OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x} & 2\le x<5 \\ x^2-3x-8 & 5\le x\le 7 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en el intervalo [2 , 7].

b) Para $a = 15$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo [2 , 7].

c) Calcula $\int_5^6 f(x)\,dx$.

Solución:

a) ¿a? / f(x) sea continua en [2 , 7]

Para $2 \le x < 5$, $f(x)=\dfrac{a}{x}$, *como* $x \ne 0$, *f(x) es continua.*

Para $5 < x \le 7$, $f(x) = x^2 - 3x - 8$, *como f(x) es un polinomio, f(x) es continua.*

Veamos la continuidad en $x = 5$,

1) $f(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 - 8 = 25 - 15 - 8 = 2$, *luego* $\exists f(5)$

2) $\underset{x\to 5}{Lím}\, f(x)=\begin{cases} \underset{x\to 5^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 5^-}{Lím}\,\dfrac{a}{x}=\dfrac{a}{5} \\ \underset{x\to 5^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 5^-}{Lím}\left(x^2-3x-8\right)=5^2-3\,.\,5-8=2 \end{cases}$, *para que exista el límite deben coincidir los dos límites laterales, es decir,* $\dfrac{a}{5}=2 \;\rightarrow\; a=10$.

Por tanto, para $a = 10$ *se cumple:* $\underset{x\to 5}{Lím}\, f(x)=f(5)$, *luego f(x) es continua en* $x = 5$.

Solución: ***f(x) es continua en [2 , 7] para a = 10.***

b) a = 15, ¿monotonía de f(x) en [2 , 7]?.

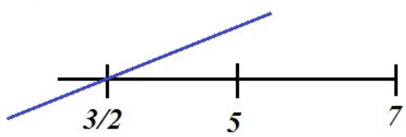
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{15}{x} & 2\le x<5 \\ x^2-3x-8 & 5\le x\le 7 \end{cases} \;\rightarrow\; f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-15}{x^2} & 2<x<5 \\ 2x-3 & 5<x<7 \end{cases}$$

Para $2 < x < 5$, $f'(x)=\dfrac{-15}{x^2}$, *por tanto,* $f'(x) < 0 \;\rightarrow$ *f(x) es decreciente.*

Para $5 < x < 7$, $f'(x) = 2x - 3$,

$2x - 3 = 0$, $2x = 3$, $x = 3/2$

Estudiemos el signo de $2x - 3$ *en [5 , 7]:* $2x - 3$ *es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y raíz 3/2, gráficamente:*



Por tanto, entre 5 y 7 $2x - 3$ *es positivo; luego* $f'(x)$ *es positiva.*

Para $5 < x < 7$, *f(x) es crciente.*

Solución: ***f(x) es decreciente en (2 , 5) y creciente en (5 , 7).***

c) ¿ $\int_5^6 f(x)\,dx$?

Entre 5 y 6, f(x) = $x^2 - 3x - 8$, por tanto

$$\int_5^6 f(x)\;dx = \int_5^6 \left(x^2 - 3x - 8\right)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 8x\right]_5^6 == \left(\frac{6^3}{3} - 3\frac{6^2}{2} - 8\,.\,6\right) - \left(\frac{5^3}{3} - 3\frac{5^2}{2} - 8\,.\,5\right) =$$

$$= (72 - 54 - 48) - \left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2} - 40\right) = -30 - \left(\frac{250 - 225}{6} - 40\right) - 30 - \frac{25}{6} + 40 = 10 - \frac{25}{6} = \frac{60 - 25}{6} = \frac{35}{6} \approx 5\acute{}8333$$

Solución: $\int_5^6 f(x)\,dx = \dfrac{35}{6}$

Problema 2. Dada la función continua $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & 0\le x<2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+4x+1 & 2\le x\le 8 \end{cases}$

a) Calcula sus máximos absolutos y mínimos absolutos, razonando que, efectivamente, lo son.

b) Calcula el valor de la integral de la función *f(x)* en el intervalo [5,7].

Solución:

Representemos la función,

$2x+3$	$\dfrac{-x^2}{2}+4x+1$
0 **recta** 2	2 **parábola** 8

x	y
0	3
2	7

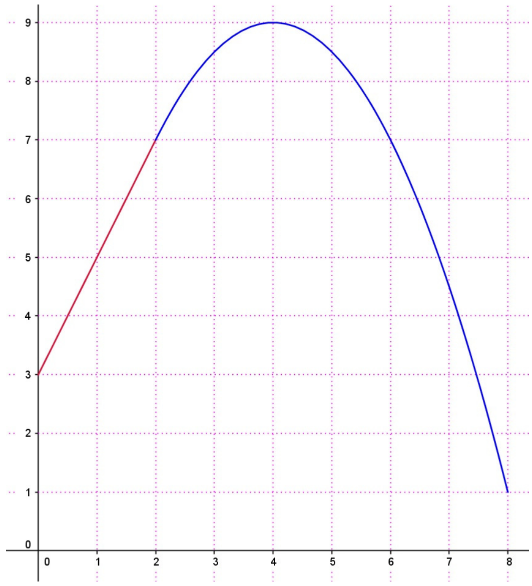
x	y
2	$-\dfrac{2^2}{2}+4\cdot 2+1=-2+8+1=7$
8	$-\dfrac{8^2}{2}+4\cdot 8+1=-32+32+1=1$

Vértice de la parábola : $(4\ ,9)$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{-4}{-1}=4\in[2,8]$$

$$y=-\frac{4^2}{2}+4\cdot 4+1=-8+16+1=9$$

La representación gráfica de f(x) será:



Resolvamos las preguntas,

a) De la representación gráfica deducimos que:
El máximo absoluto se alcanza en el punto (4 , 9) y el mínimo absoluto en el (8 , 1).

b)

$$\int_5^7 f(x)\,dx=\int_5^7\left(-\frac{x^2}{2}+4x+1\right)dx=\left[-\frac{x^3/3}{2}+4\cdot\frac{x^2}{2}+x\right]_5^7=\left[-\frac{x^3}{6}+2x^2+x\right]_5^7=$$

$$=\left(-\frac{7^3}{6}+2\cdot 7^2+7\right)-\left(-\frac{5^3}{6}+2\cdot 5^2+5\right)=\frac{287}{6}-\frac{205}{6}=\frac{82}{6}$$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{a\,x^2}{x^2+1} & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio. *(2 puntos)*
b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. *(3 puntos)*
c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

d) Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$. *(3 puntos)*

Solución:
En la definición de la función f(x) hay dos ramas,
para $x \le 1$ $f(x) = x^2 - 3x + 3$ y esta función se puede calcular para cualquier valor de x.
para $x > 1$ $f(x) = \dfrac{a\,x^2}{x^2+1}$, como $x^2 + 1 > 0$ (para cualquier valor de x) el cociente se puede calcular.
Por tanto Dom f(x) = $\Re$

a) ¿Valor de a para que f(x) sea continua en su dominio?
Para $x \le 1$ f(x) es un polinomio luego es continua.
Para $x > 1$ f(x) es un cociente con el denominador distinto de cero luego es continua.
El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en x = 1.
Continuidad en x = 1,
a) $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$

b) $$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-3x+3\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a\,x^2}{x^2+1}=\dfrac{a\cdot 1^2}{1^2+1}=\dfrac{a}{2} \end{cases}$$ *Para que exista el límite* $1=\dfrac{a}{2} \rightarrow a=2$

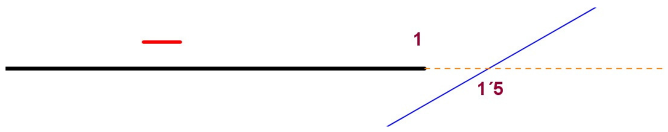
c) Para a = 2 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Solución: para que f(x) sea continua en su dominio debe ser a = 2.

b) Para a = 2 ¿monotonía de f(x)?
Como f(x) tiene dos ramas estudiamos la monotonía en cada una de ellas.
Primera rama, $y = x^2 - 3x + 3$, $x \le 1$
$y' = 2x - 3$, estudiemos el signo de y'.

$$2x-3=0 \rightarrow 2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2}=1'5$$

$y' = 2x - 3$ es una recta de pendiente positiva que pasa por $x = 1'5$, luego



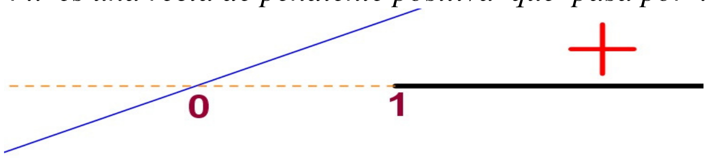
Segunda rama, $y = \dfrac{2\,x^2}{x^2+1}, \quad x > 1$

$$y' = \frac{4x\left(x^2+1\right) - 2\,x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x^3 + 4x - 4\,x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado, es positivo; el signo de y' *depende del numerador.*

$4\,x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$4\,x$ *es una recta de pendiente positiva que pasa por* $x = 0$*, luego*



Por tanto, ***f(x) es decreciente en*** $(\,-\infty, 1\,)$ ***y es creciente en*** $(\,1, +\infty)$.

c) Para $a = 2$*, asíntotas horizontales o verticales.*

La rama polinómica de f(x) no aporta asíntotas. Las posibles asíntotas estarán en la rama para $x > 1$*.*

Calculémoslas,

Asíntota vertical,

$\dfrac{2\,x^2}{x^2+1}$, *como* $x^2 + 1 > 0$*, el denominador no se anula, por lo que no hay asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (2) = 2, \text{ entonces } y = 2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Por tanto, ***f(x) no tiene asíntota vertical y su asíntota horizontal es y = 2.***

d) $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

En el intervalo $[-2, 1]$*,* $f(x) = x^2 - 3\,x + 3$*. Entonces,*

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} \left(x^2 - 3x + 3\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\,\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot\frac{1^2}{2} + 3\cdot 1\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 3\,\frac{(-2)^2}{2} + 3\cdot(-2)\right) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 - \left(\frac{-8}{3} - 6 - 6\right) = \frac{33}{2} = 16{\acute{}}5$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 16{\acute{}}5$.

Problema 4. El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+14 & si\ x\in[0,6] \\ -x^2+24x-82 & si\ x\in\left]6,18\right] \\ -x+34 & si\ x\in\left]18,24\right] \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,24]. *(3 puntos)*
b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? *(4 puntos)*
c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. (3 *puntos)*

Solución:
a) Continuidad de esta función en el intervalo [0,24].
Como cada una de las definiciones de f(x) es un polinomio de 1er o 2º grado, son continuas en sus correspondientes intervalos. Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.
Continuidad en x = 6,
a) f(6) = 2 . 6 + 14 = 26

$$b)\quad \lim_{x\to 6} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}(2x+4)=26 \\ \lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+}\left(-x^2+24x-82\right)=-6^2+24\cdot 6-82=26 \end{array}\right\}=26$$

$$c)\quad f(6)=26=\lim_{x\to 6} f(x)$$

Por tanto f(x) es continua en x = 6.

Continuidad en x = 18,
d) f(18) = – 18^2 + 24 . 18 – 82 = 26

$$e)\quad \lim_{x\to 18} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 18^-} f(x)=\lim_{x\to 18^-}\left(-x^2+24x-82\right)=26 \\ \lim_{x\to 18^+} f(x)=\lim_{x\to 18^+}(-x+34)=-18+34=16 \end{array}\right\}\neq \;\rightarrow\; no\ existe\ \lim_{x\to 18} f(x)$$

Por tanto f(x) no es continua en x =18

Solución: f(x) es continua en [0 , 24] ~{18}.

b) ¿A qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo?
Representemos gráficamente la función (algunos cálculos están realizados en el apartado a))

x	$2x+14$
0	14
6	26

x	$-x^2+24x-82$
6	26
18	26

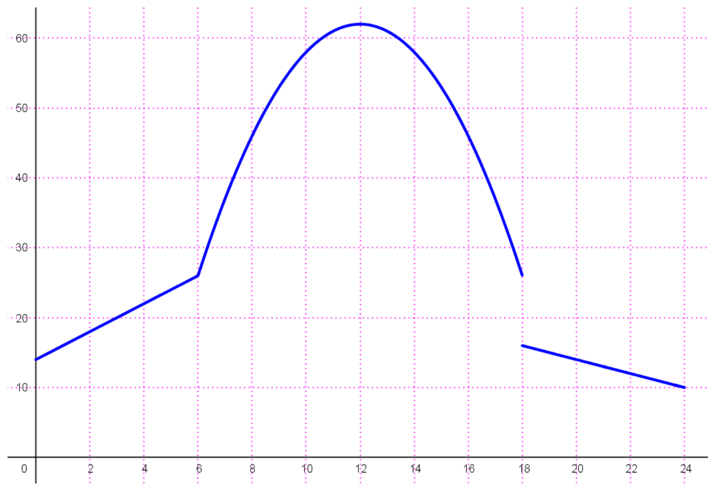
x	$-x+34$
18	16
24	10

Para completar la representación de la parábola necesitamos algún punto más. Como el polinomio de 2º grado tiene coeficiente de x^2 negativo, la parábola tiene la forma $\cap$, obtengamos el máximo.

$$g(x)=-x^2+24x-82$$

$$g'(x)=-2x+24;\quad -2x+24=0;\quad -2x=-24;\quad x=\frac{-24}{-2}=12\in(6,18)$$

$$g(12)=-12^2+24\cdot 12-82=62 \qquad \rightarrow \qquad máximo\ de\ la\ parábola\quad (12,62)$$



Solución: el consumo máximo se alcanza a las 12h y es de 62 Mwh y el consumo mínimo se alcanza a las 24h y es de 10 Mwh.

c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Entre las 8 y las diez de la mañana la definición de f(x) es $-x^2+24x-82$.

El consumo que se realiza entre esas horas lo obtendremos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_8^{10}\left(-x^2+24x-82\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+24\frac{x^2}{2}-82x\right]_8^{10}=\left[-\frac{x^3}{3}+12x^2-82x\right]_8^{10}=$$

$$=\left(-\frac{10^3}{3}+12\cdot 10^2-82\cdot 10\right)-\left(-\frac{8^3}{3}+12\cdot 8^2-82\cdot 8\right)=\frac{140}{3}-\left(-\frac{176}{3}\right)=\frac{316}{3}\cong 105'3333$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es de $\frac{316}{3}$ ***Mwh.***

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. La parte superior de una pared de 2 metros de base tiene una forma parabólica determinada por la expresión $-0{,}5x^2+x+1$, donde x mide la longitud en metros desde la parte izquierda de la pared. Calcular la superficie de dicha pared utilizando una integral.

Solución:
La parte superior de la pared está definida por la función $y = -0{,}5\,x^2 + x + 1$ *para* $x \in [\,0\,,\,2\,]$ *(la base de la pared mide 2 metros).*

Representemos gráficamente la pared, para ello representamos la parábola
$y = -0{,}5\,x^2 + x + 1$ *para* $x \in [\,0\,,\,2\,]$

Vértice de la parábola: (1 , 1´5)

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-0'5)} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad e \qquad y = -0'5\,.\,1^2 + 1 + 1 = 1'5$$

Puntos de corte con los ejes coordenados: (0 , 1)

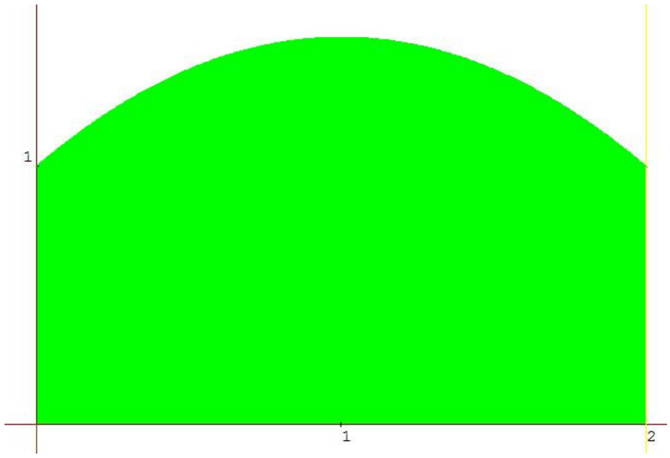
para $x = 0 \rightarrow y = 1$

para $y = 0 \rightarrow -0{,}5\,x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0'5)1}}{2(-0'5)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{-1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{-1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{-1} = 1-\sqrt{3} \approx -0'7 \\ x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{-1} = 1+\sqrt{3} \approx 2'7 \end{cases}$$

los puntos de corte obtenidos (-0´7 , 0) y (2´7 , 0) están fuera del dominio de definición de la función que representa la parte superior de la pared. Pueden servir para dibujar mejor esta función.

La representación gráfica de la pared sería:



La superficie de esta pared se calcula mediante la siguiente integral,

$$\int_0^2 \left(-0'5x^2 + x + 1\right)dx = \left[-0'5\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \left(-0'5\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right) - 0 = \frac{-4}{3} + \frac{4}{2} + 2 = \frac{-4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$$

La superficie de la pared es $\dfrac{8}{3}m^2$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3.

a) Estudia la continuidad en el intervalo [-3,3] de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+10 & -3\le x<-2 \\ x^2 & -2\le x<1 \\ \dfrac{x+3}{2} & 1\le x\le 3 \end{cases}$$

b) Halla la integral entre 2 y 3 de la función f(x) = 2 x^3 – 3 x + 2 .

Solución:

a)

En el intervalo [– 3 , 3] f(x) está definida mediante tres trozos, estudiemos la continuidad de cada trozo y en los puntos de cambio de definición.

En el intervalo (– 3 , – 2) f(x) está definida como 3 x + 10, un polinomio, luego es continua.

En el intervalo (– 2 ,1) f(x) está definida como x^2*, un polinomio, luego es continua.*

En el intervalo (1 ,3) f(x) está definida como (x + 3)/2 , un polinomio, luego es continua.

Veamos la continuidad de f(x) en los puntos de cambio de definición.

Para x = – 2	$f(-2)=(-2)^2=4$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(3x+10)=3(-2)+10=4 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x^2=(-2)^2=4 \end{array}\right\}=4$ $f(-2)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ *Luego f(x) es continua en x = – 2*
Para x = 1	$f(1)=\dfrac{1+3}{2}=2$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1^2=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2 \end{array}\right\} 1\ne 2 \quad \text{No existe } \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *Luego f(x) no es continua en x = 1.* *En x = 1 f(x) presenta una discontinuidad de salto finito ya que existen los límites laterales pero son distintos.*

En conclusión f(x) es continua en (– 3 , 3) ~ { 1 } y en x = 1 tiene una discontinuidad de salto finito.

Como f(x) está definida en un intervalo cerrado, [– 3 , 3], en sentido estricto no podemos hablar de continuidad de f(x) en los extremos de este intervalo; en sentido no estricto podemos considerar que f(x) es continua en x = – 3 por ser continua a la derecha de este valor y que f(x) es continua en x = 3 por serlo a la izquierda de este valor. Con esta consideración de continuidad en los extremos del intervalo de definición de una función, podemos concluir que f(x) es continua en [– 3 , 3] ~ { 1 } y en x = 1 tiene una discontinuidad de salto finito.

b)

$$\int_2^3 \left(2x^3-3x+2\right)dx=\left[\frac{2x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3=\left(\frac{81}{2}-\frac{27}{2}+6\right)-\left(\frac{16}{2}-\frac{12}{2}+4\right)=$$

$$=\frac{54}{2}+6-(8-6+4)=27+6-6=27$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) Estudia la continuidad de la función y = f(x) en el intervalo [– 4 , 2], siendo

$$f(x)=\begin{cases} 2 & x\le -3 \\ x^2 & -3<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función y = f(x), las rectas x = – 3, x = 2 y el eje de abcisas.

Solución:

a) Continuidad en [– 4 , 2],

Para $-4\le x<-3$, f(x) = 2, función constante, luego es continua.

Para $-3<x<1$, $f(x) = x^2$, función polinómica, luego continua.

Para $1<x\le 2$, f(x) =1, función constante, luego es continua.

Debemos estudiar la continuidad en los cambios de definición.

Para x = – 3

a) f(– 3) = 2

$$b)\ \lim_{x\to -3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-} 2=2 \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+} x^2=(-3)^2=9 \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos no existe el $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

Luego, f(x) es discontinua en x = – 3, por existir los dos límites laterales es una discontinuidad de salto finito.

Para x = 1

a) f(1) = 1

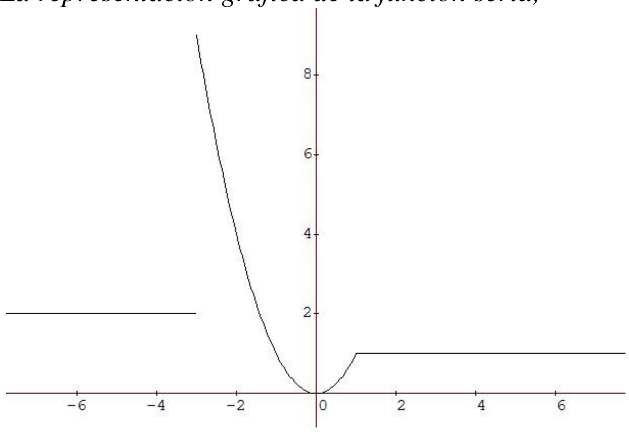
$$b)\ \lim_{x\to 1} f(x)=\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1^2=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1 \end{cases}\right\}=1$$

$$c)\ f(1)=1=\lim_{x\to 1} f(x)$$

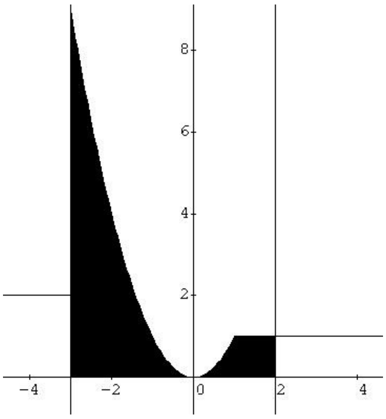
Luego, f(x) es continua en x =1.

En resumen, f(x) es continua en [– 4 , 2]~{ – 3} y en x = – 3 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) La representación gráfica de la función sería,



El área a calcular es,



$$A = \int_{-3}^{1} x^2 \, dx + \int_{1}^{2} 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{1} + \left[x \right]_{1}^{2} = \frac{1}{3} - \frac{(-3)^3}{3} + 2 - 1 = \frac{1}{3} - \frac{-27}{3} + 1 = \frac{1}{3} + 9 + 1 = \frac{1}{3} + 10 = \frac{31}{3} \; u.\, a.$$

BLOQUE B

PROBLEMA B1. Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -x & x<-1 \\ x-1 & -1\le x<4 \\ x^2-2x-6 & 4\le x<6 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función *f(x)* en el intervalo] – 2 , 6 [.
b) Calcula el área de la región del plano limitada por *y = f(x)* y por las rectas y = 0, x = 1 y x = 5.

Solución:

a) Continuidad de la función f(x) en el intervalo] – 2 , 6 [

Por ser f(x) una función definida a trozos estudiamos su continuidad en cada uno de los trozos y en los puntos de cambio de definición.

Para x Є] – 2 , – 1 [, f(x) = – x, una función polinómica de primer grado, luego es continua.
Para x Є] – 1 , 4 [, f(x) = x – 1, una función polinómica de primer grado, luego es continua.
Para x Є] 4 , 6 [, f(x) =x^2 – 2 x – 6, una función polinómica de segundo grado, luego es continua.

Veamos que pasa en x = – 1 y en x = 4.

x = – 1

f(– 1) = – 1 – 1 = – 2, existe f(– 1).

$$\underset{x\to -1}{Lím}\, f(x)=\begin{cases} \underset{x\to -1^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to -1^-}{Lím}(-x)=-(-1)=1 \\ \underset{x\to -1^+}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to -1^+}{Lím}(x-1)=-1-1=-2 \end{cases}$$

como los resultados de los límites laterales no son iguales, no existe el límite de la función en x = – 1
Por lo tanto f(x) no es continua en x = – 1
Como existen los dos límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

x = 4

f(4) = 4^2 – 2 . 4 – 6 =16 – 8 – 6 = 2 , existe f(4).

$$\underset{x\to 4}{Lím}\, f(x)=\begin{cases} \underset{x\to 4^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 4^-}{Lím}(x-1)=4-1=3 \\ \underset{x\to 4^+}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 4^+}{Lím}(x^2-2x-6)=4^2-2\,.\,4-6=16-8-6=2 \end{cases}$$

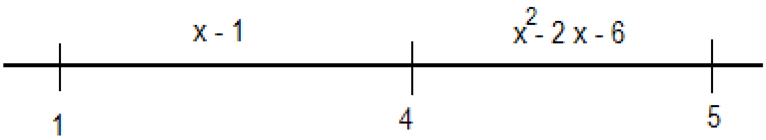
como los resultados de los límites laterales no son iguales, no existe el límite de la función en x = 4
Por lo tanto f(x) no es continua en x = 4
Como existen los dos límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

Luego f(x) es continua en] – 2 , 6 [~ { – 1 , 4 } y en x = – 1 y en x = 4 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Área de la región del plano limitada por y = f(x) y por las rectas y = 0, x = 1 y x = 5.

Para calcular el área pedida es conveniente representar la función f(x), aunque sólo para valores de x desde 1 hasta 5.

En el intervalo [1 , 5] la función f(x) está definida como se indica a continuación,



En el primer trozo f(x) está definida como x – 1, que gráficamente es una línea recta, la dibujamos a partir de una tabla de valores,

x	y
1	0
4	3

En el segundo trozo f(x) está definida como x^2 – 2 x – 6, gráficamente es una parábola, usamos tabla de valores para conocer el principio y el final y el calculamos el vértice de la parábola para dibujarla correctamente,

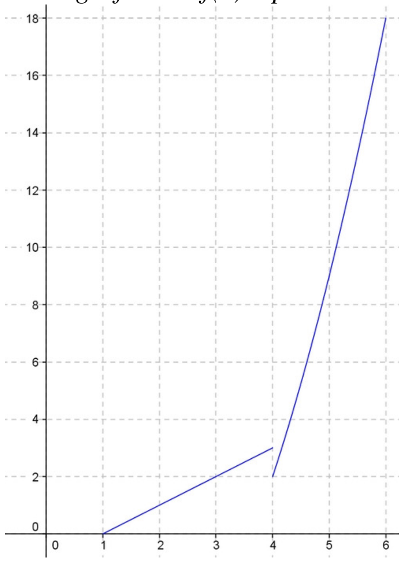
x	y
4	$4^2-2\,.\,4-6=2$
5	$5^2-2\,.\,5-6=9$

Vértice $(1,-7)$

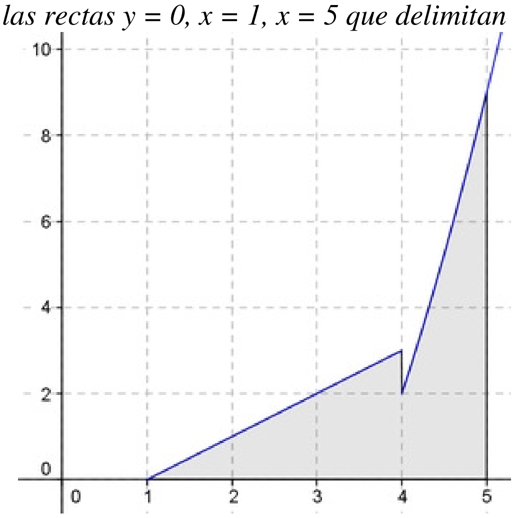
$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2.1}=1$$

$$y=1^2-2\,.\,1-6=-7$$

La representación gráfica de f(x) a partir de x = 1 será,



Añadiendo las rectas y = 0, x = 1, x = 5 que delimitan la región obtenemos,



El área de la región indicada la obtendremos mediante el siguiente cálculo integral,

$$A=\int_1^4 (x-1)\,dx+\int_4^5 (x^2-2x-6)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4-\left[\frac{x^3}{3}-x^2-6x\right]_4^5=$$

$$=\left(\frac{4^2}{2}-4\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)+\left(\frac{5^3}{3}-5^2-6\,.\,5\right)-\left(\frac{4^3}{3}-4^2-6\,.\,4\right)=4+\frac{1}{2}+\frac{125}{3}-55-\frac{64}{3}+40=\frac{1}{2}+\frac{61}{3}-11=$$

$$=\frac{3+122-66}{6}=\frac{59}{6}\,u.a.$$

PROBLEMA 2. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+3 & si \quad 0\le x<1 \\ x-1 & si \quad 1\le x\le 3\end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo [0 , 3].
b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f(x).
c) Calcula el área de la región determinada por la gráfica de la función y las rectas x = 0, y = 0 y x = 3.

Solución:

a) f(x) es una función definida a trozos, cada trozo es un polinomio luego cada trozo es continuo; el problema de continuidad está en el punto de cambio de definición, es decir, para x = 1. Estudiemos la continuidad en x = 1:

1ª) f(1) = 1 – 1 = 0, luego ∃ f(1).

$$2^a)\quad \lim_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-x^2-2x+3\right)=-1^2-2\,.\,1+3=-1-2+3=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=1-1=0\end{array}\right\}=0\ ,$$

$$3^a)\quad f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$$

Se cumplen las tres condiciones de continuidad, f(x) es continua en x = 1. Por lo tanto f(x) es continua en [0 , 3].

b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos de f(x) representamos gráficamente esta función. Considerando que el primer trozo de f(x) es una parábola y el segundo una línea recta obtendremos una tabla de valores de la función y calcularemos el vértice de a parábola.

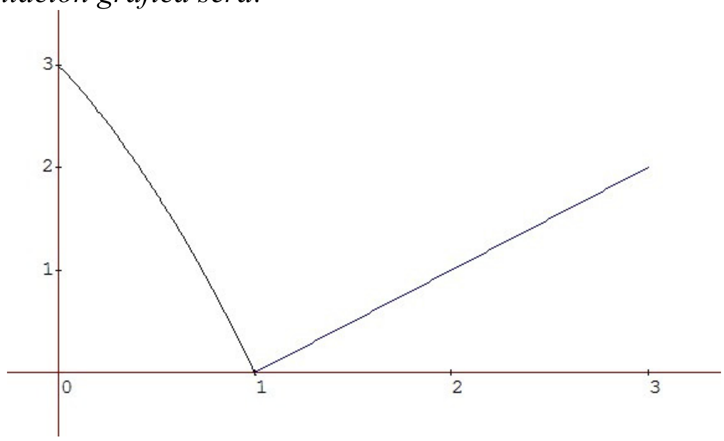
x	$f(x)$
0	$-0^2-2.0+3=3$
1	0
3	$3-1=2$

Vértice de la parábola $y=-x^2-2x+3$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$$

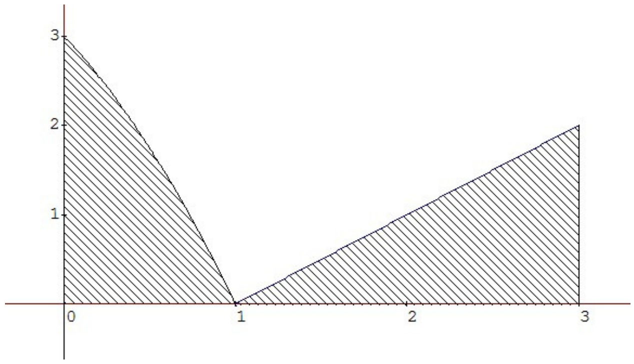
el vértice no es del dominio de la función f(x)

La representación gráfica será:



Por lo tanto, el máximo absoluto de f(x) es el punto (0 , 3) y el mínimo absoluto es el punto (1 , 0).

c) El área a calcular es:



Este área podemos calcularla mediante las siguientes integrales:

$$A=\int_0^1\left(-x^2-2x+3\right)dx+\int_1^3(x-1)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=$$

$$=\left(-\frac{1^3}{3}-1^2+3.1\right)+\left(\frac{3^2}{2}-3\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\left(-\frac{1}{3}+2\right)+\left(\frac{9-6}{2}\right)-\left(\frac{1-2}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{-1+6}{3}\right)+\frac{3}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{3}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}+\frac{4}{2}=\frac{5}{3}+2=\frac{5+6}{3}=\frac{11}{3}$$

Finalmente este área mide $\frac{11}{3}u^2$

OPCIÓN B

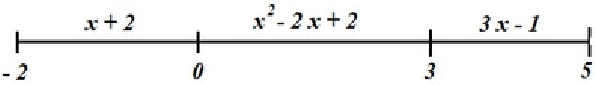
Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad -2\le x<0 \\ x^2-2x+2 & si \quad 0\le x<3 \\ 3x-1 & si \quad 3\le x\le 5 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en todos los puntos del intervalo [– 2 , 5].
b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f(x) en el intervalo [– 2 , 5/2]
c) Calcula $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:
a) f(x) está definida en el intervalo [– 2 , 5] mediante tres trozos que son:



En cada uno de los trozos la definición de f(x) es un polinomio, por lo tanto en cada trozo la función es continua. Tenemos que estudiar la continuidad en los cambios de definición.

x = 0

1) f(0) = $0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$

$$2)\ \lim_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-2x+2)=0^2-2.0+2=2 \end{array}\right\}=2$$

$$3)\ f(0)=2=\lim_{x\to 0} f(x)$$

Luego f(x) es continua en x = 0

x = 3

1) f(3) = 3 . 3 – 1 = 8

$$2)\ \lim_{x\to 3} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-2x+2)=3^2-2.3+2=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x-1)=3.3-1=8 \end{array}\right\} 5\neq 8 \quad \rightarrow \quad \text{No existe el límite}$$

Luego f(x) no es continua en x = 3

Finalmente, f(x) es continua en [– 2 , 5] – { 3 } y en x = 3 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Para obtener los máximos y mínimos absolutos de f(x) en [– 2 , 5/2], representemos f(x) en este intervalo. Tengamos en cuenta que f(x) es continua en x = 0.

En [– 2 , 0), f(x) = x + 2, gráficamente una línea recta, para representarla basta con calcular dos puntos:

x = – 2, y = – 2 + 2 = 0

x = 0, y = 0 + 2 = 2

En [0 , 5/2], f(x) = $x^2 - 2x + 2$*, gráficamente una parábola.*

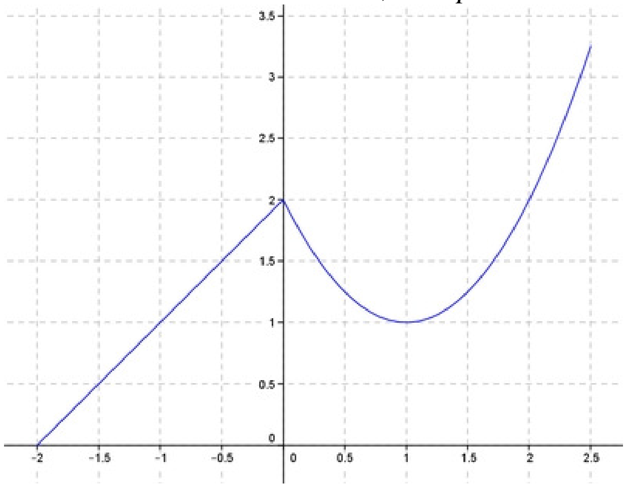
Calculemos su vértice, $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2)}{2.1}=\dfrac{2}{2}=1 \quad\rightarrow\quad y=1^2-2.1+2=1-2+2=1 \quad\rightarrow\quad$ *Vértice (1,1)*

Como x = 1 ∈ [0 , 5/2], obtengamos los puntos de la parábola en los extremos del intervalo [0 , 5/2]

Para x = 0, y = 2 porque la función es continua en x = 0, (0 , 2)

Para $x=\dfrac{5}{2},\quad y=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2.\dfrac{5}{2}+2=\dfrac{25}{4}-5+2=\dfrac{25}{4}-3=\dfrac{13}{4}=3'25,\quad \left(\dfrac{5}{2},\dfrac{13}{4}\right)=(2'5,3'25)$

A partir de los cálculos anteriores, la representación gráfica de f(x) en el intervalo [0 , 5/2] será:



La gráfica nos indica que en el intervalo [0 , 5/2] la función f(x) tiene:

un mínimo absoluto en el punto (– 2 , 0) y

un máximo absoluto en $\left(\frac{5}{2},\frac{13}{4}\right)$

c)

$\int_1^2 f(x)\,dx$ = *como en el intervalo [1 , 2] f(x) =* $x^2 - 2x + 2$ $= \int_1^2 \left(x^2 - 2x + 2\right)dx =$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2.2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 2.1\right) = \left(\frac{8}{3} - 4 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 2\right) = \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{4}{3}$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)^2$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.
d) El valor de la integral definida de $f(x)$ entre $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) f(x) es una función polinómica, por lo tanto **Dom f(x) =** $\Re$**.**

Corte con el eje OY

$$x = 0 \rightarrow f(0) = (0 - 1)^2 (0 + 2)^2 = 1 . 4 = 4 \rightarrow (0, 4)$$

Corte con el eje OX

$$f(x) = 0 \rightarrow (x - 1)^2 (x + 2)^2 = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} (x-1)^2 = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0) \\ (x+2)^2 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 0) \end{array} \right.$$

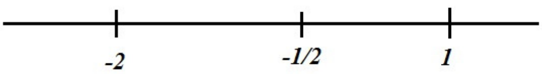
Por tanto, ***los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , 4), (1 , 0) y (– 2 , 0).***

Para resolver los apartados b) y c) hay que estudiar el signo de f´(x).

$$f'(x) = 2 (x - 1) (x + 2)^2 + 2 (x - 1)^2 (x + 2) = 2 (x - 1) (x + 2) [x + 2 + x - 1] = 2 (x - 1) (x + 2) [2x + 1]$$

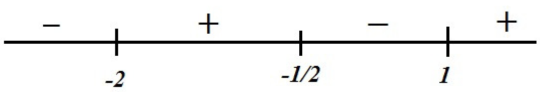
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2 (x - 1) (x + 2) [2x + 1] = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ 2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

Hay que estudiar el signo de f´(x) en cada uno de los siguientes intervalos:



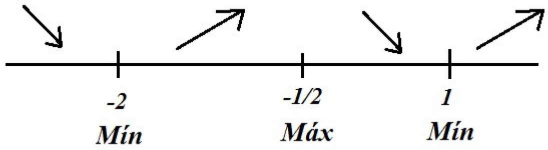
x	$f'(x) = 2(x-1)(x+2)(2x+1)$
-3	$2(-3-1)(-3+2)[2(-3)+1] = 2(-4)(-1)[-5] = -$
-1	$2(-1-1)(-1+2)[2(-1)+1] = 2(-2)(1)[-1] = +$
0	$2(-1)(2)(1) = -$
2	$2(2-1)(2+2)(2 . 2+1) = 2 . 1 . 4 . 5 = +$

Es decir:



b) Luego, f(x) es creciente en $\left(-2, \dfrac{-1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ *y es decreciente en* $(-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{-1}{2}, 1\right)$.

c) De lo estudiado anteriormente



Para $x = -2 \rightarrow f(-2) = 0$ *(calculado en a))*

Para $x = \frac{-1}{2} \rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2} - 1\right)^2 \left(\frac{-1}{2} + 2\right)^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\frac{9}{4} = \frac{81}{16}$

Para $x = 1 \rightarrow f(1) = 0$ *(calculado en a))*

Por tanto, ***f(x) tiene un máximo local en*** $\left(\frac{-1}{2}, \frac{81}{16}\right)$ ***y mínimos locales en*** $(-2, 0)$ ***y*** $(1, 0)$***.***

d) Hay que calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left[(x-1)^2 (x+2)^2\right] dx$

Para resolver esta integral nos interesa tener la expresión polinómica de f(x),

$f(x) = (x-1)^2 (x+2)^2 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x + 4) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x^3 - 8x^2 - 8x + x^2 + 4x + 4 =$
$= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

Entonces,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left[(x-1)^2 (x+2)^2\right] dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4\right) dx = \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - 2x^2 + 4x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 1 - 2 + 4\right) - \left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{2} + 1 - 2 - 4\right) = \left(\frac{2+5}{10} + 1\right) - \left(\frac{-2+5}{10} - 5\right) =$$

$$= \frac{7}{10} + 1 - \frac{3}{10} + 5 = \frac{4}{10} + 6 = 6´4$$

Solución: $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \mathbf{6´4}$

Problema 4. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+a\,x^2+24x & si\ \ x\le -1 \\ (x-1)^2+3 & si\ \ x>-1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. *(2 puntos)*

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimo locales que tiene esta función en el intervalo $\left(\frac{-9}{2},\frac{-3}{2}\right)$. *(4 puntos)*

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿Valor de a para que f(x) sea continua?

Para $x < -1$ $f(x) = x^3 + a\,x^2 + 24\,x$ *es, independientemente del valor de a, un polinomio luego es continua.*

Para $x > -1$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ *es un polinomio luego es continua.*

El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en $x = -1$.

Continuidad en $x = -1$,

a) $f(1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -1 + a - 24 = a - 25$

b) $$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(x^3+a\,x^2+24x\right)=(-1)^3+a(-1)^2+24(-1)=a-25 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[(x-1)^2+3\right]=(-1-1)^2+3=7 \end{cases}$$

Para que exista el límite $a-25=7 \ \to\ a=7+25=32$

c) Para $32 = 2$ $\ f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$

Solución: para que f(x) sea continua debe ser a = 32.

b) Para a = 9, máximos y mínimos locales de f(x) en $\left(\frac{-9}{2},\frac{-3}{2}\right)=(-4\text{´}5\,,-1\text{´}5)$.

Como $(-4\text{´}5\,,-1\text{´}5) \subset \{x \le -1\}$ $\to$ $f(x) = x^3 + 9\,x^2 + 24\,x$

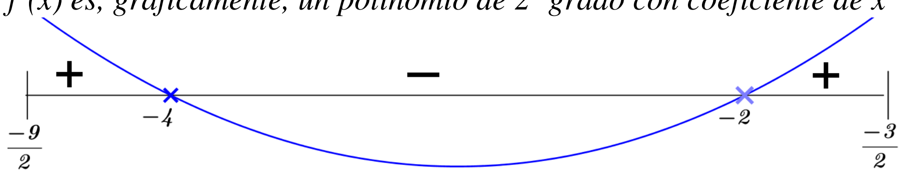
$f\text{´}(x) = 3\,x^2 + 18\,x + 24$

estudiemos el signo de $f\text{´}(x)$

$$3x^2+18x+24=0 \ \to\ x=\frac{-18\pm\sqrt{12^2-4\cdot 3\cdot 24}}{2\cdot 3}=\frac{-18\pm 6}{6}=\begin{cases} x_1=\frac{-18+6}{6}=-2 \\ x_2=\frac{-18-6}{6}=-4 \end{cases}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f\text{´}(x)$ *en:*

f´(x) es, gráficamente, un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *positivo y raíces* -4 *y* -2*, luego,*



En $x = -4$ *hay un máximo local*
y
en $x = -2$ *hay un mínimo local*

Para $x = -4 \;\rightarrow\; f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24(-4) = -16$
Para $x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24(-2) = -20$

Solución: **para a = 9 los máximos y mínimos locales de f(x) en** $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ **son:**

(– 4 , – 16) máximo local y (– 2 , – 20) mínimo local.

c) *Si $a = 0$ ¿área de la región delimitada por f(x), x=2, x = 3 y eje OX?*

Si $a = 0 \;\rightarrow\; f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & si\; x \le -1 \\ (x-1)^2 + 3 & si\; x > -1 \end{cases}$

Entre $x = 2$ y $x = 3$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ y, además, como f(x) es algo al cuadrado más tres: $f(x) > 0$. Por tanto el área pedida la obtenemos mediante el siguiente cálculo:

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx$$

$$Cálculo\;\; auxiliar: \quad \int (x-1)^2 dx = \left\{ cambio\;\; de\; variable \quad \begin{matrix} t = x - 1 \\ dt = dx \end{matrix} \right\} \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x\right]_2^3 = \left(\frac{(3-1)^3}{3} + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{(2-1)^3}{3} + 3\cdot 2\right) = \frac{8}{3} + 9 - \left(\frac{-1}{3} + 6\right) = \frac{16}{3}$$

Por tanto, **el área de la región pedida es** $\frac{16}{3}\; u.a.$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Hallar el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2x + 1$, el eje de abcisas, la recta $x = -2$ y la recta $x = 5$.

Solución:

Representemos el recinto dado,

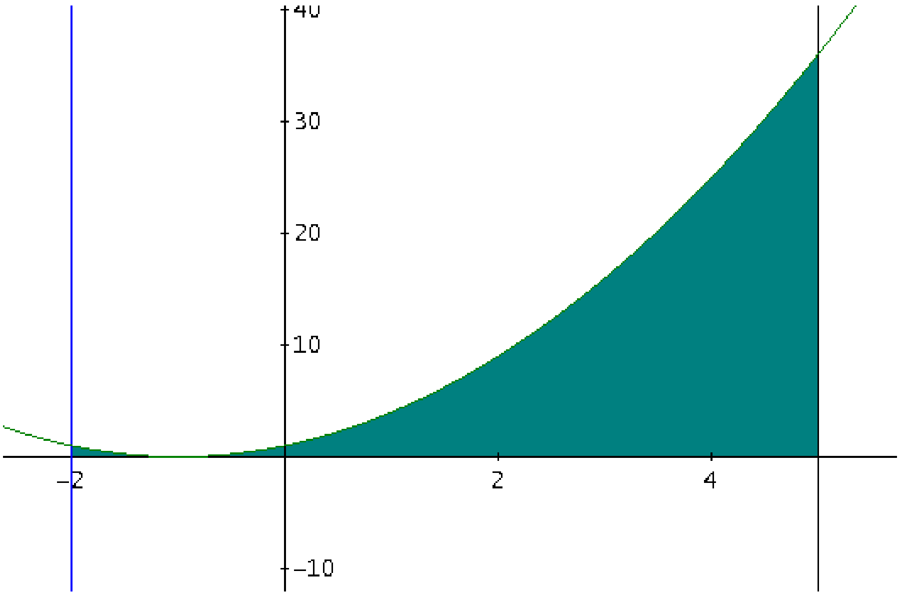
$y = x^2 + 2x + 1$, es una parábola, buscamos puntos de corte con los ejes y el vértice

corte eje OY; $x = 0$ luego $y = 1$ punto de corte $(0, 1)$

corte eje OX; $y = 0$ luego $x^2 + 2x + 1 = 0$; $(x + 1)^2 = 0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$ punto de corte $(-1, 0)$

el vértice coincide con $(-1, 0)$

las rectas $x = -2$ e $x = 5$ son rectas verticales



El recinto del que queremos calcular su área es la zona coloreada del dibujo anterior. El cálculo de su área lo realizaremos mediante la integral de la parábola desde -2 hasta 5.

La parábola $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$; utilizaremos esta última expresión que será más sencilla de integrar,

$$A = \int_{-2}^{5} (x+1)^2 \, dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-2}^{5} = \frac{(5+1)^3}{3} - \frac{(-2+1)^3}{3} = \frac{216}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{217}{3} = 72'33 \, u.\,a.$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) Determina el valor de a para que la función sea continua en x = – 1:

$$f(x)=\begin{cases}3x+a & x<-1\\ a\,x+2 & -1\le x<1\\ \dfrac{2x-11}{x-3} & x\ge 1\end{cases}$$

b) Estudia la continuidad de la función anterior para a = 0.
c) Halla la integral entre – 2 y 2 de la función $f(x) = x^3 – 2$.

Solución:
a) ¿a? para que f sea continua en x = – 1
1) ¿Existe f(– 1)?
f(– 1) = a (– 1) + 2 = 2 – a, por lo tanto existe f(– 1).
2) ¿*Existe* $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+a)=-3+a\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax+2)=-a+2\end{cases}$$ *para que exista* $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *debe ser*

– 3 + a = – a + 2;   a + a = 2 + 3;   2 a = 5; $a=\dfrac{5}{2}$

Para que exista el límite $a=\dfrac{5}{2}$.

Para este valor de a se cumple:

$$\left.\begin{array}{ll}1) & f(-1)=2-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-1}{2}\\ 2) & \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{-1}{2}\\ 3) & f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)\end{array}\right\}\ \text{luego para } a=\frac{5}{2}\ f(x)\ \text{es continua en } x=-1.$$

b) a = 0

Para a = 0 la función es: $$f(x)=\begin{cases}3x & x<-1\\ 2 & -1\le x<1\\ \dfrac{2x-11}{x-3} & x\ge 1\end{cases}$$

Estudiemos la continuidad de esta función.
Para x < – 1 f(x) = 3 x, función polinómica, luego continua.
Para – 1 < x < 1 f(x) = 2, función constante, luego continua.
Para x > 1 $f(x)=\dfrac{2x-11}{x-3}$ *, función racional, es continua excepto en x = 3 (valor que anula el denominador)*
Veamos en los cambios de definición de la función,
x = – 1
1) f(– 1) = 2

2) $$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}3x=-3\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}2=2\end{cases}$$

como los límites laterales son distintos, no existe el límite.

f(x) no es continua en x = – 1. Por existir los límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

x = 1

$$1)\quad f(1) = \frac{2\,.\,1-11}{1-3} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

$$2)\quad \lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-11}{x-3} = \dfrac{2-11}{1-3} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos, no existe el límite.

f(x) no es continua en x = 1. Por existir los límites laterales la discontinuidad es de salto finito.

Veamos el tipo de discontinuidad en x = 3,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2x-11}{x-3} = \frac{2\,.\,3-11}{3-3} = \frac{-5}{0} = \infty$$

discontinuidad de salto infinito.

En resumen, para a = 0, f(x) es continua en $\Re - \{-1, 1, 3\}$

en x = – 1 y x = 1 presenta una discontinuidad de salto finito

y en x = 3 presenta una discontinuidad de salto infinito.

c)

$$\int_{-2}^{2} \left(x^3 - 2\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{2^4}{4} - 2\,.\,2\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2\,.\,(-2)\right) = (4-4) - (4+4) = -8$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & 0\le x<2 \\ x^2-6x+12 & 2\le x\le 4 \\ -2x+a & 4\le x\le 8 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a para que la función y = f(x) sea continua en el intervalo [0,8].
b) Halla los máximos y mínimos absolutos de y = f(x) en el intervalo [0,4]. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos absolutos.
c) Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas de ecuación y = 0, x = 0, x = 3 y la gráfica de y = f(x).

Solución:
a) Estudiamos la función en cada trozo de definición y en los puntos de cambio de definición.
En [0 , 2), f(x) = x + 2 es un polinomio, luego es continua
En (2 , 4), f(x) = x^2 – 6 x + 12 es un polinomio, luego es continua
En (4 , 8], f(x) = – 2 x + a es un polinomio, luego es continua

Veamos si es continua en x = 2,
i) $f(2) = 2^2 - 6 . 2 + 12 = 4$
ii)

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-6x+12)=4 \end{cases}\right\}=4$$

iii)

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$$

Por lo que f(x) es continua en x = 2

Veamos si es continua en x = 4
i) $f(4) = 4^2 - 6 . 4 + 12 = 16 - 24 + 12 = 4$
ii)

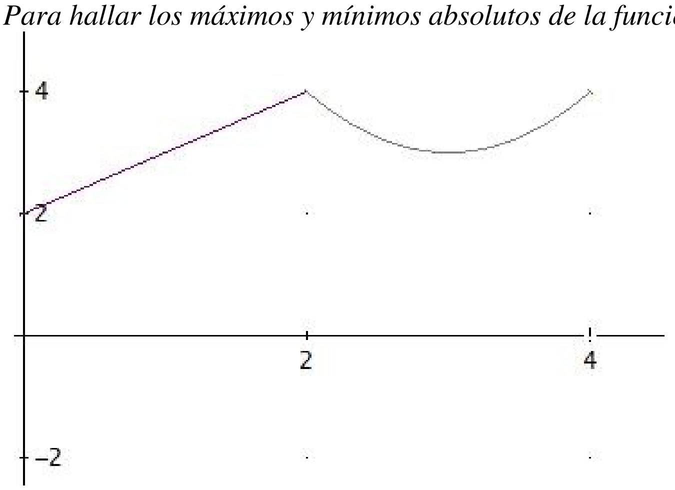
$$\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-6x+12)=4 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-2x+a)=-2.4+a=-8+a \end{cases}$$

Para que exista el límite debe ser 4 = – 8 + a; a = 12

Para a = 12 se cumple que $f(4)=\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ *, por lo que f(x) es continua en x = 4*

En conclusión, para que f(x) sea continua en el intervalo [0 , 8] debe ser a = 12

b)
Para hallar los máximos y mínimos absolutos de la función en el intervalo [0 , 4] podemos representar la función,



En [0 , 2] f(x) = x + 2, es una función creciente, el mínimo absoluto está en su extremo inferior y el máximo absoluto en su extremo superior.
En [2 , 4] f(x) = x^2 – 6 x + 12 que por ser una parábola con coeficiente de x^2 positivo alcanza su mínimo absoluto en el vértice, $x=\dfrac{-(-6)}{2.1}=3\in[2,4]$

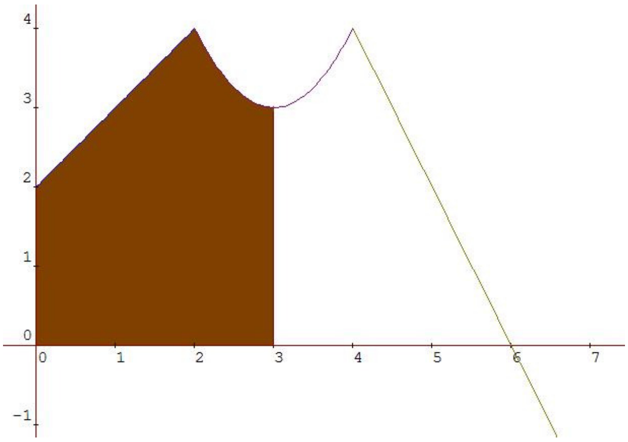
y el máximo absoluto en alguno de lo extremos del intervalo.
Calculemos el valor de la función en los puntos indicados.

x	$f(x)$
0	2
2	4
3	$3^2-6.3+12=3$
4	4

Por lo tanto el mínimo absoluto está en el punto (0 , 2) y los máximos absolutos en los puntos (2 , 4) y (4 , 4).

c)

El área a calcular es la de la zona sombreada



El cálculo del área es:

$$A=\int_0^2 (x+2)dx+\int_2^3 \left(x^2-6x+12\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+12x\right]_2^3=$$

$$=\frac{4}{2}+4+\left(\frac{27}{3}-27+36\right)-\left(\frac{8}{3}-12+24\right)=2+4+\frac{27}{3}+9-\frac{8}{3}-12=3+\frac{19}{3}=\frac{28}{3}\ u.a.$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Dada la función y = $x^3 - 9x^2 + 24x + 3$:

a) Calcula los máximos y mínimos locales. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos locales.

b) Halla el área de la región del plano determinada por la gráfica de y = f(x) y las rectas y = 0, x = 0, y x = 5.

Solución:

a)

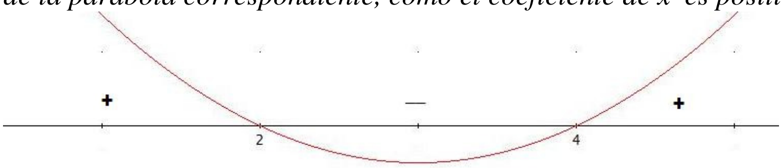
$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$3x^2 - 18x + 24 = 0; \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Como la primera derivada es un polinomio de 2º grado estudiamos el signo de y´ a través de la representación gráfica de la parábola correspondiente, como el coeficiente de x^2 es positivo será

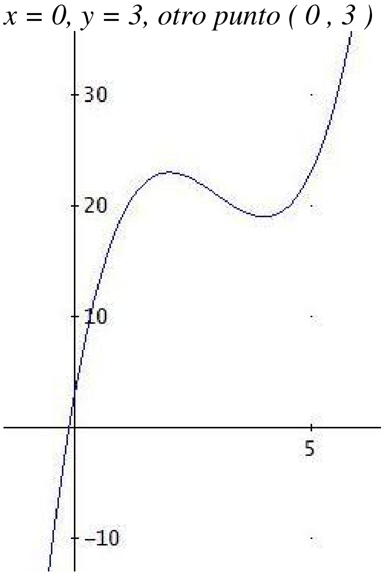


En x = 2, la función pasa de creciente a decreciente por lo que presenta un máximo local.
En x = 4 la función pasa de decreciente a creciente por lo que presenta un mínimo local.

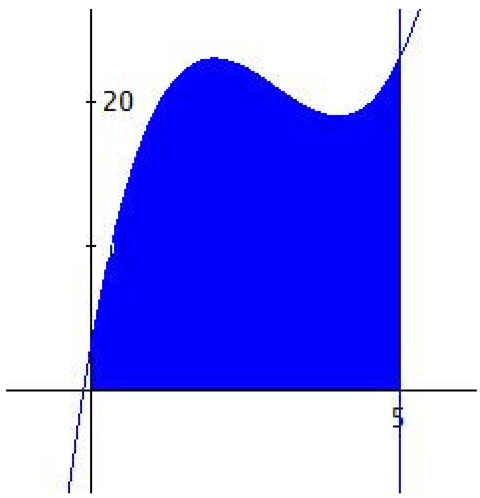
x = 2, $y = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 3 = 8 - 36 + 48 + 3 = 59 - 36 = 23$. *Máximo local (2 , 23)*
x = 4, $y = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 3 = 64 - 144 + 96 + 3 = 163 - 144 = 19$. *Máximo local (4 , 19)*

b) Como y es una función polinómica de tercer grado con los datos del apartado anterior y algún punto más podemos representarla,

x = 0, y = 3, otro punto (0 , 3)



La región del plano de la que debemos calcular su área será



Este área podemos calcularla mediante la siguiente integral

$$A = \int_0^5 \left(x^3 - 9x^2 + 24x + 3\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 + 3x\right]_0^5 = \frac{625}{4} - 3 \cdot 125 + 12 \cdot 25 + 15 = 96'25 \; u.a.$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 2. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & 1\le x\le 2\\ 1 & 2<x\le 3\\ -x^2+6x-8 & 3<x\le 4\\ 0 & 4<x\le 5\end{cases}$$

definida en el intervalo [1 , 5]. Se pide:

a) Estudia la continuidad en todos los puntos del intervalo [1 , 5].
b) Calcula el área de la región del plano limitada por el eje de abcisas, las rectas x = 2 y x = 4 y la gráfica de y = f(x).

Solución:

a) Continuidad en [1 , 5]

En [1 , 2), f(x) = 2/x que es continua ya que 2/x no se puede calcular únicamente para x = 0 y 0 no pertenece al intervalo [1 , 2).

En (2 , 3), f(x) = 1, función constante, luego continua.

En (3 , 4), f(x) = – x^2 *+ 6 x – 8, función polinómica, luego continua.*

En (4 , 5], f(x) = 0, función constante, luego continua.

Estudiemos la continuidad en los cambios de definición.

En x = 2

$$f(2)=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{2}=1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}1=1\end{array}\right\}=1$$

$$f(2)=1=\lim_{x\to 2} f(x)$$

Por lo tanto f(x) es continua en x = 2

En x = 3

$$f(3)==1$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}1=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(-x^2+6x-8\right)=-3^2+6\,.\,3-8=1\end{array}\right\}=1$$

$$f(3)=1=\lim_{x\to 3} f(x)$$

Por lo tanto f(x) es continua en x = 3

En $x = 4$

$$f(4) = -4^2 + 6\,.\,4 - 8 = 0$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(-x^2 + 6x - 8\right) = -4^2 + 6\,.\,4 - 8 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 0 = 0 \end{array} \right\} = 0$$

$$f(4) = 1 = \lim_{x\to 4} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ *es continua en* $x = 4$

En consecuencia, $f(x)$ *es continua en* $[\ 1 , 5\ ]$

b) Para calcular el área pedida debemos representar gráficamente la función en el intervalo $[\ 2 , 4\ ]$

En $[\ 2 , 3\ ]$, $f(x) = 1$, *recta horizontal.*

En $[\ 3 , 4\ ]$, $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, *una parábola.*

Representemos la parábola completamente y utilicemos el trozo correspondiente

$y = -x^2 + 6x - 8$

$x = 0 \ \rightarrow\ y = -8 \ \rightarrow$ *Corte eje OY* $(\ 0 , -8\ )$

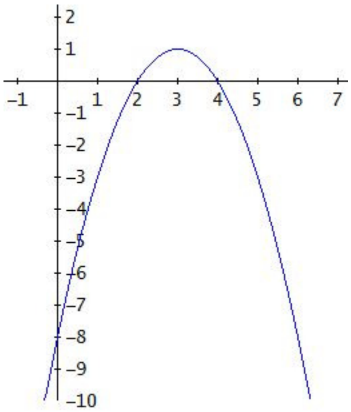
$$y = 0 \ \rightarrow\ -x^2 + 6x - 8 = 0 \ \rightarrow\ x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} =$$

$$= \frac{-6 \pm 2}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-6+2}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ \dfrac{-6-2}{-2} = \dfrac{-8}{-2} = 4 \end{array} \right.$$

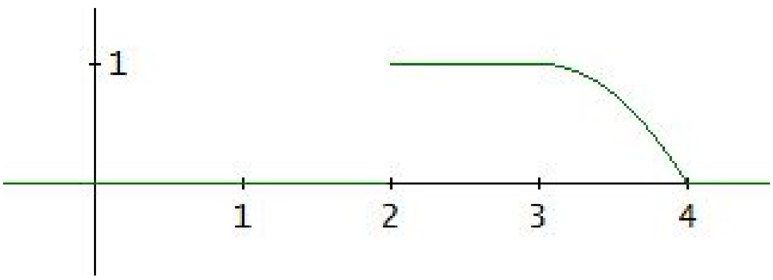
Corte eje OX $(\ 2 , 0\ )$ *y* $(\ 4 , 0\ )$

Vértice $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2(-1)} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \ \rightarrow\ y = -3^2 + 6\,.\,3 - 8 = 1 \ \rightarrow\ (3 , 1)$

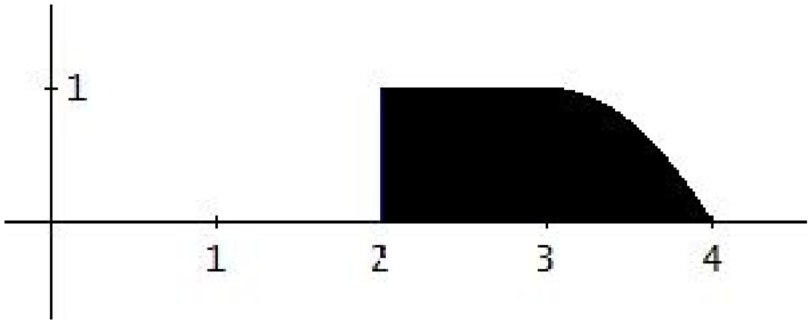
La representación de la parábola es:



Y la representación de $f(x)$ *en* $[\ 2 , 4\ ]$:



El área pedida será:



que la obtenemos a partir del siguiente cálculo integral:

$$A = \int_2^3 1\,dx + \int_3^4 \left(-x^2+6x-8\right)dx = [x]_2^3 + \left[\frac{-x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}-8x\right]_3^4 =$$

$$= (3-2) + \left(\frac{-4^3}{3} + 3\,.\,4^2 - 8\,.\,4 - \left(\frac{-3^3}{3} + 3\,.\,3^2 - 8\,.\,3\right)\right) =$$

$$= 1 - \frac{64}{3} + 48 - 32 - (-9+27-24) = 17 - \frac{64}{3} - (-6) = 23 - \frac{64}{3} = \frac{69-64}{3} = \frac{5}{3}$$

El área mide $\frac{5}{3}$ *u.a.*