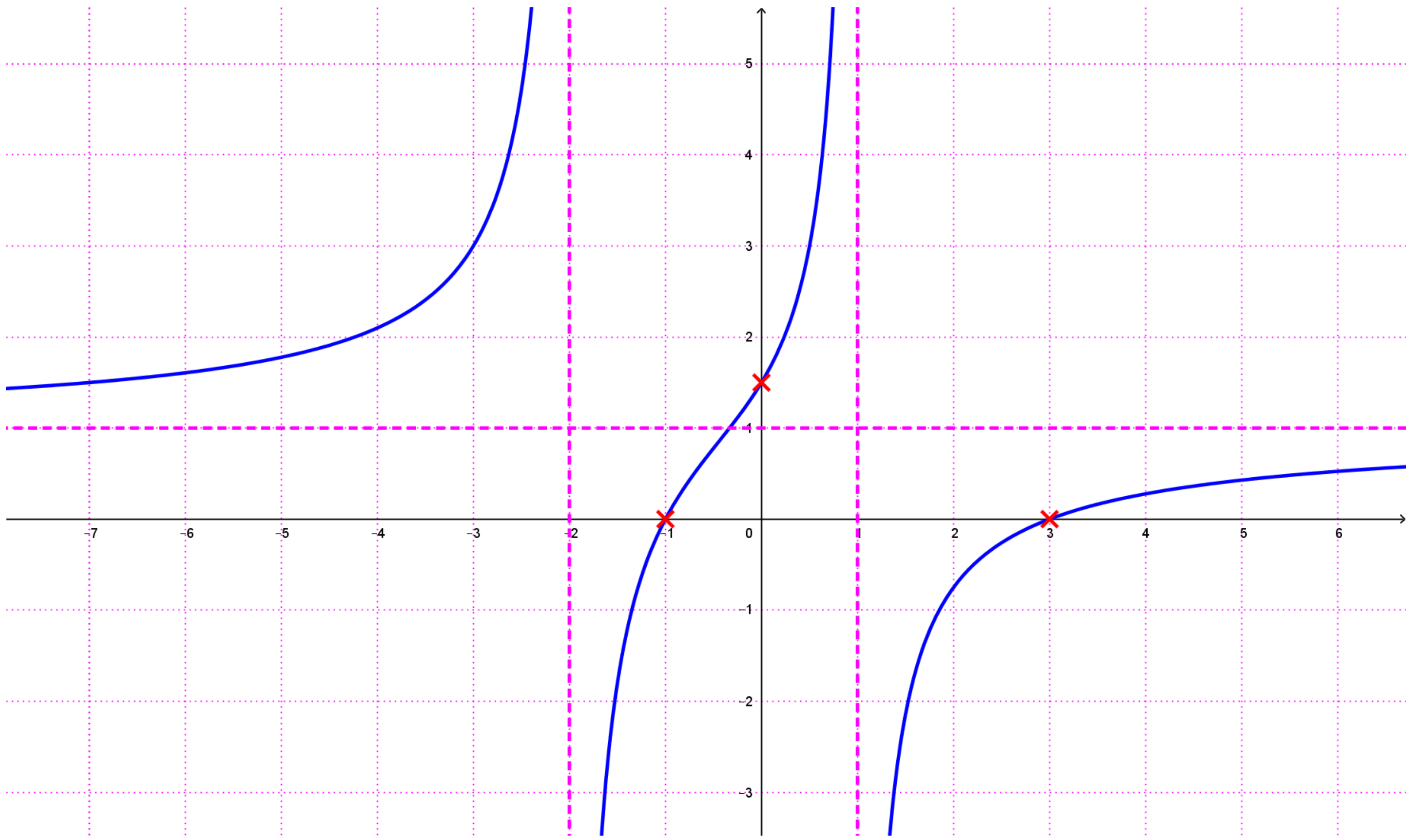
e) Representación gráfica.

Representemos los puntos de corte y asíntotas obtenidos en los apartados anteriores.

Dibujando estos elementos:



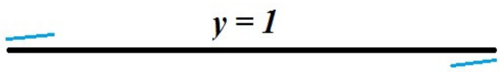
Considerando que la función es creciente en su dominio, la representación gráfica de f(x) es:



Si la representación no se obtiene tan directamente, como hay que realizarla a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, podemos completar los cálculos obteniendo la posición de la curva respecto de las asíntotas.
Que sería,

Posición de la curva respecto de la asíntota horizontal,

$$x=-1000 \quad \rightarrow \quad y=\frac{(-1000)^2-2\cdot(-1000)-3}{(-1000)^2+(-1000)-2}=1'0030...$$



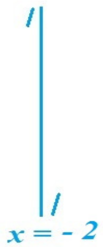
$$x=1000 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1000^2-2\cdot 1000-3}{1000^2+1000-2}=0'9970...$$

Posición de la curva respecto de las asíntotas verticales,

$$x=-2$$

$$\underset{x\to -2^-}{Lím}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\overset{x=-2'1}{=}\frac{(-2'1)^2-2\cdot(-2'1)-3}{(-2'1)^2+(-2'1)-2}\infty=+\infty$$

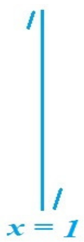
$$\underset{x\to -2^+}{Lím}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\overset{x=-1'9}{=}\frac{(-1'9)^2-2\cdot(-1'9)-3}{(-1'9)^2+(-1'9)-2}\infty=-\infty$$



$$x=1$$

$$\underset{x\to 1^-}{Lím}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\overset{x=0'9}{=}\frac{0'9^2-2\cdot 0'9-3}{0'9^2+0'9-2}\infty=+\infty$$

$$\underset{x\to 1^+}{Lím}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\overset{x=1'1}{=}\frac{1'1^2-2\cdot 1'1-3}{1'1^2+1'1-2}\infty=-\infty$$



Añadiendo la posición de la curva respecto de las asíntotas en la primera gráfica de este apartado, la representación de la función resulta inmediata.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+5}{x^2-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad x^2=1 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{-1,1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{2\cdot 0^2-3\cdot 0+5}{0^2-1}=-5 \quad\rightarrow\quad (0\,,-5)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=0 \quad\rightarrow\quad 2x^2-3x+5=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2}=$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{-31}}{4} \quad \text{sin } \textit{solución}$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el (0 , – 5).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2=2$$

, *la asíntota horizontal es y = 2.*

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. x = – 1 y x = 1

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{2(-1)^2-3(-1)+5}{(-1)^2-1}=\frac{10}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=-1 \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1+5}{1^2-1}=\frac{4}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \quad es\ A.V.$$

La asíntota horizontal es y = 2 y las asíntotas verticales son x = – 1 y x = 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(4x-3)\cdot\left(x^2-1\right)-\left(2x^2-3x+5\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{4x^3-4x-3x^2+3-4x^3+6x^2-10x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^2-14x+3}{\left(x^2-1\right)^2}$$

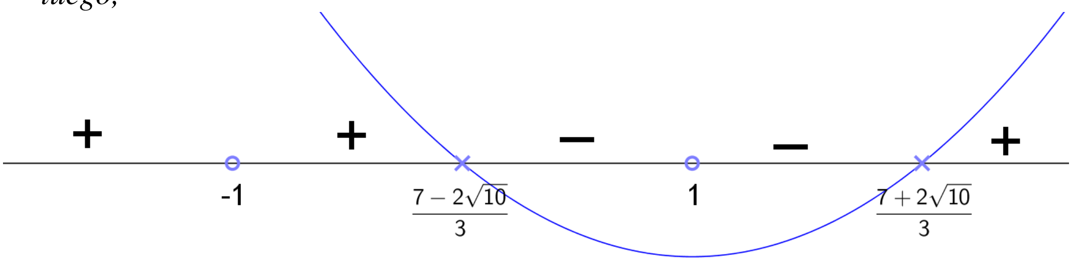
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$3x^2-14x+3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3}=\frac{14\pm 4\sqrt{10}}{6}=\frac{7\pm 2\sqrt{10}}{3}=\left\langle\begin{array}{l} x_1=\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}\cong 4'4415\ldots \\ x_2=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}\cong 0'2251\ldots\end{array}\right.$$

$$\left(x^2-1\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=\pm 1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: ($\{-1,1\}\notin Dom\ f(x)$)

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces $\frac{7\pm 2\sqrt{10}}{3}$, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en $(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{7-2\sqrt{10}}{3}\right)\cup\left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3},+\infty\right)$ ***y***

f(x) es decreciente en $\left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3},1\right)\cup\left(1,\frac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x=\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$ hay un máximo local y en $x=\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$ hay un mínimo local.

$$x=\frac{7-2\sqrt{10}}{3} \quad\rightarrow\quad y=-4'662277\ldots \qquad \text{Máximo local} \quad \left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3},-4'662277\ldots\right)\cong(0'225,-4'662)$$

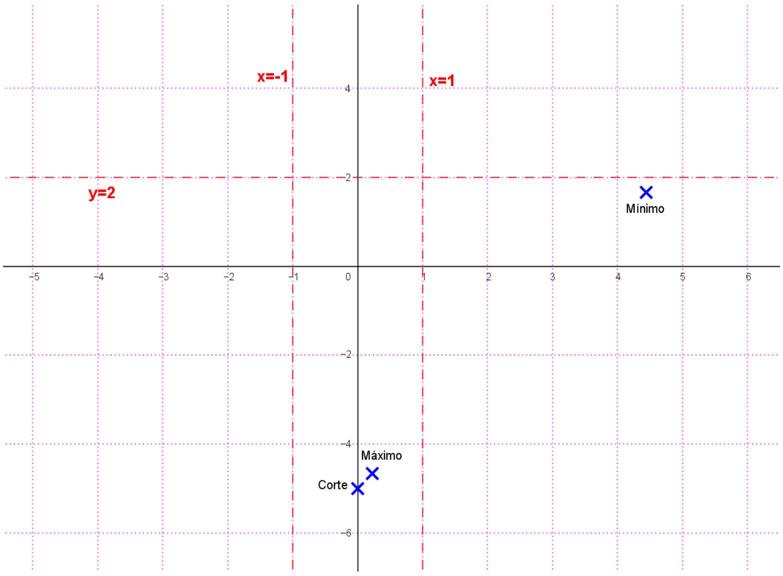
$$x=\frac{7+2\sqrt{10}}{3} \quad\rightarrow\quad y=1'662277\ldots \qquad \text{Mínimo local} \quad \left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3},1'662277\ldots\right)\cong(4'441,1'662)$$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , – 5), máximo local en (0´225, – 4´662), mínimo local en (4´441, 1´662); a.h. y = 2., a.v. x = – 1 y x = 1.

Representando gráficamente esta información:



Para completar la representación veamos la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

A.H. $y = 2$

$$En -\infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2(-1000)^2 - 3(-1000) + 5}{(-1000)^2 - 1} = 2'003...$$

$$En +\infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2 \cdot 1000^2 - 3 \cdot 1000 + 5}{1000^2 - 1} = 1'997...$$

A.V. $x = -1$,

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \overset{x=-1'1}{=} \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

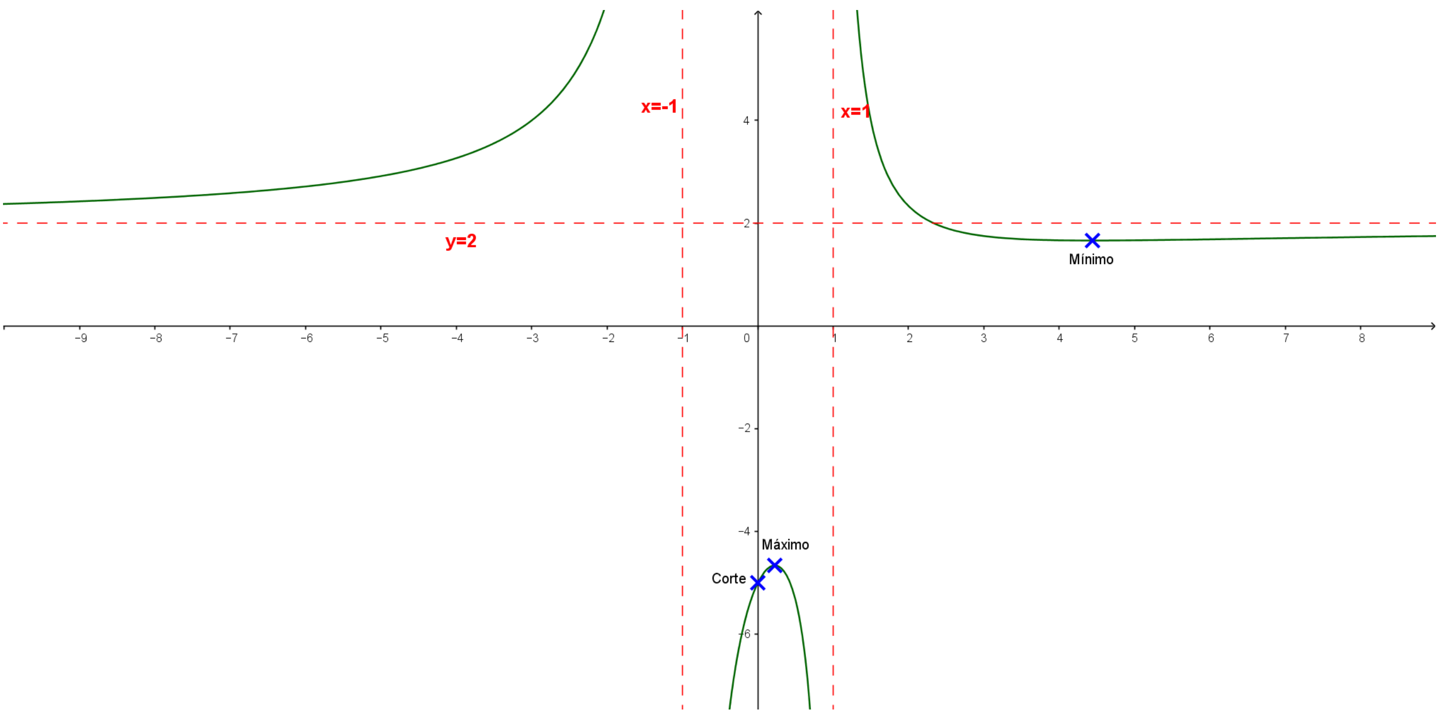
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \overset{x=-0'9}{=} \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

A.V. $x = 1$,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \overset{x=0'9}{=} \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \overset{x=1'1}{=} \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2+6}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{2-6}{2} = -2 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \quad Dom\ f(x) = \Re - \{-2, 4\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = \frac{0^2 - 36}{0^2 - 2 \cdot 0 - 8} = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad \left(0, \frac{9}{2}\right)$$

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 36 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{36} = \pm 6 \left\langle \begin{array}{l} (-6, 0) \\ (6, 0) \end{array} \right.$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$, ***(– 6 , 0) y (6 , 0).***

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

, *la asíntota horizontal es y = 1.*

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. x = – 2 y x = 4

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(-2)^2 - 36}{(-2)^2 - 2(-2) - 8} = \frac{-32}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = -2 \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4^2 - 36}{4^2 - 2 \cdot 4 - 8} = \frac{-20}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = 4 \quad es\ A.V.$$

La asíntota horizontal es y = 1 y las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 4.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-2x-8\right)-\left(x^2-36\right)\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{2x^3-4x^2-16x-2x^3+2x^2+72x-72}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{-2x^2+56x-72}{\left(x^2-2x-8\right)^2}$$

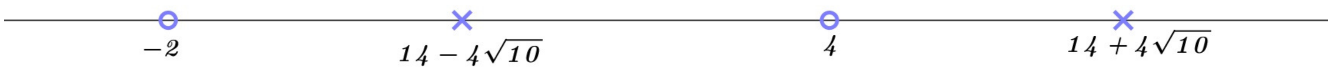
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$-2x^2+56x-72=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-56\pm\sqrt{56^2-4\cdot(-2)\cdot(-72)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-56\pm 16\sqrt{10}}{-4}=14\pm 4\sqrt{10}=$$

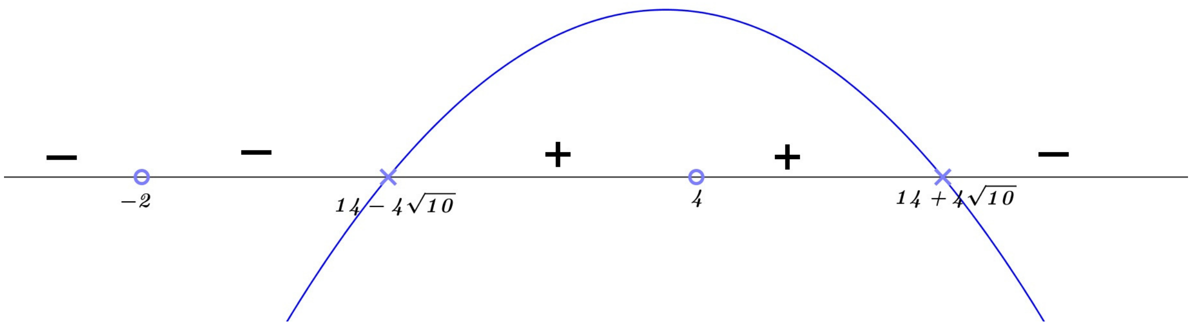
$$=\begin{cases} x_1=14-4\sqrt{10}\cong 1'3509 \\ x_2=14+4\sqrt{10}\cong 26'6491 \end{cases}$$

$\left(x^2-2x-8\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-2x-8=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=-2\ y\ 4$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* ($\{-2,4\}\notin Dom\ f(x)$)



El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces* $14\pm 4\sqrt{10}$, *luego,*



Por tanto,

f(x) es creciente en $\left(14-4\sqrt{10},4\right)\cup\left(4,14+4\sqrt{10}\right)$ ***y***

f(x) es decreciente en $(-\infty,-2)\cup\left(-2,14-4\sqrt{10}\right)\cup\left(14+4\sqrt{10},+\infty\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x_1=14-4\sqrt{10}$ *hay un mínimo local y en* $x_2=14+4\sqrt{10}$ *hay un máximo local.*

$$f(x_1)=\frac{\left(14-4\sqrt{10}\right)^2-36}{\left(14-4\sqrt{10}\right)^2-2\left(14-4\sqrt{10}\right)-8}\cong 3'8499 \quad\rightarrow\quad \text{Mínimo local} \quad \left(14-4\sqrt{10},3'8499\right)\cong(1'35,3'85)$$

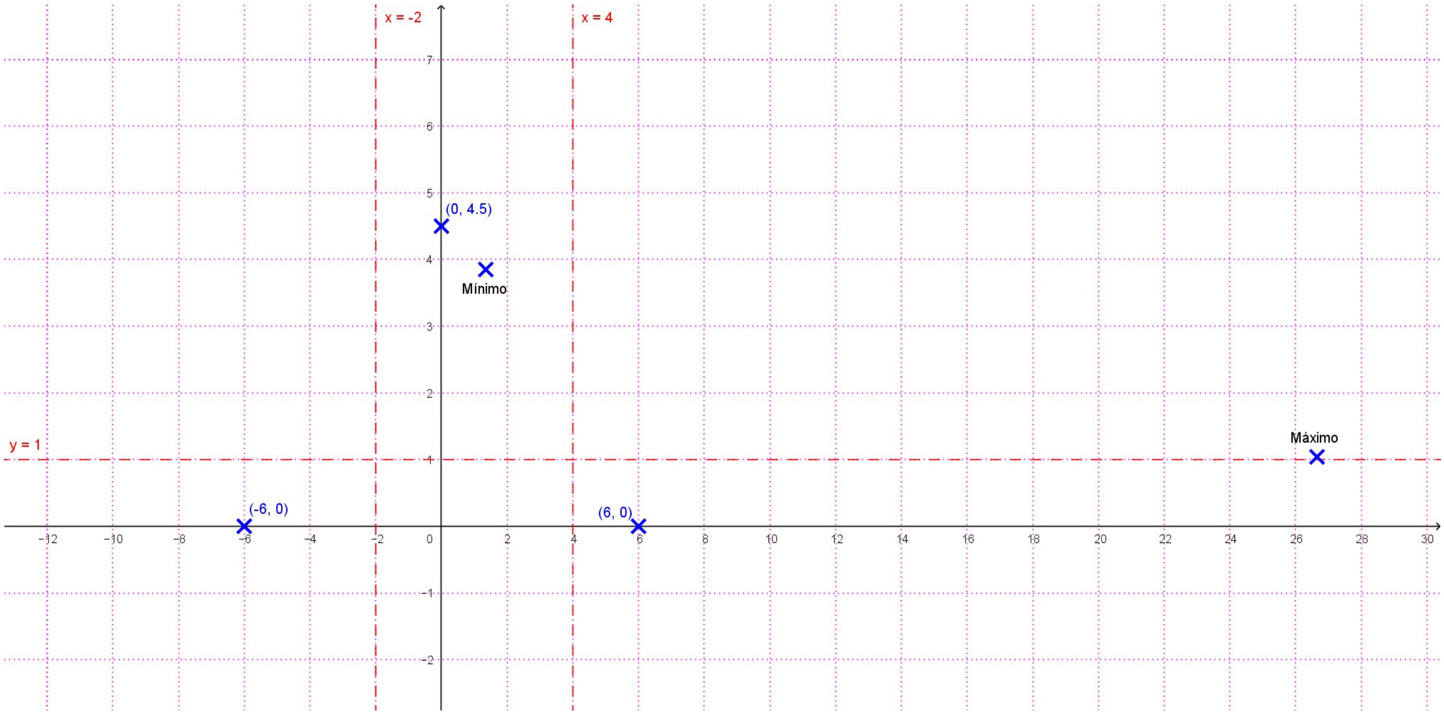
$$f(x_2)=\frac{\left(14+4\sqrt{10}\right)^2-36}{\left(14+4\sqrt{10}\right)^2-2\left(14+4\sqrt{10}\right)-8}\cong 1'0380 \quad\rightarrow\quad \text{Máximo local} \quad \left(14+4\sqrt{10},1'0380\right)\cong(26'65,1'04)$$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $\left(0,\frac{9}{2}\right)$, $(-6,0)$ *y* $(6,0)$*, mínimo local en (1´35, 3´85), máximo local en (26´65, 1´04); a.h.* $y=1$*, a.v.* $x=-2$ *y* $x=4$*.*

Representando gráficamente esta información:



Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

A.H. $y = 1$

$$En -\infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{(-1000)^2 - 36}{(-1000)^2 - 2(-1000) - 8} = 0'997...$$

$$En +\infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1000^2 - 36}{1000^2 - 2 \cdot 1000 - 8} = 1'001...$$

A.V. $x = -2$,

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \stackrel{x=-2'1}{=} \frac{-}{+}\infty = -\infty$$

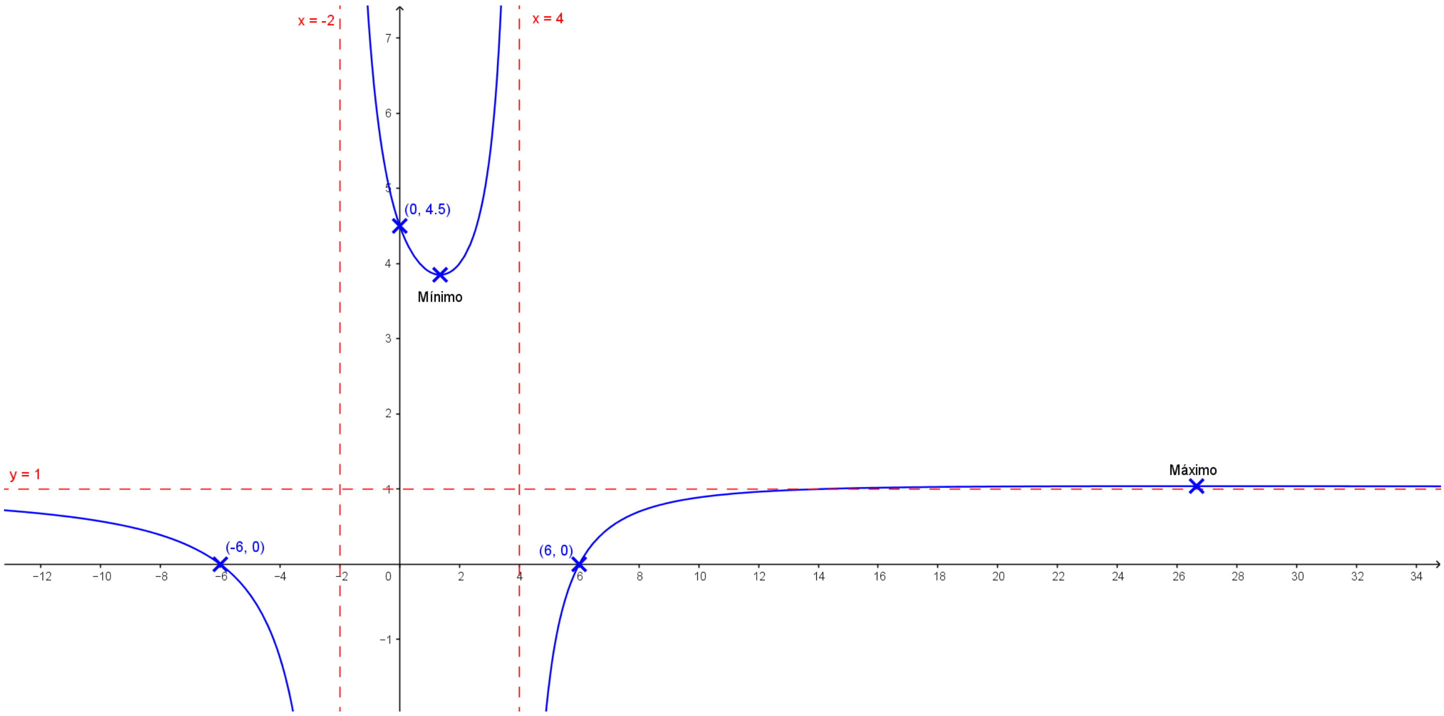
$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \stackrel{x=-1'9}{=} \frac{-}{-}\infty = +\infty$$

A.V. $x = 4$,

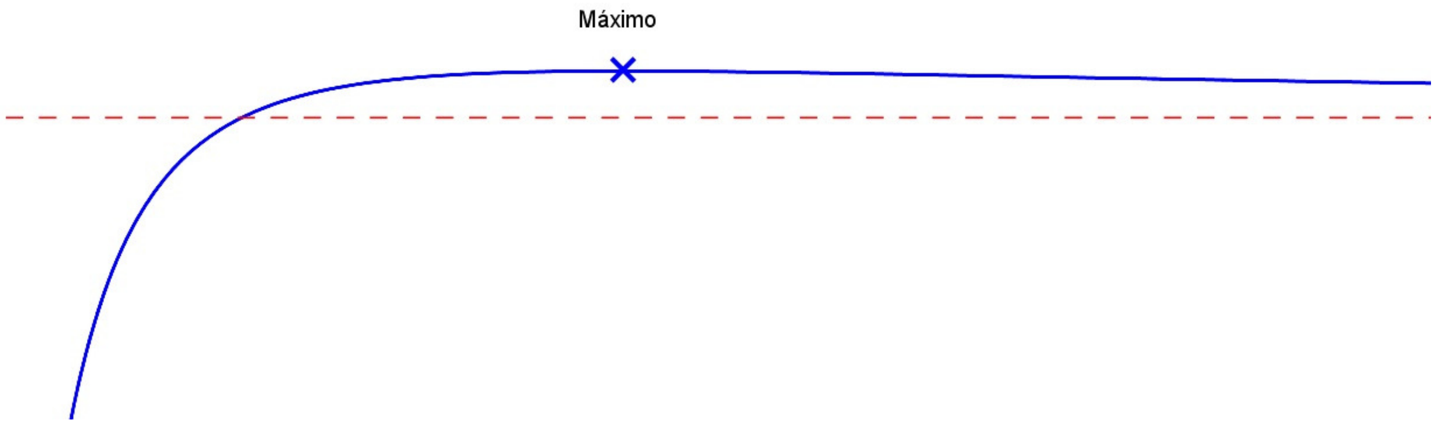
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \stackrel{x=0'9}{=} \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \stackrel{x=1'1}{=} \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Si nos acercamos al máximo local:



Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:

a) Dominio,

$$x^2-x-1=0 \rightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1'62 \\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=-0'62\end{cases}$$

$$\rightarrow \quad Dom\, f(x)=\Re-\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0)=\frac{3\cdot 0^2-4\cdot 0-4}{0^2-0-1}=\frac{-4}{-1}=4 \rightarrow (0,4)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=0;\quad 3x^2-4x-4=0 \rightarrow x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3}=\frac{4\pm 8}{6}=$$

$$=\begin{cases} x_1=\dfrac{4+8}{6}=2 & (2,0) \\ x_2=\dfrac{4-8}{6}=\dfrac{-2}{3} & \left(\dfrac{-2}{3},0\right)\end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , 4), $\left(\dfrac{-2}{3},0\right)$ y (2 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}3=3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}3=3$$

, *la asíntota horizontal es y = 3.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y* $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} =$$

$$\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} =$$

sustituir el valor de x *en cada límite sería un cálculo largo y engorroso.*

Para estos valores de x *sabemos que el denominador es cero (son las raíces del polinomio del denominador) y el numerador es distinto de cero (las raíces del numerador son 2 y* $\frac{-2}{3}$*). Por tanto*

$$\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \frac{\neq 0}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{es A.V.}$$

$$\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \frac{\neq 0}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{es A.V.}$$

La asíntota horizontal es $\boldsymbol{y = 3}$ ***y las asíntotas verticales son*** $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y* $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$**.**

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(6x-4)\cdot(x^2-x-1)-(3x^2-4x-4)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-1)^2} =$$

$$= \frac{6x^3-6x^2-6x-4x^2+4x+4-(6x^3-3x^2-8x^2+4x-8x+42)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{6x^3-10x^2-2x+4-6x^3+11x^2+4x-4}{(x^2-x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x^2-x-1)^2}$$

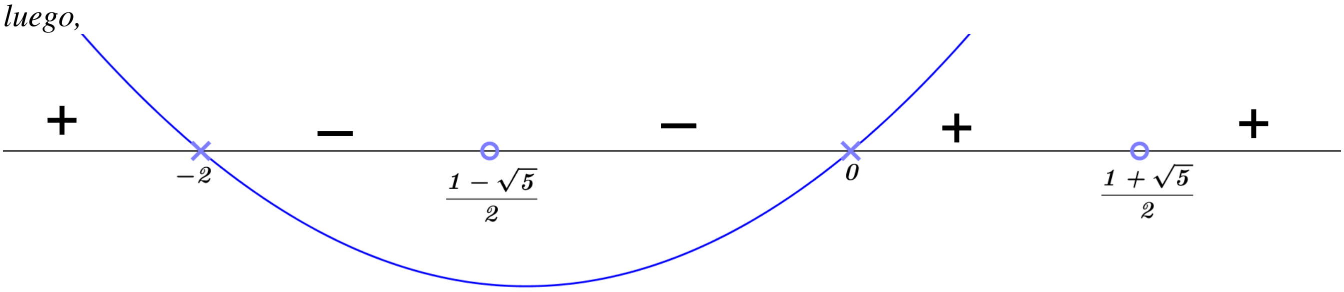
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$x^2+2x=0 \quad \rightarrow \quad x(x+2)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x+2=0; \quad x=-2 \end{array} \right.$$

$$(x^2-x-1)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-x-1=0 \quad \rightarrow \quad \{\text{resuelta en a}\} \quad x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad y \quad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $\left(\left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\} \notin Dom\ f(x) \right)$

El denominador de $f'(x)$ *está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de* $f'(x)$ *sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *positivo y raíces* -2 *y* 0*, luego,*



Por tanto,

$$f(x) \textbf{ es creciente en } (-\infty, -2) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \quad \textbf{y}$$

$$f(x) \textbf{ es decreciente en } \left(-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = -2$ *hay un máximo local y en* $x = 0$ *hay un mínimo local.*

$$x = -2 \quad f(-2) = \frac{3\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) - 4}{(-2)^2 - (-2) - 1} = \frac{16}{5} = 3'2 \quad \rightarrow \quad \text{Máximo local } \left(-2, \frac{16}{5}\right)$$

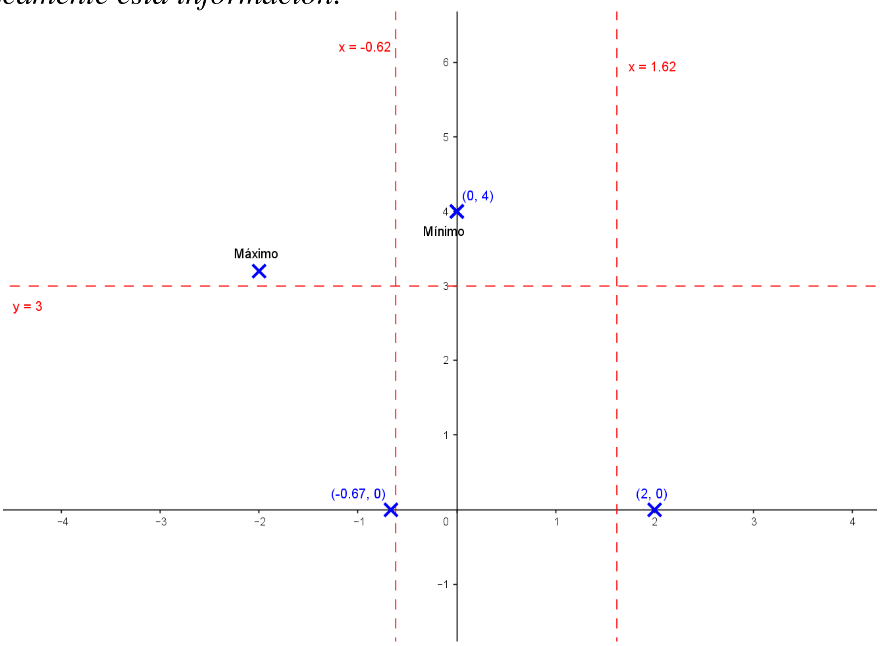
$x = 0$ $\quad f(0) = 4$ *{calculado en el apartado a)}* $\rightarrow$ *Mínimo local (0 , 4)*

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 4), $\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ *y (2 , 0), mínimo local en (0, 4), máximo local en* $\left(-2, \frac{16}{5}\right)$*; a.h.* $y = 3$*, a.v.* $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y* $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Representando gráficamente esta información:



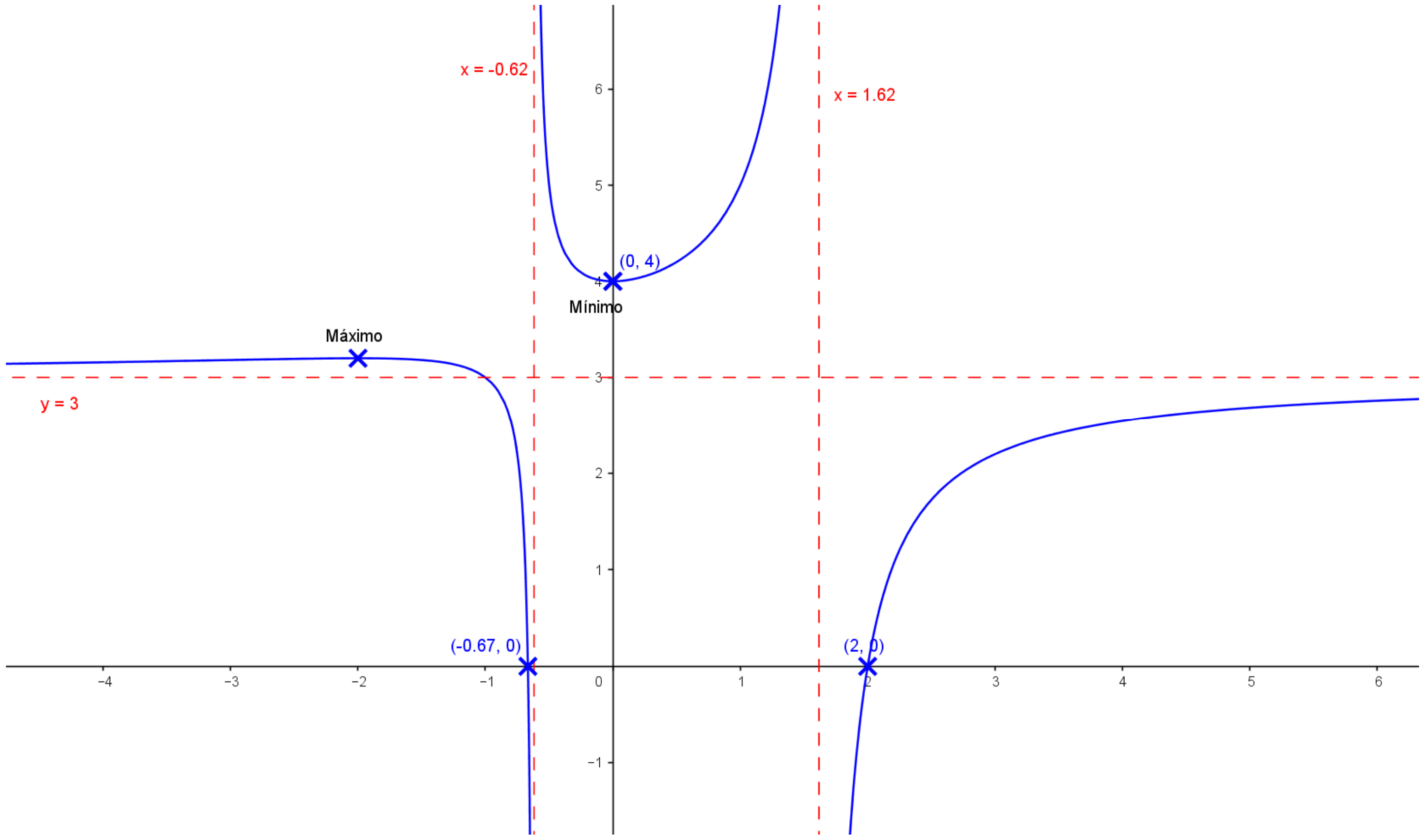
Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

A.H. $y = 3$

$$\text{En } -\infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3\cdot(-1000)^2 - 4\cdot(-1000) - 4}{(-1000)^2 - (-1000) - 1} = 3'00099\ldots$$

$$\text{En } +\infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3\cdot 1000^2 - 4\cdot 1000 - 4}{1000^2 - 1000 - 1} = 2'998\ldots$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:


x = -0.62
x = 1.62
(0, 4)
Mínimo
Máximo
y = 3
(-0.67, 0)
(2, 0)

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$2(x^2-1)=0 \quad \rightarrow \quad x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \quad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{-1,1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad \rightarrow \quad f(0)=\frac{4\cdot 0-5}{2(0^2-1)}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \left(0,\frac{5}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{4x-5}{2(x^2-1)}=0; \quad 4x-5=0; \quad 4x=5; \quad x=\frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{5}{4},0\right)$$

Su dominio es $Dom\ f(x)=\Re-\{-1,1\}$ ***y sus puntos de corte con los ejes coordenados son:*** $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ *y* $\left(\frac{5}{4},0\right)$**.**

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-5}{2(x^2-1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{2x}=\frac{4}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{2(x^2-1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2x}=\frac{4}{+\infty}=0$$

, la asíntota horizontal es y =0.

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles a.v. $x=-1$ *y* $x=1$.

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{4x-5}{2(x^2-1)}=\frac{4(-1)-5}{2((-1)^2-1)}=\frac{-9}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad es\ a.v.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{4x-5}{2(x^2-1)}=\frac{4\cdot 1-5}{2(1^2-1)}=\frac{-1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=1 \quad es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 0 y las asíntotas verticales son $x=-1$ ***y*** $x=1$**.**

c) Monotonía.
Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{4\cdot 2(x^2-1)-(4x-5)\cdot 2\cdot 2x}{(2(x^2-1))^2}=\frac{8x^2-8-16x^2+20x}{4(x^2-1)^2}=\frac{-8x^2+20x-8}{4(x^2-1)^2}=\frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}$$

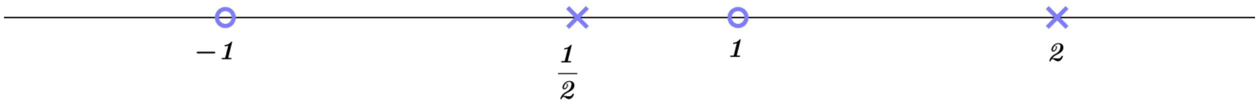
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$-2x^2+5x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{-4}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{-4}=\frac{-5\pm 3}{-4}=$$

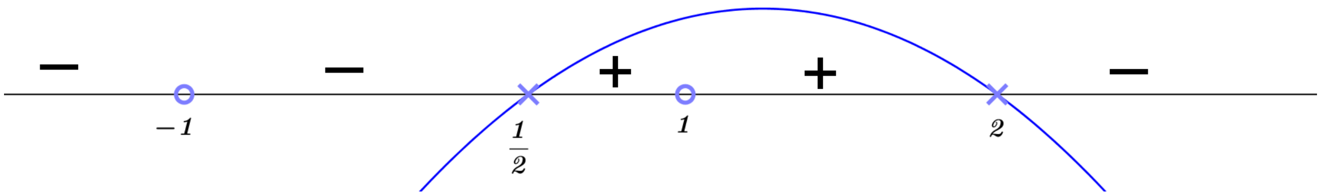
$$=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-5+3}{-4}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{-5-3}{-4}=\dfrac{-8}{-4}=2 \end{array}\right.$$

$$\left(x^2-1\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=-1 \quad y \quad x=1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $(\{-1,1\}\notin Dom\ f(x))$



El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces 1/2 y 2, luego,*



Por tanto,

f(x) es creciente en $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$ ***y***

f(x) es decreciente en $(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$**.**

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que en $x=\frac{1}{2}$ *hay un mínimo local y en* $x=2$ *hay un máximo local.*

$$x=\frac{1}{2} \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\,\frac{1}{2}-5}{2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)}=\frac{-3}{2\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\frac{-3}{2\left(\frac{-3}{4}\right)}=\frac{-3}{\frac{-3}{2}}=2 \quad \rightarrow \quad Mínimo\ local \quad \left(\frac{1}{2},2\right)$$

$$x=2 \quad f(2)=\frac{4\cdot 2-5}{2\left(2^2-1\right)}=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad Máximo\ local \quad \left(2,\frac{1}{2}\right)$$

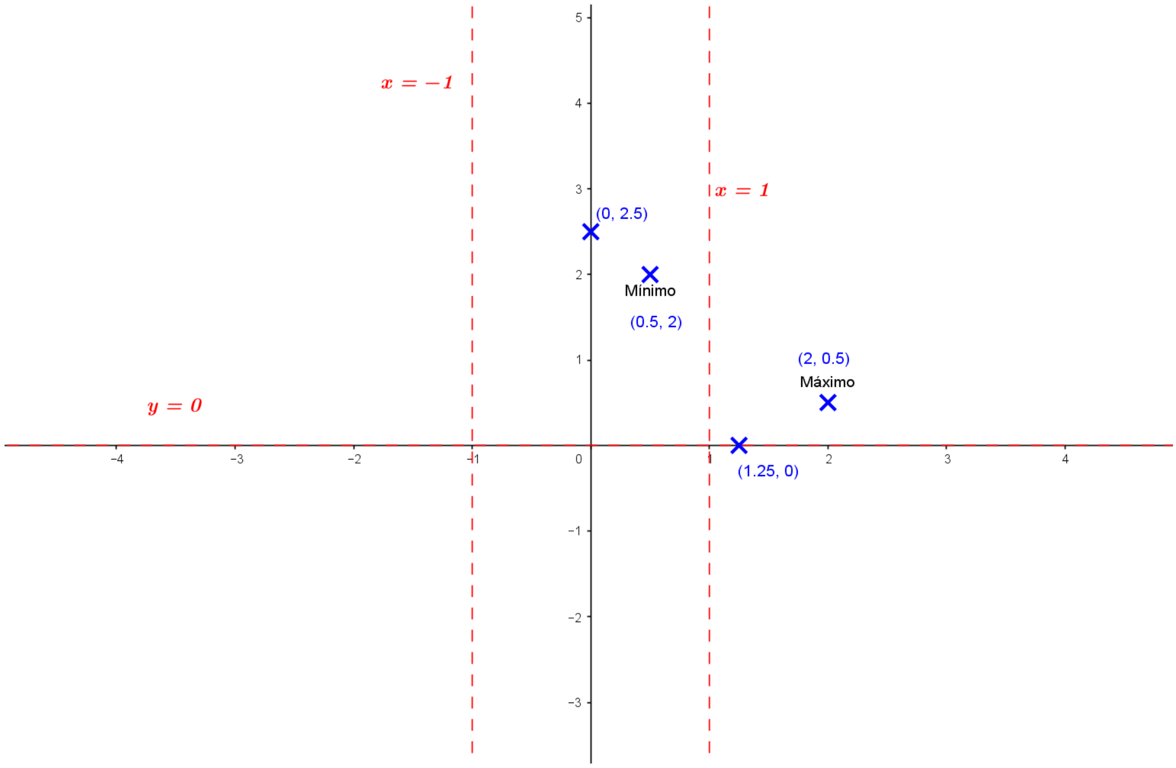
e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $\left(0\,,\dfrac{5}{2}\right)$ *y* $\left(\dfrac{5}{4},0\right)$, *mínimo local en* $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$, *máximo local en* $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$;

a.h. $y = 0$, *a.v.* $x = -1$ *y* $x = 1$.

Representando gráficamente esta información:

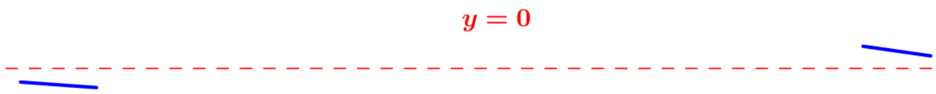


Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener:

la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal $y = 0$

$$En\ -\infty,\quad x=-1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{4\cdot(-1000)-5}{2\left((-1000)^2-1\right)}=-0'002\ldots<0$$

$$En\ +\infty,\quad x=1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{4\cdot 1000-5}{2\left(1000^2-1\right)}=0'0019\ldots>0$$

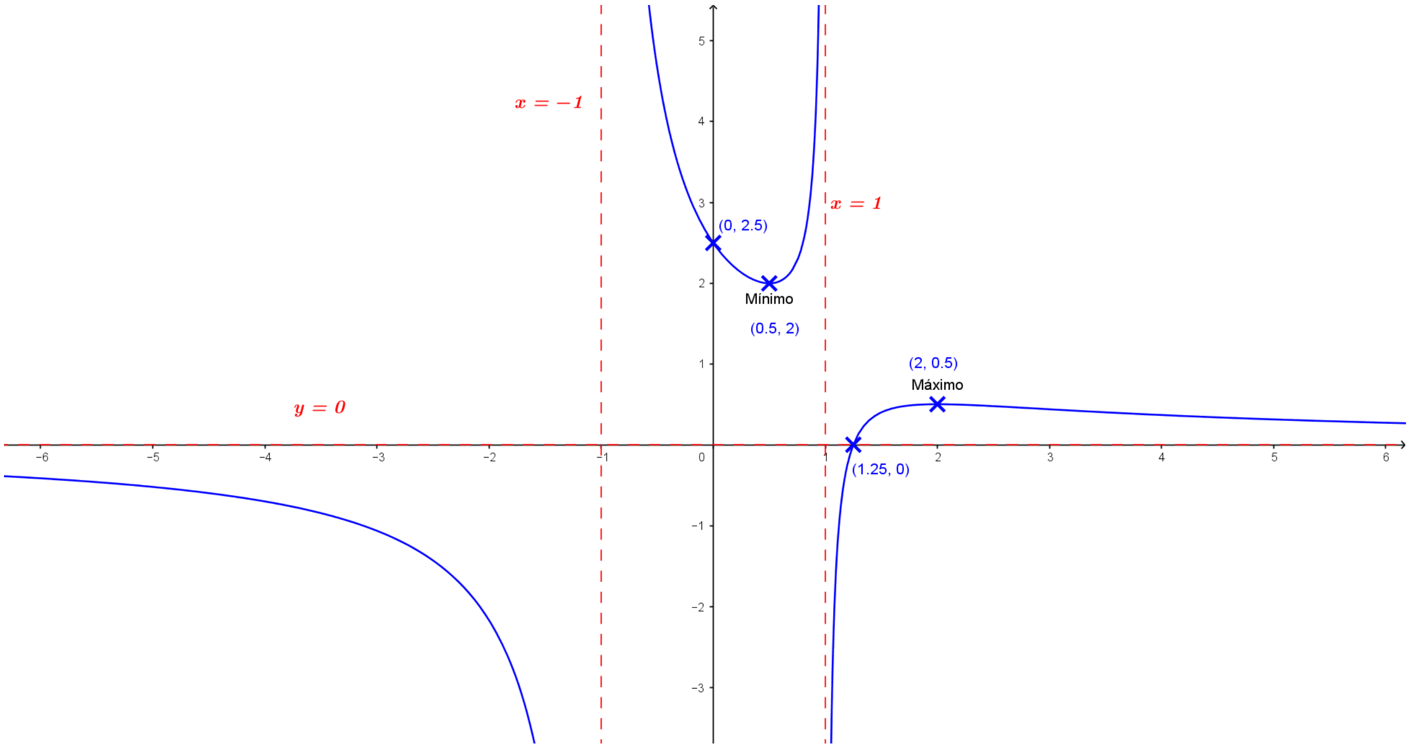


La posición de la curva respecto de su asíntota vertical $x = -1$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}\overset{x=-1'1}{=}\frac{4(-1'1)-5}{2\left((-1'1)^2-1\right)}\infty=\frac{-}{+}\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}\overset{x=-0'9}{=}\frac{4(-0'9)-5}{2\left((-0'9)^2-1\right)}\infty=\frac{-}{-}\infty=+\infty$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$\left(3x^2-1\right)^2=0 \quad\to\quad 3x^2-1=0 \quad\to\quad 3x^2=1 \quad\to\quad x^2=\frac{1}{3} \quad\to\quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\to \quad Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\to\quad f(0)=\frac{1}{\left(3\cdot 0^2-1\right)^2}=\frac{1}{1}=1 \quad\to\quad (0,1)$$

$$f(x)=0 \quad\to\quad \frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=0;\quad 1=0 \quad Falso,\quad no\ corta\ al\ eje\ OX$$

$Dom\ f(x)=\Re-\left\{\dfrac{-\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ ***y el único punto de corte con los ejes coordenados es: (0 , 1).***

b) Asíntotas horizontales y verticales.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\infty}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

, *la asíntota horizontal es y = 0.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que las posibles a.v. son $x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ *o* $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\lim_{x\to\frac{-\sqrt{3}}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{-\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\left(3\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right)^2}=\frac{1}{0}=\infty \quad\to\quad x=\frac{-\sqrt{3}}{3}\ es\ a.v.$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\left(3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right)^2}=\frac{1}{0}=\infty \quad\to\quad x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 0 y las asíntotas verticales $x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ *y* $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

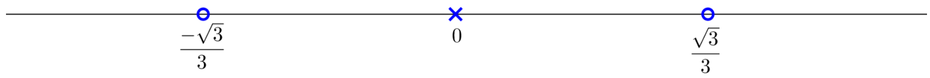
$$f'(x)=\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}\,\frac{-1\cdot 2\left(3x^2-1\right)6x}{\left[\left(3x^2-1\right)^2\right]^2}=\frac{-12\,x\left(3x^2-1\right)}{\left(3x^2-1\right)^4}=\frac{-12x}{\left(3x^2-1\right)^3}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$-12x=0 \quad\rightarrow\quad x=0$

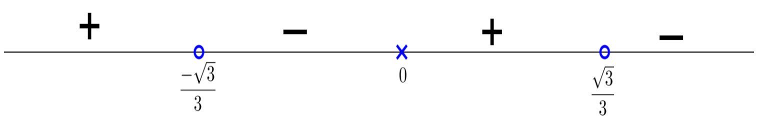
$$\left(3x^2-1\right)^3=0 \quad\rightarrow\quad 3x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\}\quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\cong\pm0'58$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $\left[\ Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}\ \right]$



Calculemos el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos,

x	$f'(x)=\frac{-12x}{\left(3x^2-1\right)^3}$
-1	$\frac{-12\cdot(-1)}{\left(3\,(-1)^2-1\right)^3}=\frac{12}{8}>0$
$-0'3$	$\frac{-12\cdot(-0'3)}{\left(3\,(-0'3)^2-1\right)^3}=\frac{3'6}{-0'3890}<0$
$0'3$	$\frac{-12\cdot(0'3)}{\left(3\,(0'3)^2-1\right)^3}=\frac{-3'6}{-0'3890}>0$
1	$\frac{-12\cdot 1}{\left(3\cdot 1^2-1\right)^3}=\frac{-12}{8}<0$



Por tanto,

f(x) es creciente en $\left(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ***y f(x) es decreciente en*** $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$**.**

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que en $x = 0$ $f(x)$ tiene un mínimo local y que no tiene máximos locales.

Para $x = 0$ $f(0) = 1$ {calculado en el apartado a}

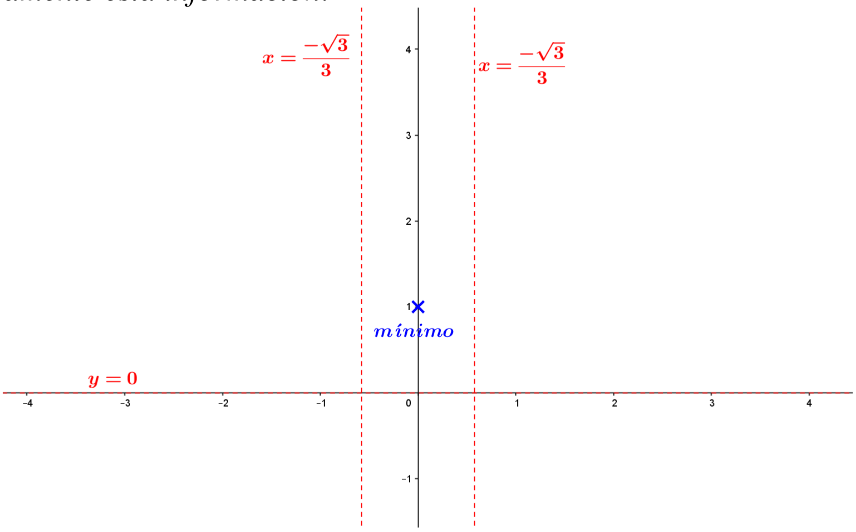
Solución: f(x) sólo tiene un mínimo local en (0 , 1).

e) Representación gráfica.

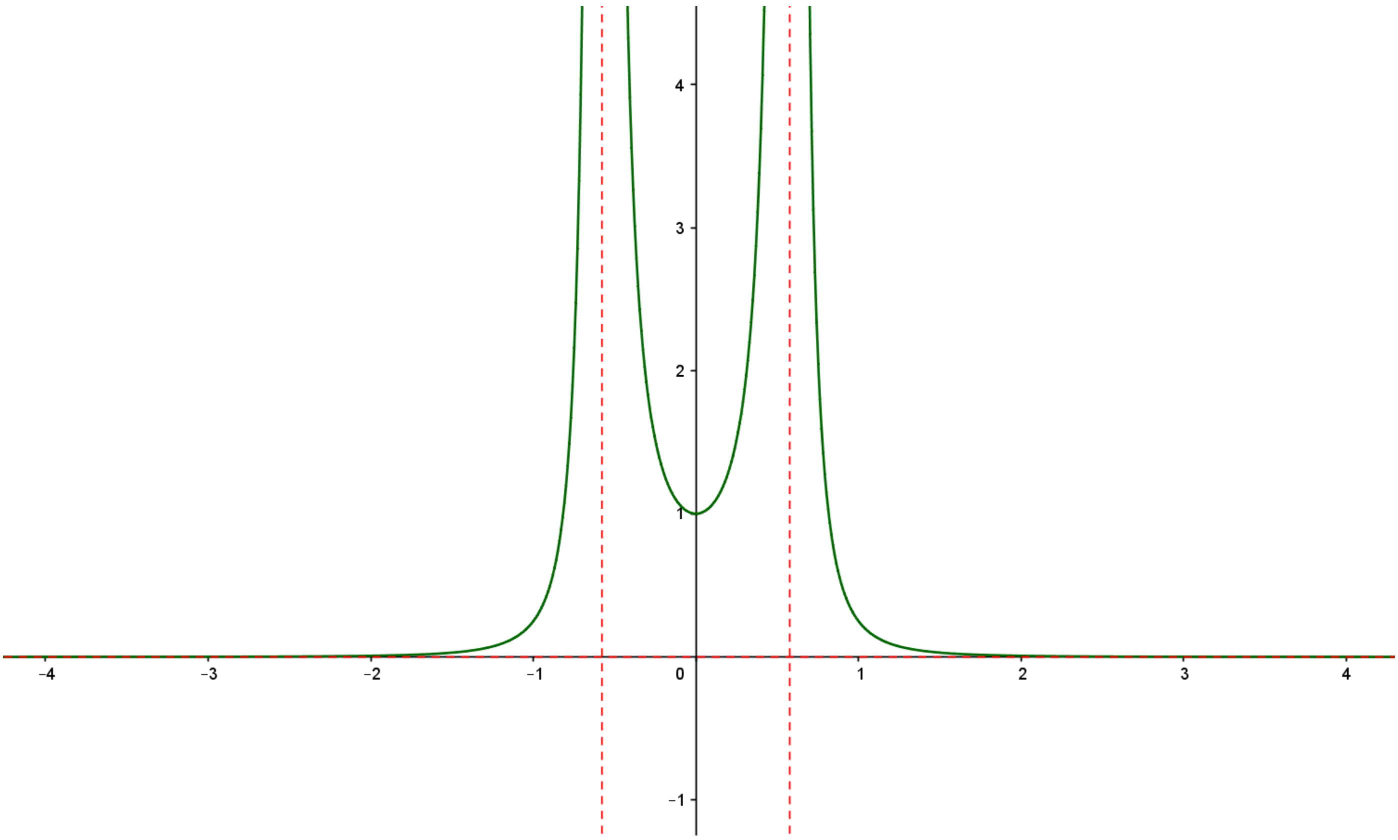
De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 1), mínimo local en (0 , 1); a.h. y = 0, a.v. $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ *y* $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Representando gráficamente esta información:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Si con la información anterior la representación no nos queda definida, calculamos puntos de la curva,

x	$f(x) = \dfrac{1}{(3x^2-1)^2}$
-1	$\dfrac{1}{(3\,(-1)^2-1)^2} = \dfrac{1}{8} > 0$
1	$\dfrac{1}{(3 \cdot 1^2-1)^2} = \dfrac{1}{8} > 0$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dada la función $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Máximos y mínimos locales.

d) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a)

y es una función polinómica, por lo tanto, su dominio es todos los números reales. Dom y = $\Re$

Puntos de corte de la función y con los ejes coordenados.

x = 0; y = 3; punto de corte con el eje OY (0 , 3)

y = 0; $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$*, resolvemos esta ecuación por Ruffini*

	1	1	−5	3
1		1	2	−3
	1	2	−3	0
1		1	3	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

La ecuación tiene dos soluciones

x = 1, solución doble

x = – 3

Puntos de corte con el eje OX

(1 , 0) y (– 3 , 0)

b) Estudiar la monotonía de y. Debemos estudiar el signo de y'.

$y' = 3x^2 + 2x - 5$

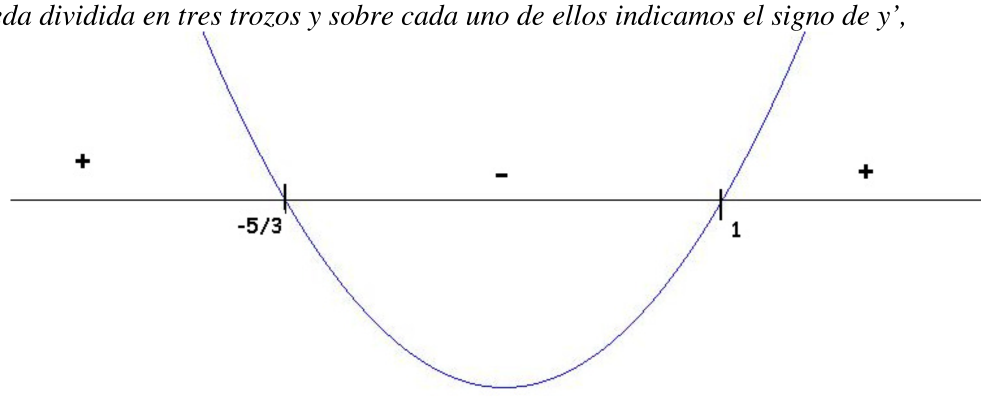
Resolvemos $3x^2 + 2x - 5 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, (-5)}}{2 \,.\, 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+8}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-2-8}{6} = \dfrac{-10}{6} = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$$

Representamos en la recta real los dos valores de x obtenidos; dibujamos, de forma aproximada, la parábola que representa a y'.

La recta queda dividida en tres trozos y sobre cada uno de ellos indicamos el signo de y',



Por lo tanto la función y es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{-5}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ *y decreciente en* $\left(\dfrac{-5}{3}, 1\right)$

c) Máximos y mínimos locales.

Resolvemos y' = 0 , ya resuelto en el apartado anterior.

Calculamos y'' = 6 x + 2

para x = – 5/3 ; y'' = 6 (– 5/3) + 2 = – 10 + 2 = – 8 < 0 ; hay un máximo local

para x = 1 ; y'' = 6 . 1 + 2 = 8 > 0; hay un mínimo local.

Calculemos las ordenadas de los extremos,

para x = 1, según calculamos en el apartado a) y = 0 ; Mínimo local en (1 , 0) *para*

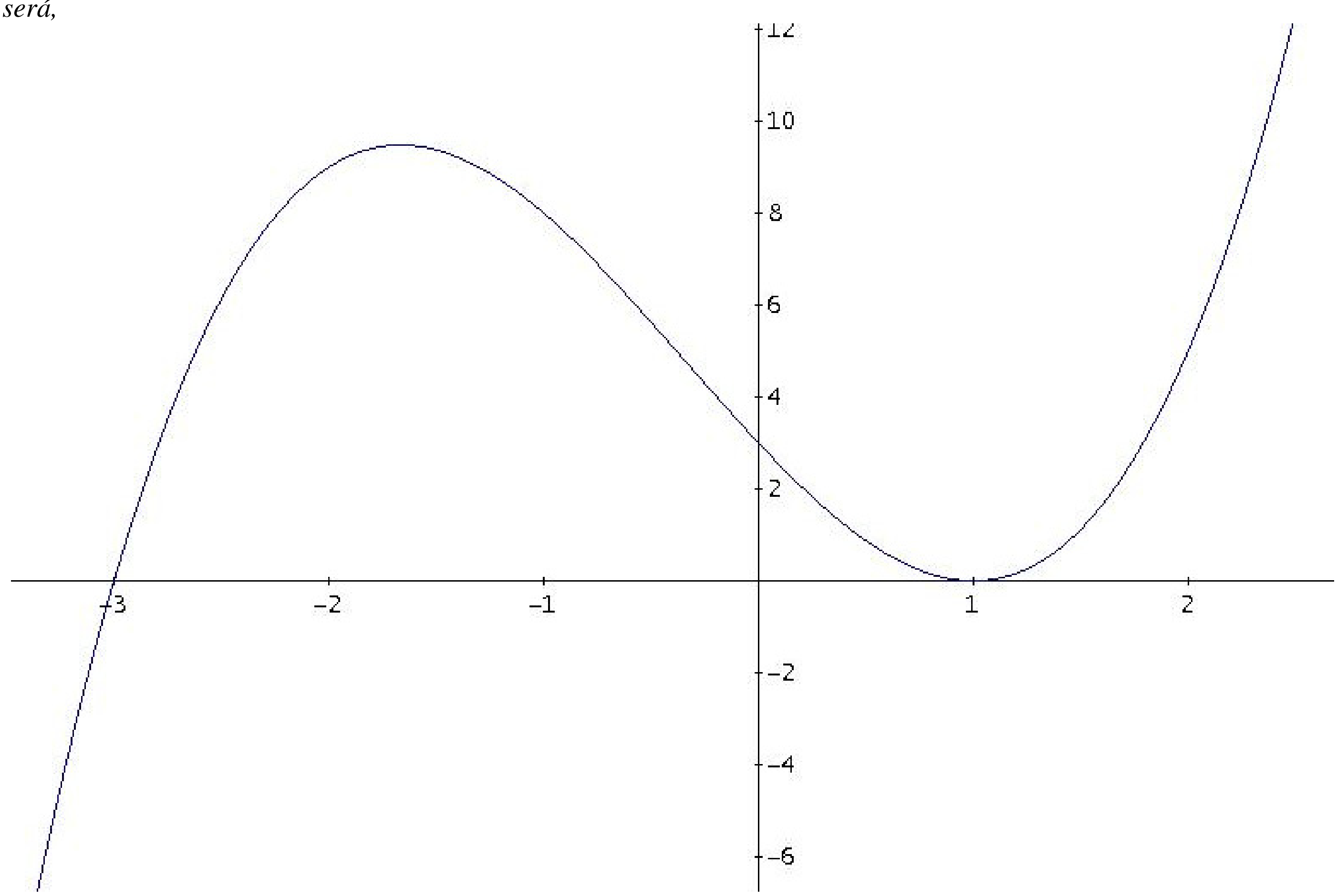
$$x=\frac{-5}{3} \quad \to \quad y=\left(\frac{-5}{3}\right)^3+\left(\frac{-5}{3}\right)^2-5\left(\frac{-5}{3}\right)+3=\frac{-125}{27}+\frac{25}{9}+\frac{25}{3}+3=$$

$$=\frac{-125+75+225+81}{27}=\frac{256}{27}$$

Máximo local en $\left(\frac{-5}{3},\frac{256}{27}\right)\approx$ $(-1'67,9'48)$

d) Representación gráfica.

En los ejes coordenados marcamos los puntos de corte obtenidos en el apartado a), los extremos relativos del apartado c) y teniendo en cuenta la monotonía estudiada en el apartado b), la representación gráfica de la función y será,



EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$, determina:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos relativos.
e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Solución:

a) Dominio de la función,

$4 - x^2 = 0; \quad 4 = x^2; \quad x = \pm 2$

$$Dom\ f = \Re - \{-2,\ 2\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados: (0,0)

$$x = 0 \quad \to \quad y = \frac{0}{4-0} = 0 \qquad \to \quad (0,0)$$

$$y = 0 \quad \to \quad 0 = \frac{x^2}{4 - x^2} \quad \to \quad 0 = x^2 \quad \to \quad x = 0 \qquad \to \quad (0,0)$$

b) Asíntotas.

<u>Asíntotas verticales</u>

Veamos si x = 2 es una asíntota vertical,

$$\underset{x \to 2}{Lím} \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{2^2}{4 - 2^2} = \frac{4}{4-4} = \frac{4}{0} = \infty \quad \textit{luego } x = 2 \textit{ es A.V.}$$

Para situar la curva respecto de la asíntota estudiemos los límites laterales

$$\underset{x \to 2^-}{Lím} \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{1{,}9^2}{4 - 1{,}9^2}\infty = \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

$$\underset{x \to 2^+}{Lím} \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{2{,}1^2}{4 - 2{,}1^2}\infty = \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

Veamos si x = – 2 es una asíntota vertical,

$$\underset{x \to -2}{Lím} \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{(-2)^2}{4 - (-2)^2} = \frac{4}{4-4} = \frac{4}{0} = \infty \quad \textit{luego } x = -2 \textit{ es A.V.}$$

Para situar la curva respecto de la asíntota estudiemos los límites laterales

$$\underset{x \to -2^-}{Lím} \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{(-2{,}1)^2}{4 - (-2{,}1)^2}\infty = \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$$\underset{x \to -2^+}{Lím} \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{(-1{,}9)^2}{4 - (-1{,}9)^2}\infty = \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

<u>Asíntota horizontal</u>

$$\underset{x \to +\infty}{Lím} \frac{x^2}{4 - x^2} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) = \underset{x \to +\infty}{Lím} \frac{x^2}{-x^2} = \underset{x \to +\infty}{Lím}(-1) = -1$$

$$\underset{x \to -\infty}{Lím} \frac{x^2}{4 - x^2} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) = \underset{x \to +\infty}{Lím} \frac{x^2}{-x^2} = \underset{x \to +\infty}{Lím}(-1) = -1$$

Luego y = – 1 es la A.H.

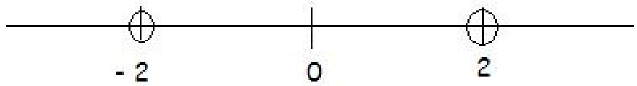
<u>Asíntota oblicua</u>

grd(num) – grd(den) = 2 – 2 = 0, luego no hay asíntota oblicua

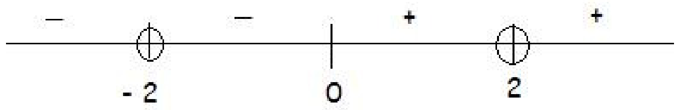
c) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Debemos estudiar el signo de la primera derivada.*

$$f'(x) = \frac{2x\left(4-x^2\right)-x^2(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{8x-2x^3+2x^3}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{8x}{\left(4-x^2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,
$8x = 0; \quad x = 0$
$(4-x^2)^2 = 0; \quad 4-x^2 = 0; \quad 4 = x^2; \quad x = \pm 2$
Representamos las raíces obtenidas, junto con los valores que no son del dominio de la función, en la recta real.



La primera derivada es un cociente cuyo denominador es un polinomio al cuadrado, por lo que el denominador es positivo; es decir, el signo de la derivada depende del signo del numerador. Entonces tenemos:

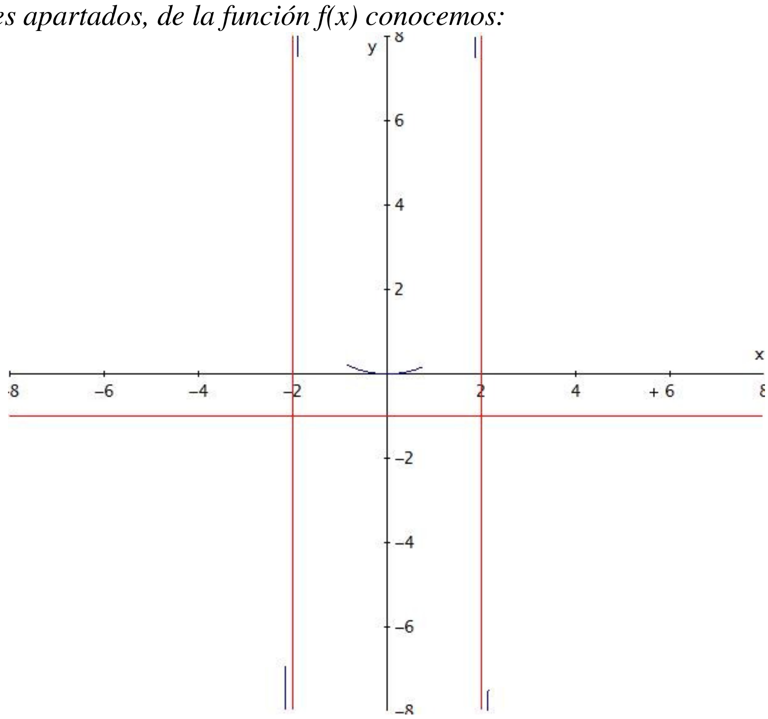


Luego f(x) es creciente en $(0\,,2)\cup(2\,,+\infty)$ *y decreciente en* $(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,0)$

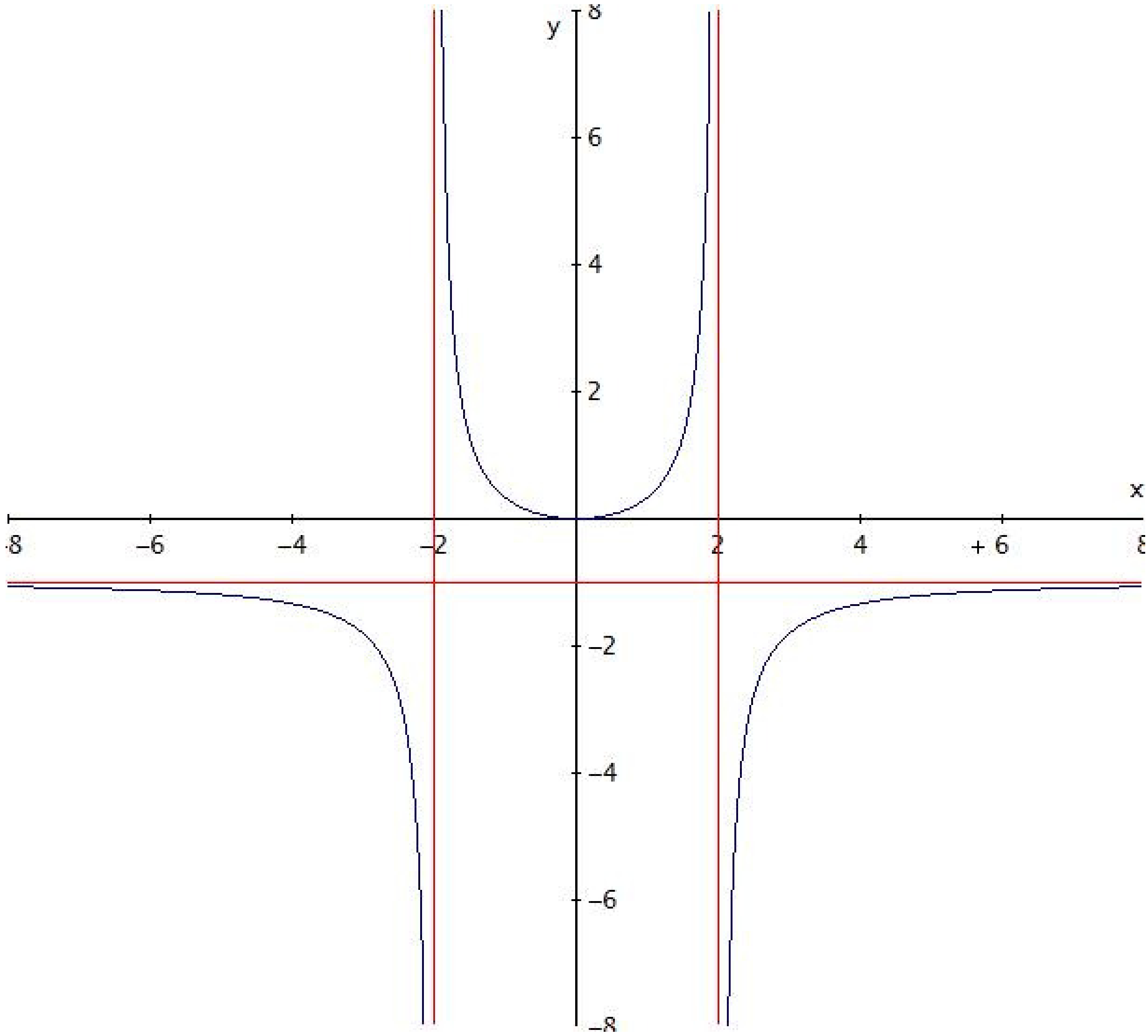
d) *Máximos y mínimos relativos.*
De lo obtenido en el apartado anterior se deduce que f(x) tiene un mínimo relativo en x = 0; teniendo en cuenta los puntos obtenidos en el apartado a): f(x) tiene un mínimo relativo en (0 , 0)

e) *Reuniendo la información obtenida en los anteriores apartados, de la función f(x) conocemos:*

Marcamos:
El punto de corte (0,0)
El mínimo relativo (0,0)
La posición de la curva respecto de las asíntotas verticales



Y la representación gráfica de la función será:



y
x
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
-8
−6
−4
−2
2
4
+ 6
8

BLOQUE B

PROBLEMA B2. Dada la función *f(x) =* $x^3 - 6x$, se pide

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio y puntos de corte.

Como f(x) es una función polinómica, su dominio es todos los números reales,

$Dom\ f(x) = \Re$

Puntos de corte,

Corte con el eje OY, $x = 0, \quad y = 0^3 - 6 \cdot 0 = 0 \ \rightarrow \ (0, 0)$

Corte con el eje OX,

$$y = 0, \quad x^3 - 6x = 0 \ \rightarrow \ x(x^2 - 6) = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6 = 0 \ \rightarrow \ x^2 = 6 \ \rightarrow \ x = \pm\sqrt{6} \approx \pm 2'4 \end{cases}$$

Por lo tanto los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0,0), (\sqrt{6},0)$ *y* $(-\sqrt{6},0)$

b) Ecuación de sus asíntotas.

Por ser una función polinómica no tiene asíntotas, ni verticales ni horizontales.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Debemos estudiar el signo de la primera derivada.

$y = x^3 - 6x$

$y' = 3x^2 - 6$

$3x^2 - 6 = 0; \quad 3x^2 = 6; \quad x^2 = 2; \quad x = \pm\sqrt{2}$. *Como y´ es un polinomio de 2º grado el signo de y´ es,*

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{2} & & \sqrt{2} & \end{array}$$

Por lo que f(x) es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ *y decreciente en* $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos que la función f(x) tiene un máximo local en x = $-\sqrt{2}$ *y un mínimo local en x =* $\sqrt{2}$.

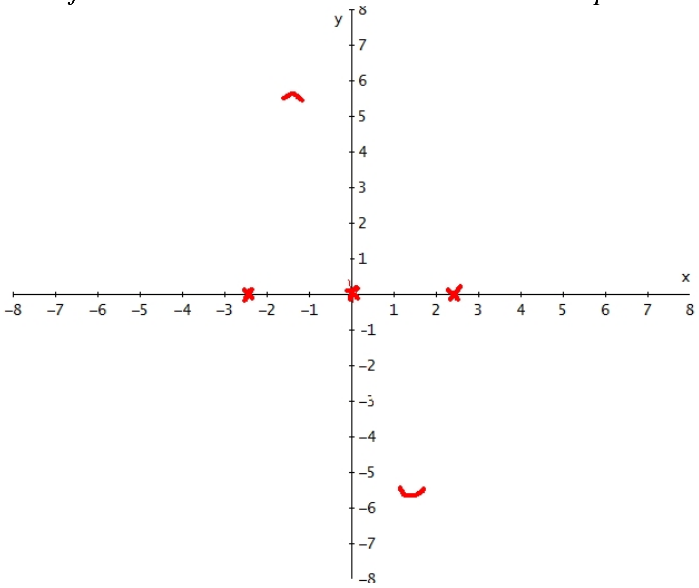
Los puntos de estos extremos locales serían,

$$x = -\sqrt{2} \ \rightarrow \ y = \left(-\sqrt{2}\right)^3 - 6\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \ \rightarrow \ \text{Máximo local} \ \left(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right) \approx (-1'4, 5'6)$$

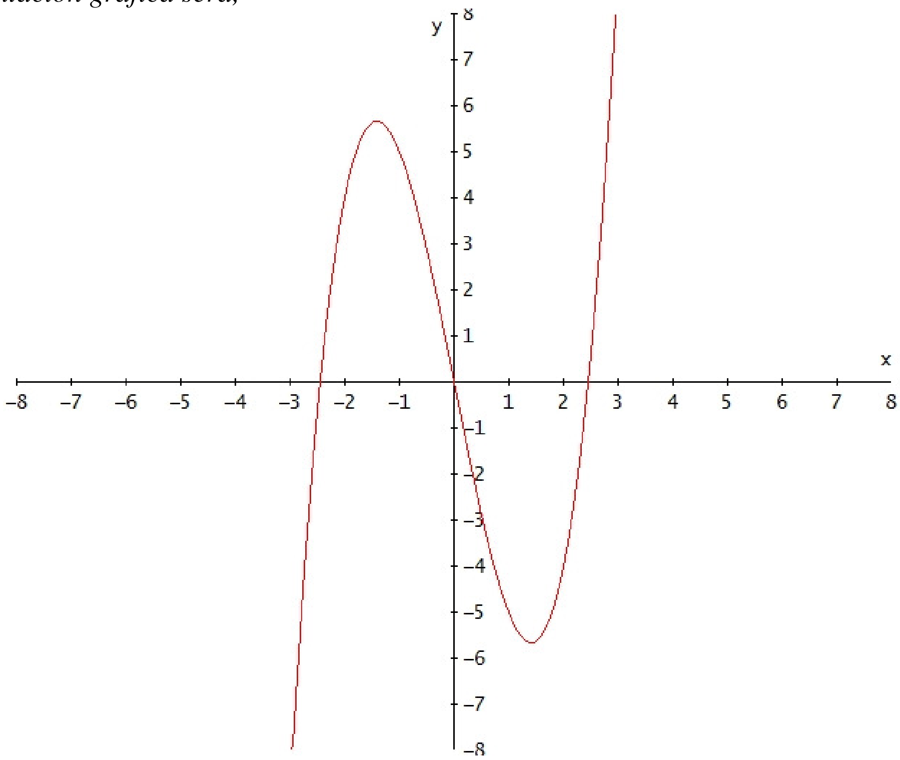
$$x = \sqrt{2} \ \rightarrow \ y = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 6\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \ \rightarrow \ \text{Mínimo local} \ \left(\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right) \approx (1'4, -5'6)$$

e) Representación gráfica.

Marcando en los ejes coordenados los datos obtenidos en los apartados anteriores



Y la representación gráfica será,



OPCIÓN A

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-9}$, se pide

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de las asíntotas horizontales y verticales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a) Dominio

$x^2-9=0 \quad \rightarrow \quad x^2=9 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{9} \quad \rightarrow \quad x=\pm 3 \quad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{-3,3\}$

Puntos de corte

$x=0 \quad \rightarrow \quad f(0)=\dfrac{0^2+1}{0^2-9}=\dfrac{1}{-9} \quad \rightarrow \quad \left(0,\dfrac{-1}{9}\right)$

$f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2+1}{x^2-9}=0 \quad \rightarrow \quad x^2+1=0 \quad \rightarrow \quad x^2=-1$ *sin soluciones reales*

Sólo hay un punto de corte

$\left(0\,,\dfrac{-1}{9}\right)$

b) Asíntota horizontal

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-9}=\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1 \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-9}=\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1 \end{array}\right\}\Rightarrow y=1 \quad \textit{es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales. Las posibles asíntotas verticales son las rectas x = – 3 y x = 3 (corresponden a los valores de x que no son del dominio de la función)

x = – 3

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+1}{x^2-9}=\dfrac{(-3)^2+1}{(-3)^2-9}=\dfrac{9+1}{9-9}=\dfrac{10}{0}=\infty \qquad \rightarrow \quad x=-3$ *es una asíntota vertical*

x = 3

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{x^2-9}=\dfrac{3^2+1}{3^2-9}=\dfrac{9+1}{9-9}=\dfrac{10}{0}=\infty \qquad \rightarrow \quad x=3$ *es una asíntota vertical*

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para obtener estos intervalos estudiaremos el signo de la primera derivada,

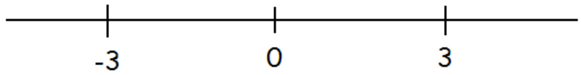
$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-9\right)-\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{2x^3-18x-2x^3-2x}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{-20x}{\left(x^2-9\right)^2}$$

Estudiamos el signo de este cociente de polinomios buscando las raíces del numerador y denominador

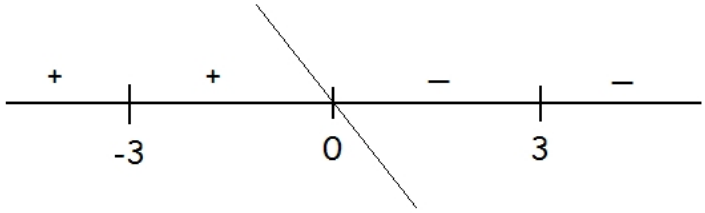
– 20 x = 0 → x = 0

$\left(x^2-9\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-9=0 \quad \rightarrow \quad x=\pm 3$ *(visto en el apartado a))*

Ahora representamos en la recta real los tres valores de x obtenidos y, además, los que no son del dominio de la función,



Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, será positivo; luego el signo de f´(x) sólo depende del signo del numerador que gráficamente es la recta y = – 20 x (de pendiente negativa y pasa por la raíz 0), esto significa que:

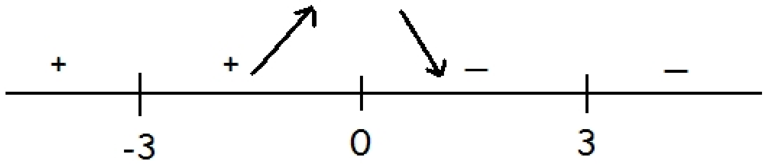


Y por lo tanto, f(x) es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ *y decreciente en* $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

d) Máximos y mínimos locales.

Estos puntos los obtenemos siguiendo con el estudio realizado en el apartado anterior.

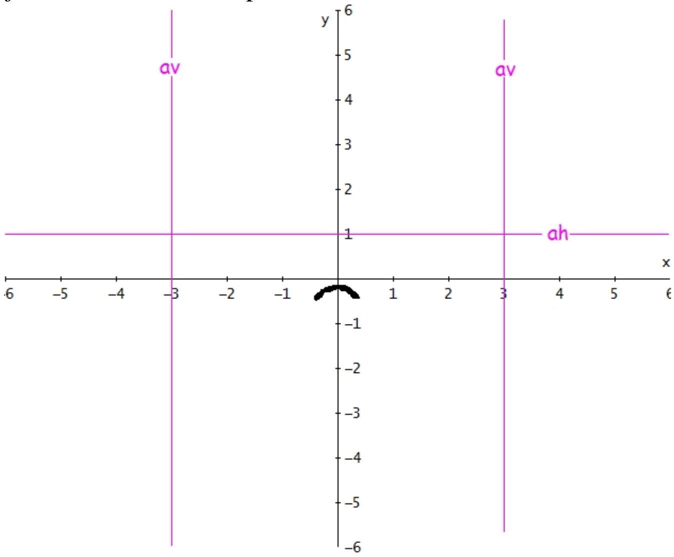
De los tres valores de x marcados en la recta real, – 3 y 3 no son del dominio de f(x) por lo que el posible máximo o mínimo local será x = 0



En x = 0 hay un máximo local. x = 0, f(0) = – 1/9 (calculado en el apartado a))

Hay un máximo local en el punto $\left(0, \dfrac{-1}{9}\right)$

e) La información de los apartados anteriores se resume en



Para completar la representación, necesitamos situar la curva respecto de las asíntotas

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+1}{x^2-9} = (para\ x = -3'1) = \frac{(-3'1)^2+1}{(-3'1)^2-9}\infty = \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+1}{x^2-9} = (para\ x = 3'1) = \frac{3'1^2+1}{3'1^2-9}\infty = \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

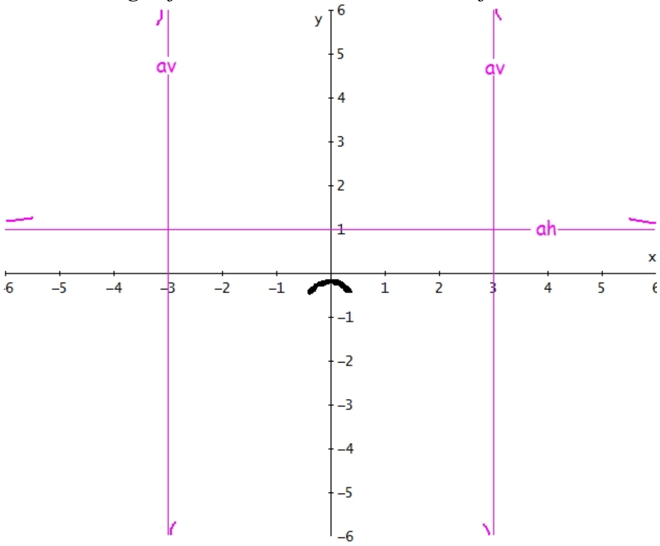
Asíntota horizontal

$$en \quad -\infty, \quad x=-1000 \quad \rightarrow \quad \frac{(-1000)^2+1}{(-1000)^2-9}=\frac{1000001}{999991}\approx 1\acute{}...$$

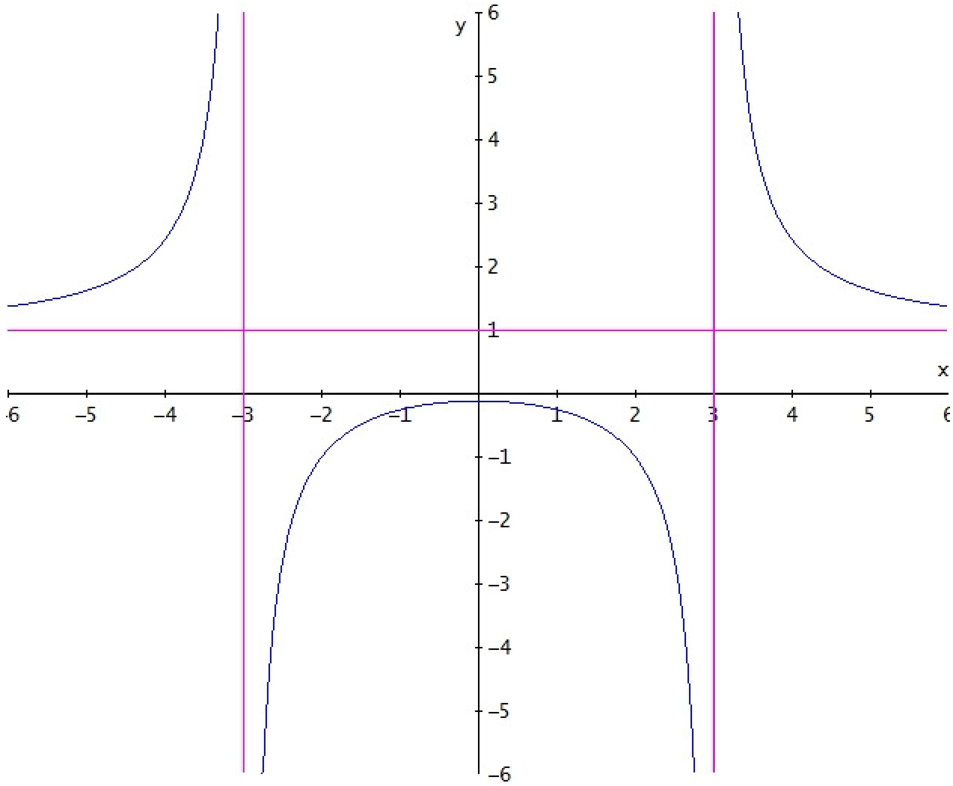
$$en \quad +\infty, \quad x=1000 \quad \rightarrow \quad \frac{1000^2+1}{1000^2-9}=\frac{1000001}{999991}\approx 1\acute{}...$$

Esto significa que la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal será

Añadiendo al gráfico anterior la nueva información:



Por lo tanto la representación gráfica de f(x) será:



PROBLEMA 2. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$. Calcula:

a) Ecuación de las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.

Solución:
Previamente obtengamos el dominio de esta función,

$x^2-1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$ *Luego Dom f(x)* $=\mathfrak{R}-\{-1\,,\,1\}$

a) Del cálculo del dominio deducimos que las posibles asíntotas verticales son $x=-1$ *o* $x=1$,
Veamos si $x=-1$ *es a. v.*

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{(-1)^3}{(-1)^2-1}=\frac{-1}{1-1}=\frac{-1}{0}=\infty,\ \text{luego } x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Veamos si $x=1$ *es a. v.*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1^3}{1^2-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty,\ \text{luego } x=1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Calculemos la asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}x=-\infty$$

Análogamente, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}x=+\infty$

Por lo tanto esta función no tiene asíntota horizontal.

b) Estudiemos el signo de y′,

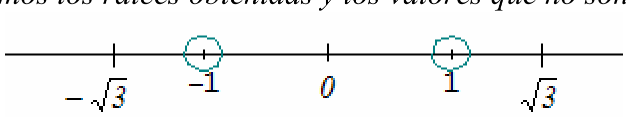
$$y'=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\,.\,2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Busquemos las raíces del numerador y del denominador,

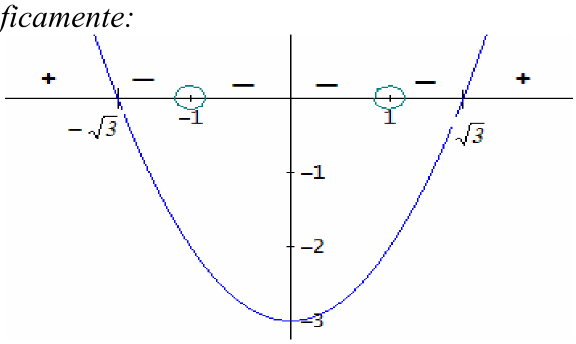
$$x^4-3x^2=0;\quad x^2\,(x^2-3)=0;\quad \begin{cases} x^2=0 \ \rightarrow\ x=0 \\ x^2-3=0 \ \rightarrow\ x^2=3 \ \rightarrow\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

$(x^2-1)^2=0;\quad x^2-1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm 1$

Representamos los raíces obtenidas y los valores que no son del dominio en la recta real,

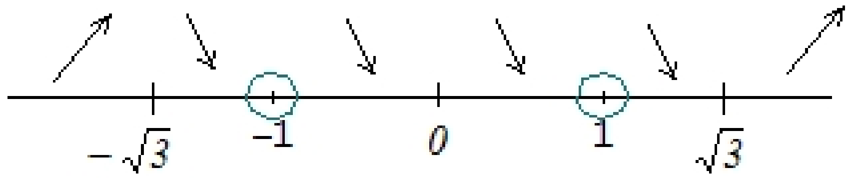


El denominador de y' *está elevado al cuadrado, siempre será positivo, por lo que el signo de* y' *sólo depende del numerador. El numerador es un producto,* $x^2\,(x^2-3)$. *Su primer factor,* x^2, *es positivo; por lo tanto el signo de* y' *sólo depende de* (x^2-3) *que es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *positivo y raíces* $\pm\sqrt{3}$.
Gráficamente:



Finalmente:
f(x) es creciente en $\left(-\infty\,,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3}\,,+\infty\right)$
f(x) es decreciente es $\left(-\sqrt{3}\,,-1\right)\cup\left(-1\,,0\right)\cup\left(0\,,1\right)\cup\left(1\,,\sqrt{3}\right)$

c) Del estudio del apartado anterior y considerando el dominio de f(x)



Luego f(x) tiene un máximo local en $x = -\sqrt{3}$ *y un mínimo local en* $x = \sqrt{3}$.
Calculemos las ordenadas de estos extremos:

$$x = -\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad f(-\sqrt{3}) = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{3\left(-\sqrt{3}\right)}{3-1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad f(\sqrt{3}) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, en $\left(-\sqrt{3}\,, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ *hay un máximo local y en* $\left(\sqrt{3}\,, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ *hay un mínimo local.*

BLOQUE A

PROBLEMA 2. Dibuja la gráfica de la función $y = f(x)$ sabiendo que:

a) Está definida para todos los valores de x salvo para $x = 1$, siendo la recta $x = 1$ la única asíntota vertical.

b) La recta $y = 3$ es la única asíntota horizontal.

c) El único punto de corte con los eje es el $(0 , 0)$

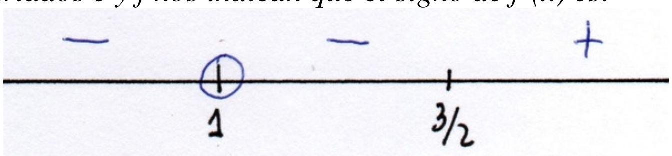
d) La derivada de la función $y = f(x)$ sólo se anula en $x = 3/2$.

e) $f'(x) < 0$ en el conjunto $]-\infty , 1 [\cup] 1 , 3/2 [$.

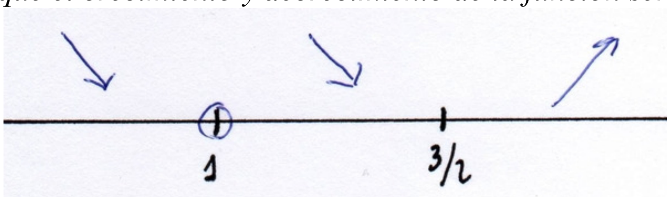
f) $f'(x) > 0$ en el intervalo $] 3/2 , +\infty [$.

g) $f(3/2) = 13/2$

Solución:
Los apartados e y f nos indican que el signo de f´(x) es:



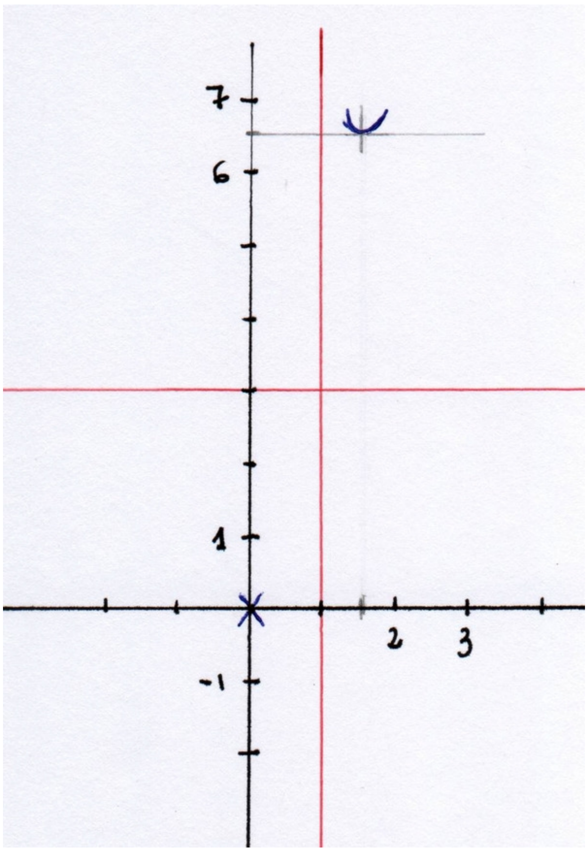
Por lo que el crecimiento y decrecimiento de la función será:



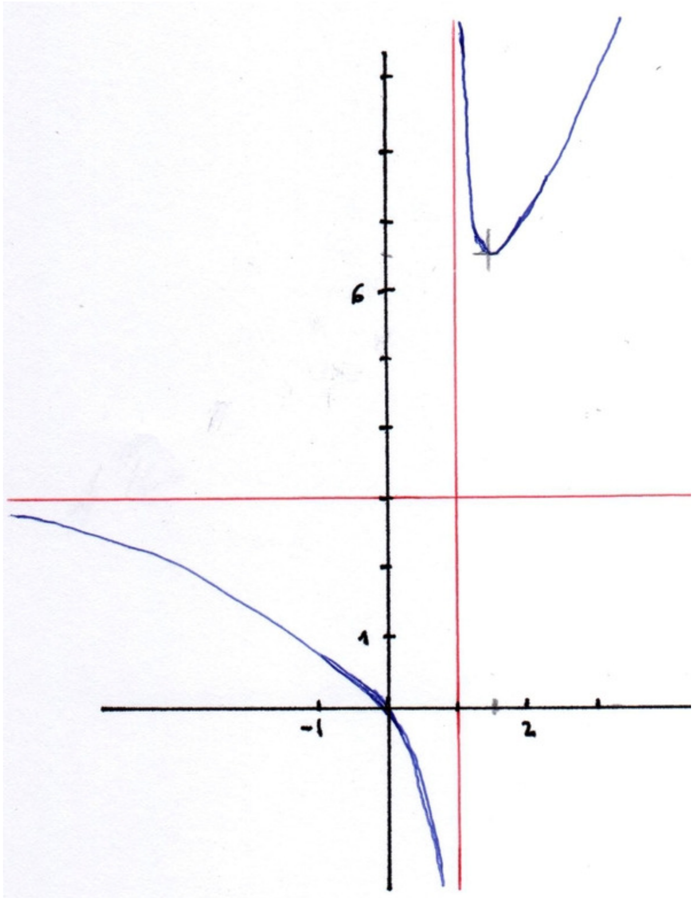
Luego en $x = 3/2$ hay un mínimo relativo de f(x). Según el apartado g, para $x = 3/2$ $f(3/2) = 13/2$, luego el mínimo está en el punto $(3/2 , 13/2) = (1´5 , 6´5)$

Dibujando en los ejes coordenados:

la asíntota vertical $x = 1$ (en rojo)
la asíntota horizontal $y = 3$ (en rojo)
el punto de corte con los ejes coordenados (0 , 0)
y el mínimo visto anteriormente (1´5 , 6´5),



La representación gráfica (en azul) de la función y = f(x) es:



OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}$, se pide

a) Su dominio y puntos de corte con os ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a) Cálculo del dominio,
Obtengamos los valores de x para los que el denominador es cero,

$$x^2-4x+3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.3}}{2.1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\left\langle\begin{array}{l} x_1=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{4-2}{2}=1\end{array}\right.$$

Luego Dom f(x) = $\Re-\{1,3\}$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad y=\frac{-4}{3} \quad\rightarrow\quad \left(0,\frac{-4}{3}\right)$$

$$y=0 \quad\rightarrow\quad \frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=0 \quad\rightarrow\quad -x^2+4x-4=0 \quad\rightarrow\quad x^2-4x+4=0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.4}}{2.1}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{4}{2}=2 \quad\rightarrow\quad (2,0)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0,\dfrac{-4}{3}\right)$ *y* $(2,0)$

b) Asíntotas verticales
Según el estudio del dominio, las posibles asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = 3$
Veamos si $x = 1$ es a.v.

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=\frac{-1^2+4.1-4}{1^2-4.1+3}=\frac{-1+4-4}{1-4+3}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \quad \text{es a.v.}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}\overset{x=0'9}{=}\frac{-0'9^2+4.0'9-4}{0'9^2-4.0'9+3}\infty=\frac{-}{+}\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}\overset{x=1'1}{=}\frac{-1'1^2+4.1'1-4}{1'1^2-4.1'1+3}\infty=\frac{-}{-}\infty=+\infty$$


x=1

Veamos si $x = 3$ es a.v.

$$\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=\frac{-3^2+4.3-4}{3^2-4.3+3}=\frac{-9+12-4}{9-12+3}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=3 \quad \text{es a.v.}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}\overset{x=2'9}{=}\frac{-2'9^2+4.2'9-4}{2'9^2-4.2'9+3}\infty=\frac{-}{-}\infty=+\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}\overset{x=3'1}{=}\frac{-3'1^2+4.3'1-4}{3'1^2-4.3'1+3}\infty=\frac{-}{+}\infty=-\infty$$

Asíntotas horizontales,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}(-1)=-1$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}(-1)=-1$$

Por lo tanto $y = -1$ *es asíntota horizontal.*

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$x=-1000 \quad\to\quad \frac{-(-1000)^2+4(-1000)-4}{(-1000)^2-4(-1000)+3}=\frac{-1004004}{1004003}=-1'000...$$
$$x=1000 \quad\to\quad \frac{-1000^2+4.1000-4}{1000^2-4.1000+3}=\frac{-996004}{996003}=-1'000...$$

Luego 

Para resolver los apartados c) y d) calculamos la derivada de la función,

$$f(x)=\frac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}$$
$$f'(x)=\frac{(-2x+4)(x^2-4x+3)-(-x^2+4x-4)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & -4x & +3 \\
\otimes & & -2x & +4 \\
\hline
 & 4x^2 & -16x & +12 \\
-2x^3 & +8x^2 & -6x & \\
\hline
-2x^3 & +12x^2 & -22x & +12 \\
2x^3 & -12x^2 & +24x & -16 \\
\hline
 & & 2x & -4
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & -x^2 & +4x & -4 \\
\otimes & & 2x & -4 \\
\hline
 & 4x^2 & -16x & +16 \\
-2x^3 & +8x^2 & -8x & \\
\hline
-2x^3 & +12x^2 & -24x & +16
\end{array}$$

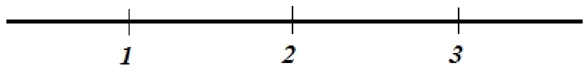
c) Monotonía.

Estudiamos el signo de f´(x). Como es un cociente de polinomios, buscamos las raíces del numerador y del denominador,

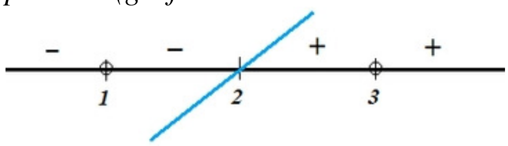
$2x-4=0 \;\to\; 2x=4 \;\to\; x=4/2 \;\to\; x=2$

$(x^2-4x+3)^2=0 \;\to\; x^2-4x+3=0 \;\to$ *(visto en apartado a))* $x = 1\,,\,3$

Estudiamos el signo de f´(x) en los intervalos



Sabemos que Dom f(x) = $\Re-\{1,3\}$. *f´(x) es un cociente cuyo denominador es un polinomio al cuadrado, por lo que el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un polinomio de 1º grado con coeficiente de x positivo (gráficamente una línea recta de pendiente positiva). Por lo tanto:*



f(x) es creciente en $(2,3)\cup(3,+\infty)$

y decreciente en $(-\infty,1)\cup(1,2)$

d) Del apartado anterior obtenemos que hay un extremo local en $x = 2$. Como a la izquierda de 2 $f(x)$ es decreciente y a la derecha creciente, en $x = 2$ hay un mínimo local.

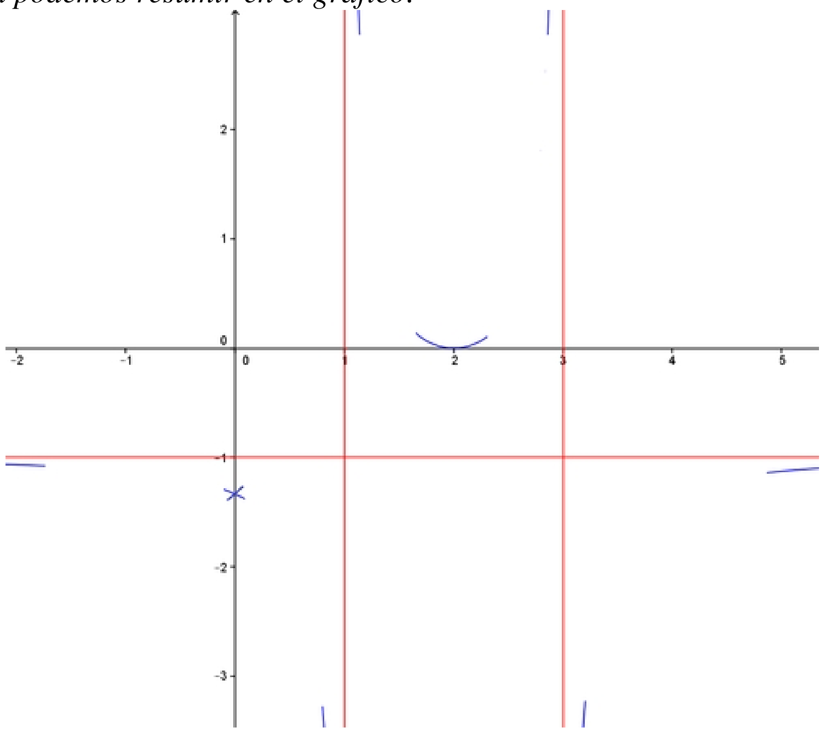
De lo calculado en el apartado a), para $x= 2$ $y = 0$. Por lo tanto $f(x)$ tiene un mínimo local en $(2 , 0)$.

e) La información de los apartados anteriores la podemos resumir en el gráfico:

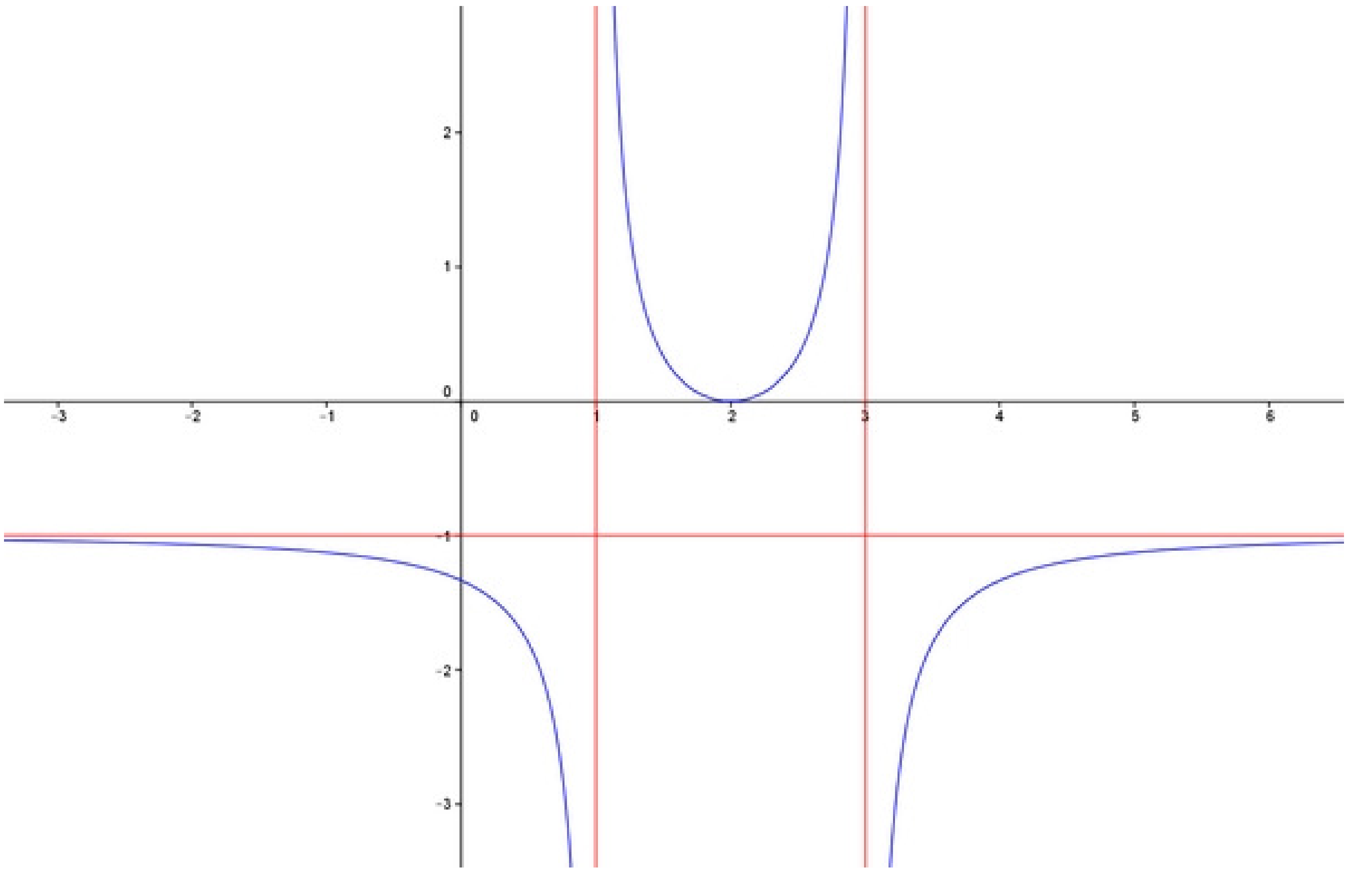
Asíntotas verticales y horizontales en rojo ($x = 1$, $x = 3$ e $y = -1$)

Punto de corte ($0, -4/3$)

Mínimo local ($2 , 0$)



Y la gráfica de la función $f(x)$ (en azul) será:



OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$, se pide:

a) Su dominio y sus puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Los máximos y mínimos locales.
e) La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Su dominio y sus puntos de corte con los ejes coordenados.

$4-x=0 \;\rightarrow\; x=4 \;\rightarrow\; Dom\, f(x) = \Re \sim \{4\}$

Puntos de corte:

$$x=0 \;\rightarrow\; y=\frac{0}{4-0}=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

$$y=0 \;\rightarrow\; 0=\frac{x^2}{4-x} \;\rightarrow\; x^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

Dom f(x) = $\Re \sim \{4\}$ y el punto de corte con los ejes coordenados es: (0 , 0).

b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

Asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{4-x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4-x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \text{ no tiene asíntota horizontal}$$

Asíntota vertical.

La posible A.V. es x = 4, comprobémoslo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2}{4-x}=\frac{4^2}{4-4}=\frac{16}{0}=\infty, \text{ por tanto } x=4 \text{ es asíntota vertical}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x^2}{4-x}\overset{x=3'9}{=}\dfrac{+}{+}\infty=+\infty \\ \lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x^2}{4-x}\overset{x=4'1}{=}\dfrac{+}{-}\infty=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La asíntota vertical de f(x) es x = 4 y no tiene asíntota horizontal.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Debemos estudiar el signo de f´(x). Calculemos f´(x),

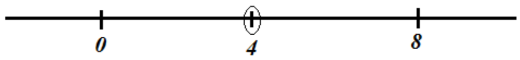
$$f'(x)=\frac{2x(4-x)-x^2(-1)}{(4-x)^2}=\frac{8x-2x^2+x^2}{(4-x)^2}=\frac{8x-x^2}{(4-x)^2}$$

Calculamos las raíces del numerador y denominador de f´(x),

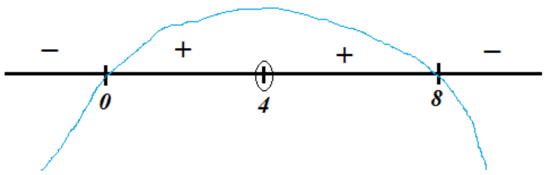
$$8x - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(8-x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ 8 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 8 \end{array} \right.$$

$$(4-x)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 4 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

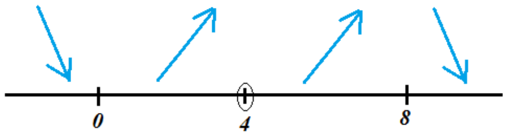
Representamos en la recta real los valores de x obtenidos y consideramos que x = 4 ∉ Dom f(x)



En f´(x) el denominador está al cuadrado, siempre es positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo [∩] y raíces 0 y 8, por tanto,



La monotonía de f(x) es:



Finalmente, f(x) es creciente en (0 , 4) ∪ (4 , 8) y es decreciente en (– ∞, 0) ∪ (8 , +∞).

d) Los máximos y mínimos locales.

De lo estudiado en el apartado anterior sabemos que hay extremos locales en x = 0 (mínimo) y en x = 8 (máximo).

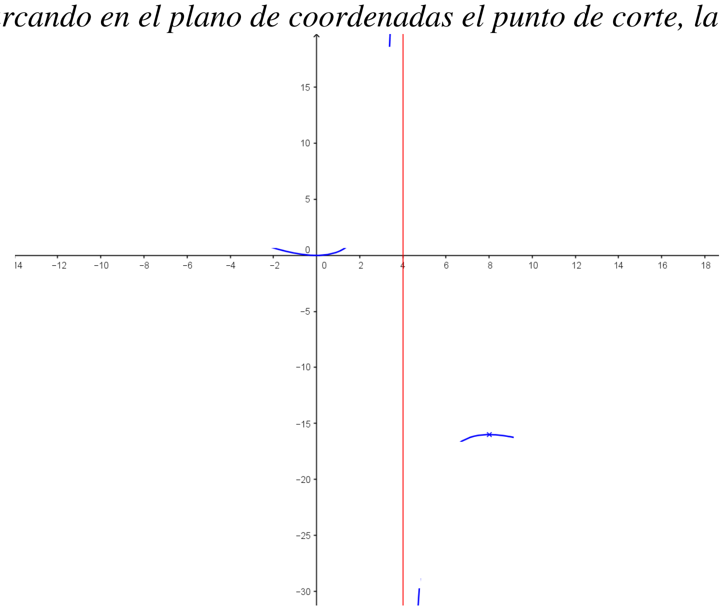
Para x = 0 $\rightarrow$ *y = 0 (del apartado a))*

Para x = 8 $\rightarrow \quad y = \dfrac{8^2}{4-8} = \dfrac{64}{-4} = -16$

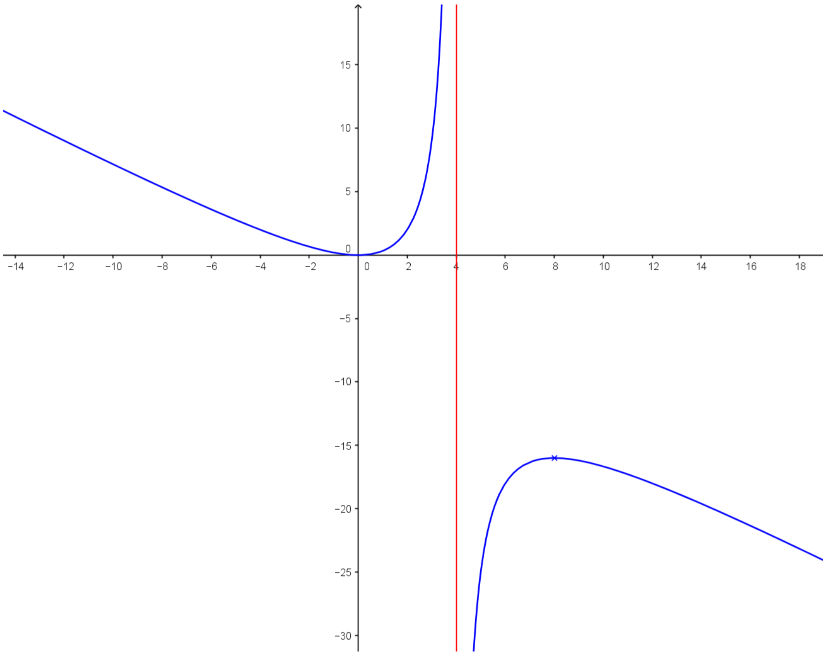
Por tanto, f(x) tiene un mínimo local en (0 , 0) y un máximo local en (8 , – 16).

e) La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Marcando en el plano de coordenadas el punto de corte, la asíntota y los extremos locales:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento la representación gráfica de f(x) será:



15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−14
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

Problema 2. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.
d) Representación gráfica.
e) A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, razona en qué puntos la función $g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + x - 2$ tiene un máximo y mínimo local.

Solución:

a) Dominio y puntos de corte.

f(x) es una función polinómica, por tanto Dom f(x) = $\Re$.

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 = 0 \rightarrow$ *punto* $(0, 0)$

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0$

$x(x^2 - 2x + 1) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{punto } (0,0) \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow \text{punto } (1,0) \end{cases}$$

Luego, ***los puntos de corte con los ejes coordenados son (0, 0) y (1, 0).***

b) Monotonía.

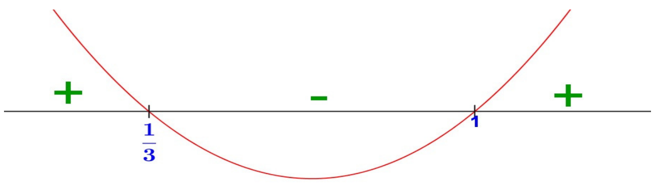
Debemos estudiar el signo de f´(x)

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} == \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+2}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

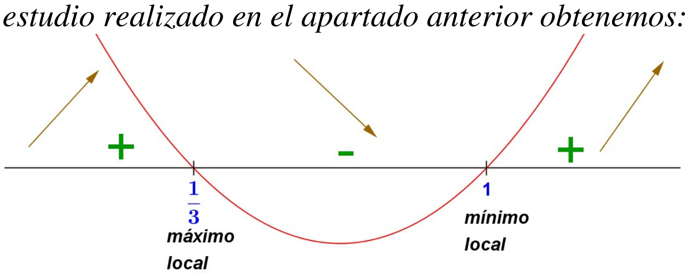
$3x^2 - 4x + 1 = 0$ *es un polinomio de segundo grado con coeficiente de* x^2 *positivo y raíces 1 y 1/3, por tanto:*



Luego ***f(x) es creciente en*** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

c) Máximos y mínimos locales

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos:



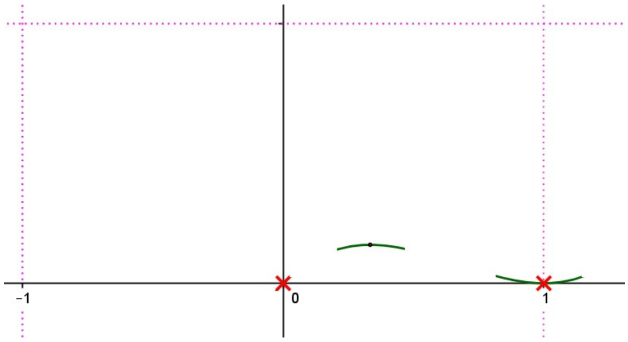
$$x = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1-6+9}{27} = \frac{4}{27}$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

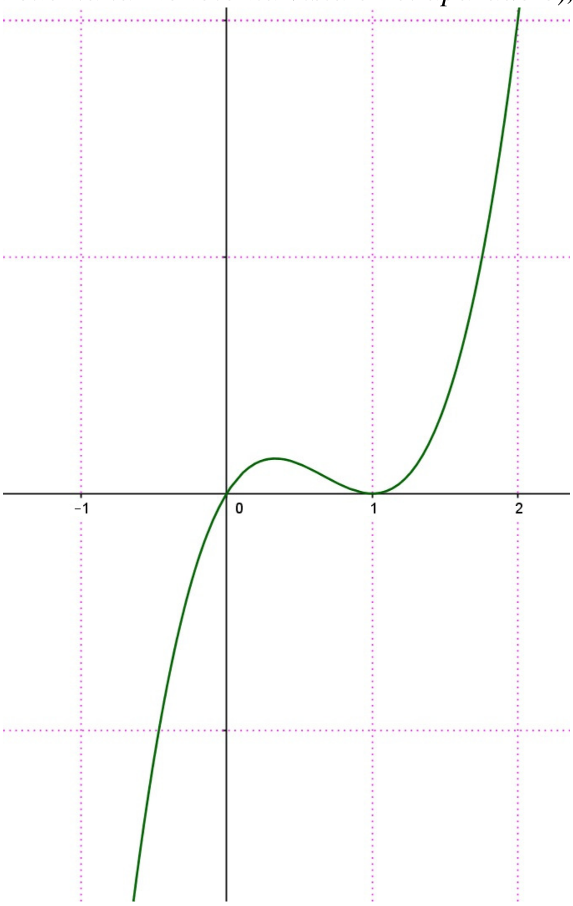
Es decir, ***f(x) tiene un máximo local en*** $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ ***y un mínimo local en (1 , 0).***

d) Representación gráfica de f(x)

Situando en los ejes coordenados los puntos de corte y los extremos relativos obtenidos en los apartados anteriores,



Teniendo en cuenta la monotonía vista en el aparado c), la representación gráfica será:



e) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

$g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + x - 2$

Transformemos las expresiones de f(x) y g(x) para ver la relación que hay entre ellas.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$

$g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + x - 2 = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + (x-2) =$

$= (x-2)[(x-2)^2 - 2(x-2) + 1] = (x-2)[(x-2) - 1]^2 = (x-2)(x-3)^2$

Comparando las expresiones de f(x) y g(x) se verifica: $g(x) = f(x-2)$

Es decir, la gráfica de g(x) es la de f(x) desplazada 2 unidades a la derecha.

Por ello, como $f(x)$ tiene un mínimo local para $x = 1$, $g(x)$ lo tiene para $x = 1 + 2 = 3$ y como $f(x)$ tiene un máximo local para $x = \frac{1}{3}$, $g(x)$ lo tiene para $x = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$.

Finalmente, ***g(x) tiene un máximo local en $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$ y un mínimo local en (3 , 0).***

OPCIÓN A

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio y puntos de corte.
Dominio:

$$(x-2)^2 = 0 \;\rightarrow\; x-2=0 \;\rightarrow\; x=2, \quad \text{por tanto} \quad Dom\, f(x) = \Re \sim \{\, 2 \,\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$$x=0 \;\rightarrow\; y=\frac{0-1}{(0-2)^2}=\frac{-1}{4} \;\rightarrow\; \left(0\,,\frac{-1}{4}\right)$$

$$y=0 \;\rightarrow\; 0=\frac{x-1}{(x-2)^2} \;\rightarrow\; x-1=0 \;\rightarrow\; x=1 \;\rightarrow\; (1\,,0)$$

Luego, ***los puntos de corte con los ejes coordenados son*** $\left(0\,,\dfrac{-1}{4}\right)$ ***y*** $(\,1\,,0\,)$.

b) Asíntota horizontal:

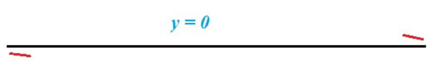
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{(x-2)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2-4x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x-2)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Por tanto, ***y = 0 es la asíntota horizontal.***

Para facilitar la representación gráfica de la función, situemos la curva respecto de la asíntota:

$$\left.\begin{array}{l} En \quad -\infty, \quad x=-1000 \;\rightarrow\; y=\dfrac{-1000-1}{(-1000-2)^2}=-0'000997\ldots \\ En \quad +\infty, \quad x=1000 \;\rightarrow\; y=\dfrac{1000-1}{(1000-2)^2}=0'001003\ldots \end{array}\right\} \rightarrow$$

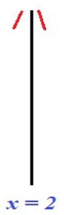


Asíntota vertical. La posible asíntota vertical es x = 2, veamoslo:

$$\lim_{x\to2}\frac{x-1}{(x-2)^2}=\frac{2-1}{(2-2)^2}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; \boldsymbol{x=2 \text{ es asíntota vertical}}.$$

Para facilitar la representación gráfica de la función, situemos la curva respecto de la asíntota:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to2^-}\frac{x-1}{(x-2)^2}\overset{x=1'9}{=}\frac{1'9-1}{(1'9-2)^2}\infty=\frac{+}{+}\infty=+\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to2^+}\frac{x-1}{(x-2)^2}\overset{x=2'1}{=}\frac{2'1-1}{(2'1-2)^2}\infty=\frac{+}{+}\infty=+\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$



c) Monotonía.

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{1.(x-2)^2-(x-1)\,2\,(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{1.(x-2)-(x-1)\,2}{(x-2)^3}=\frac{x-2-2x+2}{(x-2)^3}=\frac{-x}{(x-2)^3}$$

Para estudiar el signo de $f'(x)$ calculemos las raíces del numerador y denominador:

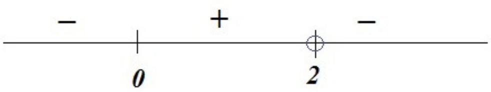
$0-x=0 \;\rightarrow\; x=0$

$(x-2)^3=0 \;\rightarrow\; x-2=0 \;\rightarrow\; x=2\,(\notin Dom\; f(x))$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos:

x	$f'(x)$
-1	$\frac{-(-1)}{(-1-2)^3}=-$
1	$\frac{-1}{(1-2)^3}=+$
3	$\frac{-3}{(3-2)^3}=-$

Luego, el signo de $f'(x)$ es:



Es decir: ***f(x) es creciente en (0 , 2) y decreciente en ($-\infty$, 0) $\cup$(2 , $+\infty$).***

d) Máximos y mínimos locales

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos:

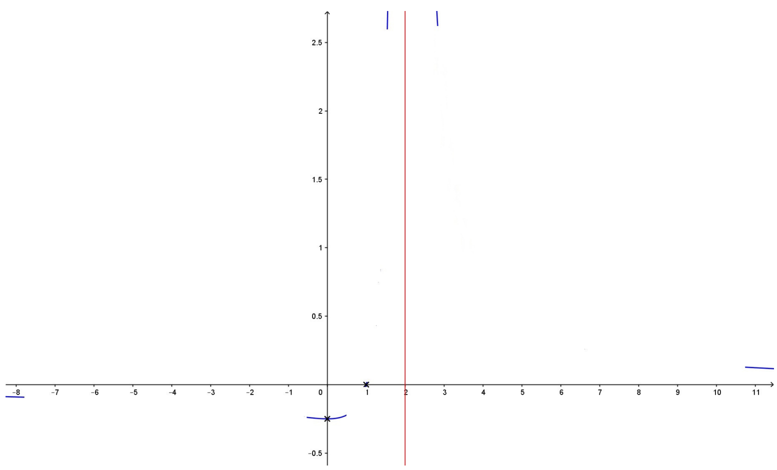
Hay un mínimo local en x = 0, (en x = 2 no hay nada porque no es del dominio de la función)

Como calculamos en el apartado a) para $x = 0$ $f(0) = \frac{-1}{4}$

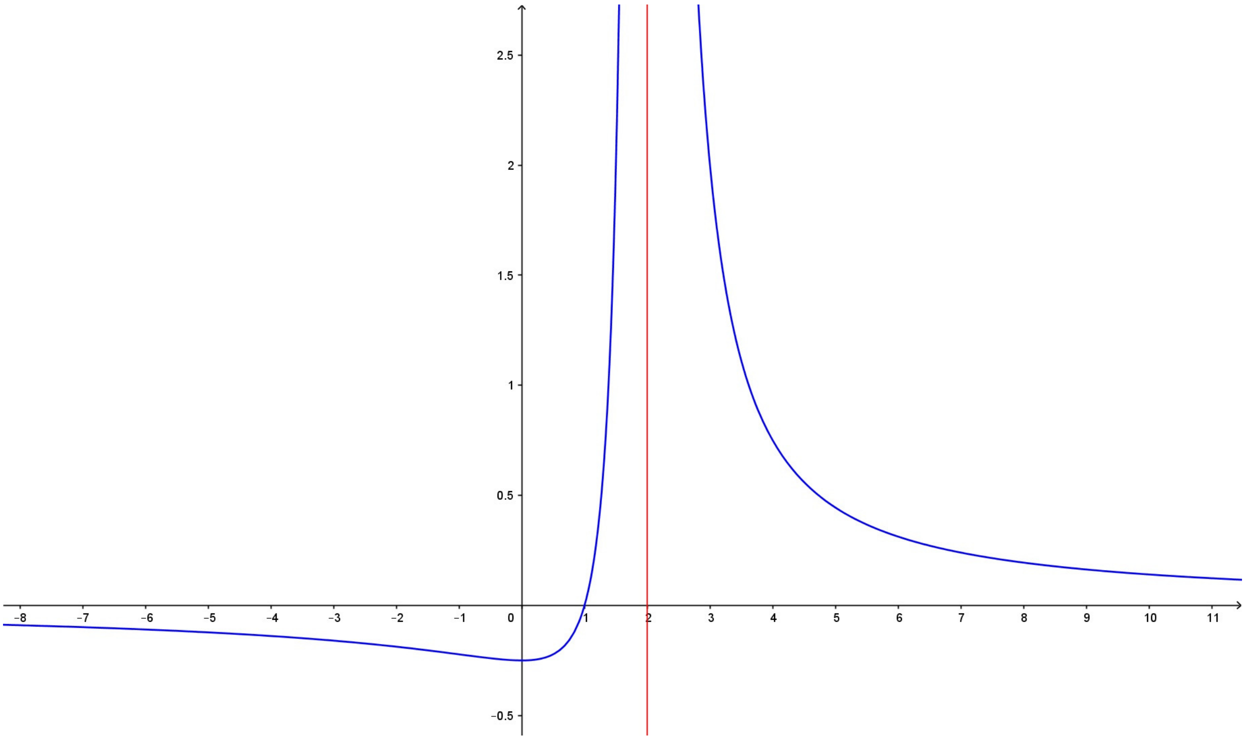
Es decir, ***f(x) tiene un mínimo local en*** $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$.

e) Representación gráfica de f(x)

Situando en los ejes coordenados los puntos de corte, las asíntotas y el mínimo relativo obtenidos en los apartados anteriores,



Teniendo en cuenta la monotonía vista en el aparado c), la representación gráfica será:


2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$2-x=0 \;\rightarrow\; x=2 \;\rightarrow\; Dom\ f(x)=\Re-\{\,2\,\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0^2}{2-0}=\frac{0}{2}=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{2-x}=0 \;\rightarrow\; x^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el (0 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\ f(x)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x^2}{2-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x^2}{-x}=\underset{x\to-\infty}{Lím}(-x)=+\infty$$

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\ f(x)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x^2}{2-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x^2}{-x}=\underset{x\to+\infty}{Lím}(-x)=-\infty$$

Luego f(x) no tiene asíntota horizontal

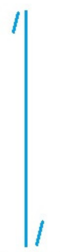
Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay una posible A.V. x = 2

$$\underset{x\to2}{Lím}\frac{x^2}{2-x}=\frac{2^2}{2-2}=\frac{4}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=2 \quad es\ A.V.$$

Posición de la curva respecto de la asíntota,

$$\underset{x\to2^-}{Lím}\frac{x^2}{2-x}\overset{x=1'9}{=}\frac{+}{+}\infty=+\infty$$

$$\underset{x\to2^+}{Lím}\frac{x^2}{2-x}\overset{x=2'1}{=}\frac{+}{-}\infty=-\infty$$



$x = 2$

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

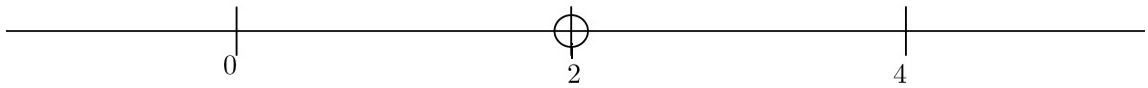
$$f'(x)=\frac{2x\cdot(2-x)-x^2\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

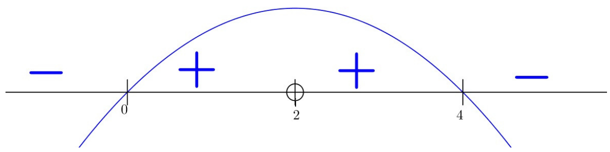
$$4x-x^2=0 \quad\rightarrow\quad x(4-x)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ 4-x=0 \quad\rightarrow\quad x=4 \end{cases}$$

$$(2-x)^2=0 \quad\rightarrow\quad 2-x=0 \quad\rightarrow\quad x=2$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $(\,2\notin Dom\,f(x)\,)$



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces 0 y 4, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en $(\,0\,,\,2\,)\cup(\,2\,,\,4\,)$ ***y***

f(x) es decreciente en $(\,-\infty,\,0\,)\cup(\,4\,,\,+\infty)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 0$ hay un mínimo local y en $x = 4$ hay un máximo local.

Mínimo local (0 , 0)

Máximo local (4 , – 8)

$$x=4 \quad\rightarrow\quad f(4)=\frac{4^2}{2-4}=\frac{16}{-2}=-8$$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 0) que, además, es mínimo local y máximo local en (4 , – 8); a.v. $x = 2$.

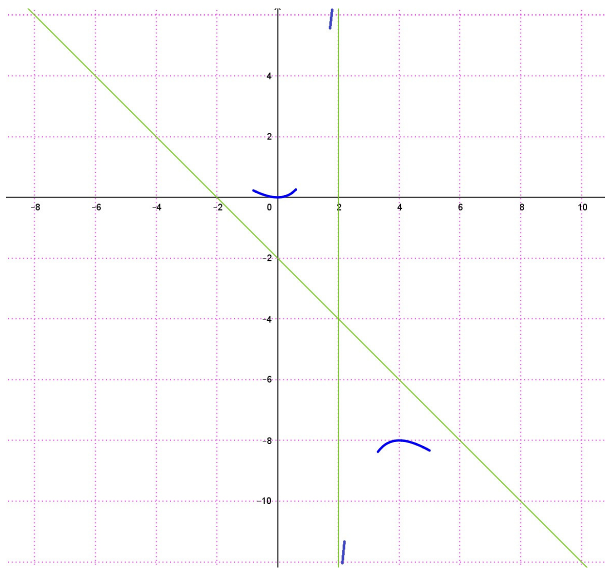
Aunque no se pide esta función tiene una asíntota oblicua (grado numerador = 2, grado denominador = 1, diferencia 1). Vamos a calcularla para representar mejor la función.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -x+2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & -x-2 \\ \hline 2x & \\ -2x+4 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

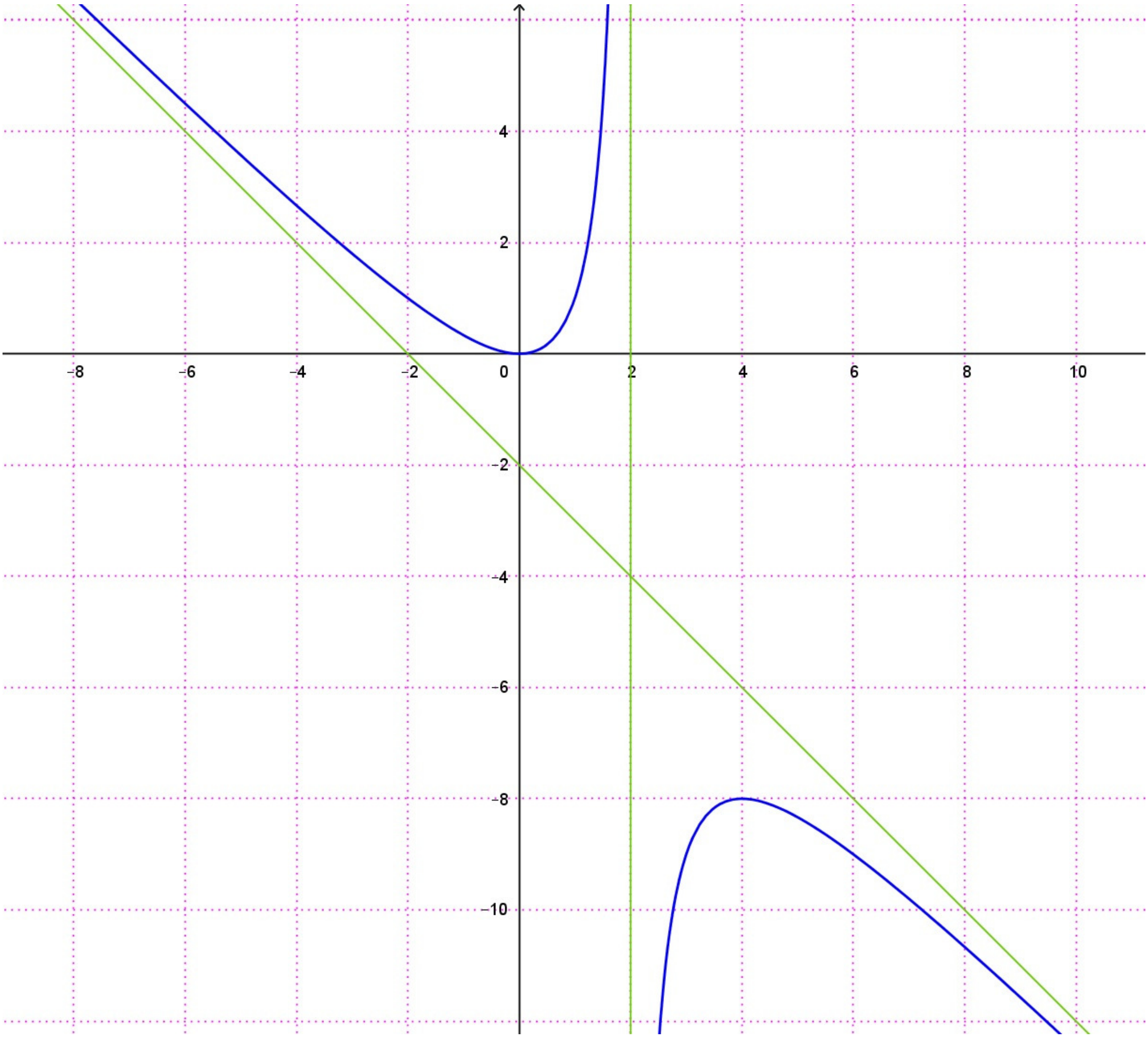
Por tanto la asíntota oblicua es $y = -x-2$

x	$y=-x-2$
-2	0
2	-4

Dibujando estos elementos:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x^2-4=0 \;\rightarrow\; x^2=4 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \;\rightarrow\; Dom\, f(x)=\Re-\{-2,2\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{1-0^2}{0^2-4}=\frac{-1}{4} \;\rightarrow\; \left(0,\frac{-1}{4}\right)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{1-x^2}{x^2-4}=0 \;\rightarrow\; 1-x^2=0 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \;\rightarrow\; \begin{cases}(-1,0)\\(1,0)\end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: (– 1, 0), (1, 0) y $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$ **.**

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(-1)=-1$$

, *la asíntota horizontal es y = – 1 .*

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. x = – 2 y x = 2

$$\lim_{x\to-2}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\frac{1-(-2)^2}{(-2)^2-4}=\frac{-3}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=-2 \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\frac{1-2^2}{2^2-4}=\frac{-3}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=2 \quad es\ A.V.$$

La asíntota horizontal es y = – 1 y las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

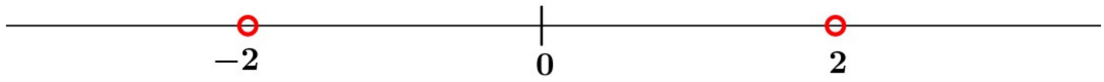
$$f'(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2-4\right)-\left(1-x^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{6x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

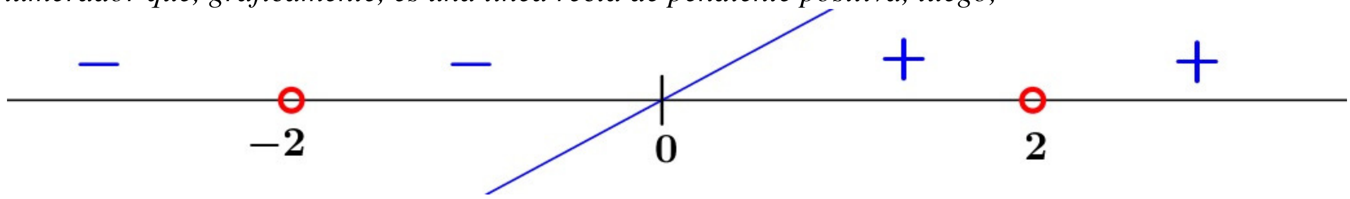
$6x=0 \quad\rightarrow\quad x=0$

$\left(x^2-4\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-4=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=\pm 2$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $\left(\{-2,2\}\notin Dom\ f(x)\right)$



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es una línea recta de pendiente positiva, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$ **y**

f(x) es decreciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 0$ hay un mínimo local ya que $f'(0) = 0$ y a la izquierda la función es decreciente y a la derecha creciente.

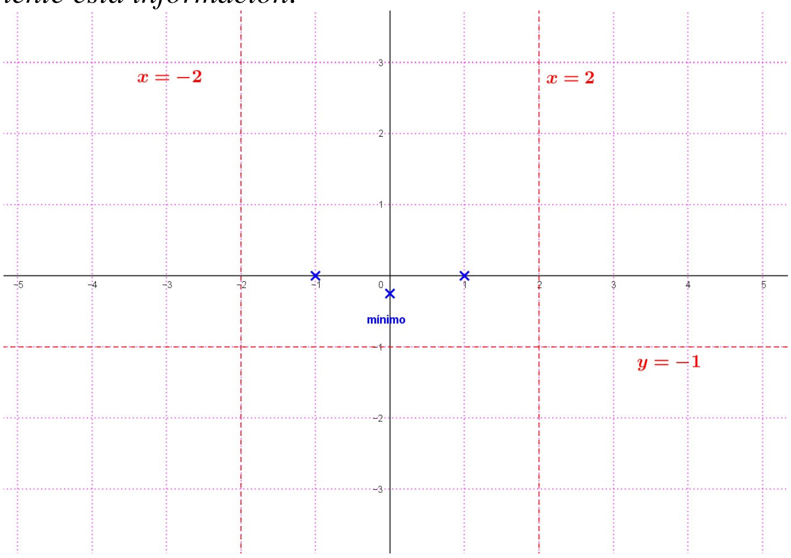
Mínimo local en el punto $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$**.**

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$, mínimo local en $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$; a.h. $y = -1$, a.v. $x = -2$ y $x = 2$.

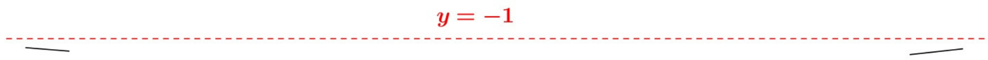
Representando gráficamente esta información:



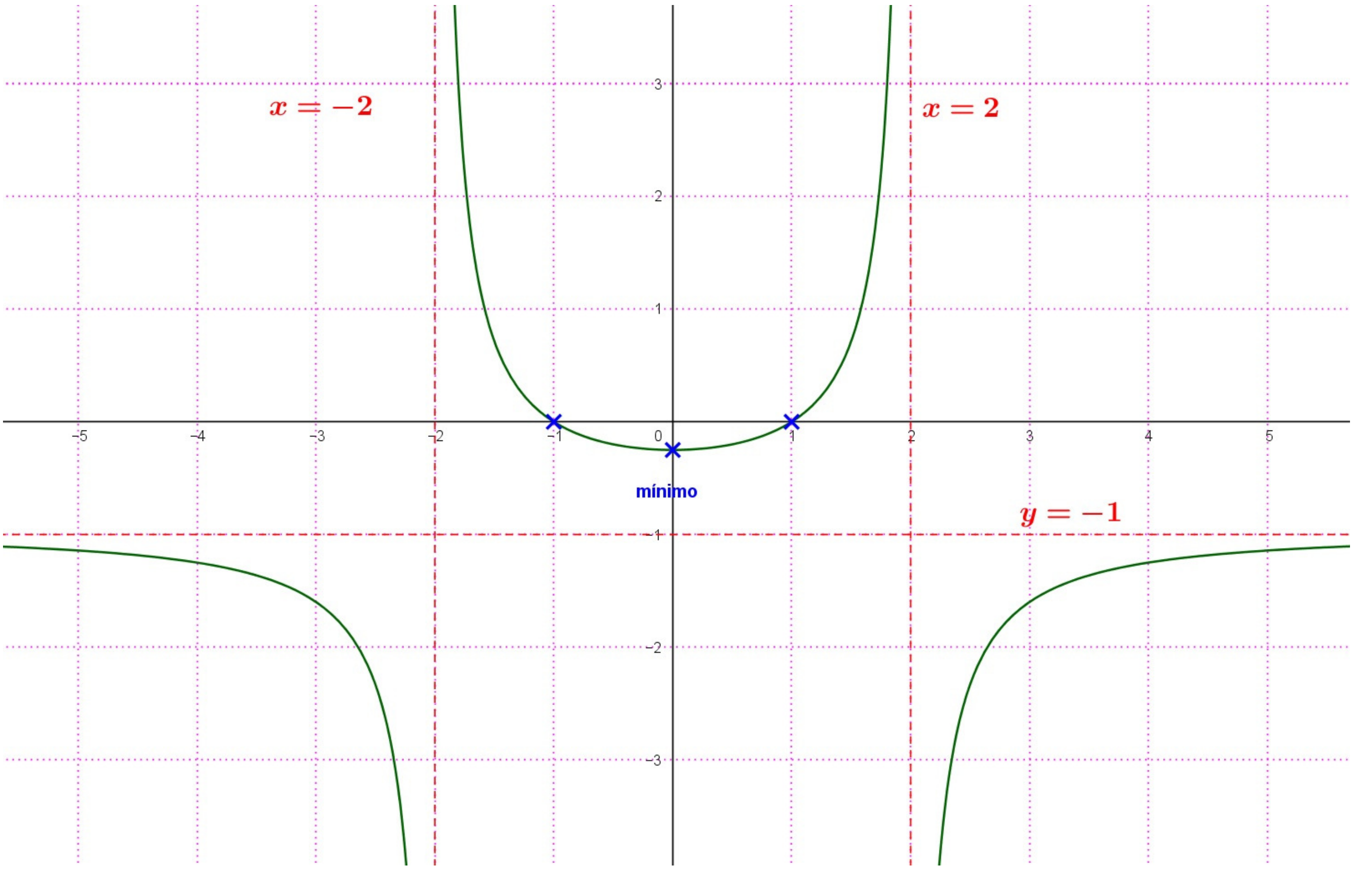
Para completar la representación veamos la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal A.H. $y = -1$

$$En -\infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1-(-1000)^2}{(-1000)^2 - 4} = -1'000003...$$

$$En +\infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1-1000^2}{1000^2 - 4} = -1'000003...$$



Considerando esta posición de la curva respecto de la a.h, las a.v y los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$(x+1)^2=0 \;\rightarrow\; x+1=0 \;\rightarrow\; x=-1 \;\rightarrow\; Dom\, f(x)=\Re-\{-1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0^2+0-2}{(0+1)^2}=\frac{-2}{1}=-2 \;\rightarrow\; (0\,,-2)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=0 \;\rightarrow\; x^2+x-2=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}=$$

$$=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases} \;\rightarrow\; (-2,0) \;\; y \;\; (1,0)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , – 2), (1, 0) y (– 2 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}(1)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(1)=1$$

, la asíntota horizontal es y = 1.

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay la posible A.V. es x = – 1,

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=\frac{(-1)^2+(-1)-2}{(-1+1)^2}=\frac{-2}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=-1 \;\; es\ A.V.$$

La asíntota horizontal es y = 1 y la asíntota vertical es x = – 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(x+1)^2-(x^2+x-2)\cdot 2(x+1)}{\left[(x+1)^2\right]^2}=\frac{(2x+1)\cdot(x+1)^2-(x^2+x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\left\{\begin{matrix}\textit{simplificando}\\ \textit{entre } (x+1)\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{(2x+1)\cdot(x+1)-(x^2+x-2)\cdot 2}{(x+1)^3}=\frac{2x^2+2x+x+1-2x^2-2x-4}{(x+1)^3}=\frac{x+5}{(x+1)^3}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

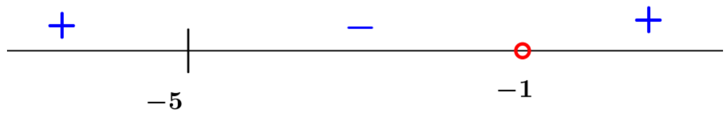
$x+5=0 \quad\rightarrow\quad x=-5$

$(x+1)^3=0 \quad\rightarrow\quad x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=-1$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $(\ \{-1\}\notin Dom\ f(x)\ )$

Calculemos el signo de f´(x) en cada uno de estos intervalos,

x	$\frac{x+5}{(x+1)^3}$
-6	$\frac{-6+5}{(-6+1)^3}=+$
-2	$\frac{-2+5}{(-2+1)^3}=-$
0	$\frac{0+5}{(0+1)^3}=+$



Por tanto,

f(x) es creciente en $(-\infty,-5\ )\cup(1,+\infty)$ ***y f(x) es decreciente en (– 5 , – 1)***

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para x = – 5 hay un máximo local ya que f´(– 5) = 0 y a la izquierda la función es creciente y a la derecha decreciente. Y la función no tiene mínimos locales.

$$x=-5 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{(-5)^2+(-5)-2}{(-5+1)^2}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}=1'125$$

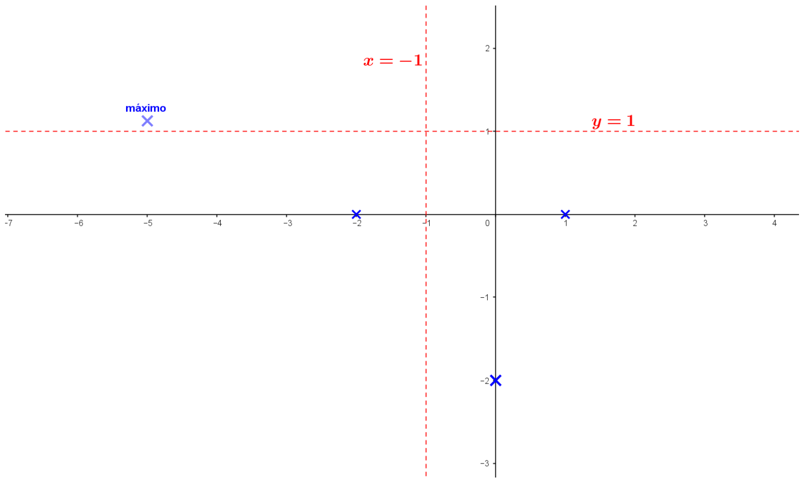
La función tiene un máximo local en el punto $\left(-5\ ,\ \frac{9}{8}\right)$ ***y no tiene mínimos locales.***

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , – 2), (1, 0) y (– 2 , 0), máximo local en $\left(-5\ ,\frac{9}{8}\right)$*; a.h. y = 1, a.v. x = –1.*

Representando gráficamente esta información:



Para completar la representación veamos la posición de la curva respecto de sus asíntotas:

A.H. y = 1

$$En\ -\infty,\quad x=-1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{(-1000)^2-1000-2}{(-1000+1)^2}=1'000998...$$

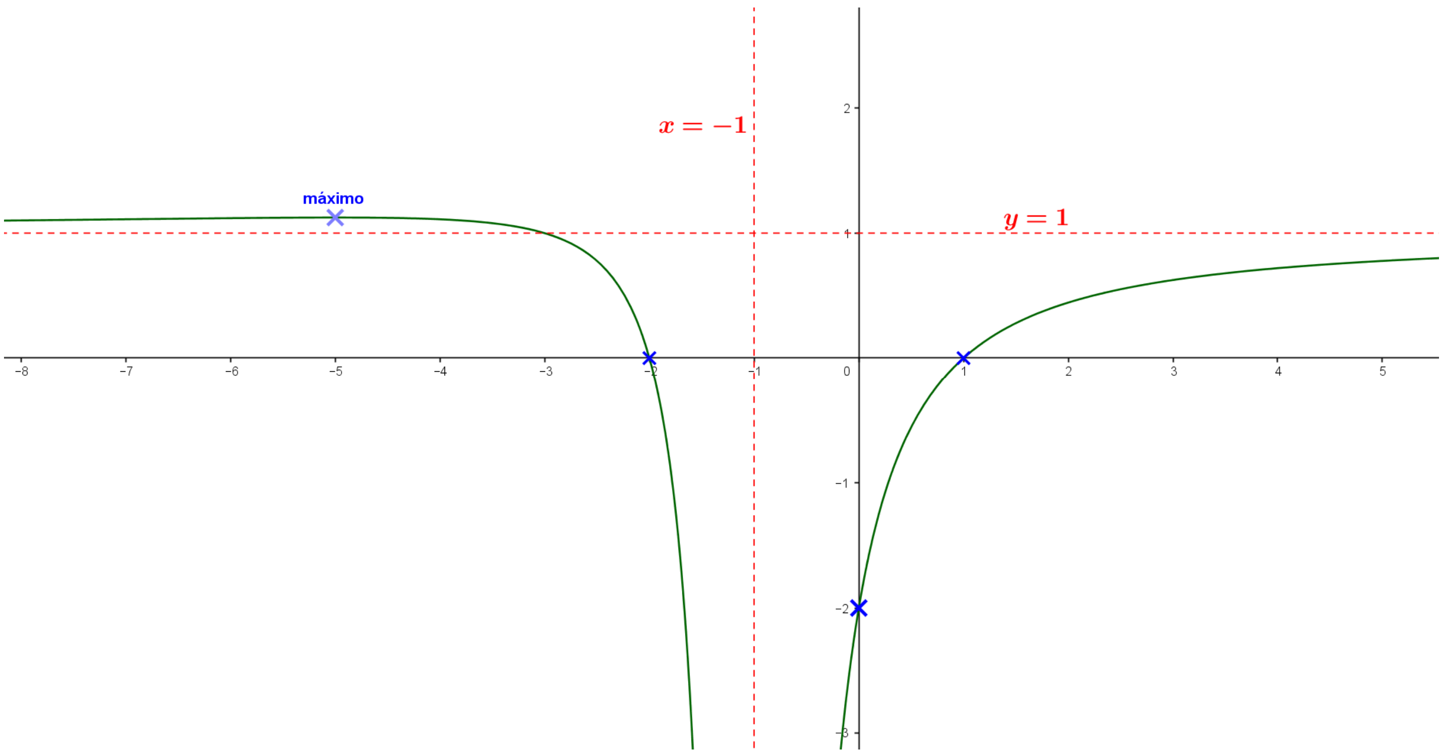
$$En\ +\infty,\quad x=1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1000^2+1000-2}{(1000+1)^2}=0'998...$$

A.V. x = – 1

$$\underset{x\to -1^-}{Lím}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}\overset{x=-1'1}{=}\frac{(-1'1)^2-1'1-2}{(-1'1+1)^2}\infty=-\infty$$

$$\underset{x\to -1^+}{Lím}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}\overset{x=-0'9}{=}\frac{(-0'9)^2-0'9-2}{(-0'9+1)^2}\infty=-\infty$$

Considerando esta posición de la curva respecto de la a.h, la a.v y los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$2x^2-3x-2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{3+5}{4}=2 \\ x_2=\dfrac{3-5}{4}=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

$$\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{-1}{2},2\right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2+2\cdot 0-15}{2\cdot 0^2-3\cdot 0-2}=\frac{-15}{-2}=\frac{15}{2}\quad\rightarrow\quad \left(0,\frac{15}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=0;\quad x^2+2x-15=0\quad\rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-2+8}{2}=3 & (3,0) \\ x_2=\dfrac{-2-8}{2}=-5 & (-5,0)\end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0,\dfrac{15}{2}\right)$, $(-5,0)$ ***y*** $(3,0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

, la asíntota horizontal es $y=\dfrac{1}{2}$.

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles a.v. $x=\dfrac{-1}{2}$ *y* $x=2$.

$$\lim_{x\to-1/2} f(x)=\lim_{x\to-1/2}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)-15}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\left(-\frac{1}{2}\right)-2}=\frac{-63/4}{0}=\infty\quad\rightarrow\quad x=\frac{-1}{2}\quad es\ a.v.$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\frac{2^2+2\cdot 2-15}{2\cdot 2^2-3\cdot 2-2}=\frac{-7}{0}=\infty\quad\rightarrow\quad x=2\quad es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es $y=\dfrac{1}{2}$ ***y las asíntotas verticales son*** $x=\dfrac{-1}{2}$ *y* $x=2$.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)\cdot(2x^2-3x-2)-(x^2+2x-15)\cdot(4x-3)}{(2x^2-3x-2)^2}=\frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2-3x-2 \\ 2x+2 \\ \hline 4x^2-6x-4 \\ 4x^3-6x^2-4x \\ \hline 4x^3-2x^2-10x-4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2+2x-15 \\ 4x-3 \\ \hline -3x^2-6x+45 \\ 4x^3+8x^2-60x \\ \hline 4x^3+5x^2-66x+45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4x^3-2x^2-10x-4 \\ -4x^3-5x^2+66x-45 \\ \hline -7x^2+56x-49 \end{array}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

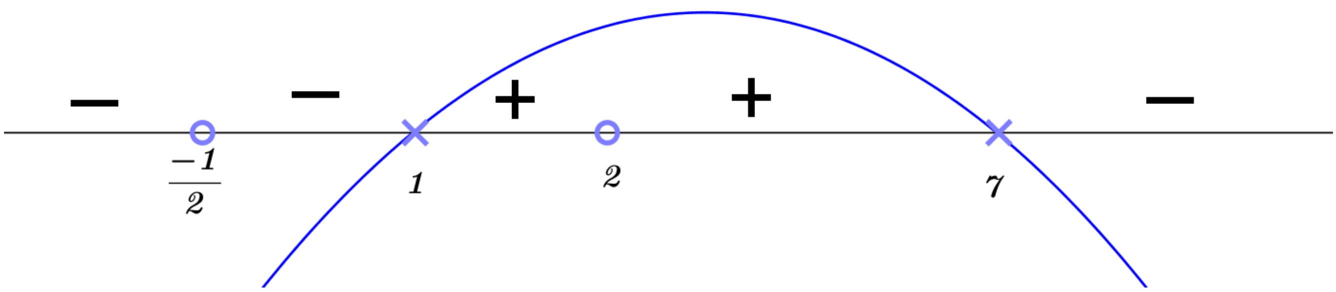
$$-7x^2+56x-49=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-56\pm\sqrt{56^2-4\cdot(-7)\cdot(-49)}}{2\cdot(-7)}=\frac{-56\pm\sqrt{3136-1372}}{-14}=\frac{-56\pm 42}{-14}=$$

$$=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-56+42}{-14}=\dfrac{-14}{-14}=1 \\ x_2=\dfrac{-56-42}{-14}=\dfrac{-98}{-14}=7 \end{array}\right.$$

$$(2x^2-3x-2)^2=0 \quad\rightarrow\quad 2x^2-3x-2=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=\frac{-1}{2} \quad y \quad x=2$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $\left(\left\{\frac{-1}{2},2\right\}\notin Dom\ f(x)\right)$

El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces 1 y 7, luego,*



Por tanto,

f(x) es creciente en $(1,2)\cup(2,7)$ ***y***

f(x) es decreciente en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\cup\left(\frac{-1}{2},1\right)\cup(7,+\infty)$**.**

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 1$ *hay un mínimo local y en* $x = 7$ *hay un máximo local.*

$$x=1 \quad f(1)=\frac{1^2+2\cdot 1-15}{2\cdot 1^2-3\cdot 1-2}=\frac{-12}{-3}=4 \quad\rightarrow\quad Mínimo\ local \quad (1,4)$$

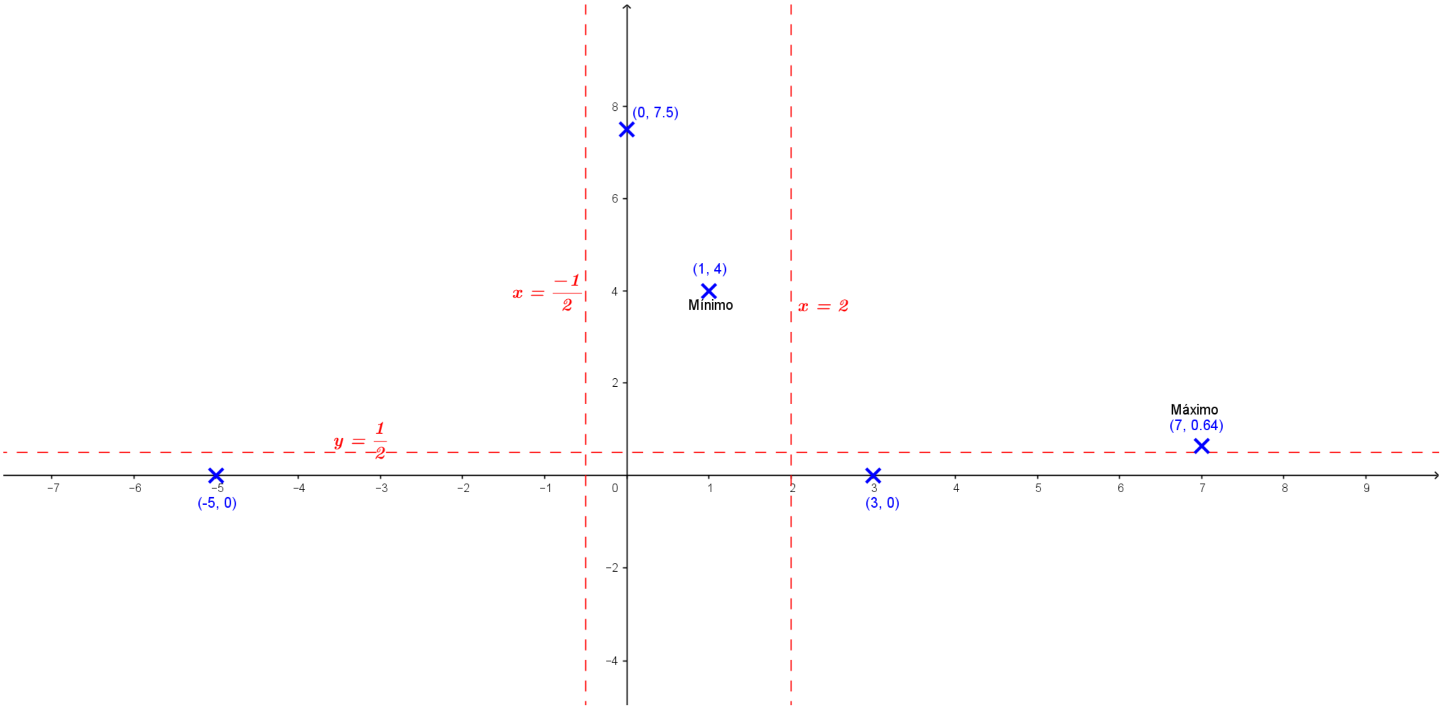
$$x=7 \quad f(7)=\frac{7^2+2\cdot 7-15}{2\cdot 7^2-3\cdot 7-2}=\frac{48}{75}=\frac{16}{25}=0'64 \quad\rightarrow\quad Máximo\ local \quad \left(7,\frac{16}{25}\right)$$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, 4)$, $\left(\dfrac{-2}{3}, 0\right)$ *y* $(2, 0)$, *mínimo local en* $(0, 4)$, *máximo local en* $\left(-2, \dfrac{16}{5}\right)$; *a.h.* $y = 3$, *a.v.* $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y* $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Representando gráficamente esta información:

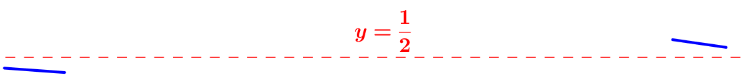


Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal.

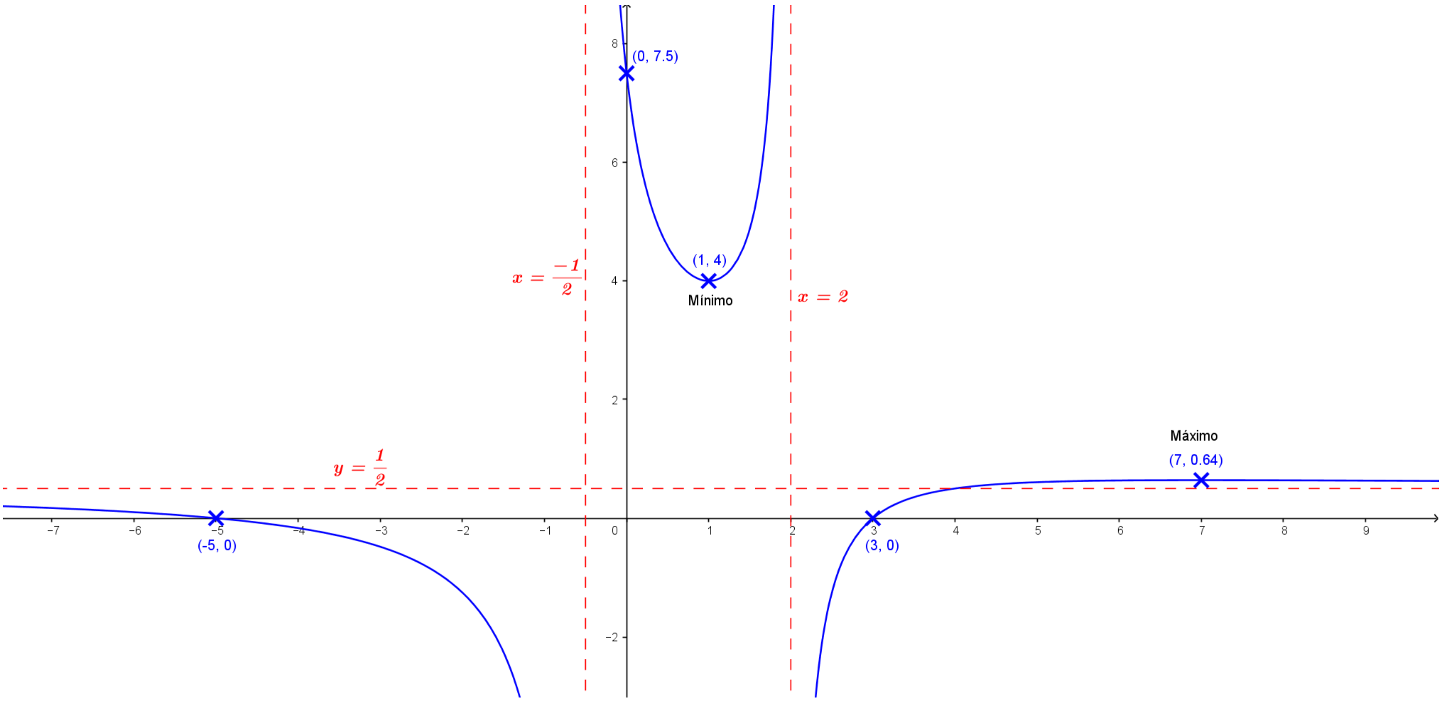
A.H. $y = \dfrac{1}{2}$

$$En\ -\infty,\quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{(-1000)^2 + 2\cdot(-1000) - 15}{2\cdot(-1000)^2 - 3\cdot(-1000) - 2} = 0´4982... < \frac{1}{2}$$

$$En\ +\infty,\quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1000^2 + 2\cdot 1000 - 15}{2\cdot 1000^2 - 3\cdot 1000 - 2} = 0´5017... > \frac{1}{2}$$



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}=\frac{x^2-3x}{x^2-3x+x+1}=\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}$$

a) Dominio,

$$x^2-2x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=1 \quad\rightarrow\quad Dom\ \ f(x)=\Re-\{1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2-3\cdot 0}{0^2-2\cdot 0+1}=\frac{0}{1}=0 \quad\rightarrow\quad (0,0)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=0;\quad x^2-3x=0 \quad\rightarrow\quad x(x-3)=0\begin{cases}x=0 \quad\rightarrow\quad (0,0)\\ x-3=0;\quad x=3 \qquad (3,0)\end{cases}$$

Dom f(x) = ℜ ~{1} y los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , 0) y (3 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

, *la asíntota horizontal es y =1.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que la posible a.v. es x = 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\frac{1-3}{1-2+1}=\frac{-2}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \quad es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 1 y la asíntota vertical x = 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de f´(x)

$$f'(x)=\frac{(2x-3)\cdot\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2-3x\right)\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{x^2+2x-3}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$\begin{array}{r} x^2-2x+1 \\ 2x-3 \\ \hline -3x^2+6x-3 \\ 2x^3-4x^2+2x \\ \hline 2x^3-7x^2+8x-3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2-3x \\ 2x-2 \\ \hline -2x^2+6x \\ 2x^3-6x^2 \\ \hline 2x^3-8x^2+6x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x^3-7x^2+8x-3 \\ -2x^3+8x^2-6x \\ \hline x^2+2x-3 \end{array}$$

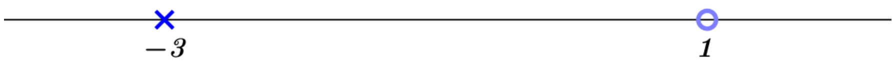
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$x^2+2x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=$$

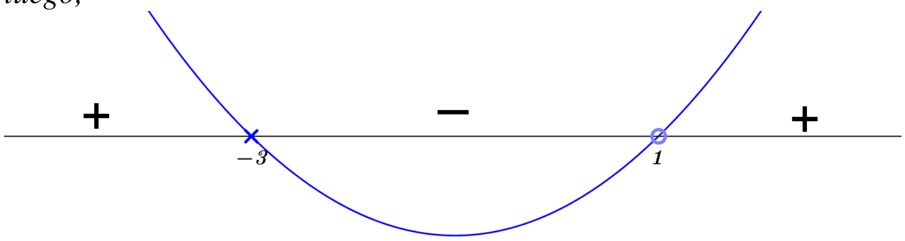
$$=\begin{cases} x_1=\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-2-4}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

$$\left(x^2-2x+1\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-2x+1=0 \quad \rightarrow \quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos: ($\{1\}\notin Dom\ f(x)$)



El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces – 3 y 1, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en (– ∞ , – 3) ∪ (1 , +∞) y
f(x) es decreciente en (– 3 , 1)

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para x = – 3 hay un máximo local.

$$x=-3 \quad f(1)=\frac{(-3)^2-3\cdot(-3)}{(-3)^2-2\cdot(-3)+1}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8} \quad \rightarrow \quad \text{Máximo local} \quad \left(-3,\frac{9}{8}\right)$$

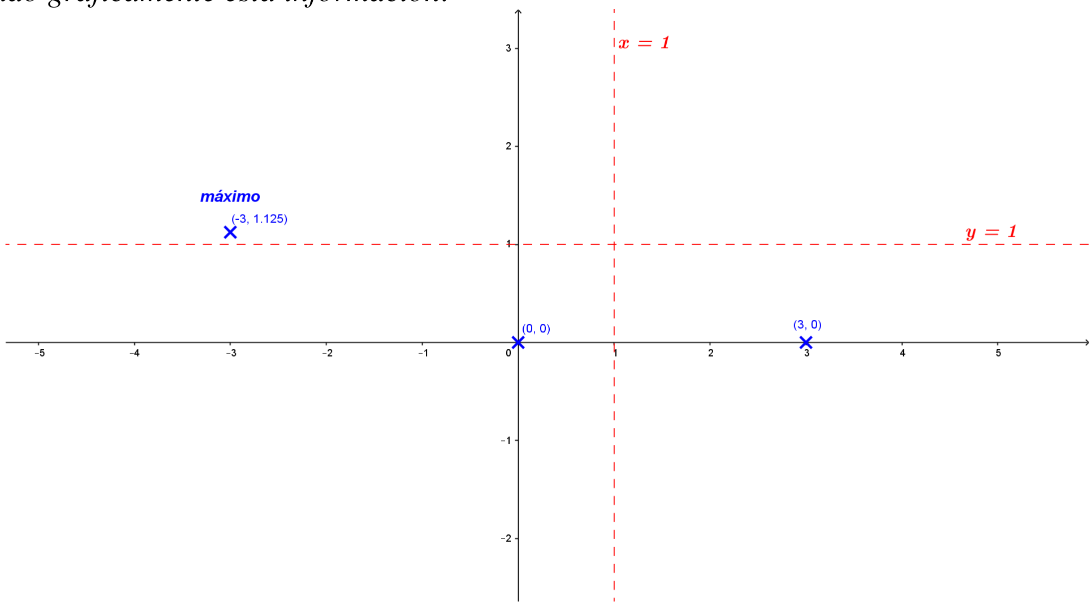
Solución: f(x) sólo tiene un máximo local en $\left(-3,\dfrac{9}{8}\right)$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 0) y (3 , 0), máximo local en $\left(-3, \frac{9}{8}\right)$*; a.h. y = 1, a.v. x = 1.*

Representando gráficamente esta información:



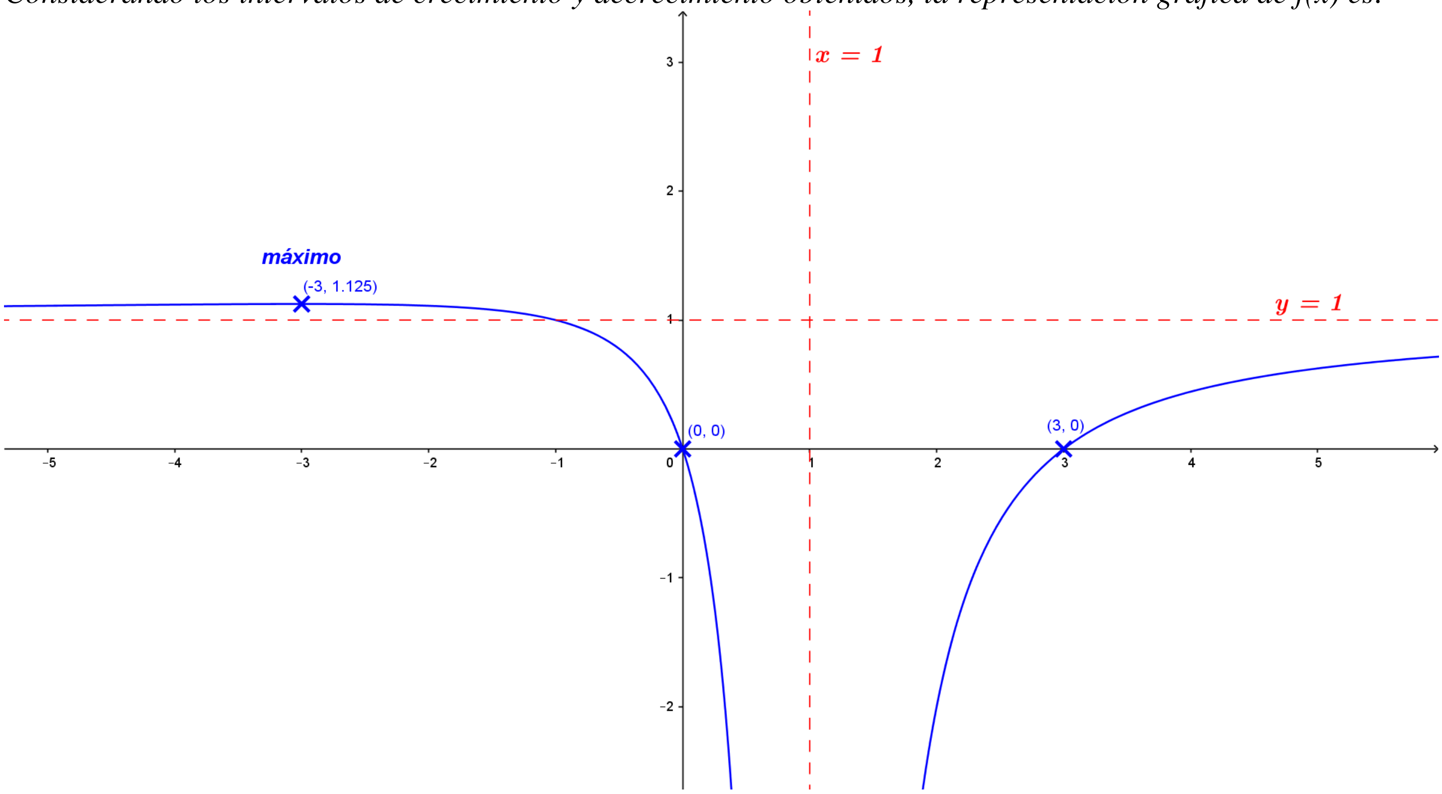
Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal.

A.H. y = 1

$$En\ -\infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{(-1000)^2 - 3\cdot(-1000)}{(-1000)^2 - 2\cdot(-1000) + 1} = 1'0009\ldots > 1$$

$$En\ +\infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1000^2 - 3\cdot 1000}{1000^2 - 2\cdot 1000 + 1} = 0'998\ldots < 1$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, se pide

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos relativos.
e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Solución:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

$x^2 + 1 = 0$; $x^2 = -1$ no tiene soluciones reales por lo tanto, $Dom\ f = \Re$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2\,.\,0}{0^2+1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \rightarrow \quad (0,0)$$

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{2x}{x^2+1} \quad \rightarrow \quad 0 = 2x \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad (0,0)$$

Por lo tanto el punto de corte con los ejes coordenados es (0,0)

b) Ecuación de sus asíntotas.

- asíntotas verticales

Como el dominio de la función son todos los números reales, no tiene asíntotas verticales.

- asíntota horizontal

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

de igual manera $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$

la asíntota horizontal será $y = 0$.

-asíntota oblicua

grd (numerador) – grd (denominador) = 1 – 2 = – 1, como no es 1, no hay asíntota oblicua.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$y' = \frac{2(x^2+1) - 2x\,2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

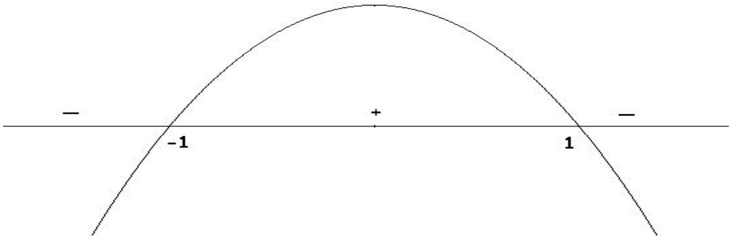
estudiemos el signo de y´, para ello buscamos las raíces del numerador y denominador

$$2 - 2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2 = 2x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$(x^2+1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \textit{no tiene soluciones reales}$$

Como el denominador de y´ es una expresión al cuadrado siempre será positivo; el signo de y´ sólo depende del numerador.

Gráficamente el polinomio del numerador es una parábola como sigue (a<0)



Por lo tanto,

f es creciente en (– 1 , 1) y

f es decreciente en $(-\infty\,,-1) \cup (1\,,+\infty)$

d) Máximos y mínimos relativos.

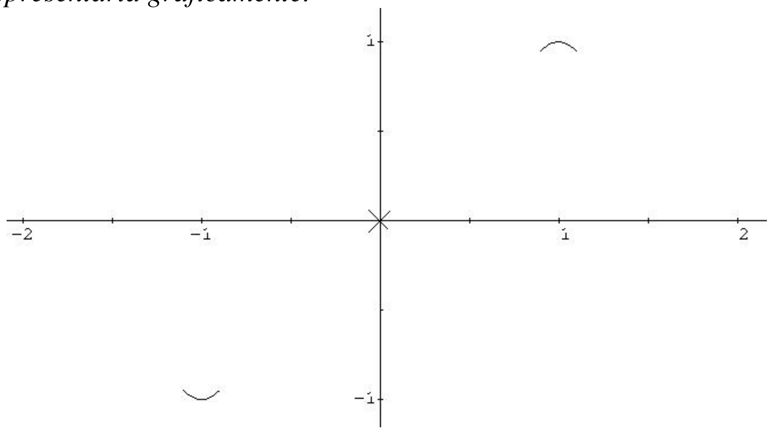
Del estudio realizado en el apartado anterior se deduce que

en x = – 1 hay un mínimo $f(-1)=\dfrac{2(-1)}{(-1)^2+1}=\dfrac{-2}{2}=-1$ *Mínimo relativo en (– 1 , – 1)*

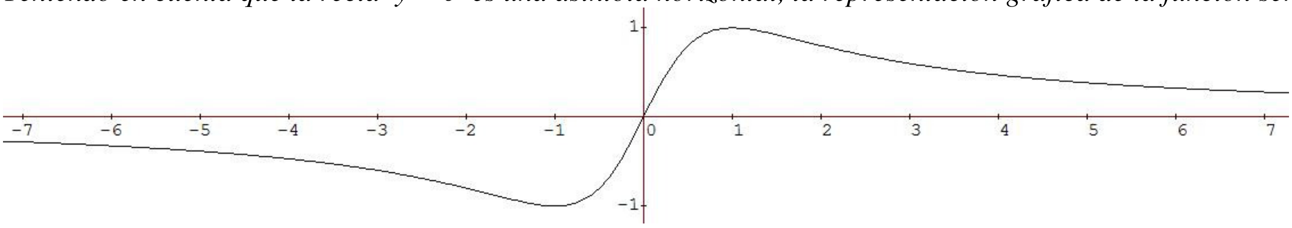
en x = 1 hay un máximo $f(1)=\dfrac{2\,.1}{1^2+1}=\dfrac{2}{2}=1$ *Máximo relativo en (1 , 1)*

e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Marcamos en los ejes coordenados:
el punto de corte (0,0),
el mínimo relativo y
el máximo relativo



Teniendo en cuenta que la recta y = 0 es una asíntota horizontal, la representación gráfica de la función será:



esta gráfica cumple los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x-3}$, se pide

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a)
Dominio,

$$2x-3=0; \quad x=\frac{2}{3}; \qquad Dom\ f = \Re - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Puntos de corte,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad \rightarrow \quad y=\dfrac{0+4}{0-3}=\dfrac{-4}{3} \\ y=0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2+4}{2x-3}=0 \quad \rightarrow \quad x^2+4=0 \quad \textit{no tiene solución} \end{array}\right\} \left(0\,,\frac{-4}{3}\right)$$

b) Asíntotas verticales,

$$Veamos\ si\ x=\frac{3}{2}\ es\ \ a.v.$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{x^2+4}{2x-3} = \frac{\frac{9}{4}+4}{2\frac{2}{3}-3} = \frac{\frac{25}{4}}{0} = \infty \qquad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}\ es\ \ a.v.$$

Asíntotas horizontales,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4}{2x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

No hay asíntota horizontal

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Debemos estudiar el signo de la primera derivada,

$$f'(x) = \frac{2x(2x-3)-\left(x^2+4\right)2}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2-6x-2x^2-8}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-8}{(2x-3)^2}$$

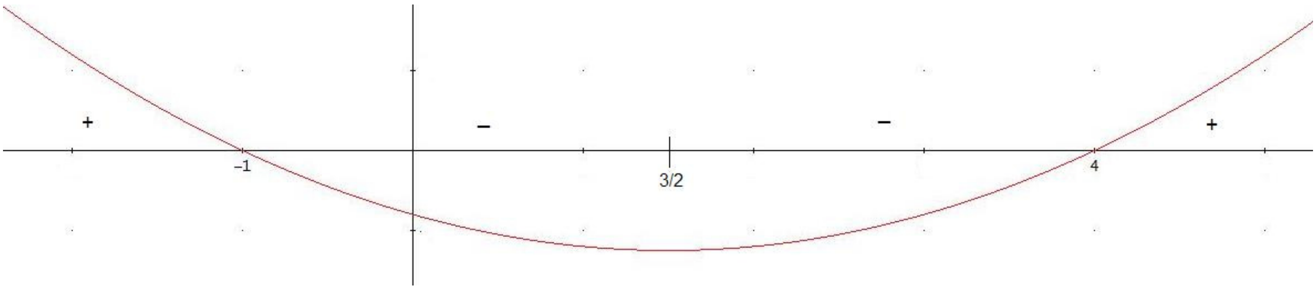
Busquemos las raíces del numerador y del denominador,

$$2x^2-6x-8=0 \quad \rightarrow \quad x^2-3x-4=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{3+5}{2}=4 \\ \dfrac{3-5}{2}=-1 \end{array}\right.$$

$$(2x-3)^2=0 \quad \rightarrow \quad 2x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

Debemos considerar también el valor que no es del dominio de la función, coincide con la última raíz obtenida.

Marcamos en la recta real las tres raíces obtenidas. Como el denominador de f´ está elevado al cuadrado siempre es positivo, luego el signo de f´ sólo depende del signo del numerador. Como el numerador es un polinomio de 2º grado sabemos que gráficamente es una parábola y esto nos sirve para determinar su signo.



$f(x)$ *es creciente en* $(-\infty\,,-1)\cup(4\,,+\infty)$

$f(x)$ *es decreciente en* $\left(-1\,,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2}\,,4\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

El estudio realizado en el apartado anterior no permite encontrar los extremos locales de esta función,

Máximo (– 1 , – 1)

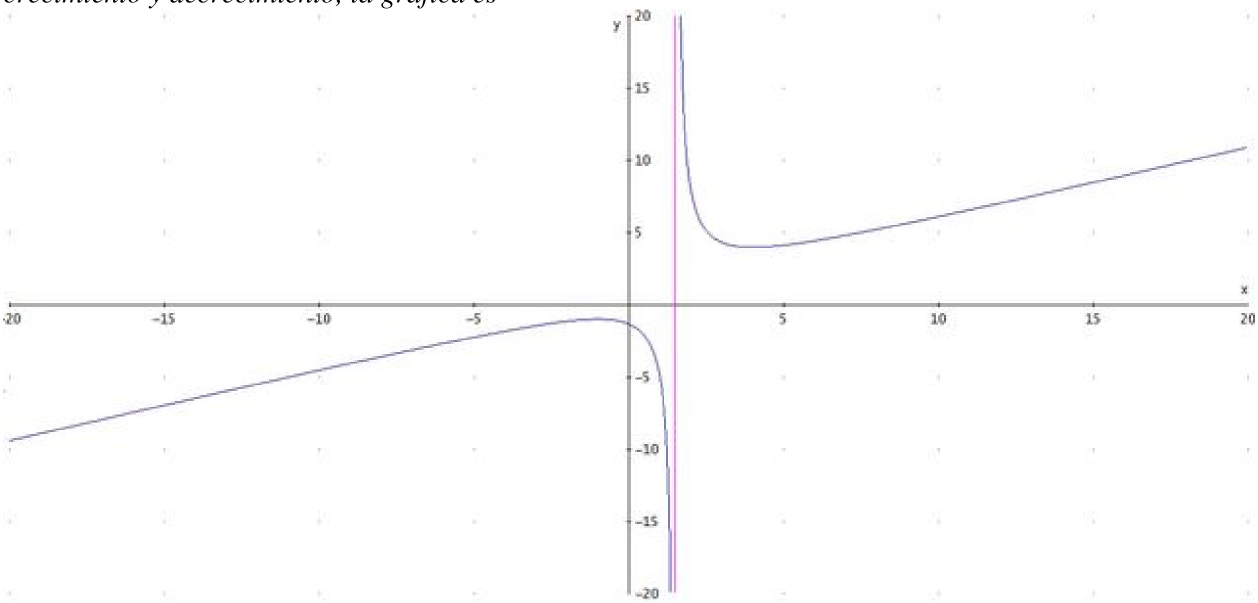
$$x=-1 \quad\rightarrow\quad f(-1)=\frac{(-1)^2+4}{2(-1)-3}=\frac{5}{-5}=-1$$

Mínimo (4 , 4)

$$x=4 \quad\rightarrow\quad f(4)=\frac{4^2+4}{2\,.\,4-3}=\frac{20}{5}=4$$

e) Representación gráfica.

Trazamos la asíntota vertical, el punto de corte, el máximo y el mínimo locales y considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la gráfica es



EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio

$$1-x^2=0 \quad\rightarrow\quad 1=x^2 \quad\rightarrow\quad x=\pm 1 \quad\rightarrow\quad Dom\ y=\Re-\{-1,1\}$$

Corte eje OY

$$x=0 \quad\rightarrow\quad y=\frac{0^3}{1-0^2}=\frac{0}{1}=0 \quad\Rightarrow\quad (0,0)$$

Corte eje OX

$$y=0 \quad\rightarrow\quad 0=\frac{x^3}{1-x^2} \quad\rightarrow\quad 0=x^3 \quad\rightarrow\quad 0=x \quad\Rightarrow\quad (0,0)$$

El punto de corte con los ejes coordenados es el (0 , 0)

b) Asíntotas verticales y horizontales

Las posibles asíntotas verticales son x = 1 y x = – 1 (los valores de x que no son del dominio)

Veamos si x = – 1 es a.v.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{(-1)^3}{1-(-1)^2}=\frac{-1}{1-1}=\frac{-1}{0}=\infty \qquad\rightarrow\quad x=-1 \text{ es a.v.}$$

Veamos si x = 1 es a.v.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{1^3}{1-1^2}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty \qquad\rightarrow\quad x=1 \text{ es a.v.}$$

Posteriormente, si es necesario, estudiaremos la posición de la curva respecto de estas asíntotas.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{-x^2}=\lim_{x\to -\infty}(-x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\left(\frac{\infty}{-\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{-x^2}=\lim_{x\to +\infty}(-x)=-\infty$$

luego no tiene asíntota horizontal.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$y=\frac{x^3}{1-x^2}$$

$$y'=\frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{3x^2-3x^4+2x^4}{(1-x^2)^2}=\frac{-x^4+3x^2}{(1-x^2)^2}$$

Estudiemos el signo de y´,

raíces de numerador,

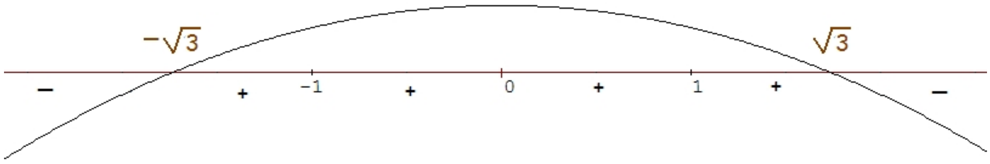
$$-x^4+3x^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2(-x^2+3)=0 \quad \begin{cases} x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \\ -x^2+3 \quad\rightarrow\quad x^2=3 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

raíces del denominador,

$$\left(1-x^2\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad 1-x^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$$

Marcamos en la recta real todas las raíces que hemos obtenido y consideramos el dominio de la función.

Como en la función el denominador es una expresión al cuadrado, positivo, el denominador no aporta signo a la función. En el numerador hay dos factores x^2 y $(-x^2+3)$; x^2 es positivo. Por lo tanto el signo de y´ sólo depende del de $-x^2+3$. Por lo tanto



Creciente $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$

Decreciente $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

d) Máximos y mínimos locales

Los extremos locales de la función los buscamos en los puntos donde se produce un cambio de crecimiento a decrecimiento o viceversa. Luego,

$$x=-\sqrt{3} \quad \textit{mínimo} \quad y=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-3}=\frac{-3\sqrt{3}}{-2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

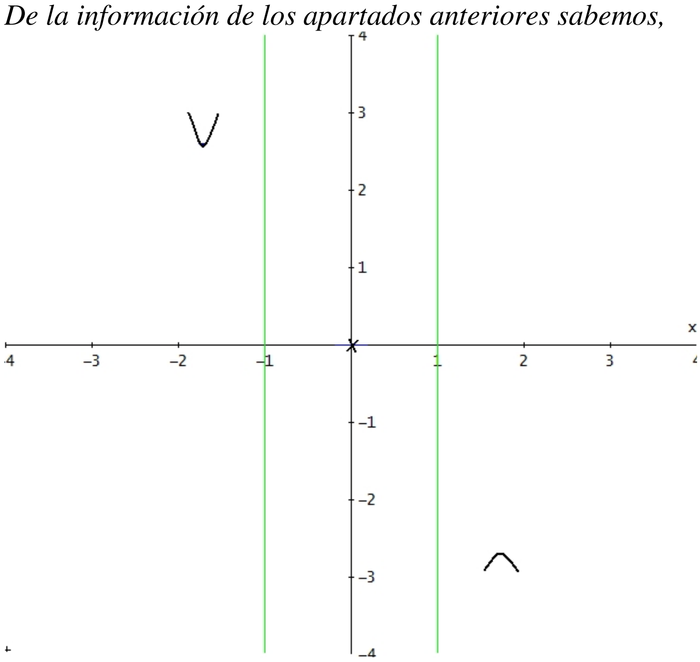
$$x=\sqrt{3} \quad \textit{máximo} \quad y=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{1-3}=\frac{3\sqrt{3}}{-2}=\frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

Mínimo local $\left(-\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ *y máximo local* $\left(\sqrt{3},\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$

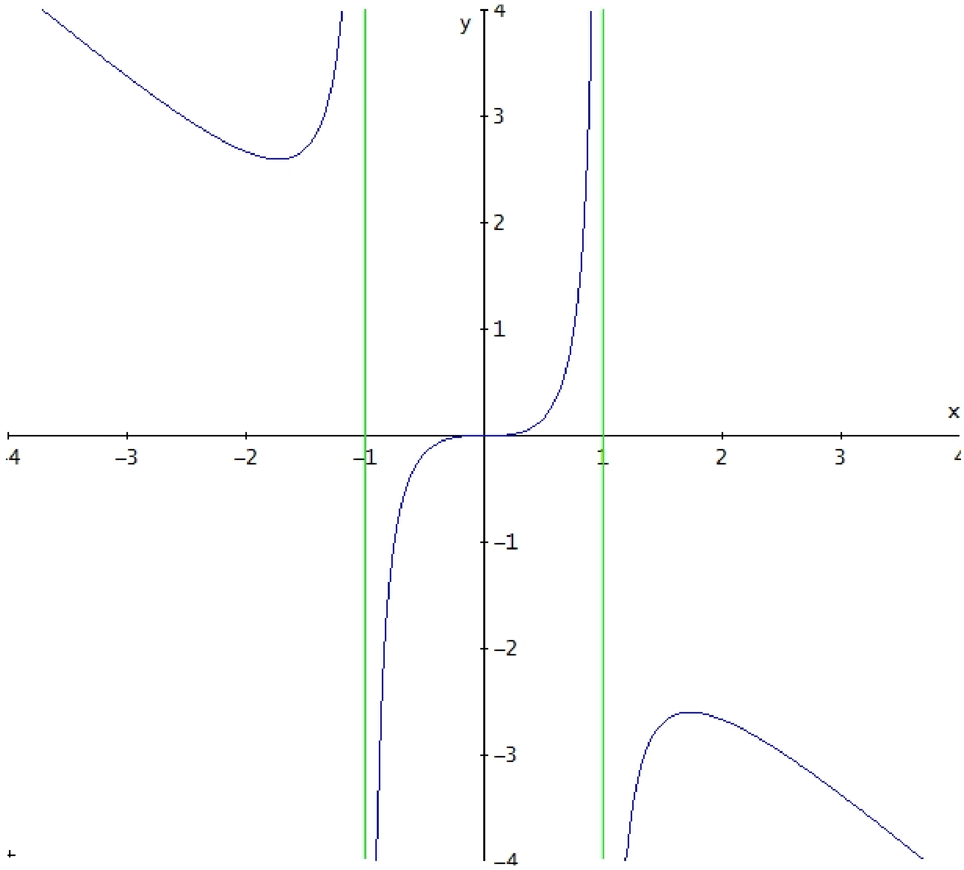
$(-1'73\,,\,2'59)$ $\qquad$ $(1'73\,,\,-2'59)$

e)

De la información de los apartados anteriores sabemos,



Como entre − 1 y 1 la función es creciente, la representación será:



y
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

OPCIÓN A

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2-1}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximo y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio

$$x^2-1=0 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1} \;\rightarrow\; x=\pm 1 \;\rightarrow\; Dom\ f(x)=\Re-\{-1\,,1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{3.0+2}{0^2-1}=\frac{2}{-1}=-2 \;\rightarrow\; (0\,,-2)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{3x+2}{x^2-1}=0 \;\rightarrow\; 3x+2=0 \;\rightarrow\; 3x=-2 \;\rightarrow\; x=\frac{-2}{3} \;\rightarrow\; \left(\frac{-2}{3}\,,0\right)$$

Hay dos puntos de corte $(0\,,-2)$ *y* $\left(\dfrac{-2}{3}\,,0\right)$

b) Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x^2-1}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x^2-1}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{+\infty}=0$$

$\Rightarrow y=0$ *es la asíntota horizontal*

Asíntotas verticales. Las posibles asíntotas verticales son las rectas $x=-1$ *y* $x=1$ *(corresponden a los valores de* x *que no son del dominio de la función)*

$x=-1$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x+2}{x^2-1}=\frac{3.(-3)+2}{(-1)^2-1}=\frac{-1}{1-1}=\frac{-1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$x=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x+2}{x^2-1}=\frac{3.1+2}{1^2-1}=\frac{5}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=1 \text{ es una asíntota vertical}$$

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para obtener estos intervalos estudiaremos el signo de la primera derivada,

$$f'(x)=\frac{3(x^2-1)-(3x+2)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^2-3-6x^2-4x}{(x^2-1)^2}=\frac{-3x^2-4x-3}{(x^2-1)^2}$$

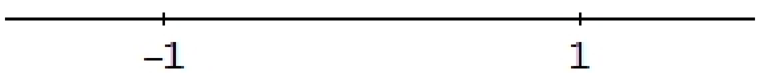
Estudiamos el signo de este cociente de polinomios buscando las raíces del numerador y denominador

$$-3x^2-4x-3=0 \;\rightarrow\; 3x^2+4x+3=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.3.3}}{2.3}=\frac{-4\pm\sqrt{-20}}{6} \quad \text{sin soluciones reales}$$

Por lo tanto, $-3x^2-4x-3=-(3x^2+4x+3)$ *es siempre negativo.*

$$(x^2-1)^2=0 \;\rightarrow\; x^2-1=0 \;\rightarrow\; x=\pm1 \quad (\text{ visto en el apartado a) })$$

Ahora representamos en la recta real los valores de x *obtenidos y, además, los que no son del dominio de la función,*



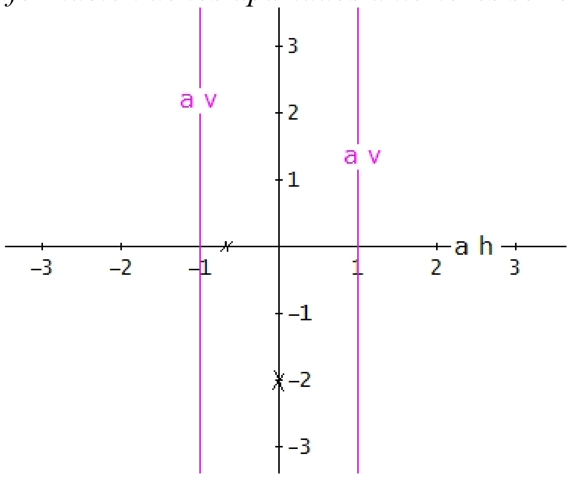
Como el denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, será positivo; luego el signo de $f'(x)$ sólo depende del signo del numerador que hemos visto que es negativo, esto significa que:

Y por lo tanto, f(x) es decreciente en su dominio. f(x) es decreciente en $\Re-\{-1, 1\}$

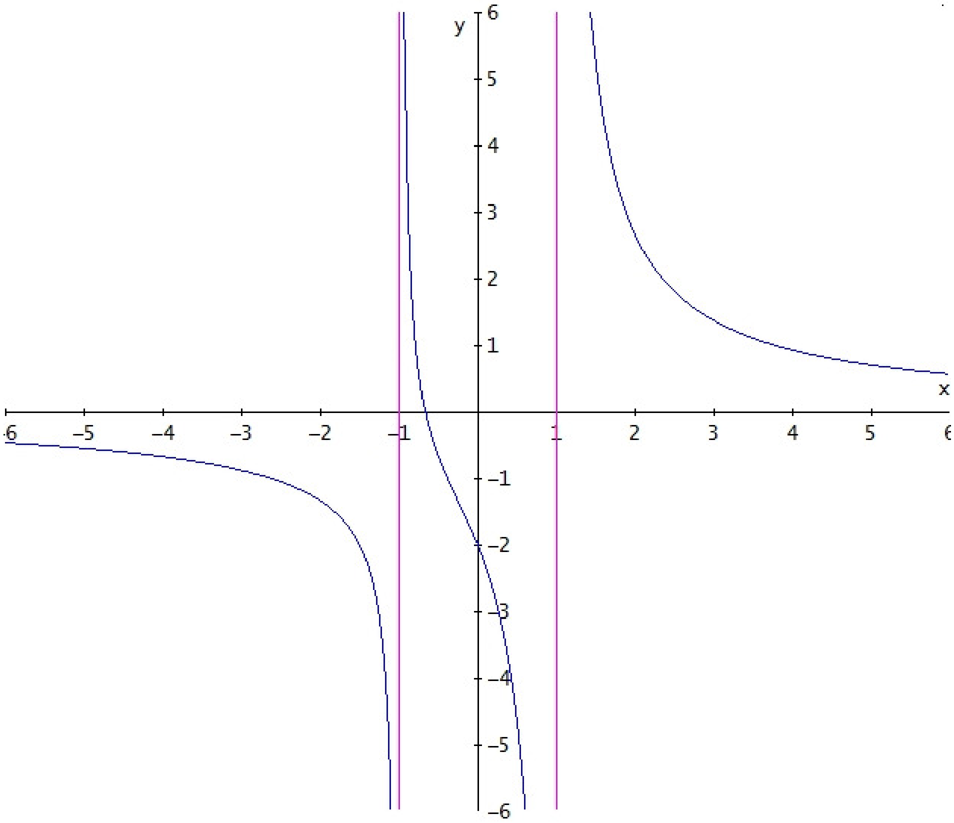
d) Máximos y mínimos locales.

Como f(x) es decreciente en su dominio, la función f(x) no tiene ni máximos ni mínimos locales.

e) La información de los apartados anteriores se resume en (marcamos los puntos de corte y las asíntotas):



Como la función es decreciente, su representación será:



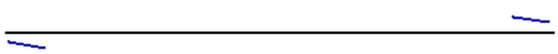
Si no se ve directamente la representación anterior, podemos completar los datos buscando la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

Veámoslo respecto de la asíntota horizontal:

$$en \quad -\infty, \quad x=-1000 \quad \rightarrow \quad \frac{3.(-1000)^2+2}{(-1000)^2-1}=\frac{-2998}{999999}\approx -0'...$$

$$en \quad +\infty, \quad x=1000 \quad \rightarrow \quad \frac{3.1000^2+2}{1000^2-1}=\frac{3002}{999999}\approx 0'...$$

Esto significa que la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal será



OPCIÓN B

Problema 2. Sea la función $f(x) = (x^2 + x)^2$. Se pide

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Los máximos y mínimos locales.
e) La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Como f(x) es un polinomio al cuadrado, f(x) puede calcularse para cualquier valor de x. Por lo tanto $Dom\ f(x) = \Re$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$x = 0 \rightarrow f(0) = (0^2 + 0)^2 = 0 \rightarrow (0,0)$

$f(x) = 0 \rightarrow (x^2 + x)^2 = 0$

$x^2 + x = 0$

$$x(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1,0) \end{cases}$$

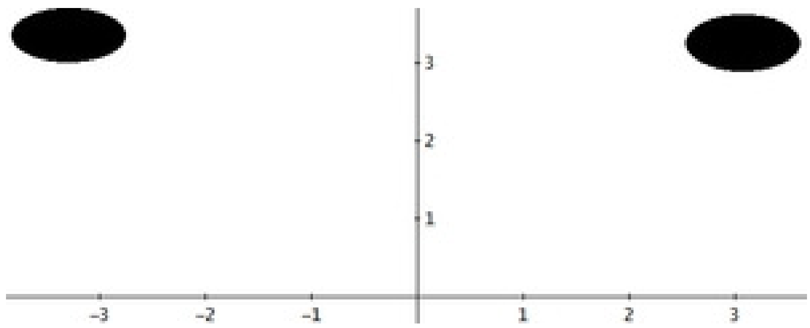
Los puntos de corte con los ejes coordenados son $(-1, 0)$ *y* $(0, 0)$

b) Puesto que $Dom\ f(x) = \Re$, *f(x) no tiene asíntotas verticales.*

Veamos si tiene horizontales,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x)^2 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x)^2 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{no hay asíntota horizontal}$$

Estos límites no informan de la posición de la función en $-\infty$ *y* $+\infty$,



c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para obtener estos intervalos estudiaremos el signo de la primera derivada,

$$f'(x) = 2(x^2 + x)(2x+1) = (x^2 + x)(4x+2) = 4x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 2x = 4x^3 + 6x^2 + 2x$$

Estudiamos el signo de este polinomio buscando sus raíces,

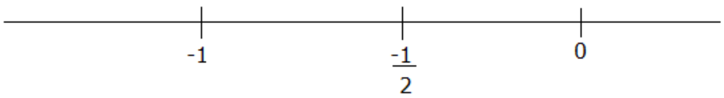
$4x^3+6x^2+2x=0$

$$2x\left(2x^2+3x+1\right)=0\left\langle\begin{array}{l}2x=0 \quad\rightarrow\quad x=0\\[2ex] 2x^2+3x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4.2.1}}{2.2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{4}=\end{array}\right.$$

$$=\frac{-3\pm 1}{4}=\left\langle\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-3+1}{4}=\dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2}\\[2ex] x_2=\dfrac{-3-1}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1\end{array}\right.$$

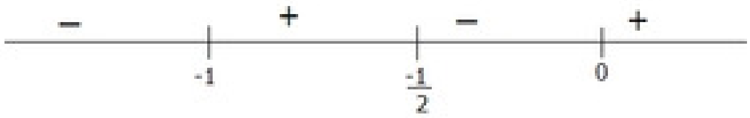
De la ecuación polinómica de tercer grado hemos obtenido sus tres raíces: -1, $\dfrac{-1}{2}$ *y* 0.

Ahora representamos en la recta real los valores de x *obtenidos,*



Conociendo el signo de f´(x) en uno de los intervalos sabremos el signo en los restantes, los signos van alternando (por ser polinomio de tercer grado con tres raíces)

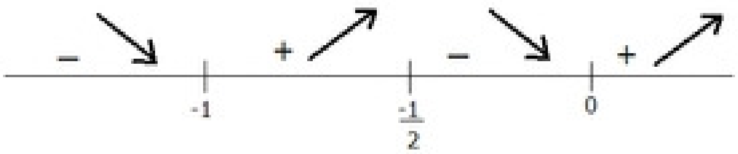
$x=1 \quad\rightarrow\quad f'(1)=4\,.\,1^3+5\,.\,1^2+1=4+5+1=10>0$, *luego*



Y por lo tanto, f(x) es creciente en $\left(-1,\dfrac{-1}{2}\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ *y decreciente en* $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\dfrac{-1}{2},0\right)$.

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio del apartado anterior sabemos que los extremos locales de f(x) serán,



Mínimos locales:

$x=-1 \quad\rightarrow\quad f(-1)=\left((-1)^2+(-1)\right)^2=\left(1-1\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad \left(-1,0\right)$ *Mínimo local*

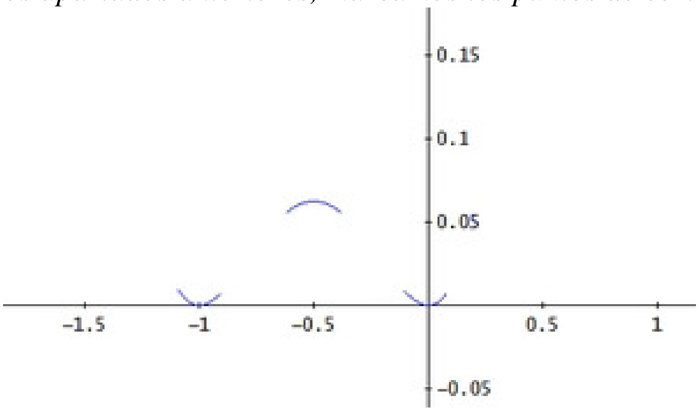
$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=0$ *(calculado en a))* $\rightarrow$ *(0 , 0) Mínimo local*

Máximo local:

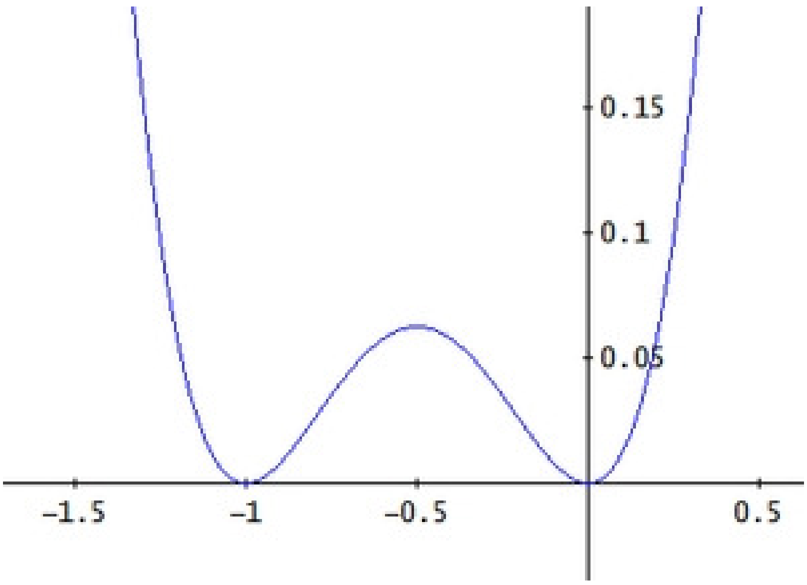
$$x=\frac{-1}{2} \quad\rightarrow\quad f(-1)=\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1-2}{4}\right)^2=\left(\frac{-1}{4}\right)^2=\frac{1}{16} \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{16}\right) \quad \textit{Máximo local}$$

e) A partir de los apartados anteriores, marcamos los puntos de corte y los extremos locales



Considerando la monotonía de la función, su representación será:



Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad \rightarrow \quad f(0)=\frac{0^2}{0-1}=0 \quad \rightarrow \quad (0,0)$$

$$f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{x-1}=0 \quad \rightarrow \quad x^2=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad (0,0)$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el (0 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

, *No hay asíntota horizontal.*

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay una posible A.V. x = 1

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1^2}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=1 \quad es\ A.V.$$

No hay asíntota horizontal y la asíntota vertical es x = 1.

c) Monotonía.
Estudiemos el signo de $f'(x)$

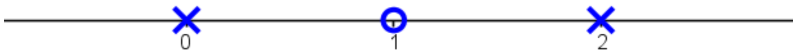
$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

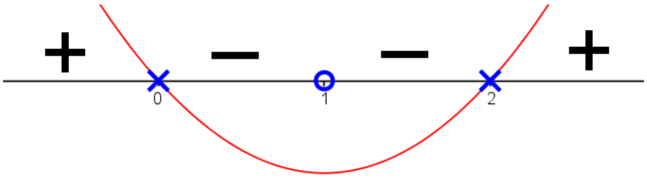
$$x^2-2x=0 \quad \rightarrow \quad x\cdot(x-2)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=2 \end{cases}$$

$$(x-1)^2=0 \quad \rightarrow \quad x-1=0 \quad \rightarrow \quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=1\notin Dom\ f(x)$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos:



El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces 0 y 2, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ***y f(x) es decreciente en*** $(0, 1) \cup (1, 2)$.

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que en x = 0 hay un máximo local y en x = 2 hay un mínimo local.

$x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = 0$

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

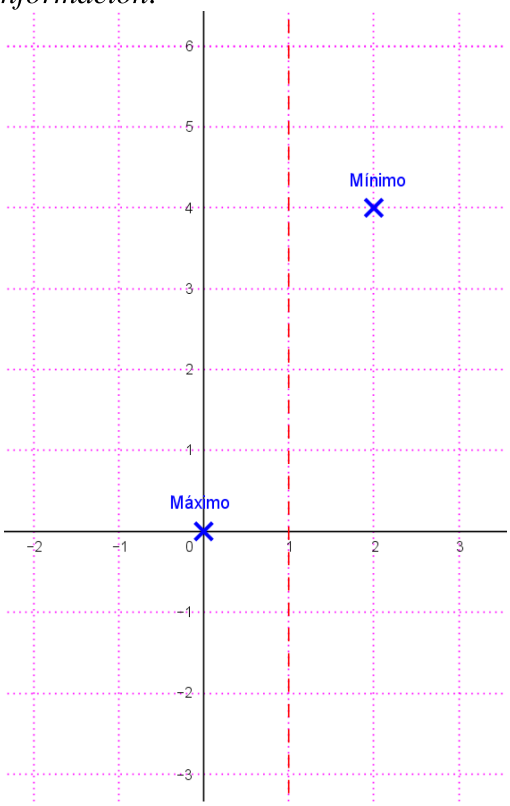
Por tanto, ***en (0 , 0) hay un máximo local y en (2 , 4) hay un mínimo local****.*

e) Representación gráfica.

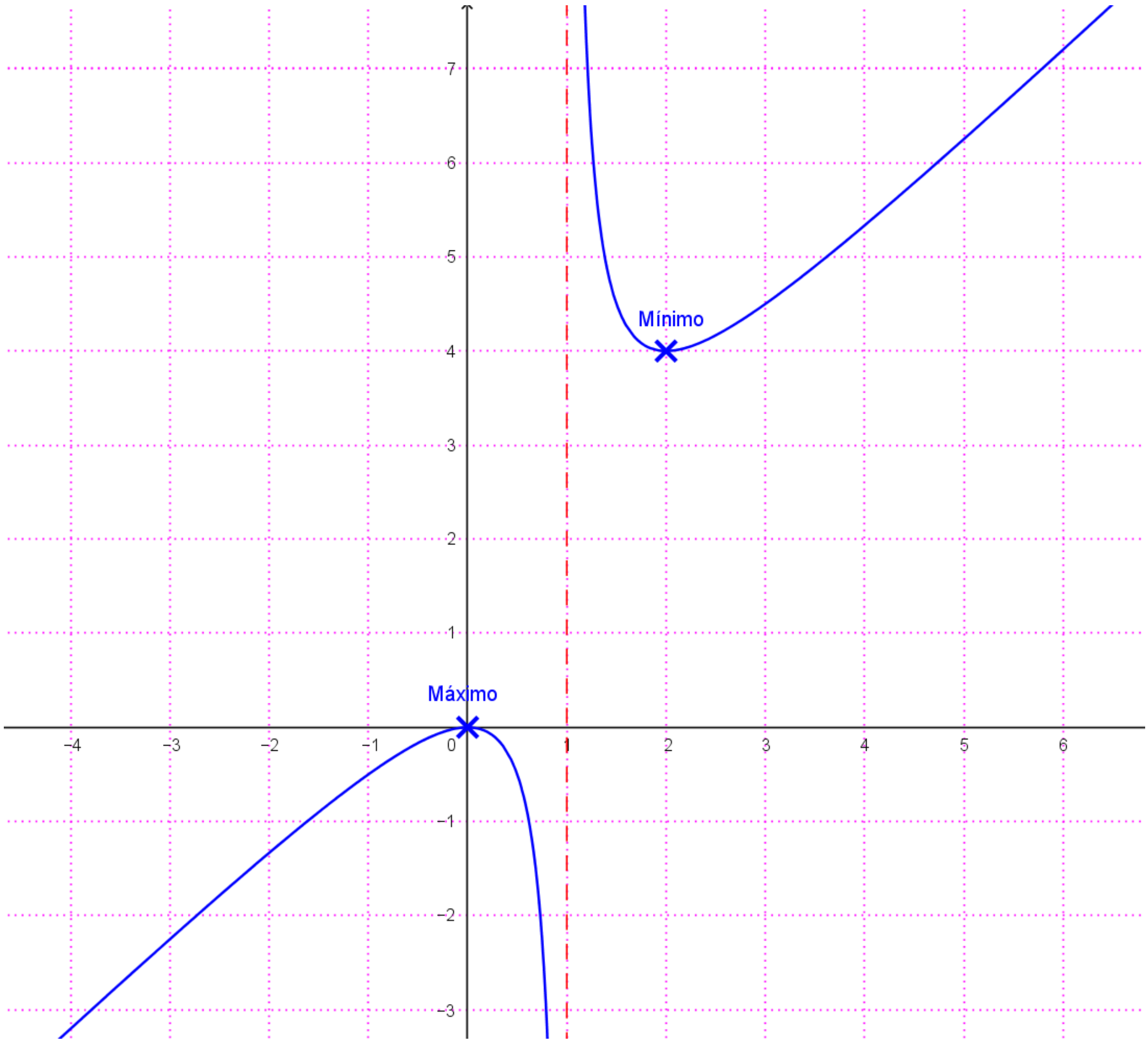
De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 0), máximo local en (0, 0), mínimo local en (2, 4); a.v. x = 1.

Representando gráficamente esta información:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Otro cálculo para completar la representación gráfica es la posición de la curva con respecto a la asíntota vertical,

A.V. $x = 1$,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} \overset{x=0'9}{=} \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} \overset{x=1'1}{=} \frac{+}{+}\infty = +\infty$$