OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Una empresa de telefonía móvil ofrece 3 tipos diferentes de tarifas, A, B y C, cifrándose en un 45%, 30% y 25% el porcentaje de clientes abonados a cada una de ellas, respectivamente. Se ha detectado que el 3%, 5% y 1% de los abonados a la tarifa A, B y C, respectivamente, cancelan su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia. Se pide:

a) Si un cliente elegido al azar cancela su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia, ¿cuál es la probabilidad de que estuviera abonado a la tarifa C?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar no cancele su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

c) Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté abonado a la tarifa A y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

d) Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté abonado a la tarifa B y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

Solución:

Considerando los sucesos:

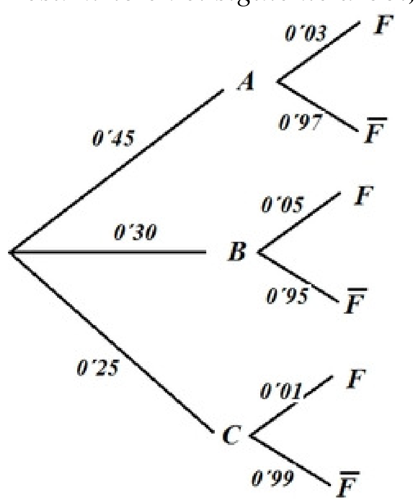
A = estar abonado a la tarifa A

B = estar abonado a la tarifa B

C = estar abonado a la tarifa C

F = cancelar el contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia

El problema podemos resumirlo en el siguiente árbol,



a) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$$P\left(C/F\right)=\frac{P(C\cap F)}{P(F)}=\frac{0´25.0´01}{0´45.0´03+0´30.0´05+0´25.0´01}=\frac{0´0025}{0´031}=0´0806451...\approx \mathbf{0´0806}$$

b) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$P(\overline{F})=1-P(F)=$ { *P(F) calculada en el apartado a)* } $= 1 - 0´031 = \mathbf{0´969}$

c) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$P(A\cap F)= 0´45 \,.\, 0´03 = \mathbf{0´0135}$

d) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$P(\overline{B} \cap F)$

Los sucesos A, B y C cumplen que $A \cup B \cup C = E$ *(suceso seguro) y son disjuntos dos a dos (por definición, una persona sólo puede estar abonada a una tarifa), por lo tanto* $\overline{B} = A \cup C$ *, en consecuencia:*

$P(\overline{B} \cap F) = P(A \cap F) + P(C \cap F)$

En el apartado anterior calculamos $P(A \cap F) = 0\acute{}0135$

Calculemos $P(C \cap F) = 0\acute{}25 \cdot 0\acute{}01 = 0\acute{}0025$

Finalmente, $P(\overline{B} \cap F) = P(A \cap F) + P(C \cap F) = 0\acute{}0135 + 0\acute{}0025 = \mathbf{0\acute{}016}$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. El 50% de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte A y el 40% afirma practicar el deporte B. Además, se sabe que el 70% de los jóvenes de dicha población practica el deporte A o el B. Si seleccionamos un joven al azar, se pide:

a) La probabilidad de que no practique ninguno de los deportes.
b) La probabilidad de que practique el deporte A y no practique el B.
c) Si practica el deporte B, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A?
d) ¿Son independientes los sucesos "Practicar el deporte A" y "Practicar el deporte B"? ¿Por qué?

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:

A = practicar el deporte A
B = practicar el deporte B

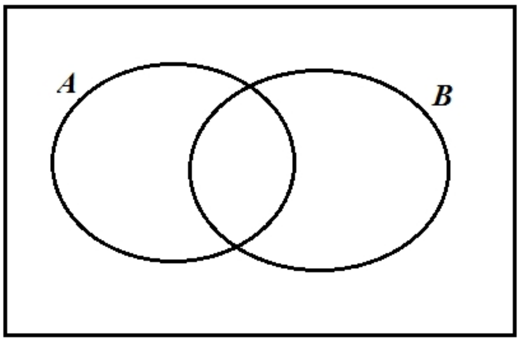
De los datos del problema sabemos que $P(A) = 0´5$, $P(B) = 0´4$ *y* $P(A \cup B) = 0´7$

a) Probabilidad de que no practique ninguno de los deportes, hay que calcular $P(\overline{A \cup B})$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0´7 = 0´3$

b) Probabilidad de que practique el deporte A y no practique el deporte B, hay que calcular $P(A \cap \overline{B})$

El problema podemos representarlo mediante el siguiente diagrama de Venn



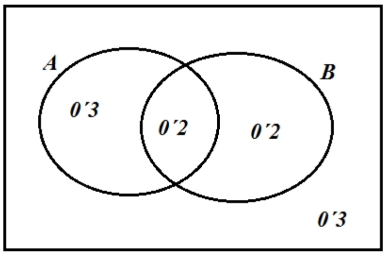
Hay calcular las probabilidades de cada parte de diagrama.
Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Sustituyendo los valores conocidos:

$0´7 = 0´5 + 0´4 - P(A \cap B)$

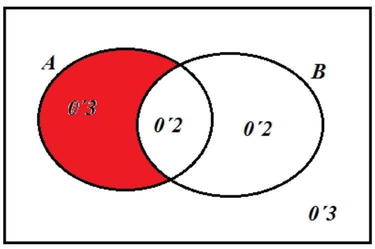
$0´7 = 0´9 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0´9 - 0´7 = 0´2$

El diagrama completado:



Y $A \cap \overline{B}$ *es:*



Por lo que $P(A \cap \overline{B}) = 0´3$

c) Si practica el deporte B, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A?, hay que calcular $P\left(A/B\right)$

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0´2}{0´4}=0´5$$

d) A y B serán independientes si $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$

Del apartado b) sabemos que $P(A\cap B)=0´2$

P(A) P(B) = 0´5 . 0´4 = 0´2

Por lo tanto los sucesos A y B son independientes.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Probamos una vacuna contra la gripe en un grupo de 400 personas, de las que 180 son hombres y 220 mujeres. De las mujeres, 25 contraen la gripe y de los hombres 23. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que al seleccionar una persona al azar resulte que no tiene gripe.
b) Que al seleccionar una persona al azar resulte ser una mujer que no tiene gripe.
c) Que seleccionada una persona al azar que no tiene gripe, resulte ser hombre.
d) Que seleccionada una mujer al azar, resulte no tener gripe.

Solución:
Utilizando los siguientes sucesos:
H = la persona seleccionada es hombre
M = la persona seleccionada es mujer
G = la persona seleccionada tiene gripe

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla:

	G	$\overline{G}$	total
H	23		180
M	25		220

Completando la tabla:

	G	$\overline{G}$	total
H	23	157	180
M	25	195	220
total	48	352	400

Calculemos cada una de las probabilidades pedidas,

a) $P(\overline{G}) = \dfrac{352}{400} = 0'88$

b) $P(M \cap \overline{G}) = \dfrac{195}{400} = 0'4875$

c) $P\left(H/\overline{G}\right) = \dfrac{P(H \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \dfrac{\frac{157}{400}}{\frac{352}{400}} = \dfrac{157}{352} = 0'4460227... \cong 0'4460$

d) $P\left(\overline{G}/M\right) = \dfrac{195}{220} = 0'8863636... \cong 0'8864$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. La probabilidad de que ocurra el contrario de un suceso A es 1/3; la probabilidad de un suceso B es 3/4 y la probabilidad de que ocurran a la vez los sucesos A y B es 5/8.

a) Calcula la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B.
b) Calcula la probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B.
c) Calcula la probabilidad de que ocurra A, sabiendo que ha ocurrido B.
d) ¿Son independientes los sucesos A y B? Razona tu respuesta.

Solución:

De los datos del enunciado sabemos que $P(\overline{A})=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{3}{4}\quad y\quad P(A\cap B)=\frac{5}{8}$

Como $P(\overline{A})=\frac{1}{3}\ \rightarrow\ P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

a) Probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B, es decir, $P(A\cup B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{16+18-15}{24}=\frac{19}{24}$$

b) Probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B, es decir, $P(\overline{A\cup B})$

$$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{19}{24}=\frac{5}{24}$$

c) Probabilidad de que ocurra A, sabiendo que ha ocurrido B, es decir, $P(A/B)$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5/8}{3/4}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$$

d) ¿Son independientes los sucesos A y B?

Dos sucesos son independientes cuando $P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)$

Veamos si los sucesos A y B cumplen esta condición.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=\frac{5}{8} \\ P(A)\,.\,P(B)=\frac{2}{3}\,.\,\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8} \end{array}\right\}\ \rightarrow\ P(A\cap B)\neq P(A)\,.\,P(B)$$

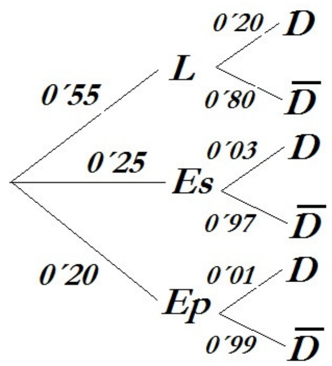
Por tanto, los sucesos A y B no son independientes.

Problema 3. El 55% de los empleados de una empresa son licenciados, el 25% tienen un nivel de estudios de educación secundaria y el resto tan sólo nivel de estudios primarios. Un 20% de los licenciados, un 3% de los que tiene educación secundaria y un 1% de los que tienen estudios primarios ocupan un puesto directivo en la empresa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un directivo de la empresa elegido al azar sea licenciado?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar no sea directivo y su nivel de estudios sea de estudios primarios?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar tenga nivel de estudios secundarios o sea directivo?

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
L = El empleado de la empresa es licenciado
Es = El empleado de la empresa tiene educación secundaria
Ep = El empleado de la empresa tiene estudios primarios
D = ocupa puesto directivo
$\overline{D}$ *= no ocupa puesto directivo*

Los datos del problema podemos resumirlos mediante el árbol,



Resolvamos cada uno de los apartados del problema,

a) Probabilidad de que un directivo de la empresa elegido al azar sea licenciado.

$$P\left(L/D\right)=\frac{P(L\cap D)}{P(D)}=\frac{0´55\cdot 0´20}{0´55\cdot 0´20+0´25\cdot 0´03+0´20\cdot 0´01}=\frac{0´11}{0´1195}=0´9205$$

b) Probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar no sea directivo y su nivel de estudios sea de estudios primarios.

$$P\left(\overline{D}\cap Ep\right)=0´20\cdot 0´99=0´198$$

c) Probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar tenga nivel de estudios secundarios o sea directivo.

$$P(Es\cup D)=P(Es)+P(D)-P(Es\cap D)=$$

{ P(D) lo hemos calculado en el apartado a) P(D) = 0´1195}

$$=0´25+0´1195-0´25\cdot 0´03=0´362$$

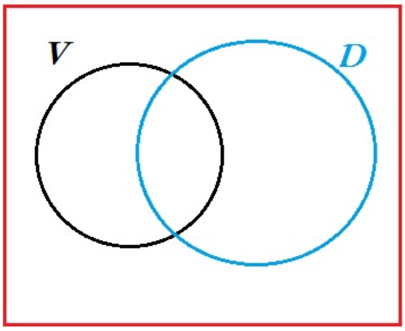
Problema 3. El 35% de los alumnos de un instituto viste vaqueros y el 50% lleva calzado deportivo. El 30% de ellos no usa ni vaqueros ni calzado deportivo. Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros o use calzado deportivo.
b) La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros y use calzado deportivo.
c) La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros pero no use calzado deportivo.
d) Si se elige un alumno al azar y se observa que no lleva calzado deportivo, ¿cuál es la probabilidad de que no lleve vaqueros?

Solución:
Usando los sucesos:

V = el alumno viste vaqueros
D = el alumno lleva calzado deportivo

Podemos representar los datos del problema en un diagrama de Venn,



De los datos del problema sabemos:

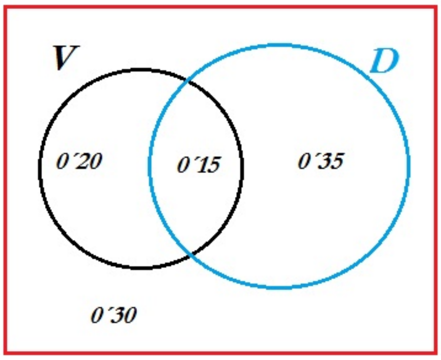
El 35% de los alumnos de un instituto viste vaqueros: $P(V) = 0'35$
El 50% lleva calzado deportivo: $P(D) = 0'50$
El 30% de ellos no usa ni vaqueros ni calzado deportivo: $P\left(\overline{V \cup D}\right) = 0'30$

Como $P\left(\overline{V \cup D}\right) = 0'30$, $1 - P(V \cup D) = 0'30 \;\rightarrow\; 1 - 0'30 = P(V \cup D) \;\rightarrow\; P(V \cup D) = 0'70$

$P(V \cup D) = P(V) + P(D) - P(V \cap D)$

$0'70 = 0'35 + 0'50 - P(V \cap D) \;\rightarrow\; 0'70 = 0'85 - P(V \cap D) \;\rightarrow\; P(V \cap D) = 0'85 - 0'70 = 0'15$

Completamos el diagrama:



Resolvamos cada uno de los apartados,

a) $P(V \cup D) = 0'70$
{obtenido anteriormente}

b) $P(V \cap D) = 0'15$
{obtenido anteriormente}

c) $P\left(V \cap \overline{D}\right) = 0'20$ *{del diagrama}*

d)

$$P\left(\overline{V}/\overline{D}\right) = \frac{P\left(\overline{V} \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} =$$

Por leyes de Morgan: $P\left(\overline{V} \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{V \cup D}\right) = 0'30$

Por definición: $P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 1 - 0'50 = 0'50$

$$= \frac{0'30}{0'50} = 0'6$$

Problema 3. El 70% de los solicitantes de un puesto de trabajo tiene experiencia y, además, una formación acorde con el puesto. Sin embargo, hay un 20% que tiene experiencia y no una formación acorde con el puesto. Se sabe también que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5% tiene experiencia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia?

b) Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia?

Solución:

Llamenos E = *tener experiencia*

F = *formación acorde*

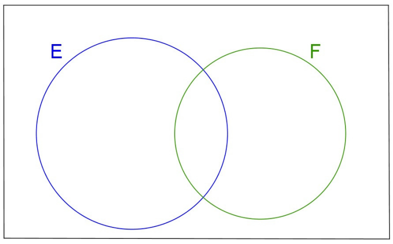
De los datos del problema sabemos,

"El 70% de los solicitantes tiene experiencia y, además, una formación acorde" $\rightarrow P(E \cap F) = 0´70$

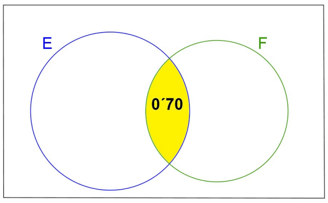
"Hay un 20% que tiene experiencia y no una formación acorde" $\rightarrow P\left(E \cap \overline{F}\right) = 0´20$

"Entre los solicitantes que tienen formación adecuada, un 87´5% tienen experiencia" $\rightarrow P\left(E/F\right) = 0´875$

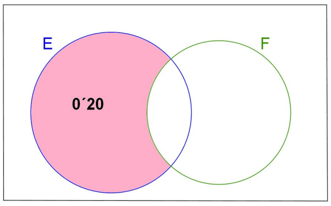
A partir de estos datos vamos a completar el diagrama de Venn de los sucesos E *y* F,



$P(E \cap F) = 0´70 \rightarrow$

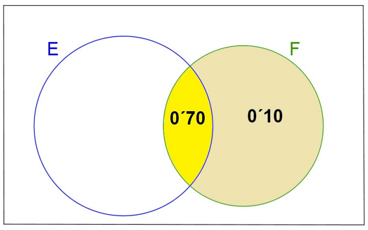


$P\left(E \cap \overline{F}\right) = 0´20 \rightarrow$

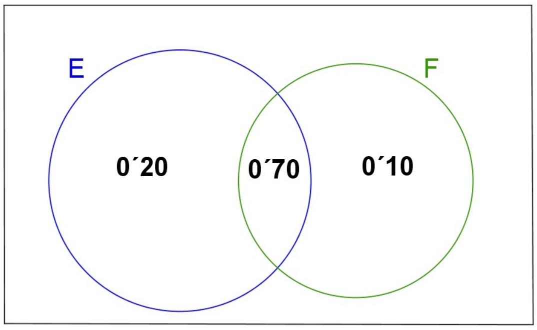


$$P\left(E/F\right) = 0´875 \rightarrow \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = 0´875$$

$$\frac{0´70}{P(F)} = 0´875 \rightarrow P(F) = \frac{0´70}{0´875} = 0´8 \rightarrow$$



Y finalmente,



a) $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - (0{\acute{}}20 + 0{\acute{}}70) = 0{\acute{}}10$

La probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia es 0´10.

b) $P\left(F/_{E}\right) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{\acute{}}70}{0{\acute{}}90} = 0{\acute{}}7778$

Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto es 0´7778.

c) $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) =$ *(por leyes de Morgan)* $= P\left(\overline{E \cup F}\right) = 1 - P(E \cup F) = 1 - (0{\acute{}}20 + 0{\acute{}}70 + 0{\acute{}}10) = 1 - 1 = 0$

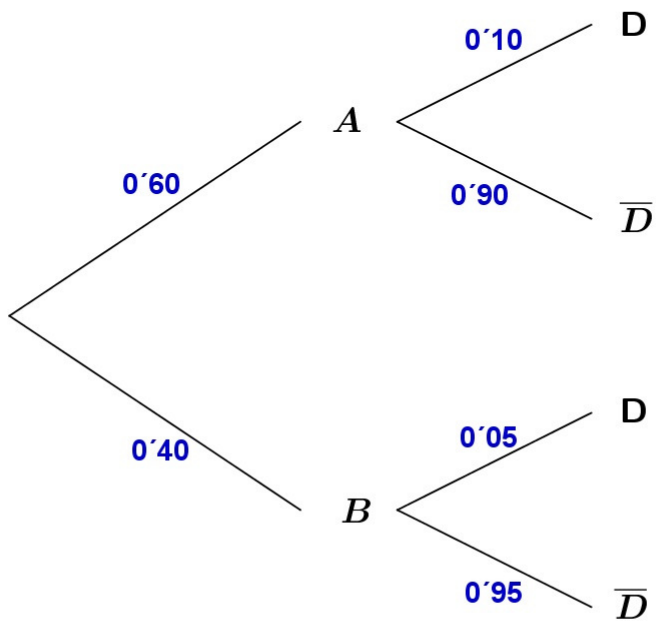
La probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia es 0.

Problema 3. El 60% de los componentes electrónicos producidos en una fábrica proceden de la máquina A y el 40% de la máquina B. La proporción de componentes electrónicos defectuosos en A es 0,1 y en B es 0,05.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que un componente electrónico no es defectuoso, proceda de la máquina A?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso y proceda de la máquina B?

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:
A = componente procede de la máquina A
B = componente procede de la máquina B
D = componente es defectuoso

Considerando todos los datos del enunciado, el árbol del problema será:



a) $P(D) = 0'60 \cdot 0'10 + 0'40 \cdot 0'05 = 0'08$

b)

$$P\left(A/\overline{D}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P(\overline{D})} = \frac{0'60 \cdot 0'90}{1 - P(D)} = \frac{0'54}{1 - 0'08} = \frac{0'54}{0'92} = 0'5870$$

c) $P(D \cap B) = 0'40 \cdot 0'05 = 0'02$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

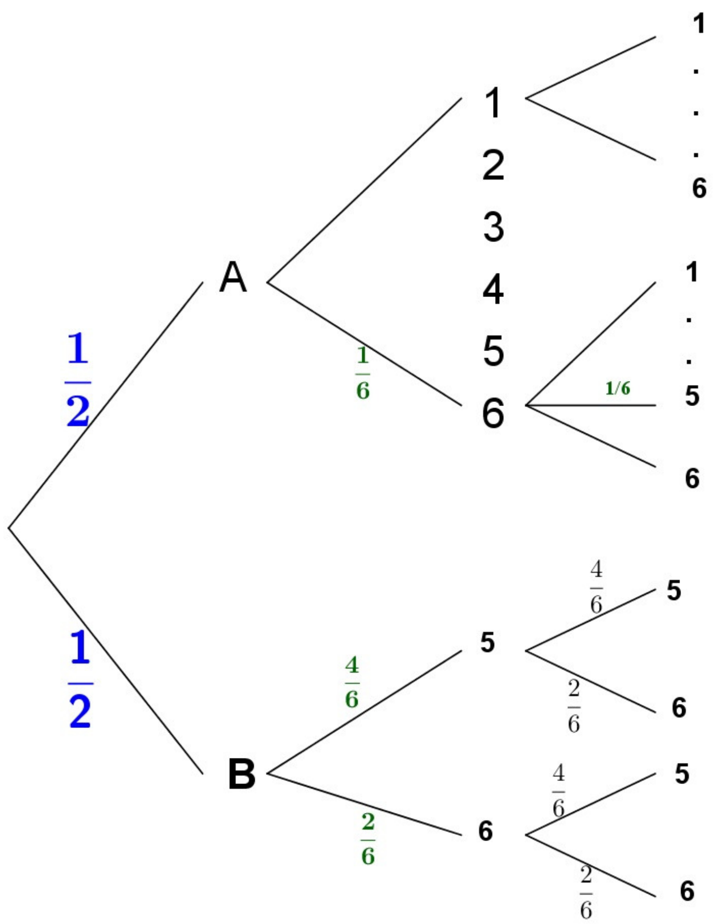
Problema 3. Un dado normal tiene sus caras numeradas del número 1 al 6. Otro dado está trucado y tiene cuatro caras numeradas con el 5 y las otras dos caras numeradas con el 6. Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido. Se pide:

a) Calcula la probabilidad de sacar un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda. *(3 puntos)*

b) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos entre las dos tiradas sea 11. *(3 puntos)*

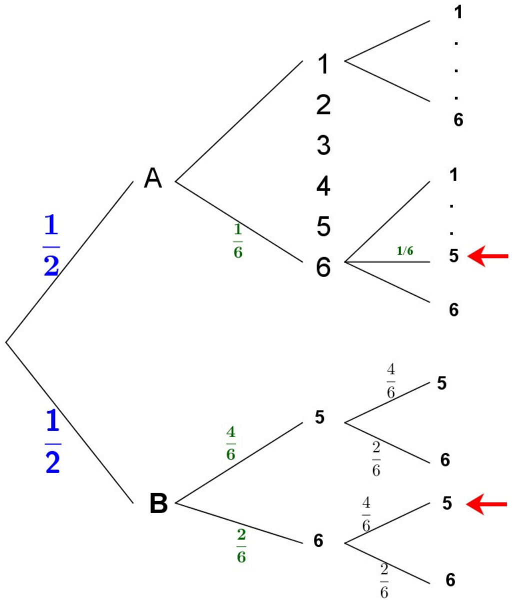
c) Si al realizar las dos tiradas con el dado elegido al azar se obtiene un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? *(4 puntos)*

Solución:
Dado normal, A, sus caras = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Dado trucado, B, sus caras = { 5, 5, 5, 5, 6, 6 }
Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido, el árbol del problema es:
(el árbol no está completo para que no sea enorme, sólo dibujamos las ramas más necesarias)



a) P(1ª tirada 6 y 2ª tirada 5)

1ª tirada 6 y 2ª tirada 5 se puede obtener con el dado A o con el dado B, los resultados correspondientes los marcamos en el árbol:



Por tanto,

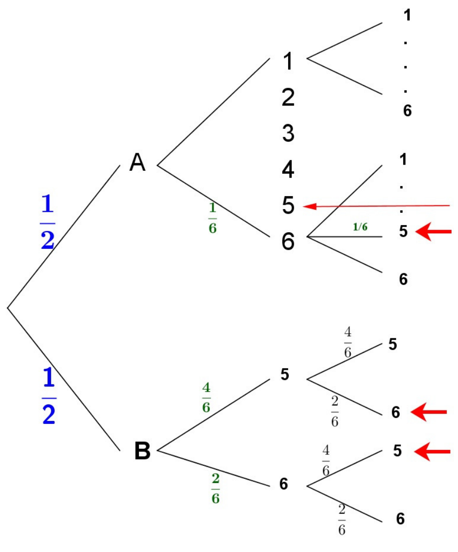
$$P(\text{ 1ª tirada 6 y 2ª tirada 5})=\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{2}{6}\frac{4}{6}=\frac{1}{72}+\frac{9}{72}=\frac{1}{8}$$

Solución: 1/8

b) P(suma de las dos tiradas sea 11)

La suma de las dos tiradas sea 11 se obtiene cuando $\left\langle \begin{array}{ll} \text{Dado} \quad A & \begin{array}{l} 5+6 \\ 6+5 \end{array} \\ \text{Dado} \quad B & \begin{array}{l} 5+6 \\ 6+5 \end{array} \end{array} \right.$*, los resultados correspondientes*

los marcamos en el árbol:



Por tanto,

P(suma de las dos tiradas sea 11)=

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{6}\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\frac{4}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{36}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{16}{36}\right)=\frac{1}{36}+\frac{8}{36}=\frac{1}{4}$$

Solución: 1/4

c) Definimos los sucesos: B = dado es trucado y R = obtener 6 en la 1ª tirada y 5 en la 2ª.

La probabilidad a calcular es: $P\left(B/R\right)$. *Calculémosla:*

(Según obtuvimos en el apartado (a) P(R) = 1/8)

$$P\left(B/R\right)=\frac{P(B\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{2}{6}\frac{4}{6}}{\frac{1}{8}}=\frac{8}{9}$$

Solución: 8/9

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es Ω = {a, b, c, d, e}. Se sabe que $P(a) = P(c) = \frac{1}{8},\ P(d) = \frac{1}{4},\ P(e) = \frac{1}{3}.$ Dados los sucesos A ={a, b, c} y B ={b, d, e} y siendo $\overline{A}$ el suceso contrario o complementario de A y $\overline{B}$ el suceso contrario o complementario de B, calcula:

a) $P(A \cap B)$. (*2 puntos*)
b) $P(A \cup \overline{B})$. (*2 puntos*)
c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. (*2 puntos*)
d) $P\left(A/B\right)$. (*2 puntos*)
e) $P\left(B/A\right)$. (*2 puntos*)

Solución:

Ω = {a, b, c, d, e}, $P(a) = P(c) = \frac{1}{8},\ P(d) = \frac{1}{4},\ P(e) = \frac{1}{3}.$

Como Ω es el espacio muestral del experimento $\rightarrow$ P(a) + P(b) + P(c) + P(d) +P(e) = 1, sustituyendo los valores de las probabilidades conocidas:

$$\frac{1}{8} + P(b) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1 \;\rightarrow\; P(b) + \frac{5}{6} = 1 \;\rightarrow\; P(b) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$A = \{a, b, c\} \rightarrow \overline{A} = \{d, e\}$ y $B = \{b, d, e\} \rightarrow \overline{B} = \{a, c\}$

a) $A \cap B = \{b\} \rightarrow P(A \cap B) = P(b) = \frac{1}{6}$ **$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$**

b) $A \cup \overline{B} = \{a, b, c\} \rightarrow P(A \cup \overline{B}) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5}{12}$ **$P(A \cup \overline{B}) = \frac{5}{12}$**

c) $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing \rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\varnothing) = 0$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0$

d) $P\left(A/B\right)$

$$P\left(A/\overline{B}\right) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \left\{\begin{array}{l} A \cap \overline{B} = \{a,c\} \rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(a) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \\ \overline{B} = \{a,c\} \rightarrow P(\overline{B}) = \frac{1}{4} \end{array}\right\} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$P\left(A/\overline{B}\right) = \mathbf{1}$$

e) $P\left(B/A\right)$

$$P\left(B/A\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\left\{\begin{array}{l} P(B\cap A)=\frac{1}{6} \quad \{obtenido\ en\ apartado\ (a)\} \\ \\ A=\{a,b,c\} \quad \rightarrow \quad P(A)=P(a)+P(b)+P(c)=\frac{5}{12} \quad \{apartado\ (a)\} \end{array}\right\}=\frac{1/6}{5/12}=\frac{2}{5}$$

$$P\left(B/A\right)=\frac{2}{5}$$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25% de los coches son de motor híbrido. El 20% son de tipo Van y el 40% de tipo Urban. El 15% de los de tipo Van y el 40% de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido. *(2,5 puntos)*
b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido. *(2,5 puntos)*
c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv. *(2,5 puntos)*
d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido. *(2,5 puntos)*

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:

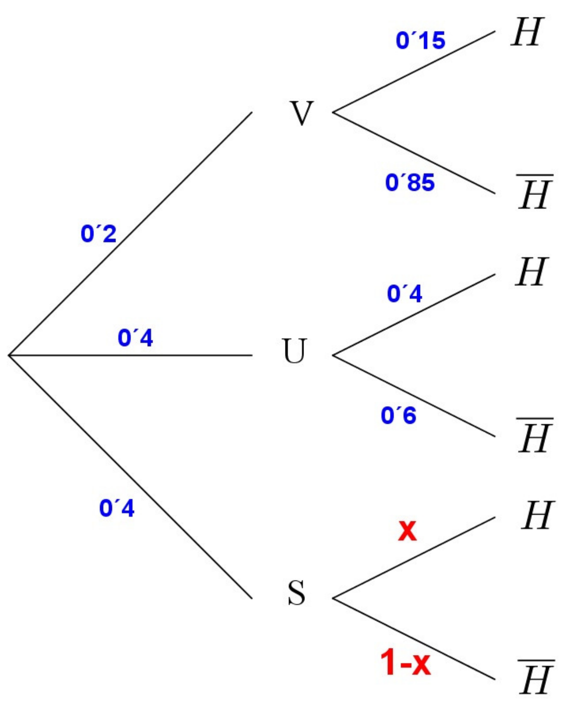
V = coche de tipo Van *H = coche híbrido*
U = coche de tipo Urban $\overline{H}$ *= coche no híbrido*
S = coche de tipo Suv

Considerando todos los datos del enunciado,
"el 25% de los coches son híbridos" $\rightarrow$ $P(H) = 0'25$ y $P(\overline{H}) = 1 - 0'25 = 0'75$
"el 20% son de tipo Van" $\rightarrow$ $P(V) = 0'20$
"el 40% son de tipo Urban" $\rightarrow$ $P(U) = 0'40$
Como sólo hay tres modelos de coche, el resto, es decir, el 40% son de tipo Suv $\rightarrow$ $P(S) = 0'40$

"el 15% de los de tipo Van son híbridos" $\rightarrow$ $P\left(H/V\right) = 0'15$ y $P\left(\overline{H}/V\right) = 1 - 0'15 = 0'85$

"el 40% de los de tipo Urban son híbridos" $\rightarrow$ $P\left(H/U\right) = 0'40$ y $P\left(\overline{H}/U\right) = 1 - 0'40 = 0'60$

El árbol del problema será:

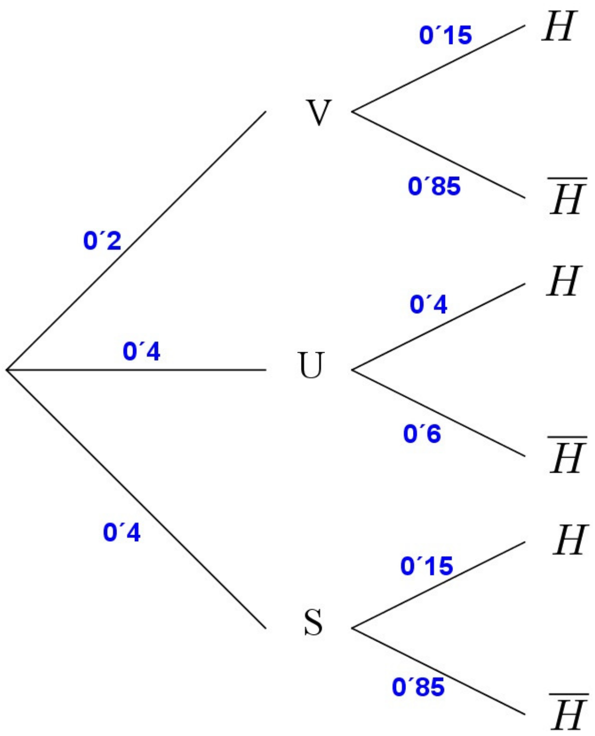


Determinamos el valor de x considerando que $P(H) = 0'25$
Del árbol, $P(H) = 0'2 \cdot 0'15 + 0'4 \cdot 0'4 + 0'4 \cdot x$

$$0'25 = 0'19 + 0'4\,x$$

$$0'06 = 0'4\,x \quad \rightarrow \quad x = \frac{0'06}{0'4} = 0'15$$

El árbol definitivo es:



Respondamos las preguntas,

a) Probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.

La probabilidad pedida es: $P\left(U/H\right)$

$$P\left(U/H\right) = \frac{P(U \cap H)}{P(H)} = \frac{0'4 \cdot 0'4}{0'25} = 0'64$$

b) Probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.

La probabilidad pedida es: $P\left(V/\overline{H}\right)$

$$P\left(\left(V/\overline{H}\right)\right) = \frac{P(V \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{0'2 \cdot 0'85}{0'75} = 0'2267$$

c) Probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.

La probabilidad pedida es: $P\left(H/S\right)$

$$P\left(H/S\right) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} = \frac{0'4 \cdot 0'15}{0'4} = 0'15$$

d) Probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

Ni Van ni híbrido, por tanto debe ser Urban y no híbrido o Suv y no híbrido.

La probabilidad pedida es: $P\left(\overline{V} \cap \overline{H}\right) = P\left(U \cap \overline{H}\right) + P\left(S \cap \overline{H}\right) = 0'4 \cdot 0'6 + 0'4 \cdot 0'85 = 0'58$

Otra forma de calcular esta probabilidad:

$$P\left(\overline{V}\cap\overline{H}\right)=P\left(\overline{V\cup H}\right)=1-P\left(V\cup H\right)$$

$$P\left(V\cup H\right)=P(V)+P(H)-P\left(V\cap H\right)=0´2+0´25-0.2\cdot 0´15=0´42$$

Finalmente, $P\left(\overline{V}\cap\overline{H}\right)=1-0´42=0´58$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Un estudiante acude a la universidad el 70% de las veces usando su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1% de las veces que acude andando, el 3% de las que lo hace en transporte público y el 6% de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente. *(3 puntos)*

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde. *(3 puntos)*

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente. *(4 puntos)*

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

V = va en vehículo *A = va andando* *T = va en transporte público*

Del enunciado del problema se deduce que: $P(V) = 0'7$, $P(A) = x$ *y* $P(T) = 2x$

Como estos son los tres medios de transporte que usa, $0'7 + x + 2x = 1$; $3x = 1 - 0'7$; $3x = 0'3$;

$$x = \frac{0'3}{3} = 0'1$$

Luego, $P(V) = 0'7$, $P(A) = 0'1$ *y* $P(T) = 0'2$

Añadimos los sucesos: R *= llega con retraso* $\overline{R}$ *= llega puntual*

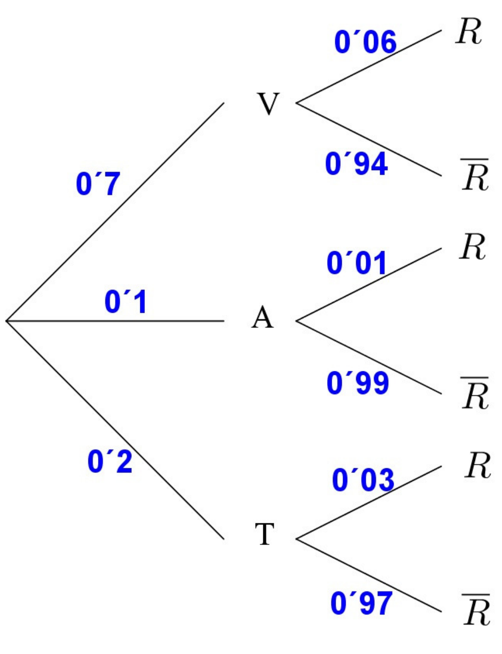
Considerando todos los datos del enunciado,

"el 1% de las veces que acude andando llega tarde" $\rightarrow$ $P\left(R/A\right) = 0'01$

"el 3% de las que lo hace en transporte público" $\rightarrow$ $P\left(R/T\right) = 0'03$

"el 6% de las que lo hace con su propio vehículo" $\rightarrow$ $P\left(R/V\right) = 0'06$

El árbol del problema será:



a) Probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

La probabilidad pedida es: $P(\overline{R})$

$$P(\overline{R}) = 0'7\ .\ 0'94 + 0'1\ .\ 0'99 + 0'2\ .\ 0'97 = \mathbf{0'951}$$

b) Probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde.

La probabilidad pedida es: $P\left(T/R\right)$

$$P\left(T/R\right) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{0'2 \cdot 0'03}{0'049} = \frac{6}{49} = \underline{\underline{0'1224}}$$

$$P(R) = 1 - P(\overline{R}) = 1 - 0'951 = 0'049$$

c) Probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

La probabilidad pedida es: $P\left(\overline{A}/\overline{R}\right)$

$$P\left(\overline{A}/\overline{R}\right) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \left\{\text{Leyes de Morgan } \overline{A} \cap \overline{R} = \overline{A \cup R}\right\} \frac{P(\overline{A \cup R})}{P(\overline{R})} = \frac{1 - P(A \cup R)}{P(\overline{R})} = \frac{1 - 0'148}{0'951} = \underline{\underline{0'8959}}$$

cálculo de $P(A \cup R) = P(A) + P(R) - P(A \cap R) = 0'1 + 0'049 - 0'1 \cdot 0'01 = 0'148$

De otra forma.

Si no ha ido andando, ha ido en vehículo o en transporte público. Por tanto:

$$P\left(\overline{A}/\overline{R}\right) = P\left(V/\overline{R}\right) + P\left(T/\overline{R}\right) = \frac{P(V \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} + \frac{P(T \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{0'7 \cdot 0'94}{0'951} + \frac{0'2 \cdot 0'97}{0'951} = \underline{\underline{0'8959}}$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Si un habitante de la ciudad de Megalópolis es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

a) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo B.
b) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.
c) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.
d) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:
A = el habitante es portador del anticuerpo A *B = el habitante es portador del anticuerpo B*

Considerando todos los datos del enunciado,

"si un habitante es portador de A, entonces 2 de cada 5 veces es portador del B" $\rightarrow \quad P\left(B/A\right)=\frac{2}{5}$

"si un habitante no es portador de A, entonces 4 de cada 5 veces no es portador del B" $\rightarrow \quad P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=\frac{4}{5}$

"la mitad de la población es portadora de A" $\rightarrow \quad P(A) = 0´5$

Como $P\left(B/A\right)=\frac{2}{5} \rightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{2}{5} \rightarrow \frac{P(B\cap A)}{0´5}=\frac{2}{5} \rightarrow P(B\cap A)=0´5\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

Como $P(A) = 0´5 \rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0´5=0´5$

Como $P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=\frac{4}{5} \rightarrow \frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{4}{5} \rightarrow \frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{0´5}=\frac{4}{5} \rightarrow P(\overline{B}\cap\overline{A})=0´5\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$

a) Probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo B.
La probabilidad pedida es: P(B).

$$P(B)=P\left(B\cap\left(A\cup\overline{A}\right)\right)=P\left(\left(B\cap A\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right)=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)-P\left(\left(B\cap A\right)\cap\left(B\cap\overline{A}\right)\right)=(*)$$

$$\left(B\cap A\right)\cap\left(B\cap\overline{A}\right)=B\cap A\cap\overline{A}=\varnothing, \quad \textit{luego} \quad P\left(\left(B\cap A\right)\cap\left(B\cap\overline{A}\right)\right)=P(\varnothing)=0$$

$$(*)=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)-0=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)=\frac{1}{5}+P\left(B\cap\overline{A}\right)$$

Calculemos $P\left(B\cap\overline{A}\right)$

$$P(\overline{A})=P\left(\overline{A}\cap\left(B\cup\overline{B}\right)\right)=P\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right)=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)-P\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cap\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right)=$$

de forma análoga al cálculo anterior

$$=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)-P(\varnothing)=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)-0=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$$

luego, $0´5=P\left(\overline{A}\cap B\right)+\frac{2}{5}; \quad P\left(\overline{A}\cap B\right)=0´5-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$

Finalmente, $P(B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

b) Probabilidad de que si un habitante de Megalópolis es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.

La probabilidad pedida es: $P\left(A/B\right)$

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{3}$$

c) Probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

La probabilidad pedida es: $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$

$$P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{\frac{2}{5}}{1-P(B)}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{10}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}}=\frac{4}{7}$$

d) Probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

La probabilidad pedida es: $P\left(A\cap\overline{B}\right)$.

$$P\left(\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\cap\left(A\cup\overline{A}\right)\right)=P\left(\left(\overline{B}\cap A\right)\cup\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)\right)=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)-P\left(\left(\overline{B}\cap A\right)\cap\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)\right)=(*)$$

$$\left(\overline{B}\cap A\right)\cap\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=\overline{B}\cap A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad \textit{luego}\quad P\left(\left(\overline{B}\cap A\right)\cap\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)\right)=P(\varnothing)=0$$

$$(*)=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)-0=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)$$

luego, $P\left(\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)$

$$1-P(B)=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)$$

$$1-\frac{3}{10}=P\left(\overline{B}\cap A\right)+\frac{2}{5};\quad \frac{7}{10}=P\left(\overline{B}\cap A\right)+\frac{2}{5};\quad P\left(\overline{B}\cap A\right)=\frac{7}{10}-\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$$

Por tanto, $P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{3}{10}$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático. *(3 puntos)*

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio? *(4 puntos)*

c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa? *(3 puntos)*

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

T = trabajo original $\overline{T}$ *= trabajo plagiado (no original)*

B = el programa clasifica como original $\overline{B}$ *= el programa clasifica como no original*

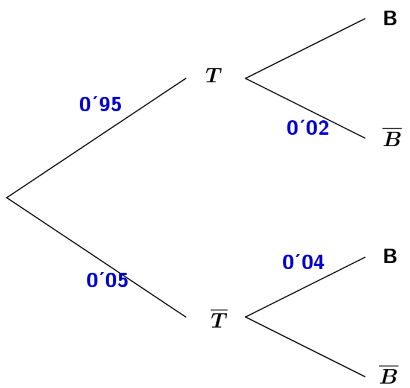
Considerando todos los datos del enunciado,

"El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales" $\rightarrow$ $P(\overline{T}) = 0'05$ y $P(T) = 1 - 0'05 = 0'95$

"el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04" $\rightarrow$ $P\left(B/\overline{T}\right) = 0'04$

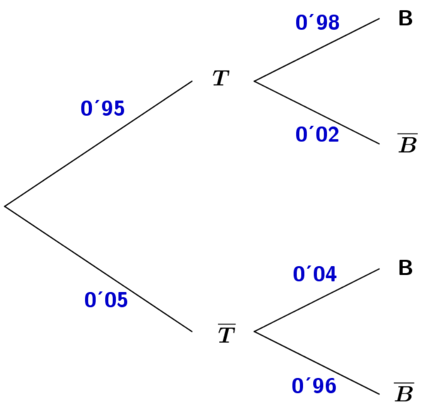
"la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02" $\rightarrow$ $P\left(\overline{B}/T\right) = 0'02$

Con los datos, el árbol del problema será:



Completando las probabilidades de las dos ramas que faltan: $1 - 0'02 = 0'98$ y $1 - 0'04 = 0'96$

El árbol queda:



a) Probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático.

La probabilidad pedida es: $P(\overline{B})$

$$P(\overline{B}) = P(T)\cdot P\left(\overline{B}/T\right) + P(\overline{T})\cdot P\left(\overline{B}/\overline{T}\right) = 0'95\cdot 0'02 + 0'05\cdot 0'96 = 0'067$$

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio?

La probabilidad pedida es: $P\left(\overline{T}/B\right)$

$$P\left(\overline{T}/B\right) = \frac{P(\overline{T}\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{T}\cap B)}{1-P(\overline{B})} = \frac{0'05\cdot 0'04}{1-0'067} = 0'002144$$

c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa?

Calculemos: $P(\overline{T}\cap\overline{B})$

$$P(\overline{T}\cap\overline{B}) = 0'05\cdot 0'96 = 0'048 \quad\rightarrow\quad 4'8\%$$

El 4´8% de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio. *(4 puntos)*

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio. *(3 puntos)*

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio? *(3 puntos)*

Solución:

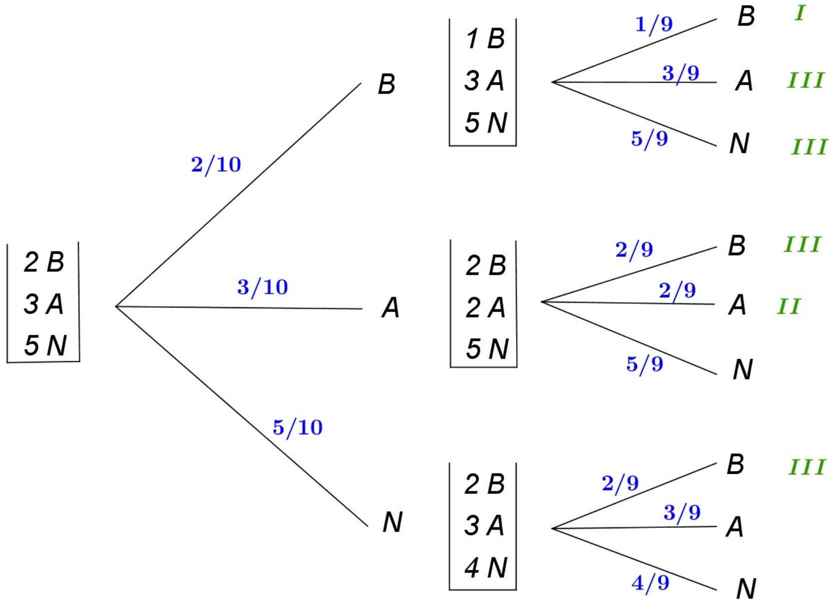
Consideramos los siguientes sucesos:

B = extraer bola blanca *A = extraer bola amarilla* *N = extraer bola negra*

I = obtener 1º premio *II = obtener 2º premio* *III = obtener 3º premio*

Considerando todos los datos del enunciado,

el árbol del problema es:



a) Probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio.

La probabilidad pedida es: P(I ∪ II)

$$P(I \cup II) = \frac{2}{10}\frac{1}{9} + \frac{3}{10}\frac{2}{9} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

b) Probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio.

La probabilidad pedida es: P(III)

$$P(III) = \frac{2}{10}\frac{3}{9} + \frac{2}{10}\frac{5}{9} + \frac{3}{10}\frac{2}{9} + \frac{5}{10}\frac{2}{9} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio?

La probabilidad pedida es: $P\left({}^{III}\!\!\diagup_{Obtiene\ premio} \right) = \dfrac{P(III \cap Obtiene\ premio)}{P(Obtiene\ premio)} = \dfrac{P(III)}{P(Obtiene\ premio)}$

P(III) está calculada en el apartado b).

P(obtener premio) = P (I $\cup$ *II* $\cup$ *III) = {utilizando lo calculado en a) y b)} =* $\dfrac{4}{45} + \dfrac{16}{45} = \dfrac{20}{45}$

Por tanto, $P\left({}^{III}\!\!\diagup_{Obtiene\ premio} \right) = \dfrac{16/45}{20/45} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5% de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%. Se pide:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test. *(2,5 puntos)*

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test. *(2,5 puntos)*

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto. *(2,5 puntos)*

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso? *(2,5 puntos)*

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

S = la persona está sana *E = la persona está enferma*

+ = el test da positivo *– = el test da negativo*

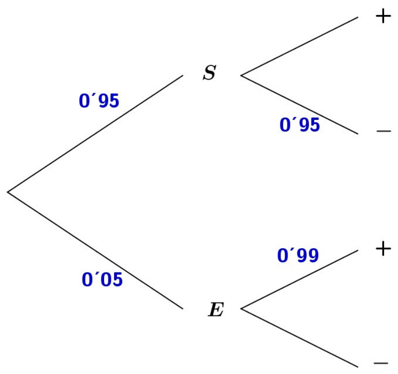
Considerando todos los datos del enunciado,

"Una determinada enfermedad afecta al 5% de la población" $\rightarrow$ $P(E) = 0'05$ y $P(S) = 1 - 0'05 = 0'95$

"la probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad es del 99%" $\rightarrow$ $P\left(+/_{E}\right) = 0'99$

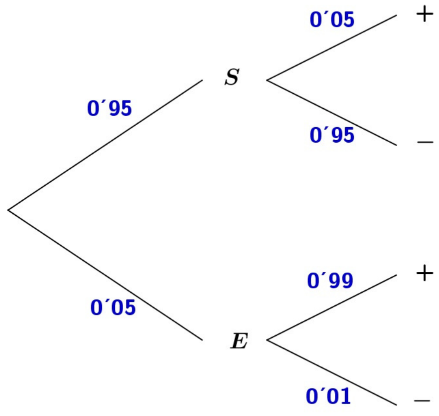
"la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%" $\rightarrow$ $P\left(-/_{S}\right) = 0'95$

Con los datos, el árbol del problema es:



Completando las probabilidades de las dos ramas que faltan: $1 - 0'95 = 0'05$ y $1 - 0'99 = 0'01$

El árbol queda:



a) Probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.

La probabilidad pedida es: $P\left(E/_{+}\right)$

$$P\left(E/_{+}\right)=\frac{P(E\cap +)}{P(+)}=\frac{0'05\cdot 0'99}{0'95\cdot 0'05+0'05\cdot 0'99}=\frac{99}{194}\cong 0'5103$$

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.

La probabilidad pedida es: $P\left(S/_{-}\right)$

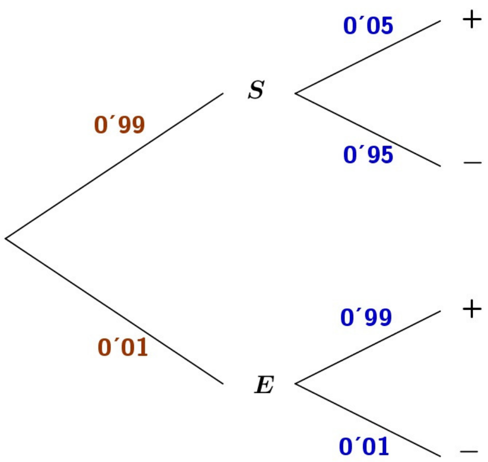
$$P\left(S/_{-}\right)=\frac{P(S\cap -)}{P(-)}=\frac{0'95\cdot 0'95}{0'95\cdot 0'95+0'05\cdot 0'01}=\frac{1805}{1806}\cong 0'9994$$

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.

$$P(\text{test de correcto})=P(S\cap -)+P(E\cap +)=0'95\cdot 0'95+0'05\cdot 0'99=\frac{119}{125}\cong 0'952$$

d) Si la ***enfermedad afecta*** *únicamente* ***a un 1% de la población****. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso?*

El árbol del problema sería:



La probabilidad pedida es: $P\left(E/_{+}\right)$

$$P\left(E/_{+}\right)=\frac{P(E\cap +)}{P(+)}=\frac{0'01\cdot 0'99}{0'99\cdot 0'05+0'01\cdot 0'99}=\frac{1}{6}\cong 0'1667$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Dados dos sucesos A y B, se sabe que $P(B) = 0{,}4$, $P(A^c \cap B^c) = 0{,}2$ y $P(A \cap B)) = 0{,}3$, siendo A^c y B^c los sucesos complementarios de A y B, respectivamente. Se pide:

a) Calcula la probabilidad del suceso $A \cup B$. *(2´5 puntos)*
b) Calcula la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos. *(2´5 puntos)*
c) Calcula la probabilidad de B condicionado a A. *(2´5 puntos)*
d) ¿Son independientes los sucesos A y B? *(2´5 puntos)*

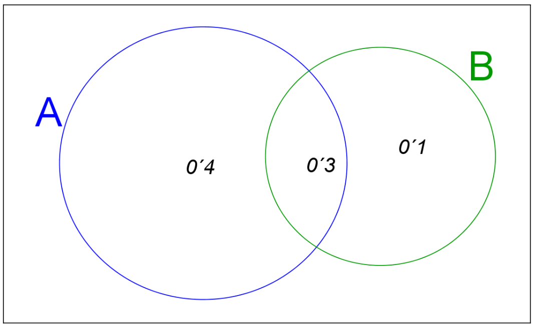
Solución:
Los datos del problema son:
$P(B) = 0{'}4, \quad P(A^c \cap B^c) = 0{'}2 \quad y \quad P(A \cap B) = 0{'}3$

Por las leyes de Morgan: $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$. *Por tanto,*
$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 0{'}2 \quad \rightarrow \quad 1 - 0{'}2 = P(A \cup B) \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = 0{'}8$

a) ¿P(A ∪ B)?
Según hemos calculado anteriormente, ***P(A ∪ B) = 0´8.***

b) Calcula la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos.
Falta por obtener P(A).
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); \quad 0{'}8 = P(A) + 0{'}4 - 0{'}3; \quad 0{'}8 = P(A) + 0{'}1; \quad P(A) = 0{'}7$

En un diagrama de Venn, los sucesos A y B quedarían representados:



Por tanto,
P(sólo se verifique uno de las sucesos) = 0´4 + 0´1 = 0´5

c) P(B/A)
$$P\left(B/A\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{'}3}{0{'}7} = \frac{3}{7}$$

Solución: P(B/A) = 3/7.

d) ¿A y B son independientes?
Los sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
De lo calculado anteriormente,
$P(A \cap B) = 0{'}3 \quad y \quad P(A) \cdot P(B) = 0{'}7 \cdot 0{'}4 = 0{'}28$
Entonces $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

En conclusión, ***A y B no son sucesos independientes***.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sabe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoría el 30% de las empresas merece una calificación de «Excelente», el 50% de las empresas merece la calificación de «Aceptable» y el 20% restante merece una calificación de «Deficiente». El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90% de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10% de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de «Aceptable».

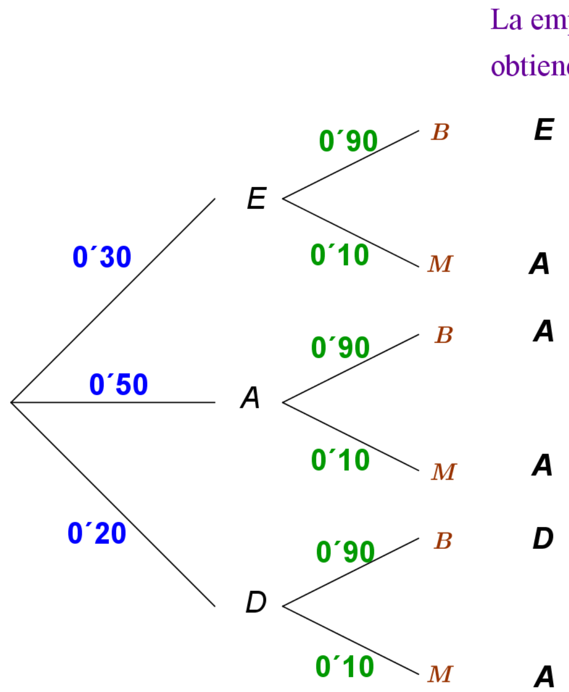
a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»? *(3 puntos)*

b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece? *(3 puntos)*

c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente? *(4 puntos)*

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:
E = la empresa merece calificación de Excelente
A = la empresa merece calificación de Aceptable
A = la empresa merece calificación de Deficiente
B = audita correctamente *M = no audita correctamente*

Los datos del problema los resumimos en el siguiente árbol:



a) *¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»?*
Es decir $P(D) = 0'20 \cdot 0'90 = 0'18$
El 18% de las empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»

b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece?
P(calificación real) = 0´30 . 0´90 + 0´50 . 0´90 + 0´50 . 0´10 + 0´20 . 0´90 = 0´95
El 95% de las empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece.

c) Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente?
La probabilidad pedida es $P\left(B/A\right)$

$$P\left(B/A\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0´50\cdot 0´90}{0´30\cdot 0´10+0´50\cdot 1+0´20\cdot 0´10}=\frac{0´45}{0´55}=\frac{9}{11}$$

La probabilidad pedida es $\frac{9}{11}$**.**

Problema 5. Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa? *(2 puntos)*

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias? *(2 puntos)*

c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería? *(3 puntos)*

d) ¿Son independientes los sucesos "ser mujer" y "ser especialista en ingeniería"? *(3 puntos)*

Solución:

Organizamos los datos del problema en la siguiente tabla.

	América		*Europa*		
	Mujeres	*Hombres*	*Mujeres*	*Hombres*	
Especialistas en ingeniería					
Especialistas en ciencias					
Totales					

De los datos del enunciado tenemos:

El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. Por tanto, de América 7 mujeres y 3 hombres; de Europa 9 mujeres y 11 hombres.

	América		*Europa*		
	Mujeres	*Hombres*	*Mujeres*	*Hombres*	
Especialistas en ingeniería	*7*	*3*	*9*	*11*	
Especialistas en ciencias					
Totales					

El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Por tanto, de América 12 mujeres y 9 hombres; de Europa 10 mujeres y 9 hombres.

	América		*Europa*		
	Mujeres	*Hombres*	*Mujeres*	*Hombres*	*Totales*
Especialistas en ingeniería	*7*	*3*	*9*	*11*	*30*
Especialistas en ciencias	*12*	*9*	*10*	*9*	*40*
Totales	*19*	*12*	*19*	*20*	
	31		*39*		*70*

Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

a) $P(\text{sea de Europa}) = \frac{39}{70}$

b) P(sea hombre y especialista en ciencias) $= \dfrac{9+9}{70} = \dfrac{18}{70} = \dfrac{9}{35}$

c) Se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería?

P(sea especialista en ciencias) $= \dfrac{12+10}{19+19} = \dfrac{22}{38} = \dfrac{11}{19}$

P(sea especialista en ingeniería) $= \dfrac{7+9}{19+19} = \dfrac{16}{38} = \dfrac{8}{19}$

Como $\dfrac{11}{19} > \dfrac{8}{19}$ ***es más probable que sea especialista en ciencias.***

d) Llamemos J *al suceso "ser mujer" y* K *al suceso "ser especialista en ingeniería". ¿Son* J *y* K *sucesos independientes?*

Debemos comprobar si $P(J \cap K) = P(J) \cdot P(K)$

$$\left.\begin{array}{l} P(J \cap K) = \dfrac{7+9}{70} = \dfrac{16}{70} \\ P(J) = \dfrac{19+19}{70} = \dfrac{38}{70} \\ P(K) = \dfrac{30}{70} \end{array}\right\} \quad ¿\frac{16}{70} = \frac{38}{70}\,\frac{30}{70}?; \quad ¿\frac{16}{70} = \frac{1140}{4900}?; \quad ¿16 \cdot 4900 = 70 \cdot 1140?; \quad ¿78400 = 79800? \quad No$$

Por tanto, los sucesos J y K no son independientes.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. En una población hay dos compañías, *A* y *B*, que proporcionan el servicio de internet. La compañía *A* proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía *B* ha contratado televisión de pago.

a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía *A*. *(3 puntos)*

b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía *B*? *(4 puntos)*

c) Sea A el suceso “ser cliente de la compañía *A*" y *C* el suceso “haber contratado la televisión de pago”. Calcula $P(A \cup C)$. *(3 puntos)*

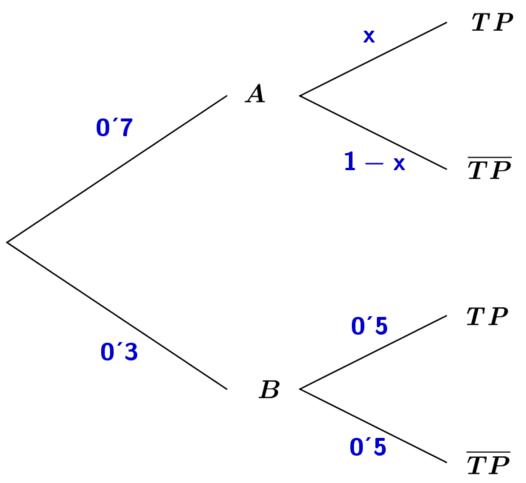
Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:

A = El hogar tiene contratado el servicio de internet con la compañía A
B = El hogar tiene contratado el servicio de internet con la compañía B
TP= El hogar tiene contratado el servicio de televisión de pago
$\overline{TP}$ *= El hogar no tiene contratado el servicio de televisión de pago*

De los datos del enunciado,
“La compañía A proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet”, entonces P(A) = 0´70 y por lo tanto P(B) = 1 – 0´70 = 0´30

“Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago”, luego entre los clientes de la compañía B $P(TP) = 0{\acute{}}5$ *y* $P(\overline{TP}) = 0{\acute{}}5$.
Sobre los clientes de la compañía A todavía no sabemos el porcentaje de los que contratan o no televisión de pago, luego en A $P(TP) = x$ *y* $P(\overline{TP}) = 1 - x$

El árbol del problema es:

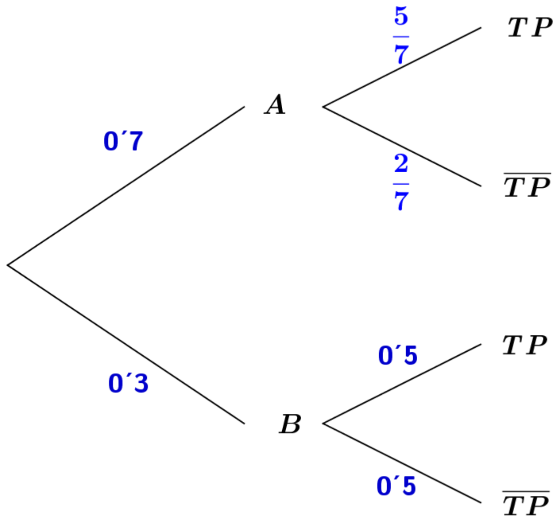


Calculemos el valor de x. Del enunciado sabemos que “el 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago” $\rightarrow$ $P(TP) = 0{\acute{}}65$

Por otro lado, del árbol: $P(TP) = 0{\acute{}}7\,x + 0{\acute{}}3 \cdot 0{\acute{}}5 = 0{\acute{}}7\,x + 0{\acute{}}15$

Luego, $0{\acute{}}7\,x + 0{\acute{}}15 = 0{\acute{}}65$; $0{\acute{}}7\,x = 0{\acute{}}65 - 0{\acute{}}15$; $0{\acute{}}7\,x = 0{\acute{}}50$; $x = \dfrac{0{\acute{}}5}{0{\acute{}}7} = \dfrac{5}{7}$ *y* $1 - x = 1 - \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{7}$

El árbol del problema queda:



a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A.

La probabilidad pedida es: $P\left(A \cap \overline{TP}\right)$

$$P\left(A \cap \overline{TP}\right) = 0´7 \cdot \frac{2}{7} = 0´2$$

Solución: el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A es del 20%.

b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B?

La probabilidad pedida es: $P\left(B / \overline{TP}\right)$

$$P\left(B / \overline{TP}\right) = \frac{P\left(B \cap \overline{TP}\right)}{P\left(\overline{TP}\right)} = \frac{0´3 \cdot 0´5}{0´7 \cdot \frac{2}{7} + 0´3 \cdot 0´5} = \frac{15}{35} \cong 0´4286$$

Solución: la probabilidad pedida es 0´4286.

c) Sea A el suceso "ser cliente de la compañía A" y C el suceso "haber contratado la televisión de pago". Calcula P(A ∪C)

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 0´7 \\ P(C) = 0´7 \cdot \frac{5}{7} + 0´3 \cdot 0´5 = 0´65 \\ P(A \cap C) = 0´7 \cdot \frac{5}{7} = 0´5 \end{array}\right\} \rightarrow P(A \cup C) = 0´7 + 0´65 - 0´5 = 0´85$$

Solución: P(A ∪C) = 0´85

Problema 5. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "el estudiante está en ESO" y "el estudiante ha escogido música". *(3 puntos)*

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? *(4 puntos)*

c) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"? (3 puntos)

Solución:

Construyamos la tabla de distribución de los estudiantes por nivel y extraescolar (cada alumno escoge sólo una extraescolar).

El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol.

El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música.

	Fútbol	*Baloncesto*	*Música*	*total*
ESO	***230***	***60***		***310***
Bachillerato			***8***	
total	***300***			***400***

Completamos la tabla con las restas y sumas correspondientes,

310 – 230 – 60 = 20; 300 – 230 = 70; 20 + 8 = 28; 400 – 300 – 28 = 72; 72 – 60 = 12; 400 – 310 = 90.

	Fútbol	*Baloncesto*	*Música*	*total*
ESO	***230***	***60***	***20***	***310***
Bachillerato	***70***	***12***	***8***	***90***
total	***300***	***72***	***28***	***400***

Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "el estudiante está en ESO" y "el estudiante ha escogido música"

Sucesos: ESO = "el estudiante está en ESO" y MUS = "el estudiante ha escogido música"

La probabilidad pedida es: $P(ESO \cup MUS)$

$$P(ESO \cup MUS) = P(ESO) + P(MUS) - P(ESO \cap MUS) = \frac{310}{400} + \frac{28}{400} - \frac{20}{400} = \frac{159}{200} = 0'795$$

La probabilidad pedida es 0´795.

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?

Suceso: DEP = "el estudiante ha seleccionado extraescolar deportiva"

La probabilidad pedida es: $P\left(ESO/_{DEP}\right)$

$$P\left(ESO/_{DEP}\right)=\frac{P(ESO\cap DEP)}{P(DEP)}=\frac{\frac{230+60}{400}}{\frac{230+60}{400}+\frac{70+12}{400}}=\frac{\frac{290}{400}}{\frac{372}{400}}=\frac{290}{372}=\frac{145}{186}\cong 0\acute{}7796$$

La probabilidad pedida es 0´7796.

c) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"?

Sucesos: BAC = "el estudiante está en Bachillerato" y NBAL = "el estudiante no ha escogido baloncesto"

Debemos comprobar si $P(BAC\cap NBAL)=P(BAC)\cdot P(NBAL)$

$$\left.\begin{array}{l} P(BAC\cap NBAL)=\frac{70+8}{400}=\frac{39}{200}=0\acute{}195 \\ P(BAC)=\frac{90}{400} \\ P(NBAL)=\frac{300+28}{400}=\frac{328}{400} \end{array}\right\} \quad ¿0\acute{}195=\frac{90}{400}\,\frac{328}{400}?;\quad ¿0\acute{}195=\frac{369}{2000}?;\quad ¿0\acute{}195=0\acute{}1845?\ \text{No}$$

Por tanto, los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto" no son independientes.

Problema 6. Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30% de las reses vacunadas por el método A, el 20% de las vacunadas por el método B y el 60% de las no vacunadas. Calcula:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. *(3 puntos)*

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. *(4 puntos)*

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos "la res no ha sido vacunada" y "la res tiene problemas respiratorios". *(3 puntos)*

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
A = res vacunada con el método A
B = res vacunada con el método B
N = res no vacunada
R = tiene problemas respiratorios $\overline{R}$ *= no tiene problemas respiratorios*

De los datos del problema,

"de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas":

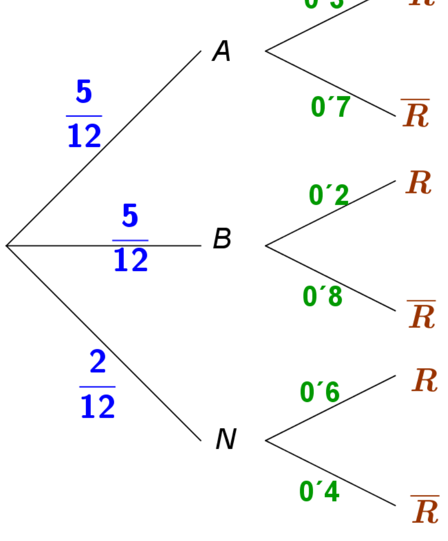
$P(A)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12};\qquad P(B)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12};\qquad \{600-250-250=100\}\quad P(N)=\frac{100}{600}=\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$

"tuvieron problemas respiratorios el 30% de las reses vacunadas por el método A" $\rightarrow$ *si la res está vacunada con A* $\rightarrow$ $P(R)=0'30$ *y* $P(\overline{R})=1-0'30=0'70$

"tuvieron problemas respiratorios el 20% de las reses vacunadas por el método B" $\rightarrow$ *si la res está vacunada con B* $\rightarrow$ $P(R)=0'20$ *y* $P(\overline{R})=1-0'20=0'80$

"tuvieron problemas respiratorios el 60% de las reses no vacunadas" $\rightarrow$ *si la res no está vacunada* $\rightarrow$ $P(R)=0'60$ *y* $P(\overline{R})=1-0'60=0'40$

El árbol del problema es:



a) Probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios.

$$P(R)=\frac{5}{12}0{\acute{}}3+\frac{5}{12}0{\acute{}}2+\frac{2}{12}0{\acute{}}6=\frac{37}{120}\cong 0{\acute{}}3083$$

Solución: la probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios es 0´3083.

b) Probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B.

$$P\left(B/\overline{R}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{R}\right)}{P\left(\overline{R}\right)}=\frac{P\left(B\cap\overline{R}\right)}{1-P(R)}=\frac{\frac{5}{12}0{\acute{}}8}{1-\frac{37}{120}}=\frac{40}{83}\cong 0{\acute{}}4819$$

Solución: la probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B es 0´4819.

b) La probabilidad de la intersección de los sucesos "la res no ha sido vacunada" y "la res tiene problemas respiratorios"

$$P(N\cap R)=\frac{2}{12}0{\acute{}}6=0{\acute{}}1$$

Solución: la probabilidad de la intersección de los sucesos "la res no ha sido vacunada" y "la res tiene problemas respiratorios" es 0´1.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. En un aparato de radio hay presintonizadas tres emisoras A, B y C que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la B y la C lo hacen la mitad del tiempo de emisión. Al encender la radio se sintoniza indistintamente cualquiera de las tres emisoras.

a) Obtener de forma razonada la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música.
b) Si al poner la radio no escuchamos música, calcular de forma razonada cuál es la probabilidad de que esté sintonizada la emisora B.

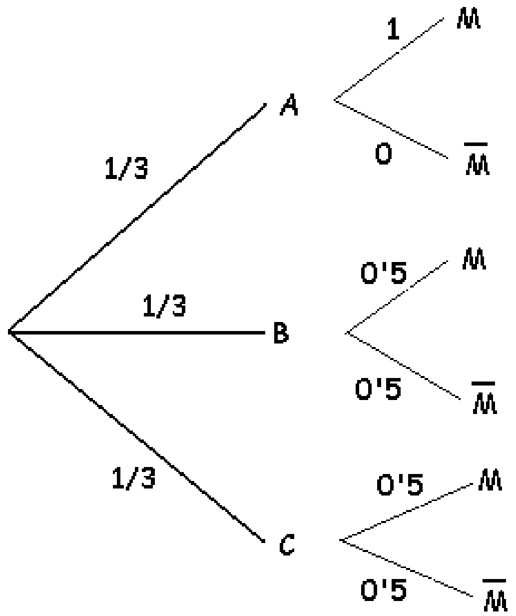
Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

A = sintonizar la emisora A   *B = sintonizar la emisora B*   *C = sintonizar la emisora C*

M = escuchar música

El árbol del problema es



a)

$$P(M)=P\left(M/_A\right)P(A)+P\left(M/_B\right)P(B)+P\left(M/_C\right)P(C)=1\,\frac{1}{3}+0'5\,\frac{1}{3}+0'5\,\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0'6667$$

b)

$$P\left(B/_{\overline{M}}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{M}\right)}{P\left(\overline{M}\right)}=\frac{P\left(\overline{M}/_B\right)P(B)}{P\left(\overline{M}/_A\right)P(A)+P\left(\overline{M}/_B\right)P(B)+P\left(\overline{M}/_C\right)P(C)}=\frac{0'5\,\frac{1}{3}}{0\,\frac{1}{3}+0'5\,\frac{1}{3}+0'5\,\frac{1}{3}}=\frac{0'5\,\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=0'5$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Un alumno realiza un examen tipo test que consta de 4 preguntas. Cada una de las preguntas tiene tres posibles respuestas, de las que sólo una es correcta. Si un alumno aprueba contestando correctamente dos o más preguntas, obtener de forma razonada la probabilidad de que apruebe si escoge las respuestas de cada una de las preguntas completamente al azar.

Solución:

Cada pregunta tiene tres posibles respuestas (sólo una es correcta), el alumno contesta al azar luego p(acertar una pregunta)=1/3.

Como el test consiste en contestar a 4 preguntas del tipo anterior, llamando

X = número de respuestas correctas

$$X = B\left(4\,,\frac{1}{3}\right)$$

Consideramos el suceso A = el alumno aprueba

$$p(A) = p(X \geq 2) = 1 - \{p(x=0) + p(X=1)\} = 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - 1\,.\,1\,\frac{16}{81} - 4\,\frac{1}{3}\,\frac{8}{27} =$$

$$= 1 - \frac{16}{81} - \frac{32}{81} = \frac{81-16-32}{81} = \frac{33}{81} = 0'4074$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. En una pequeña ciudad hay dos bibliotecas. En la primera, el 50% de los libros son novelas mientras que en la segunda lo son el 70%. Un lector elige al azar una biblioteca siguiendo un método que implica que la probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda. Una vez llega a la biblioteca seleccionada, elige al azar un libro, novela o no.

a. Calcular razonadamente la probabilidad de que elija una novela.
b. Sabiendo que el libro seleccionado es una novela, obtener razonadamente la probabilidad de que haya acudido a la primera biblioteca.

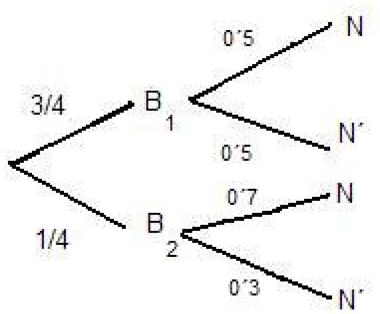
Solución:

Nombrando los sucesos de la siguiente forma: B_1 *= el lector acude a la primera biblioteca.*
B_2 *= el lector acude a la segunda biblioteca.*
N *= el lector elige una novela.*
N' *= el lector no elige una novela.*

Calculemos previamente $p(B_1)$ *y* $p(B_2)$*. Sabemos que* $p(B_1) = 3\,p(B_2)$ *y que en la ciudad sólo hay estas dos bibliotecas, es decir,* B_1 *y* B_2 *son incompatibles y su unión es E,*

$p(B_1) + p(B_2) = 1$
$3\,p(B_2) + p(B_2) = 1$
$4\,p(B_2) = 1$, $p(B_2) = 1/4$ y $p(B_1) = 3/4$

El árbol del problema será



$$a)\, p(N) = p(B_1)\,p\left(N/B_1\right) + p(B_2)\,p\left(N/B_2\right) = \frac{3}{4}\,0'5 + \frac{1}{4}\,0'7 = 0'55$$

$$b)\, p\left(B_1/N\right) = \frac{p(B_1 \cap N)}{p(N)} = \frac{p(B_1)\,p\left(N/B_1\right)}{p(N)} = \frac{\frac{3}{4}\,0'5}{0'55} = 0'6818$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. El 75 % de los alumnos acude a clase en algún tipo de transporte y el resto andando. Llega puntual a clase el 60 % de los que utilizan transporte y el 90 % de los que acuden andando. Calcular de forma razonada:

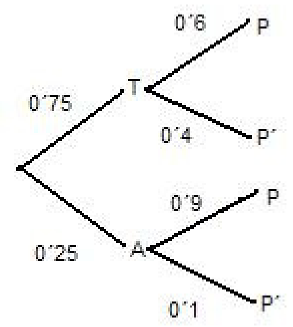
a. si se elige a azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, la probabilidad de que haya acudido andando, y
b. si se elige un alumno al azar, la probabilidad de que no haya llegado puntal.

Solución:

Nombrando los sucesos de la siguiente forma:

T = el alumno acude a clase en transporte.
A = el alumno acude a clase andando.
P = el alumno llega puntual.
P´= el alumno no llega puntual.

El árbol del problema será



$$a) \quad p\left(A/_{P}\right)=\frac{p(A\cap P)}{p(P)}=\frac{p(A)\ p\left(P/_{A}\right)}{p(T)\ p\left(P/_{T}\right)+p(A)\ p\left(P/_{A}\right)}=\frac{0´25\ .\ 0´9}{0´75\ 0´6+0´25\ .\ 0´9}=0´3333$$

$$b) \quad p(P´)=p(T)\ p\left(P'/_{T}\right)+p(A)\ p\left(P'/_{A}\right)=0´75\ .\ 0´4+0´25\ .\ 0´1=0´325$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. El 60% de las personas que visitaron un museo durante el mes de mayo eran españoles. De éstos, el 40% eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30%. Calcular:

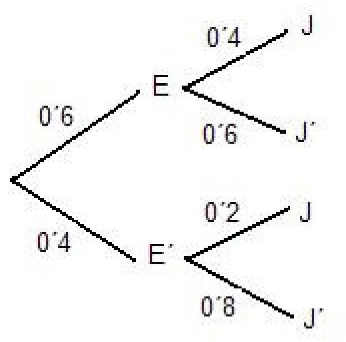
a) La probabilidad de que un visitante elegido al azar tenga menos de 20 años.
b) Si se escoge un visitante al azar, la probabilidad de que no sea español y tenga 20 años o más.

Solución:

Considerando los sucesos: *E = ser español* *J = ser menor de 20 años*

E´ = no ser español *J´= tener 20 años o más*

El árbol del problema sería,



a) $P(J) = P(E)\,P(J/E) + P(E´)\,P(J/E´) = 0´6 \,.\, 0´4 + 0´4 \,.\, 0´2 = 0´24 + 0´08 = 0´32$

b) $P(E´ \cap J´) = P(E´)\,P(J´/E´) = 0´4 \,.\, 0´8 = 0´32$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Las máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos de 1% y del 10%, respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas fabricadas en una hora y elegimos una pieza al azar. Calcular:

a) La probabilidad de que sea una pieza no defectuosa fabricada en la máquina B.

b) La probabilidad de que esté fabricada en la máquina A, si sabemos que es defectuosa.

Solución:

Considerando los sucesos: *A = pieza fabricada por la máquina A*

B = pieza fabricada por la máquina B

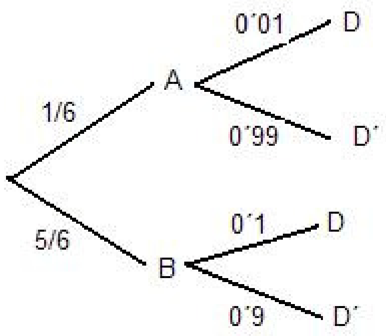
D = pieza defectuosa

D´= pieza no defectuosa

sus probabilidades son:

$$P(A)=\frac{50}{300}=\frac{1}{6} \qquad P(B)=\frac{250}{300}=\frac{5}{6} \qquad P(D/A)=0{'}01 \qquad P(D/B)=0{'}1$$

El árbol del problema sería,



$$a)\ P(D'\cap B)=\frac{5}{6}\,0{'}9=0{'}75$$

$$b)\quad P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{6}\,0{'}01}{\frac{1}{6}\,0{'}01+\frac{5}{6}\,0{'}1}=\frac{\frac{0{'}01}{6}}{\frac{0{'}01}{6}+\frac{0{'}5}{6}}=\frac{\frac{0{'}01}{6}}{\frac{0{'}51}{6}}=\frac{0{'}01}{0{'}51}=0{'}0196078$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Sean A y B dos sucesos con P(A) = 0,5; P(B) = 0,3 y P(A∩B) = 0,1. Calcular las probabilidades siguientes: P(A∪B), P(A/B), P(A/A∩B) y P(A/A∪B)

Solución:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'5 + 0'3 - 0'1 = 0'7$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0'1}{0'3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A/A \cap B) = \frac{P(A \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$

$$(A \cap B) \subset A \quad \rightarrow \quad A \cap (A \cap B) = A \cap B$$

$$P(A/A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0'5}{0'7} = \frac{5}{7}$$

$$A \subset (A \cup B) \quad \rightarrow \quad A \cap (A \cup B) = A$$

EJERCICIO B

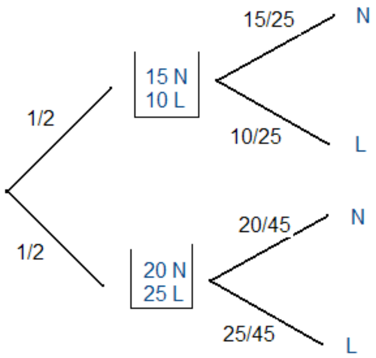
PROBLEMA 4. Tenemos dos bolsas de caramelos, la primera contiene 15 caramelos de naranja y 10 de limón y la segunda 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo. Calcular:

a) La probabilidad de que el caramelo sea de naranja.
b) Si el caramelo elegido es de limón, ¿cuál es la probabilidad de que lo hayamos extraído de la segunda bolsa?

Solución:

Llamando: B_1 *la primera bolsa*
B_2 *la segunda bolsa*
N caramelo de naranja
L caramelo de limón

El árbol del problema es,



a) $P(N) = P(B_1)\, P(N/B_1) + P(B_2)\, P(N/B_2) = \frac{1}{2}\frac{15}{25} + \frac{1}{2}\frac{20}{45} = \frac{3}{10} + \frac{2}{9} = \frac{27+20}{90} = \frac{47}{90}$

b)

$$P(B_2 / L) = \frac{P(B_2 \cap L)}{P(L)} = \frac{P(B_2 \cap L)}{P(B_1)\ P(L/B_1) + P(B_2)\ P(L/B_2)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{25}{45}}{\frac{1}{2}\frac{10}{25} + \frac{1}{2}\frac{25}{45}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{2}{5} + \frac{5}{9}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{18+25}{45}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{43}{45}} =$$

$$= \frac{45\,.\,5}{43\,.\,9} = \frac{5\,.\,5}{43} = \frac{25}{43}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Sean A y B dos sucesos con $P(A \cup B) = 0{,}9$; $P(\overline{A}) = 0{,}4$, donde $\overline{A}$ denota el suceso contrario o complementario del suceso A, y $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calcular las probabilidades siguientes: P(B), P(A/B), $P(A \cap \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Solución:

Cálculo previo:

$P(\overline{A}) = 0{,}4$. *Como* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $0{,}4 = 1 - P(A)$; $P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Cálculo de P(B),

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}9 = 0{,}6 + P(B) - 0{,}2$; $0{,}9 = 0{,}4 + P(B)$; $\mathbf{P(B) = 0{,}5}$

Cálculo de P(A/B),

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0'2}{0'5} = 0'4$$

Cálculo de $P(A \cap \overline{B})$*),*

Llamando Ω *al suceso seguro, al que ocurre siempre, y* $\varnothing$ *al suceso imposible, se cumplirá*

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap (B \cup \overline{B})\right) = P\left((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right) =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) - P\left((A \cap B) \cap (A \cap \overline{B})\right) =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) - P(\varnothing) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

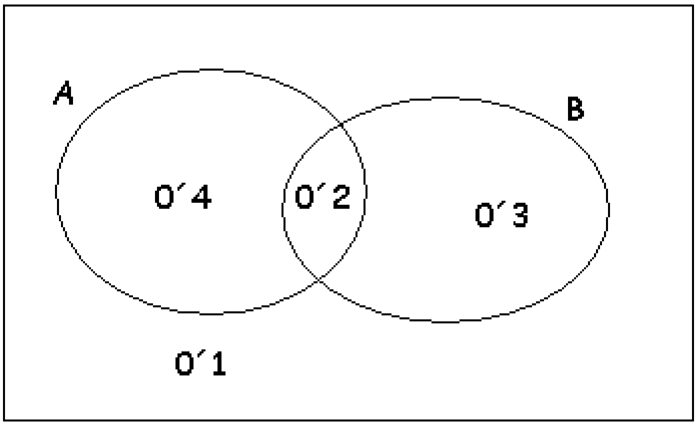
Luego $0'6 = 0'2 + P(A \cap \overline{B}) \quad \rightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = 0'4$

Cálculo de $P(\overline{A} \cup \overline{B})$*,*

Por las Leyes de Morgan sabemos que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

Luego $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - 0'2 = 0'8$

Representando los sucesos en un diagrama de Venn podemos comprobar la validez de los resultados obtenidos,



EJERCICIO B

PROBLEMA 4. El volumen de producción diario en tres fábricas diferentes de una misma empresa es de 1.000 unidades en la primera fábrica, 1.500 unidades en la segunda y 2.500 en la tercera. Por ciertos desajustes, algunas unidades salen defectuosas. En concreto, lo son el 1% de las unidades producidas en las dos primeras fábricas y el 3% de las producidas en la tercera.

a) ¿Qué proporción de unidades fabricadas son correctas?
b) Si se tiene una unidad defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la tercera fábrica?

Solución:
a)
Expresando los datos del problema en una tabla,

	Producción	*unidades defectuosas*
1ª fábrica	*1000 unidades*	*1%*
2ª fábrica	*1500 “*	*1%*
3ª fábrica	*2500 “*	*3%*
Total	*5000 unidades*	

La proporción de unidades correctas la obtendremos mediante el siguiente cálculo

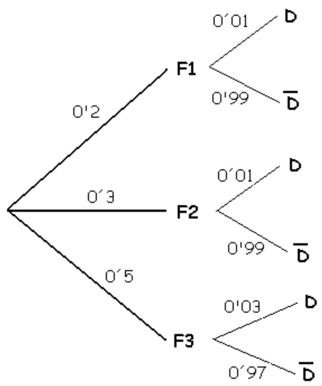
$$\frac{1000\,.\,0'99+1500\,.\,0'99+2500\,.\,0'97}{5000}=\frac{990+1485+2425}{5000}=\frac{4900}{5000}=0'98$$

La proporción de unidades correctas es del 98%

b)
Consideramos los siguientes sucesos
D = unidad defectuosa
F1 = unidad de la fábrica 1
F2 = unidad de la fábrica 2
F3 = unidad de la fábrica 3
De los datos del problema podemos obtener las siguientes probabilidades,

$$P(F1)=\frac{1000}{5000}=0'2 \qquad P(F2)=\frac{1500}{5000}=0'3 \qquad P(F3)=\frac{2500}{5000}=0'5$$

El árbol de sucesos es



La probabilidad que nos preguntan es

$$P\left(F3/_{D}\right)=\frac{P(F3\cap D)}{P(D)}$$

$$P(F3\cap D)=0'5\,.\,0'03=0'015$$

$$P(D)=P\left(D/_{F1}\right)P(F1)+P\left(D/_{F2}\right)P(F2)+P\left(D/_{F3}\right)P(F3)=$$

$$=0`01\,.\,0'2+0`01\,.\,0'3+0`03\,.\,0'5=0'002+0'003+0'015=0'02$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Un test para detectar si una persona es portadora del virus de la gripe aviar da positivos en el 96% de los pacientes que la padecen y da negativo en el 94% de los pacientes que no la padecen. Si una de cada ciento cuarenta y cinco personas es portadora del virus y una persona se somete al test, calcula:

a) La probabilidad de que el test dé positivo.

b) La probabilidad de que sea portadora del virus, si el resultado del test es positivo.

c) La probabilidad de que el test sea negativo y no sea portadora del virus.

Solución:

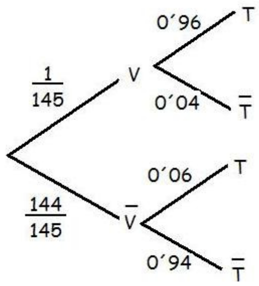
Utilizamos los sucesos, V = la persona porta el virus y T = el test da positivo.

De los datos del problema sabemos que,

$$p(V)=\frac{1}{145} \quad luego \quad p\left(\overline{V}\right)=\frac{144}{145}$$

$$p\left(T/V\right)=0'96 \qquad p\left(\overline{T}/\overline{V}\right)=0'94$$

Por lo tanto el árbol del problema será,



$$a) \quad p(T)=\frac{1}{145}\,0'96+\frac{144}{145}\,0'06=0'06620...\approx 0'066$$

$$b) \quad p\left(V/T\right)=\frac{p\left(V\cap T\right)}{p(T)}=\frac{\frac{1}{145}\,0'96}{0'066}=0'1$$

$$c) \quad p\left(\overline{V}\cap\overline{T}\right)=\frac{144}{145}\,0'94=0'93351...\approx 0'934$$

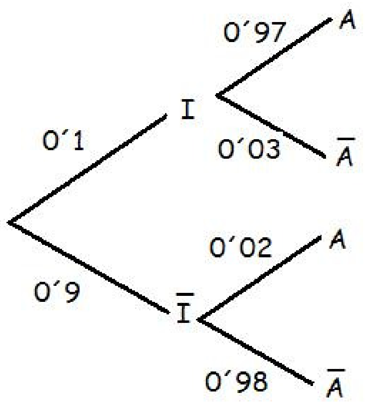
EJERCICIO B

PROBLEMA 4. La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es 0´1. La probabilidad de que suene ésta si se ha producido algún incidente es 0´97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0´02.

a) Calcula la probabilidad de que no suene la alarma.

b) En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Solución:
Utilizamos los sucesos: I = hay incidente y A = suena la alarma
El árbol del problema será,



a) Probabilidad de que no suene la alarma

$$p\left(\overline{A}\right) = 0'1\,.\,0'03 + 0'9\,.\,0'98 = 0'885$$

b) En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

$$p\left(\overline{I}/A\right) = \frac{p\left(\overline{I}\cap A\right)}{p(A)} = \frac{0'9\,.\,0'02}{0'1\,.\,0'97 + 0'9\,.\,0'02} = \frac{0'018}{0'115} = 015652... \approx 0'157$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Dados los sucesos A y B, sabemos que $p(A\cap B)=0{,}1$, $p(A\cup B)=0{,}7$ y $p(A/B)=0{,}2$

a) Calcula p(A) y p(B)

b) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

c) Calcula $p(\overline{A}\cup B)$, donde $\overline{A}$ representa el suceso complementario de A.

Solución:

a) Para encontrar los valores de p(A) y p(B) planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B) \\ p\left(A/B\right)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} \end{cases}$$

Sustituyendo los datos conocidos

$$\begin{cases} 0{,}7=p(A)+p(B)-0{,}1 \\ 0{,}2=\dfrac{0{,}1}{p(B)} \end{cases}$$

$$de\ 2^{a}\ ecuación \quad \rightarrow \quad p(B)=\frac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5$$

sustituyendo en 1ª, 0,7 = p(A) + 0,5 – 0,1; 0,7 = p(A) + 0,4; p(A) = 0,7 – 0,4 = 0,3

Por lo tanto, p(A) = 0,3 y p(B) = 0,5

b) A y B son independientes cuando $p(A\cap B)=p(A)\ p(B)$

Comprobación, ¿ 0,1 = 0,3 . 0,5?

¿ 0,1 = 0,15? No.

Por lo que A y B no son sucesos independientes.

c)

$$p(\overline{A}\cup B)=p(\overline{A})+p(B)-p(\overline{A}\cap B)$$

$$p(\overline{A})=1-p(A)=1-0{,}3=0{,}7$$

p(B) = 0,5

Veamos el proceso para calcular $p(\overline{A}\cap B)$

Llamaremos E al suceso seguro, se cumple que

$$B=E\cap B=(A\cup\overline{A})\cap B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$$

$$Como \quad (A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B)=A\cap\overline{A}\cap B=\varnothing$$

$$p(B)=p((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)-p((A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B))=$$

$$=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)-p(\varnothing)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)$$

$$luego \quad p(\overline{A}\cap B)=p(B)-p(A\cap B)=0{,}5-0{,}1=0{,}4$$

Finalmente,

$$p(\overline{A}\cup B)=p(\overline{A})+p(B)-p(\overline{A}\cap B)=0{,}7+0{,}5-0{,}4=0{,}8$$

EJERCICIO B

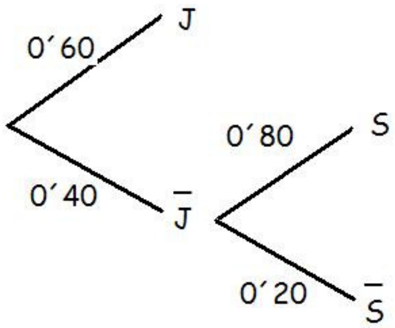
PROBLEMA 4. La El 60% de los alumnos de cierta asignatura aprueba en junio. El 80% de los presentado en septiembre también aprueba la asignatura. Sabiendo que los alumnos que se presentaron en septiembre son todos los que no aprobaron en junio, determina:

a) La probabilidad de que un alumno seleccionado al azar haya aprobado la asignatura.
b) Si sabemos que un estudiante ha aprobado la asignatura, la probabilidad de que haya sido en junio.

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:
J = aprobar en junio
S = aprobar en septiembre
A = aprobar

Los datos del enunciado podemos resumirlos en el siguiente árbol,



a) Aprueban la asignatura los que aprueban en junio o septiembre, por lo tanto
$p(A) = 0´60 + 0´40 \,.\, 0´80 = 0´60 + 0´32 = 0´92$

b)

$$p\left(J/A\right) = \frac{p(J \cap A)}{p(A)} = \frac{0´60}{0´92} = 0´65$$

BLOQUE C

PROBLEMA C1. Al 20% de los alumnos de 2º de Bachillerato les gusta un grupo musical A, mientras que al 80% restante no le gusta este grupo. En cambio otro grupo musical B gusta a la mitad y no a la otra mitad. Hay un 30% de alumnos de 2º de Bachillerato al que no gusta ninguno de los dos grupos. Si se elige un estudiante de 2º Bachillerato al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le gusten los dos grupos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los grupos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el grupo B y no el grupo A?

Solución:
Considerando los siguientes sucesos,

A = al alumno de 2º de Bachillerato le gusta el grupo musical A
B = al alumno de 2º de Bachillerato le gusta el grupo musical B
*representando por $\bar{A}$ = al alumno de 2º de Bachillerato **no** le gusta el grupo musical A, y similarmente para B*

De los datos del problema sabemos:
"Al 20% de los alumnos de 2º de Bachillerato les gusta el grupo musical A" $\rightarrow$ $P(A) = 0'2$
"Al 80% no les gusta el grupo A" $\rightarrow$ $P(\bar{A}) = 0'8$
"El grupo musical B gusta a la mitad" $\rightarrow$ $P(B) = 0'5$
"El grupo musical B no gusta a la otra mitad" $\rightarrow$ $P(\overline{B}) = 0'5$
"Hay un 30% de alumnos al que no gusta ninguno de los dos grupos" $\rightarrow$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0'3$

Por las leyes de Morgan,

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, *por lo tanto,* $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0'3$

Por sucesos complementarios, $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0'3 = 0'7$

a) Probabilidad de que le gusten los dos grupos.

Debemos calcular $P(A \cap B)$

Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sustituyendo los datos conocidos, $0'7 = 0'2 + 0'5 - P(A \cap B)$ $\rightarrow$ $0'7 = 0'7 - P(A \cap B)$ $\rightarrow$ $P(A \cap B) = 0$

b) Probabilidad de que le guste alguno de los dos grupos.

Debemos calcular $P(A \cup B)$

Anteriormente ya hemos obtenido que $P(A \cup B) = 0'7$

c) Probabilidad de que le guste el grupo B y no el grupo A.

Debemos calcular $P(B \cap \bar{A})$

Llamando E al suceso seguro, $B = B \cap E = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, *por lo que*

$$P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) - P((B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}))$$

como $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = B \cap A \cap \overline{A} = B \cap \varnothing = \varnothing$ *entonces* $P((B \cap A) \cap (B \cap \overline{A})) = P(\varnothing) = 0$ *por lo que*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

sustituyendo los valores conocidos, $0'5 = 0 + P(B \cap \overline{A})$ $\rightarrow$ $P(B \cap \overline{A}) = 0'5$

BLOQUE C

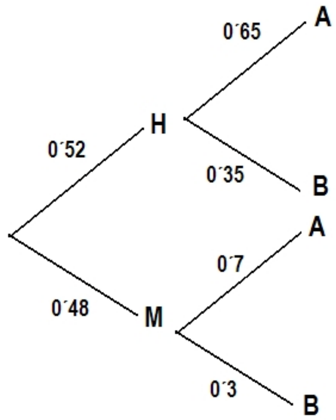
PROBLEMA C2. El 52% de los habitantes en edad de votar de cierto municipio son hombres. Los resultados de un sondeo electoral determinan que el 70% de las mujeres opina que va a ganar el candidato A, mientras que el 35% de los hombres cree que ganará el candidato B. Si todos los habitantes han optado por un candidato, contesta las siguientes preguntas:

a) Si hemos preguntado a una persona que cree que ganará B, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar sea mujer o crea que va a ganar el candidato A?

Solución:
Si utilizamos los siguientes sucesos:

H = ser hombre en edad de votar
M = ser mujer en edad de votar
A = cree que ganará el candidato A
B = cree que ganará el candidato B

Los datos del problema podemos resumirlo en el siguiente árbol,



a)

$$P\left(M/_B\right)=\frac{P(M\cap B)}{P(B)}=\frac{0´48\,.\,0´3}{0´52\,.\,0´35+0´48\,.\,0´3}=\frac{0´144}{0´326}=0´4417\approx 0´44$$

b)

$$P(M\cup A)=P(M)+P(A)-P(M\cap A)=$$

P(M) = 0´48
P(A) = P(H∩A) + P(M∩A) = 0´52 . 0´65 + 0´48 . 0´7 = 0´674
P(M∩A) = 0´48 . 0´7 = 0´336

= 0´48 + 0´674 – 0´336 = 0´818 ≈ 0´82

OPCIÓN A

PROBLEMA 3. Se sabe que p(B/A) = 0,9, p(A/B) = 0,2 y p(A) = 0,1.

a) Calcula p(A∩B) y p(B)

b) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

c) Calcula $p\left(A \cup \overline{B}\right)$, donde $\overline{B}$ representa el suceso complementario de B.

Solución:

De los datos del problema, conocemos:

(1) $p\left(B/A\right) = 0'9 \quad \rightarrow \quad$ (2) $\dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} = 0'9$

(3) $p\left(A/B\right) = 0'2 \quad \rightarrow \quad$ (4) $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = 0'9$

(5) $p(A) = 0{,}1$

a) Calculemos p(A∩B) y p(B)

A partir de las expresiones (2) y (5) $\quad \dfrac{p(A \cap B)}{0'1} = 0'9 \quad \rightarrow \quad p(A \cap B) = 0'09 \; (6)$

A partir de las expresiones (4) y (6) $\quad \dfrac{0'09}{p(B)} = 0'2 \quad \rightarrow \quad p(B) = \dfrac{0'09}{0'2} = 0'45$

b) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse: p(A∩B) = p(A) . p(B)

Sustituyendo los valores de las probabilidades: 0\`09 = 0´1 . 0´45 = 0´045 falso

Por lo tanto A y B no son independientes.

c)

$$p\left(A \cup \overline{B}\right) = p(A) + p\left(\overline{B}\right) - p\left(A \cap \overline{B}\right)$$

Calculemos las tres probabilidades de la parte derecha.

Ya conocemos el valor de p(A) = 0´1

$$p\left(\overline{B}\right) = 1 - p(B) = 1 - 0'45 = 0'55$$

La última probabilidad la obtenemos de la siguiente forma: llamando E al suceso seguro, sabemos que

$E = B \cup \overline{B}$ *luego,* $A = A \cap E = A \cap \left(B \cup \overline{B}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$ *por lo que*

$$p(A) = p\left[(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right] = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) - p\left[(A \cap B) \cap \left(A \cap \overline{B}\right)\right] =$$

como $(A \cap B) \cap \left(A \cap \overline{B}\right) = A \cap B \cap \overline{B} = A \cap \varnothing = \varnothing$

$$= p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) - p(\varnothing) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) - 0 = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$$

Luego $\quad p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$

Sustituyendo las probabilidades conocidas queda:

$$0'1 = 0'09 + p\left(A \cap \overline{B}\right) \quad \rightarrow \quad p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0'1 - 0'09 = 0'01$$

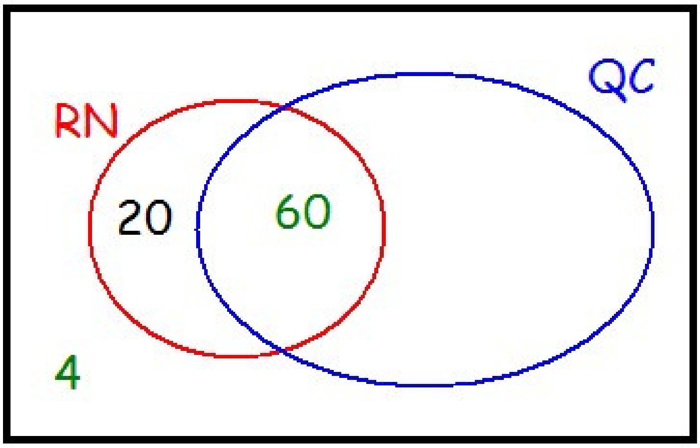
Finalmente $\quad p\left(A \cup \overline{B}\right) = 0'1 + 0'55 - 0'01 = 0'64$

OPCIÓN B

PROBLEMA 3. Al 80% de los miembros de una sociedad gastronómica les gusta el vino Raïm Negre. Entre estos, al 75% le gusta el queso de cabra. Además, a un 4% de los miembros de esta sociedad no le gusta el vino Raïm Negre ni el queso de cabra.

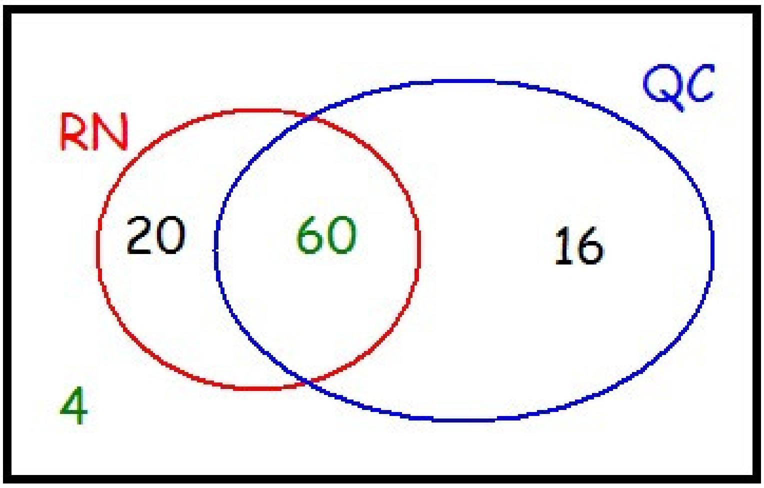
a) ¿A qué porcentaje le gusta tanto el Raïm Negre como el queso de cabra?
b) ¿A qué porcentaje no le gusta el queso de cabra?
c) Si a un miembro de la sociedad le gusta el queso de cabra, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el vino Raïm Negre?
d) ¿A qué porcentaje de gusta el vino Raïm Negre entre aquellos a los que no les gusta el queso de cabra?

Solución:
Vamos a utilizar la siguiente notación:
RN = miembros de la sociedad a los que les gusta el Raïm Negre
QC = “ “ “ “ “ “ “ “ “ “ queso de cabra
De los datos del problema sabemos que un 80% son RN y un 4% no son ni RN ni QC.
Además, el 75% de los RN son, también, QC. Es decir RN y QC son el 75% del 80%, es decir, 0´75 . 0´80 = 0´60, el 60%.
Luego los RN que no son QC serán, 80% - 60%, el 20%.
Gráficamente sería:



Deduzcamos el resto de datos necesarios: sólo son QC   100 – 60 – 20 – 4 = 16.

El diagrama completo será:



Contestamos los distintos apartados considerando el diagrama anterior.

a) ¿A qué porcentaje le gusta tanto el Raïm Negre como el queso de cabra? Al 60%

b) ¿A qué porcentaje no le gusta el queso de cabra? Al 24% (20 + 4)

c) Si a un miembro de la sociedad le gusta el queso de cabra, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el vino Raïm Negre?

$$P\left(RN/QC\right) = \frac{P(RN \cap QC)}{P(QC)} = \frac{60/100}{(60+16)/100} = \frac{60}{76} = 0'7895$$

d) ¿A qué porcentaje de gusta el vino Raïm Negre entre aquellos a los que no les gusta el queso de cabra?

$$A \quad \frac{20}{24} = 0'8333 \quad \rightarrow \quad al \quad 83'33\%$$

PROBLEMA 3. En un instituto se estudian tres modalidades de Bachillerato: Tecnología, Humanidades y Artes. El curso pasado el 25% de los alumnos estudió Tecnología, el 60% Humanidades y el 15% Artes. En la convocatoria de junio aprobó todas las asignaturas el 70% de los estudiantes de Tecnología, el 80% de los de Humanidades y el 90% de los de Artes. Si se elige un estudiante al azar del curso pasado de ese instituto:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado todas las asignatura en la convocatoria de junio?

b) Si nos dice que ha aprobado todas las asignaturas en la convocatoria de junio, ¿cuál es la probabilidad de que haya estudiado Humanidades?

Solución:

Usando los siguientes sucesos,

T = alumno que estudia Tecnología

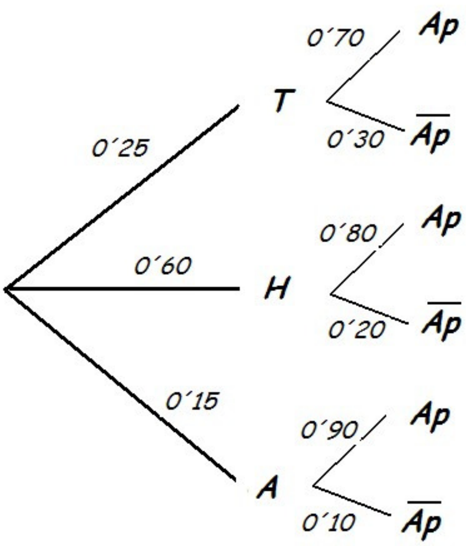
H = alumno que estudia Humanidades

A = alumno que estudia Artes

Ap = aprobar todas las asignaturas

$\overline{Ap}$ *= no aprobar todas las asignaturas*

El árbol del problema sería,



a) *Probabilidad de que no haya aprobado todas las asignatura en la convocatoria de junio, preguntan por* $P(\overline{Ap})$,

$$P(\overline{Ap}) = 0'25\ .\ 0'30 + 0'60\ .\ 0'20 + 0'15\ .\ 0'10 = 0'21$$

b) *Preguntan por* $P\left(H/Ap\right)$,

$$P\left(H/Ap\right) = \frac{P(H \cap Ap)}{P(Ap)} = \frac{0'60\ .\ 0'8}{1 - P(\overline{Ap})} = \frac{0'48}{1 - 0'21} = \frac{0'48}{0'79} = 0'6076$$

PROBLEMA 3. Se realiza un análisis de mercado para estudiar la aceptación de las revistas A y B. Este refleja que del total de entrevistados que conocen ambas revistas, al 75% les gusta la revista A, al 30% no les gusta la revista B y si les gusta la revista A y al 15% no les gusta ninguna de las dos. Suponiendo que estos datos son representativos de toda la población y que se ha elegido al azar un individuo que conoce ambas revistas, se pide

a) La probabilidad de que le gusten las dos revistas.
b) La probabilidad de que le guste la revista B.
c) Si sabemos que le gusta la revista A, la probabilidad de que no le guste la revista B.

Solución:
Utilizamos os siguientes sucesos: A = le gusta la revista A y B = le gusta la revista B
Vamos a resolver el problema de dos formas distintas: por probabilidades y por conjuntos.

Resolución por probabilidades.
De los datos del problema obtenemos:
"al 75% les gusta la revista A" $\rightarrow P(A) = 0'75$
"al 30% no les gusta la revista B y si la A" $\rightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0'3$
"al 15% no les gusta ninguna" $\rightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0'15$

a) Calcular $P(A \cap B)$
Como conocemos $P(A)$ *y* $P\left(A \cap \overline{B}\right)$*, procedemos como sigue:*
Siendo E el suceso seguro, $A = A \cap E = A \cap \left(B \cup \overline{B}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$
Como $(A \cap B) \cap \left(A \cap \overline{B}\right) = A \cap B \cap \overline{B} = A \cap \varnothing = \varnothing$ *entonces* $P(A) = P\left((A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$
Sustituyendo las probabilidades conocidas: $0'75 = P(A \cap B) + 0'3 \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = 0'75 - 0'3 = 0'45$
Solución: $P(A \cap B) = 0'45$

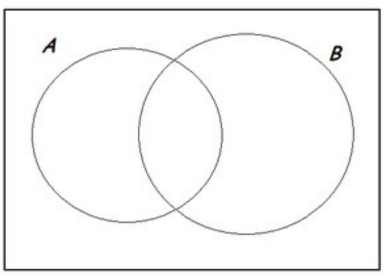
b) Calcular $P(B)$.
Como $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0'15 \rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0'15 \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = 1 - 0'15 = 0'85$
Pero $P(A \cup B) = P(A =) + P(B) - P(A \cap B)$ *sustituyendo los valores conocidos:*
$0'85 = 0'75 + P(B) - 0'45$
$0'85 = 0'3 + P(B)$
$P(B) = 0'85 - 0'3 = 0'55$
Solución: $P(B) = 0'55$

c) Calcular $P\left(\overline{B}/A\right)$

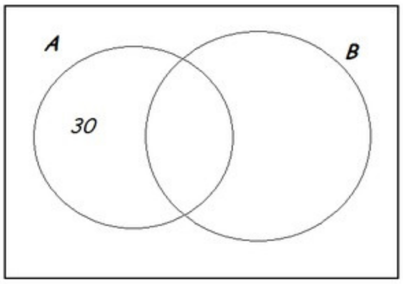
$$P\left(\overline{B}/A\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap A\right)}{P(A)} = \frac{0'3}{0'75} = 0'4$$

Solución: $P\left(\overline{B}/A\right) = 0'4$

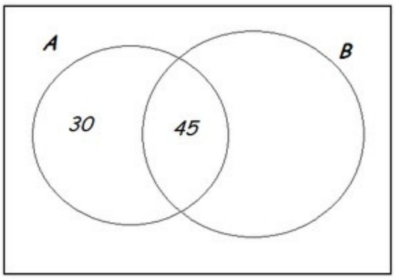
Resolución por conjuntos.
Gráficamente el problema es:



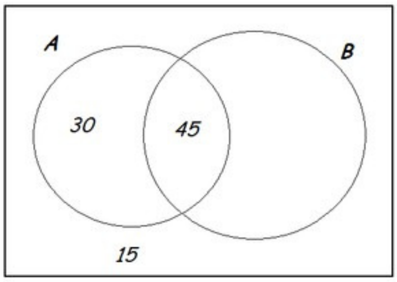
De los datos del problema obtenemos:
"al 30% no les gusta la revista B y si la A"



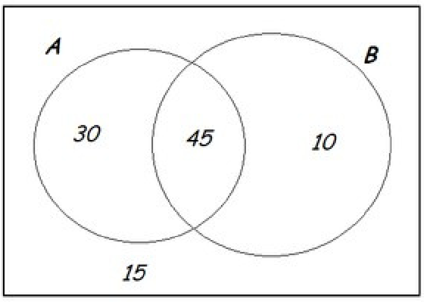
"al 75% les gusta la revista A",
$75 - 30 = 45$



"al 15% no les gusta ninguna"



Finalmente, $30 + 45 + 15 = 90$
y $100 - 90 = 10$



a) *Calcular* $P(A \cap B)$

Solución: $P(A \cap B) = \frac{45}{100} = 0'45$

b) *Calcular* $P(B)$.

En B hay $45 + 10 = 55$,

Solución: $P(B) = \frac{55}{100} = 0'55$

c) *Calcular* $P\left(\overline{B}/A\right)$

$$P\left(\overline{B}/A\right) = \frac{30}{75} = 0'4$$

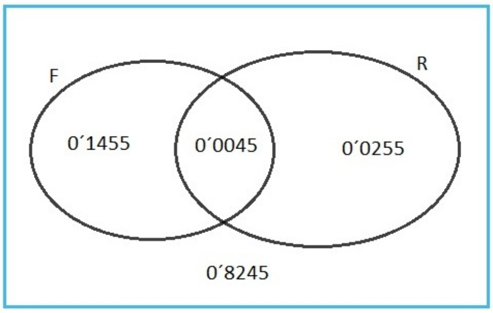
BLOQUE A

PROBLEMA 3. El 15% de los habitantes de cierta población son socios de un club de futbol y el 3% son pelirrojos. Si los sucesos "ser socio de un club de futbol" y "ser pelirrojo" son independientes, calcula las probabilidades de que al elegir al azar un habitante de esa población, dicho habitante

a) Sea pelirrojo y no sea socio de un club de futbol.
b) Sea pelirrojo o sea socio de un club de futbol.
c) Sea socio de un club de futbol si sabemos que no es pelirrojo.

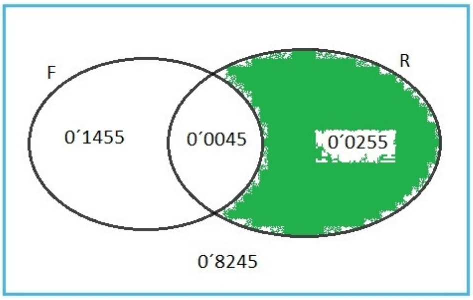
Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
F = ser socio de un club de futbol
R = ser pelirrojo
A partir del enunciado del problema sabemos que:
"El 15% de los habitantes de cierta población son socios de un club de futbol" $\rightarrow p(F) = 0'15$
"El 3% " " " " " " " pelirrojos" $\rightarrow p(R) = 0'03$
También sabemos que los sucesos F y R son independientes, por lo tanto:
$p(F \cap R) = p(F) \cdot p(R) = 0'15 \cdot 0'03 = 0'0045$

Representando gráficamente los dos sucesos e indicando la probabilidad de cada parte:



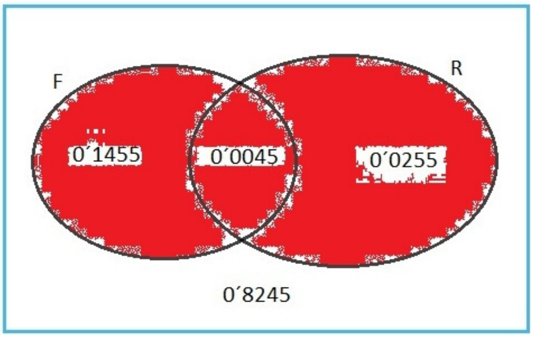
Teniendo en cuenta que:
$0'15 - 0'0045 = 0'1455$
$0'03 - 0'0045 = 0'0255$
$1 - 0'1455 - 0'0045 - 0'0255 = 0'8245$

Contestemos a cada uno de los apartados.
a) Debemos calcular $p(R \cap \overline{F})$*, que gráficamente es*



$p(R \cap \overline{F}) = 0'0255$

b) Debemos calcular $p(R \cup F)$*, que gráficamente es*



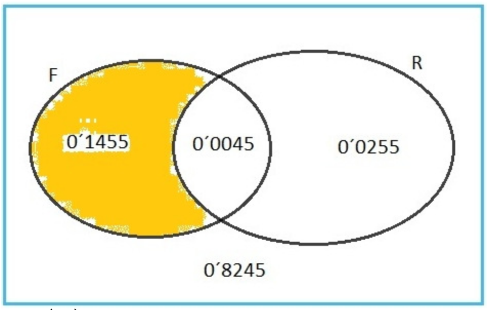
$p(R \cup F) = 0'1455 + 0'0045 + 0'0255 = 0'1755$

También podemos obtener el resultado a partir de:
$p(R \cup F) = p(R) + p(F) - p(R \cap F) = 0'15 + 0'03 - 0'0045 = 0'1755$

c) Debemos calcular $p\left(F/\overline{R}\right)$*, por probabilidad condicionada:*

$p\left(F/\overline{R}\right) = \dfrac{p\left(F \cap \overline{R}\right)}{p\left(\overline{R}\right)} =$

Calculamos, gráficamente, $p\left(F \cap \overline{R}\right)$,



$p\left(F \cap \overline{R}\right) = 0´1455$

y $p\left(\overline{R}\right) = 1 - p(R) = 1 - 0´03 = 0´97$

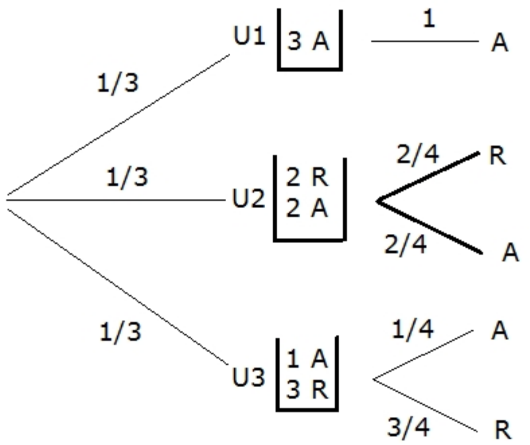
Finalmente, $p\left(F/\overline{R}\right) = \dfrac{p\left(F \cap \overline{R}\right)}{p\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0´1455}{0´97} = 0´15$

BLOQUE B

PROBLEMA 3. Tenemos tres urnas: la primera contiene 3 bolas azules, la segunda 2 bolas azules y 2 rojas y la tercera, 1 bola azul y 3 rojas. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola. Calcula:

a) La probabilidad de que la bola extraída sea roja.
b) La probabilidad de que se haya elegido la segunda urna si la bola extraída ha sido roja.

Solución:
El árbol del problema los podemos representar de la siguiente forma,



Utilizando los sucesos: *R = bola extraída es roja*
U2 = escoger la 2ª urna

$$a)\quad p(R)=\frac{1}{3}\,\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\,\frac{3}{4}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{5}{12}=0'4167$$

$$b)\quad p\left(U2/_R\right)=\frac{p(U2\cap R)}{p(R)}=\frac{\frac{1}{3}\,\frac{2}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}=0'4$$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

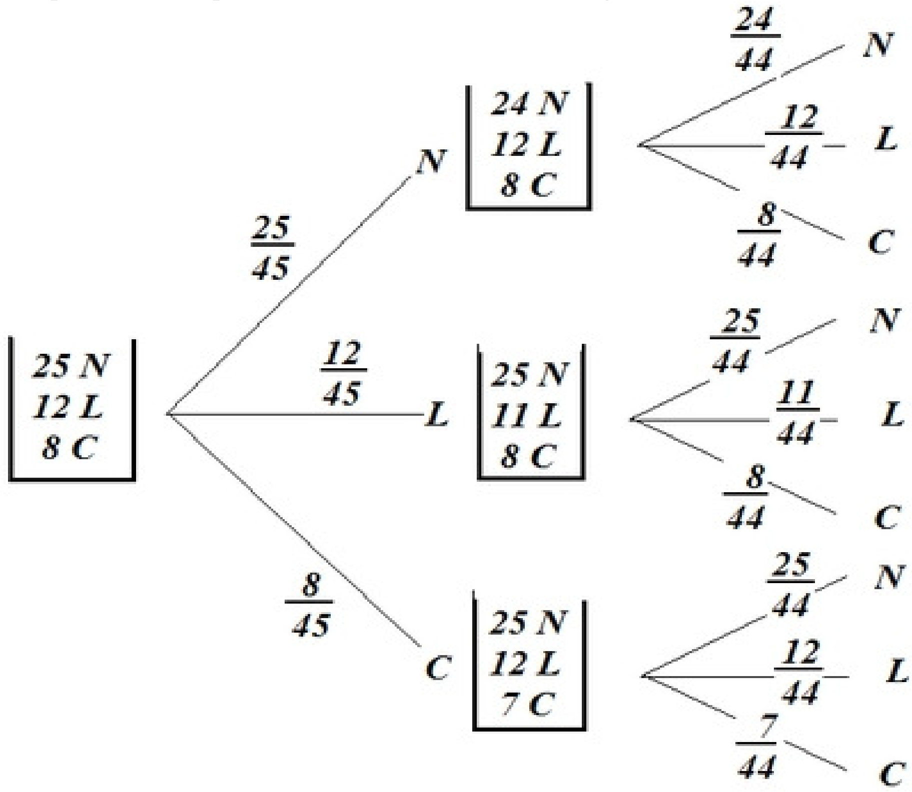
Problema 3. Un tarro contiene 25 caramelos de naranja, 12 de limón y 8 de café. Se extraen dos caramelos al azar. Calcula.

a) La probabilidad de que ambos sean de naranja.
b) La probabilidad de que ambos sean del mismo sabor.
c) La probabilidad de que ninguno sea de café.

Solución:
Nombrando los sucesos:

N = el caramelo extraído es de naranja
L = el caramelo extraído es de limón
C = el caramelo extraído es de café

podemos representar el problema mediante el árbol siguiente:



Calculemos las probabilidades pedidas

a) p (ambos sean de naranja) = $\frac{25}{45}\frac{24}{44}=\frac{600}{1980}=\frac{10}{33}=0{,}3030$

b) p (ambos sean del mismo sabor) = $\frac{25}{45}\frac{24}{44}+\frac{12}{45}\frac{11}{44}+\frac{8}{45}\frac{7}{44}=\frac{788}{1980}=\frac{197}{495}=0{,}3980$

c) p (ninguno de café) = $\frac{25}{45}\frac{24}{44}+\frac{25}{45}\frac{12}{44}+\frac{12}{45}\frac{25}{44}+\frac{12}{45}\frac{11}{44}=\frac{1332}{1980}=\frac{333}{495}=0{,}6727$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Sabiendo que $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}4$ y $P(A/B) = 0{,}2$, contesta las siguientes cuestiones:

a) Calcula $P(\overline{A} \cup B)$.

b) Calcula $P(B/A)$.

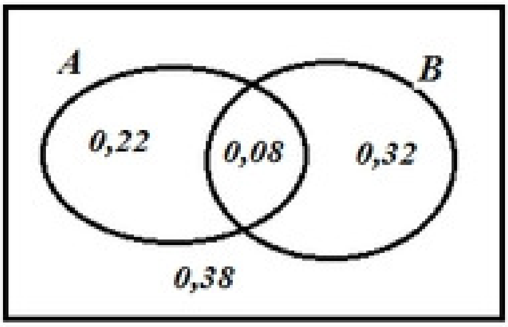
c) Calcula $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

d) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

Solución:

Como $P(A/B) = 0{,}2 \;\rightarrow\; \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}2 \;\rightarrow\; P(A \cap B) = 0{,}2\, P(B) = 0{,}2 \,.\, 0{,}4 = 0{,}08$

Representamos los sucesos A y B en un diagrama de Venn e indicamos la probabilidad de cada una de las partes,



$P(A) = 0{,}3,\; 0{,}3 - 0{,}08 = 0{,}22$

$P(B) = 0{,}4,\; 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}32$

$1 - (0{,}22 + 0{,}08 + 0{,}32) = 0{,}38$

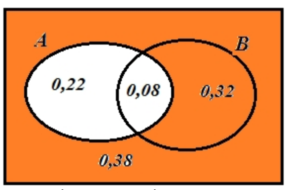
a) $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

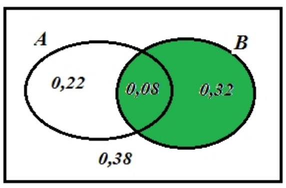
$P(\overline{A} \cap B) =$

Vamos el suceso $\overline{A} \cap B$ *en el diagrama de Venn,*

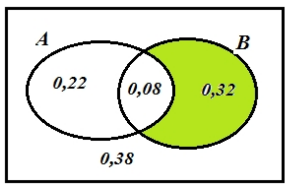
$\overline{A}$ *es*



B *es*



por lo tanto $\overline{A} \cap B$ *es:*



Es decir, $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}32$

Finalmente, $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}32 = 0{,}78$

b) $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}3} = 0{,}2667$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$ (por las leyes de Morgan) $= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \overset{*}{=}$

Calculemos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}62$

$\overset{*}{=} 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

d) Los sucesos A y B serán independientes si $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0{,}08 \\ P(A)\ P(B) = 0{,}3\ .\ 0{,}4 = 0{,}12 \end{array}\right\} \rightarrow \quad P(A \cap B) \neq P(A)\ P(B)$$

Por lo tanto, los sucesos A y B no son independientes.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Una factoría dispone de tres máquinas para fabricar una misma pieza. La más antigua fabrica 1000 unidades al día, de las que el 2% son defectuosas. La segunda máquina más antigua, 3000 unidades al día, de las que el 1,5% son defectuosas. La más moderna fabrica 4000 unidades al día, con el 0,5% de defectuosas. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa?
b) Si una pieza elegida al azar es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina más antigua?
c) Sabiendo que una pieza elegida al azar no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la máquina más moderna?

Solución:
Considerando los sucesos:

M_1 = *la pieza ha sido fabricada por la máquina más antigua*
M_2 = *la pieza ha sido fabricada por la segunda máquina más antigua*
M_3 = *la pieza ha sido fabricada por la máquina más moderna*
D = *la pieza es defectuosa*

Las tres máquinas fabrican un total de $1000 + 3000 + 4000 = 8000$ *piezas, por lo que:*

$$P(M_1)=\frac{1000}{8000}=\frac{1}{8}, \qquad P(M_2)=\frac{3000}{8000}=\frac{3}{8}, \qquad P(M_1)=\frac{4000}{8000}=\frac{4}{8}$$

La máquina M_1 *fabrica un 2% de piezas defectuosas, luego en* M_1

$$P(D)=\frac{2}{100}=0'02 \quad y \quad P(\overline{D})=1-P(D)=1-0'02=0'98$$

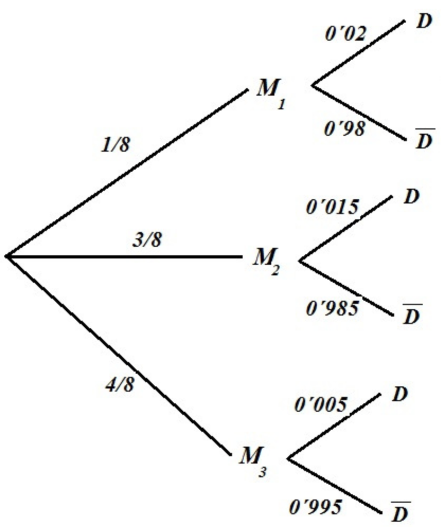
La máquina M_2 *fabrica un 1´5% de piezas defectuosas, luego en* M_2

$$P(D)=\frac{1'5}{100}=0'015 \quad y \quad P(\overline{D})=1-P(D)=1-0'015=0'985$$

La máquina M_3 *fabrica un 0´5% de piezas defectuosas, luego en* M_3

$$P(D)=\frac{0'5}{100}=0'005 \quad y \quad P(\overline{D})=1-P(D)=1-0'005=0'995$$

El problema podemos resumirlo en el siguiente árbol,



a) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$$P(D)=P(M_1)\,P\left(D/M_1\right)+P(M_2)\,P\left(D/M_2\right)+P(M_3)\,P\left(D/M_3\right)=\frac{1}{8}0'02+\frac{3}{8}0'015+\frac{4}{8}0'005=0'010625\approx\mathbf{0'0106}$$

b) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad:

$$P\left(M_1/D\right)=\frac{P(M_1\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{8}0'02}{0'010625}=0'235294...\approx\mathbf{0'2353}$$

c) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad: $P\left(\overline{M_3}/\overline{D}\right)$

Como las piezas son fabricadas por una de las tres máquinas entonces,

$$P\left(\overline{M_3}/\overline{D}\right)=P\left(M_1/\overline{D}\right)+P\left(M_2/\overline{D}\right)=\frac{P\left(M_1\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}+\frac{P\left(M_2\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}=\ (*)$$

Del apartado a) conocemos P (D), luego $P\left(\overline{D}\right)=1-P(D)=1-0'010625=0'989375$

$$(*)=\frac{\frac{1}{8}0'98}{0'989375}+\frac{\frac{3}{8}0'985}{0'989375}=0'497157...\approx\mathbf{0'4972}$$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. En una empresa el 30% de los trabajadores son técnicos informáticos y el 20% son técnicos electrónicos, mientras que un 10% tienen las dos especialidades.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de dicha empresa seleccionado al azar sea técnico informático o electrónico.

b) Si seleccionamos al azar a un técnico electrónico, ¿cuál es la probabilidad de que sea también técnico informático?

c) Si seleccionamos un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un técnico que tiene solo una de las dos especialidades?

Solución:

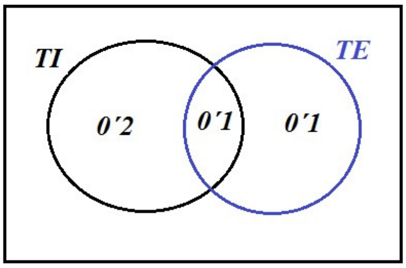
Consideramos los siguientes sucesos:

TI = trabajador es técnico informático

TE = trabajador es técnico electrónico

De los datos del problema sabemos que $P(TI) = 0{'}3$, $P(TE) = 0{'}2$ *y* $P(TI \cap TE) = 0{'}1$

El problema podemos representarlo mediante el siguiente diagrama de Venn:



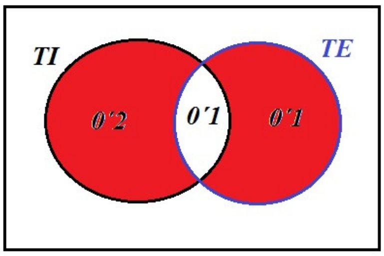
a) Hay que calcular $P(TI \cup TE)$

$$P(TI \cup TE) = P(TI) + P(TE) - P(TI \cap TE) = 0{'}3 + 0{'}2 - 0{'}1 = 0{'}4$$

b) Hay que calcular $P\left({TI}/{TE} \right)$

$$P\left({TI}/{TE} \right) = \frac{P(TI \cap TE)}{P(TE)} = \frac{0{'}1}{0{'}2} = 0{'}5$$

c) Para calcular la probabilidad de que sea un técnico que tiene solo una de las dos especialidades utilizamos el diagrama de Venn. La representación de la probabilidad pedida es la zona coloreada:

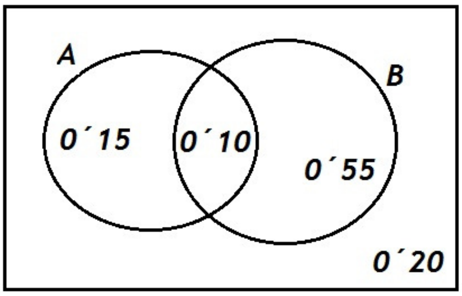


Por tanto, P(sea técnico que tiene solo una de las dos especialidades) = 0´2 + 0´1 = 0´3

Problema 3. El 25% de los estudiantes de un instituto ha leído algún libro sobre Harry Potter y el 65% ha visto alguna película de este protagonista. Se sabe también que el 10% ha leído algún libro y ha visto alguna de las películas de este personaje. Si se elige al azar un estudiante:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya visto alguna película de este personaje y no haya leído ningún libro sobre Harry Potter?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya leído ningún libro sobre Harry Potter y no haya visto alguna película sobre este personaje?
c) Si se sabe que ha leído algún libro de Harry Potter, ¿cuál es la probabilidad de que haya visto alguna película de este personaje?

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
A = el estudiante ha leído algún libro de Harry Potter
B = el estudiante ha visto alguna película de Harry Potter
De los datos del problema sabemos:
"El 25% de los estudiantes de un instituto ha leído algún libro sobre Harry Potter" → $P(A) = 0'25$
"El 65% ha visto alguna película de este protagonista" → $P(B) = 0'65$
"El 10% ha leído algún libro y ha visto alguna de las películas de este personaje" → $P(A \cap B) = 0'10$
El diagrama de Venn correspondiente a estos sucesos sería:



Los datos del diagrama provienen de los siguientes cálculos:

$P(A) - P(A \cap B) = 0'25 - 0'10 = 0'15$

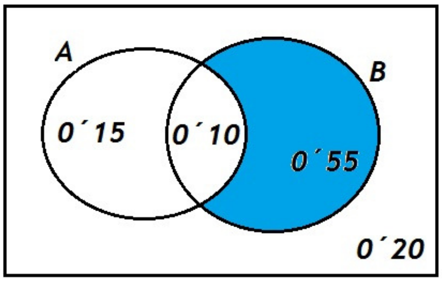
$P(B) - P(A \cap B) = 0'65 - 0'10 = 0'55$

$1 - (0'15 + 0'10 + 0'55) = 0'20$

a) Se pide $P(B \cap \overline{A})$

Lo resolvemos utilizando el diagrama de Venn.

$B \cap \overline{A}$ *es:*



Por tanto $P(B \cap \overline{A}) = 0'55$

b) Se pide $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

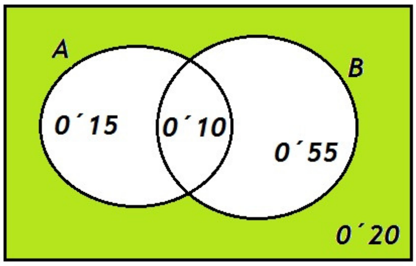
Por las leyes de Morgan: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$,

luego, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) =$ *(por probabilidad del complementario)* $= 1 - P(A \cup B) =$ *(por probabilidad de la unión de dos sucesos)* $= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0'25 + 0'65 - 0'10] = 0'20$

Por tanto, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ ***= 0´20***

También se puede resolver usando el diagrama de Venn,

$\overline{A} \cap \overline{B}$ *es:*



Por tanto $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0´20$

c) Se pide $P\left(B/A\right)$

Por definición de probabilidad condicionada, $P\left(B/A\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0´10}{0´25} = 0´4$

Por tanto, $P\left(B/A\right) = 0´4$

Problema 3. La probabilidad de que tenga lugar el suceso A es 2/3, la probabilidad de que no ocurra el suceso B es 1/4 y la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B es 19/24. Calcula:

a) La probabilidad de que ocurran a la vez el suceso A y el suceso B.
b) La probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.
c) La probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.
d) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

Solución:
De los datos del problema sabemos:

$$\begin{cases} P(A)=\frac{2}{3} \\ P(\overline{B})=\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad [\text{por probabilidad del suceso complementario}] \quad P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\ P(A\cup B)=\frac{19}{24} \end{cases}$$

Se pide

a) $P(A\cap B)$

Sabemos que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, *sustituyendo las probabilidades conocidas:*

$$\frac{19}{24}=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-P(A\cap B) \quad \rightarrow \quad P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{19}{24}=\frac{16+18-19}{24}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$$

Luego, $P(A\cap B)=\frac{5}{8}$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

Por las leyes de Morgan, $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$, *por lo que*

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{19}{24}=\frac{24-19}{24}=\frac{5}{24}$$

Luego, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{5}{24}$

c) $P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5/8}{3/4}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$

d) Dos sucesos son independientes si $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$

En este caso: $\begin{cases} P(A\cap B)=\frac{5}{8} \\ P(A)\,P(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}\neq\frac{5}{8} \end{cases}$

Luego, los sucesos A y B no son independientes.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

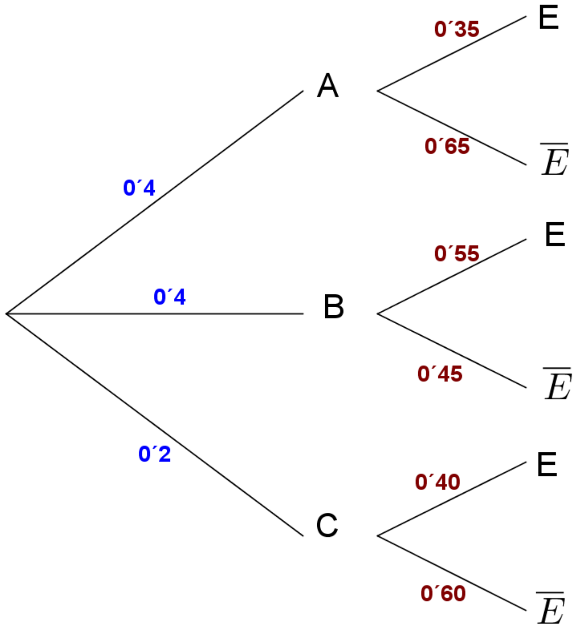
Problema 3. Juan va normalmente a alquilar películas a uno de los tres videoclubs siguientes: A, B y C. Se sabe que la probabilidad de que vaya al videoclub C es 0,2 y que la probabilidad de que vaya al A es la misma que la probabilidad de que vaya al B. En el videoclub A el 35% de las películas son españolas, el 55% en el B y el 40% en el C. Un día va a un videoclub y una vez allí elige aleatoriamente una película. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya ido al videoclub A?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida sea española?
c) Suponiendo que ha elegido una película no española, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido al videoclub C?

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:

A = Juan ha ido al videoclub A *B = Juan ha ido al videoclub B* *C = Juan ha ido al videoclub C*
E = la película elegida es española $\overline{E}$ = *la película elegida no es española*

Del enunciado sabemos que $P(A) = P(B)$ *y* $P(C) = 0´2$.
Como Juan va a uno de los tres videoclubs, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
Por tanto, $P(A) + P(A) + 0´2 = 1$; $2\,P(A) = 1 - 0´2$; $2\,P(A) = 0´8$; $P(A) = 0´4 = P(B)$
Considerando todos los datos del enunciado, el árbol del problema será:



a) $P(A) = 0´4$

b) $P(E) = 0´4 \,.\, 0´35 + 0´4 \,.\, 0´55 + 0´2 \,.\, 0´40 = 0´44$

c) $$P\left(C/\overline{E}\right) = \frac{P\left(C \cap \overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)} = \frac{0´2\,.\,0´60}{1 - P(E)} = \frac{0´12}{1 - 0´44} = \frac{0´12}{0´56} = \frac{3}{14} = 0´2143$$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es el siguiente: $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$. Se conocen las siguientes probabilidades: P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 1/12, P(e) = ½ y P(f) = 1/6. Dados los sucesos A = *{a, c, d}* y B = *{c, e, f}* relacionados con el experimento aleatorio y siendo $\overline{A}$ el suceso contrario de A, calcula:

a) $P(A \cup B)$
b) $P(\overline{A} \cup B)$
c) $P(A \cap B)$
d) $P(A/B)$

Solución:

a) $A \cup B = \{a, c, d, e, f\}$

Luego, $P(A \cup B) = P(a) + P(c) + P(d) + P(e) + P(f) = \frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$

b) $\overline{A} = \{b, e, f\}$

$\overline{A} \cup B = \{b, e, f\} \cup \{c, e, f\} = \{b, c, e, f\}$

$P(\overline{A} \cup B) = P(b) + P(c) + P(e) + P(f) = \frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

c) $A \cap B = \{a, c, d\} \cap \{c, e, f\} = \{ c \}$

$P(A \cap B) = P(c) = \frac{1}{12}$

d) $P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Del apartado anterior sabemos que $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

Calculemos P(B), $P(B) = P(c) + P(e) + P(f) = \frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}$

Luego, $P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{9/12} = \frac{1}{9}$

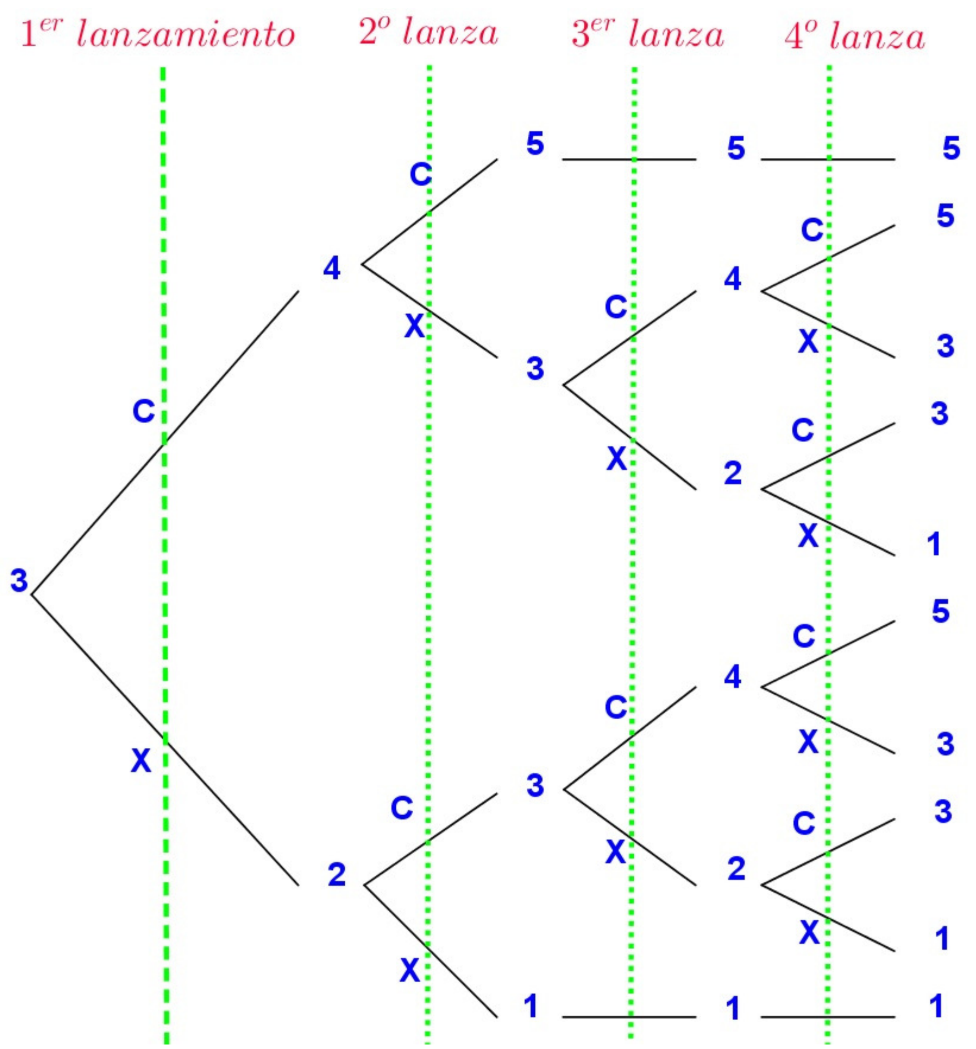
Problema 3. Imagina cinco sillas alineadas 1, 2, 3, 4, 5 y que un individuo está sentado inicialmente en la silla central (número 3). Se lanza una moneda al aire y, si el resultado es cara, se desplaza a la silla situada a su derecha, mientras que si el resultado es cruz, se desplaza a la situada a su izquierda. Se realizan sucesivos lanzamientos (y los cambios de silla consecutivos correspondientes) teniendo en cuenta que si tras alguno de ellos llega a sentarse en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5), permanecerá sentado en ella con independencia de los resultados de los lanzamientos posteriores. Se pide:

a) Dibujar el diagrama de árbol para cuatro lanzamientos de moneda.
b) La probabilidad de que tras los **tres** primeros lanzamientos esté sentado de nuevo en la silla central (3).
c) La probabilidad de que tras los **tres** primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).
d) La probabilidad de que tras los **cuatro** primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).

Solución:
Al lanzar la moneda, si sale cara se desplaza a la derecha (hay que sumar 1 al número de la silla); si sale cruz de desplaza a la izquierda (hay que restar 1 al numero de la silla).
Y, además, cuando esté en las sillas de los extremos (1 ó 5) ya no se mueve independientemente del resultado del lanzamiento.

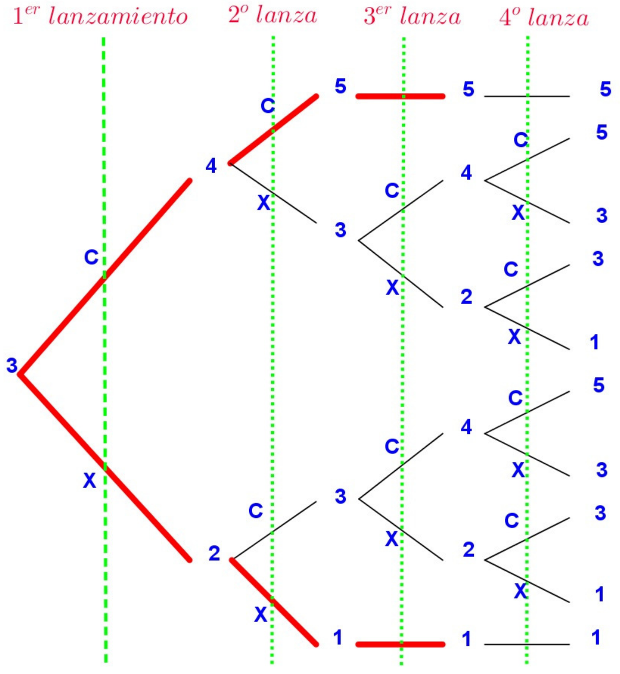
Representamos: C = ha salido cara y X = ha salido cruz $\rightarrow$ $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$

a) El diagrama de árbol para cuatro lanzamientos de moneda será:



b) En el árbol, tras los tres primeros lanzamientos se está en la silla 1 o 2 o 4 o 5, en ningún caso en la 3.
Por tanto,   P (tras tres lanzamientos esté en 3) = 0

c) En el árbol, tras los tres primeros lanzamientos se está en la silla 1 o 5 en los casos marcados, y calculamos la probabilidad de cada caso.

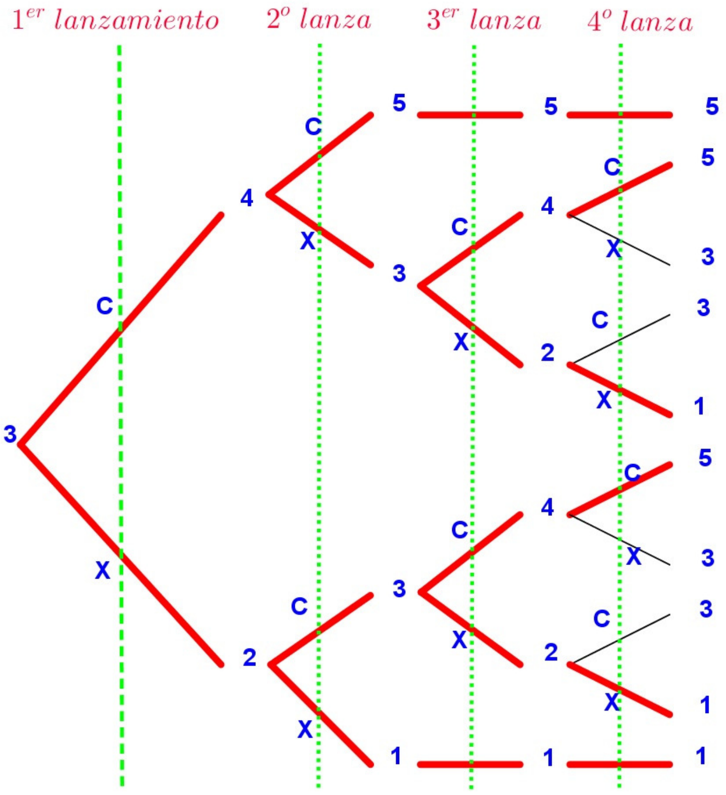


$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}1=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}1=\frac{1}{4}$$

Finalmente, P *(tras tres lanzamientos esté en 1 o 5)* $=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

d) En el árbol, tras los cuatro primeros lanzamientos se está en la silla 1 o 5 en los casos marcados,



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$$

Finalmente, P *(tras cuatro lanzamientos esté en 1 o 5)* $=2\cdot\dfrac{1}{4}+4\cdot\dfrac{1}{16}=\dfrac{2}{4}+\dfrac{4}{16}=\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

Problema 3. Una compañía de transporte interurbano cubre el desplazamiento a tres municipios distintos. El 35% de los recorridos diarios realizados por los autobuses de esta compañía corresponden al destino 1, el 20% al destino 2 y el 45% al destino 3. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un recorrido de autobús sufra un retraso es del 2%, 5% y 3% para cada uno de los destinos 1, 2 y 3, respectivamente.

a) ¿Qué porcentaje de los recorridos diarios de esta compañía llegan con puntualidad a su destino?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un recorrido seleccionado al azar corresponda al destino 2 y haya experimentado un retraso?

c) Si seleccionamos un recorrido al azar y resulta que sufrió un retraso, ¿cuál era el destino más probable de dicho recorrido?

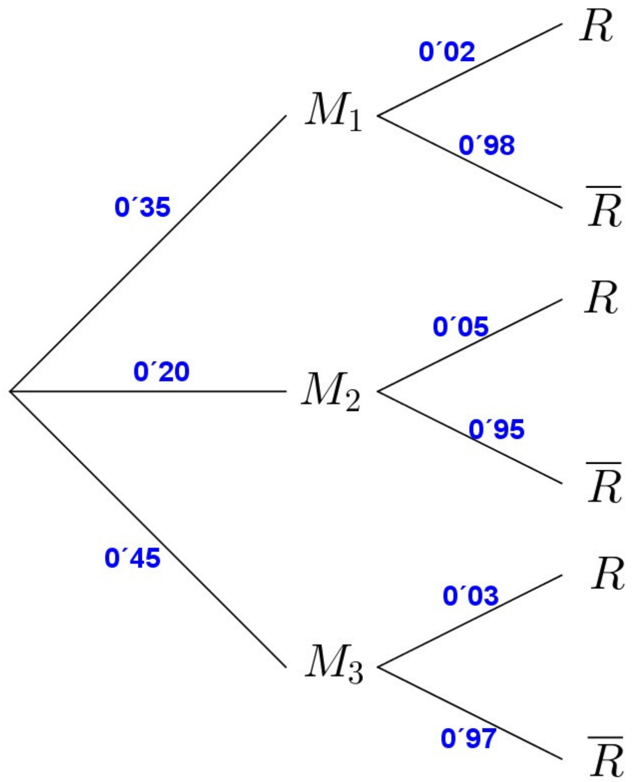
Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

M_1 = *autobús al destino 1* M_2 = *autobús al destino 2* M_3 = *autobús al destino 3*

R = *el autobús sufre retraso* $\overline{R}$ = *el autobús no sufre retraso*

Considerando todos los datos del enunciado, el árbol del problema será:



a) *Llegar con puntualidad es no sufrir retraso, calculemos la siguiente probabilidad:*

$P(\overline{R}) = 0´35 \,.\, 0´99 + 0´20 \,.\, 0´95 + 0´45 \,.\, 0´97 = 0´9695$

Por tanto el 96´95 % de los recorridos llegan con puntualidad.

b) *La probabilidad pedida es:* $P(M_2 \cap R) = 0´20 \,.\, 0´05 = 0´01$

c) *Debemos calcular las probabilidades del tipo* $P\left(¿? / R \right)$

Vamos a necesitar $P(R)$. *Calculémosla:* $P(R) = 1 - P(\overline{R}) = 1 - 0´9695 = 0´0305$

$$P\left(M_1/R\right)=\frac{P(M_1\cap R)}{P(R)}=\frac{0'35\cdot 0'02}{0'0305}=\frac{14}{61}$$
$$P\left(M_2/R\right)=\frac{P(M_2\cap R)}{P(R)}=\frac{0'20\cdot 0'05}{0'0305}=\frac{20}{61}$$
$$P\left(M_3/R\right)=\frac{P(M_3\cap R)}{P(R)}=\frac{0'45\cdot 0'03}{0'0305}=\frac{27}{61}$$

La mayor de las tres es $P\left(M_3/R\right)$, *por tanto* ***el destino más probable es el 3.***

OPCIÓN A

Problema 3. En un estudio realizado en un comercio se ha determinado que el 68% de las compras se pagan con tarjeta de crédito. El 15% de las compras superan los 500 € y ambas circunstancias (una compra supera los 500 € y se paga con tarjeta de crédito) se da el 5% de las veces. Calcula la probabilidad de que:

a) Una compra no supere los 500 € y se pague en efectivo. *(3 puntos)*
b) Una compra no pase de 500 € si no se ha pagado con tarjeta de crédito. *(4 puntos)*
c) Una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 €. *(3 puntos)*

Solución:
Consideremos los siguientes sucesos:

T = *pagar con tarjeta de crédito*

$\overline{T}$ = *pagar en efectivo*

D = *la compra supera los 500€*

$\overline{D}$ = *la compra no supera los 500€*

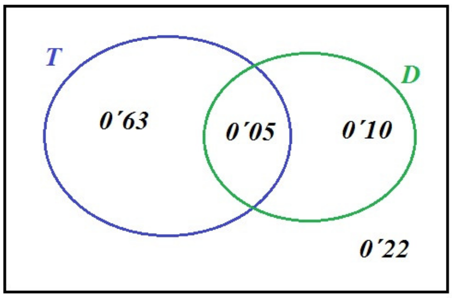
De los datos del problema obtenemos:

"un comercio se ha determinado que el 68% de las compras se pagan con tarjeta de crédito" $\rightarrow$ $P(T) = 0'68$

"el 15% de las compras superan los 500 €" $\rightarrow$ $P(D) = 0'15$

"ambas circunstancias (una compra supera los 500 € y se paga con tarjeta de crédito) se da el 5% de las veces" $\rightarrow$ $P(T \cap D) = 0'05$

El diagrama de sucesos es:



$0'63 + 0'05 = 0'68$

$0'05 + 0'10 = 0'15$

$1 - (0'63 + 0'05 + 0'10) = 0'22$

a) Probabilidad de que una compra no supere los 500 € y se pague en efectivo.

Se pide $P\left(\overline{D} \cap \overline{T}\right) =$ *(según el diagrama)* $= 0'22$

Otra forma:

$$P\left(\overline{D} \cap \overline{T}\right) = \text{(por leyes de Morgan)} = P\left(\overline{D \cup T}\right) = 1 - P(D \cup T) = 1 - \left[P(D) + P(T) - P(D \cap T)\right] =$$

$$= 1 - [\, 0'15 + 0'68 - 0'05 \,] = 0'22$$

Luego, ***la probabilidad de que una compra no supere los 500 € y se pague en efectivo es 0´22***

b) Probabilidad de que una compra no pase de 500 € si no se ha pagado con tarjeta de crédito

$$\text{Se pide } P\left(\overline{D}/\overline{T}\right) = \frac{P\left(\overline{D} \cap \overline{T}\right)}{\left(\overline{T}\right)} = \frac{0'22}{1 - 0'68} = \frac{0'22}{0'32} = 0'6875$$

Por tanto, ***la probabilidad de que una compra no pase de 500 € si no se ha pagado con tarjeta de crédito es 0´6875***

c) Probabilidad de que una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 €

Se pide $P\left(T/\overline{D} \right) = \dfrac{P\left(T \cap \overline{D} \right)}{P\left(\overline{D} \right)} = \dfrac{0´63}{0´85} = 0´7412$

Cálculo de las probabilidades de la fracción:

- *Por el diagrama de sucesos de obtienen directamente ambas probabilidades.*

- *Por propiedades de las probabilidades:*

  $P\left(\overline{D} \right) = 1 - P(D) = 1 - 0´15 = 0´85$ *(probabilidad del suceso contrario)*

  El cálculo de $P\left(T \cap \overline{D} \right)$ *lo realizamos de la siguiente forma:*

  $\overline{D} = \overline{D} \cap E = \overline{D} \cap \left(T \cup \overline{T} \right) = \left(\overline{D} \cap T \right) \cup \left(\overline{D} \cap \overline{T} \right),$

  como $\left(\overline{D} \cap T \right) \cap \left(\overline{D} \cap \overline{T} \right) = \overline{D} \cap T \cap \overline{T} = \varnothing \rightarrow$

  $P\left(\overline{D} \right) = P\left(\left(\overline{D} \cap T \right) \cup \left(\overline{D} \cap \overline{T} \right) \right) = P\left(\overline{D} \cap T \right) + P\left(\overline{D} \cap \overline{T} \right)$

  $0´85 = P\left(\overline{D} \cap T \right) + 0´22 \rightarrow P\left(\overline{D} \cap T \right) = 0´85 - 0´22 = 0´63$

Por tanto, ***la probabilidad de que una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 € es 0´7412***

Problema 3. En una casa hay tres llaveros. El primer llavero (AZUL) tiene 5 llaves. El segundo (ROJO) tiene 4 llaves y el tercero (VERDE) tiene 3 llaves. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar uno de los llaveros. Se pide:

a) Calcula la probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido. *(3 puntos)*

b) Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, ¿cuál es la probabilidad de que se haya escogido el llavero VERDE? *(4 puntos)*

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí que lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero? *(3 puntos)*

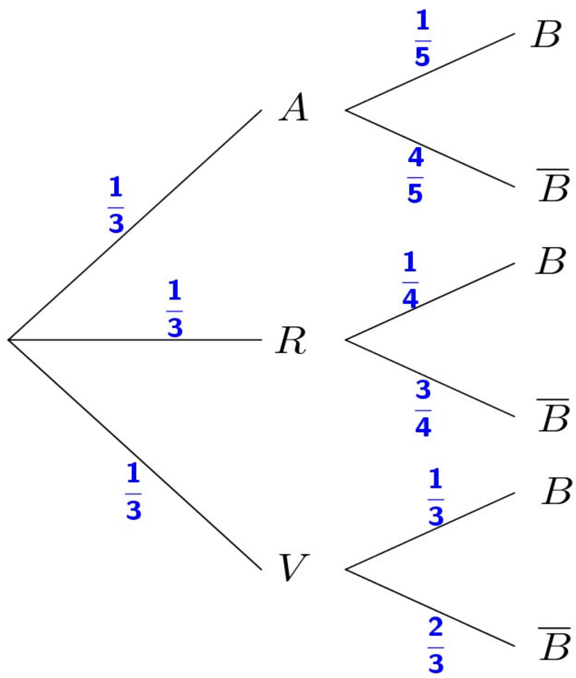
Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

A = escoger el llavero azul *R = escoger el llavero rojo* *V = escoger el llavero verde*

B = la llave abre $\overline{B}$ *= la llave no abre*

Considerando todos los datos del enunciado, el árbol del problema será:



a) Probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido:

$$P(B) = P(A)\ P(B/A) + P(R)\ P(B/R) + P(V)\ P(B/V) = \frac{1}{3}\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{47}{180} = 0'2611$$

La probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido es 0´2611

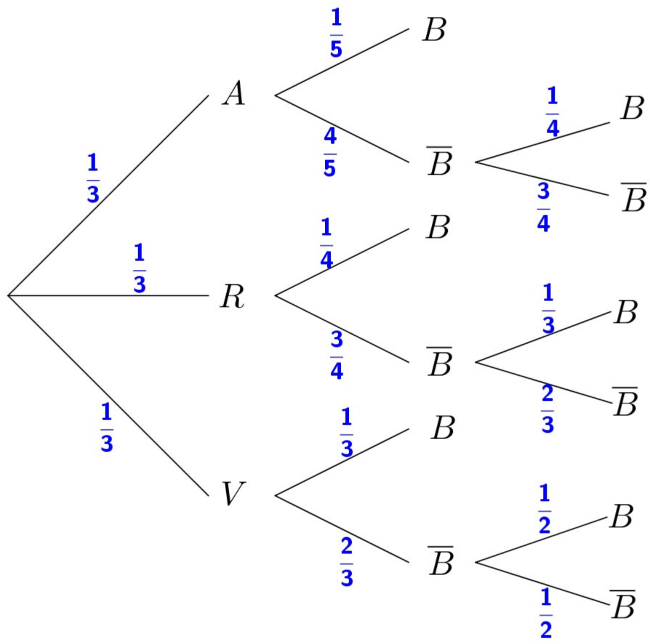
b) Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, ¿cuál es la probabilidad de que se haya escogido el llavero VERDE?

Se pide $P(V/B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{47}{180}} = \dfrac{20}{47} = 0'4255$

Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, la probabilidad de que se haya escogido el llavero VERDE es 0´4255

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí que lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero?

El árbol del problema, ahora, es el siguiente:



Hay que calcular P (1ª llave no abre y 2ª llave si) = $P\left(1^{a}\,\overline{B} \cap 2^{a}\,B\right)$

$$P\left(1^{a}\,\overline{B} \cap 2^{a}\,B\right) = \frac{1}{3}\frac{4}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{47}{180} = 0\acute{}2611$$

La probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí que lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero es 0´2611

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30% si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago? *(3 puntos)*

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago? *(4 puntos)*

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago? *(3 puntos)*

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

A = el hogar tiene Smart TV *B = el hogar tiene televisión de pago*

$\overline{A}$ *= el hogar no tiene Smart TV* $\overline{B}$ *= el hogar no tiene televisión de pago*

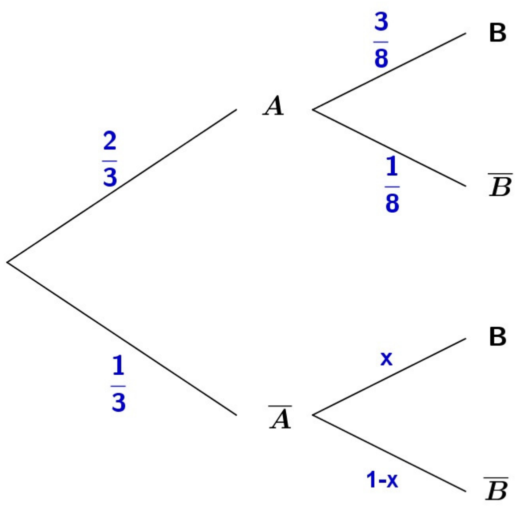
Considerando todos los datos del enunciado,

"las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV" $\rightarrow$ $P(A)=\frac{2}{3}$ *y* $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$

"de los que tiene Smart TV, 3/8 tienen televisión de pago" $\rightarrow$ $P\left(B/A\right)=\frac{3}{8}$ *y* $P\left(\overline{B}/A\right)=\frac{5}{8}$

"el 30% de los hogares tienen televisión de pago" $\rightarrow$ *P(B) = 0´30*

El árbol del problema será:

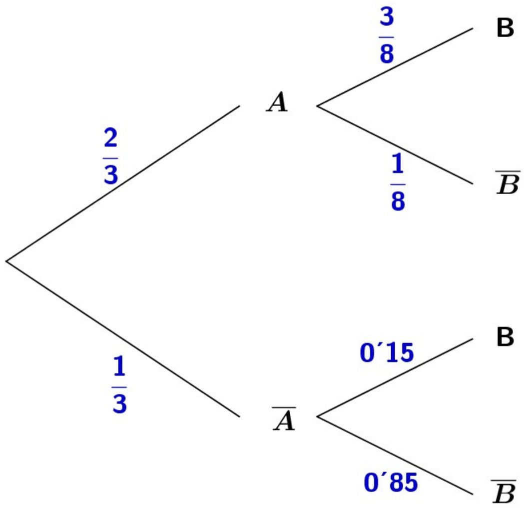


Determinamos el valor de x considerando que P(B) = 0´3

Del árbol, $P(B)=\frac{2}{3}\frac{3}{8}+\frac{1}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{x}{3}$

Luego, $\frac{1}{4}+\frac{x}{3}=0'3 \quad\rightarrow\quad \frac{3+4x}{12}=0'3 \quad\rightarrow\quad 3+4x=3'6 \quad\rightarrow\quad 4x=0'6 \quad\rightarrow\quad x=\frac{0'6}{4}=0'15$

El árbol definitivo es:



a) Probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago.

La probabilidad pedida es: $P\left(\overline{A} \cap B\right)$

$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{1}{3} 0'15 = 0'05$$

b) Probabilidad de que tenga Smart TV sí sabemos que ha contratado televisión de pago.

La probabilidad pedida es: $P\left(A/B\right)$

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}}{0'3} = 0'8333$$

c) Probabilidad de que no tenga Smart TV sí sabemos que no ha contratado televisión de pago.

La probabilidad pedida es: $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$

$$P\left(\overline{A}/\overline{B}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0'85}{1 - P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0'85}{1 - 0'3} = 0'4048$$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Sabemos que el 5% de los hombres y el 2% de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el 30% de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros. *(3 puntos)*

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que sus salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer? *(3 puntos)*

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros? *(4 puntos)*

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:

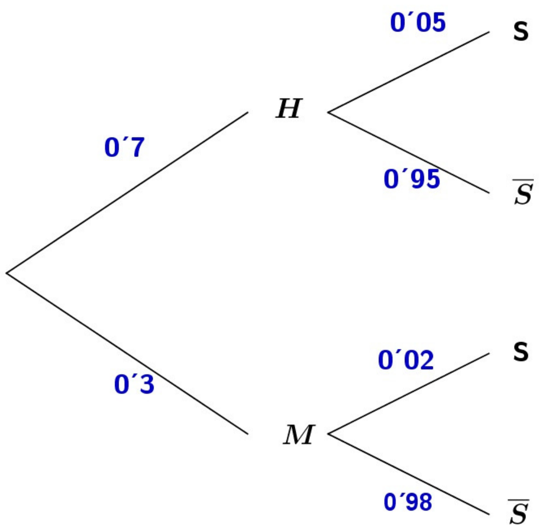
H = hombre *M = mujer* *S = salario mensual > 5000€* $\overline{S}$ *= salario mensual ≤ 5000€*

Considerando todos los datos del enunciado,
"el 30% de los trabajadores son mujeres" → $P(M) = 0´30$ y $P(H) = 1 - 0´30 = 0´70$

"el 5% de los hombres tienen un salario mensual > 5000€" → $P\left(S/H\right) = 0´05$

"el 2% de las mujeres tienen un salario mensual > 5000€" → $P\left(S/M\right) = 0´02$

El árbol del problema será:



a) Probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros.
La probabilidad pedida es: $P(S)$

$P(S) = 0´7 \,.\, 0´05 + 0´3 + 0´02 = 0´041$

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que sus salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

La probabilidad pedida es: $P\left(M/S\right)$

$$P\left(M/S\right)=\frac{P(M\cap S)}{P(S)}=\frac{0'3\cdot 0'02}{0'041}=\frac{6}{41}=0'1463$$

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros?

Calculemos: $P(H\cap S)$

$P(H\cap S) = 0'7\ .\ 0'05 = 0'035 = 3'5\%$

El 3´5% de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Si *A* y *B son* dos sucesos tales que *P(A)* = 0,4, *P(B/A)* = 0,25 y $P(B^c) = 0{,}75$, se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? ¿Por qué? *(2´5 puntos)*
b) Calcula $P(A \cup B)$. *(2´5 puntos)*
c) Calcula $P(A/B^c)$. *(2´5 puntos)*
d) Calcula $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$. *(2´5 puntos)*

(A^c y B^c representan, respectivamente, el suceso complementario de *A* y el suceso complementario de *B*).

Solución:
Los datos del problema son:

$P(A) = 0'4$

$$P\left(B/A\right) = 0'25 \quad \rightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0'25 \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = 0'25 \cdot P(A) = 0'25 \cdot 0'4 = 0'1$$

$$P(B^c) = 0'75 \quad \rightarrow \quad 1 - P(B) = 0'75 \quad \rightarrow \quad 1 - 0'75 = P(B) \quad \rightarrow \quad P(B) = 0'25$$

a) ¿A y B son independientes?

Los sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
De lo calculado anteriormente,
$P(A \cap B) = 0'1$ y $P(A) \cdot P(B) = 0'4 \cdot 0'25 = 0'1$
Entonces $P(A \cap B) = 0'1 = P(A) \cdot P(B)$

En conclusión, ***A y B son sucesos independientes****.*

b) ¿P(A ∪ B)?

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'4 + 0'25 - 0'1 = 0'55$

Solución: P(A ∪ B) = 0´55

c) $P(A/B^c)$

$$P\left(A/B^c\right) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0'3}{0'75} = \frac{2}{5} = 0'4$$

Calculemos $P(A \cap B^c)$,

$A = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, *luego*

$$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) - P(A \cap B \cap A \cap B^c) =$$

$$A \cap B \cap A \cap B^c = A \cap B \cap B^c = \{Como \quad B \cap B^c = \varnothing\} = A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) - P(\varnothing) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) - 0 = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Hemos obtenido: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \rightarrow 0'4 = 0'1 + P(A \cap B^c) \rightarrow P(A \cap B^c) = 0'4 - 0'1 = 0'3$

Solución: $\boldsymbol{P(A/B^c) = 0'4}$

d) ¿$P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$?

Por las leyes de Morgan: $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$. *Por tanto,*

$$P\left(A^c \cup B^c\right) = P\left(\left(A \cap B\right)^c\right) = 1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - 0'1 = 0'9$$

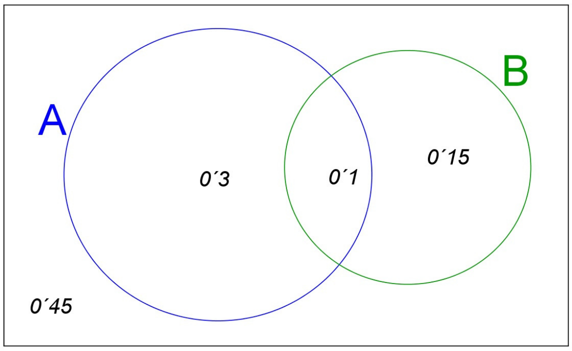
Análogamente, por las leyes de Morgan: $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$. *Por tanto,*

$$P\left(A^c \cap B^c\right) = P\left(\left(A \cup B\right)^c\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0'55 = 0'45$$

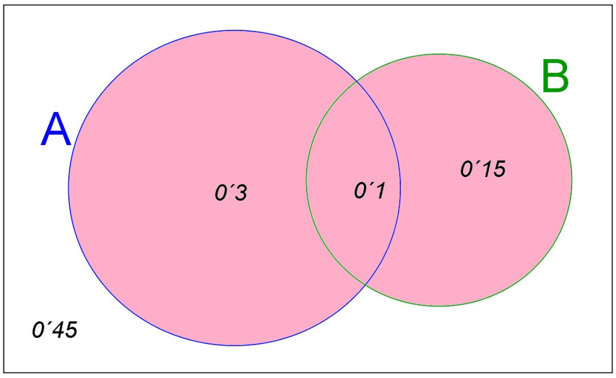
Por tanto, $\mathbf{P(A^c \cup B^c) = 0'9}$ **y** $\mathbf{P(A^c \cap B^c) = 0'45}$.

* * * * * * *

Los apartados b, c y d podemos resolverlos utilizando el diagrama de Venn de estos dos sucesos. De los datos y cálculos realizados inicialmente se deduce que:



b) ¿$P(A \cup B)$?



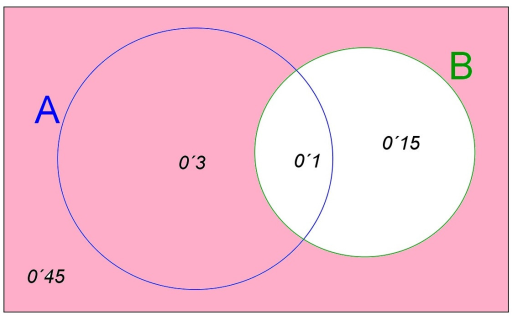
$P(A \cup B) = 0'3 + 0'1 + 0'15 = 0'55$

c) $P(A/B^c)$

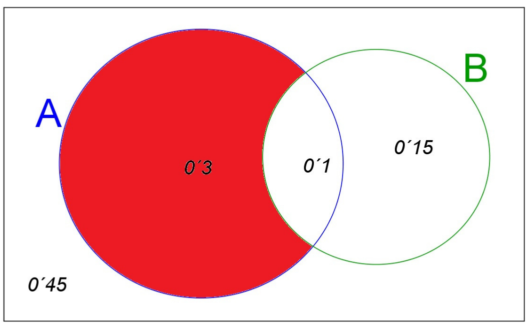
$$P\left(A/_{B^c}\right) = \frac{P\left(A \cap B^c\right)}{P\left(B^c\right)}$$

Obtengamos $A \cap B^c$,

B^c *es:*

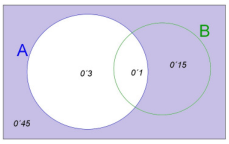


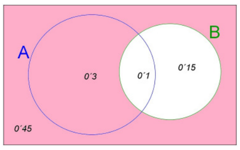
y $A \cap B^c$ *es:*

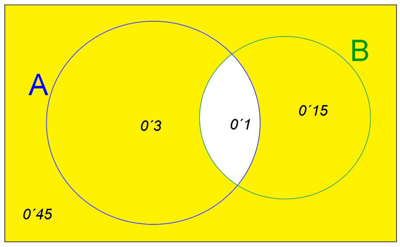


Luego, $P\left(A \cap B^c\right) = 0'3$ y $P\left(A/_{B^c}\right) = \dfrac{P\left(A \cap B^c\right)}{P\left(B^c\right)} = \dfrac{0'3}{0'75} = \dfrac{2}{5} = 0'4$.

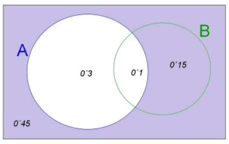
d) ¿$P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$?

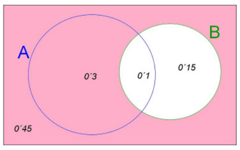
A^c *es:* 

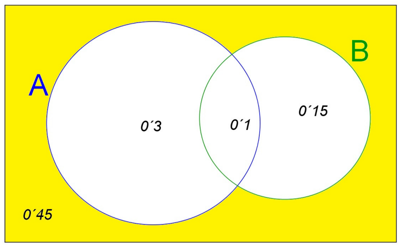
B^c *es:* 

y $A^c \cup B^c$ *es:* 

Luego $P(A^c \cup B^c) = 1 - 0´1 = 0´9$.

A^c *es:* 

B^c *es:* 

y $A^c \cap B^c$ *es:* 

Por lo que $P(A^c \cap B^c) = 0´45$.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4,7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30% de los teléfonos móviles tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30% de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25% de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4,7 pulgadas y del 40% de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

a) Si el 34% de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4,7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas. *(4 puntos)*

b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. *(3 puntos)*

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4,7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. *(3 puntos)*

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:

B = móvil con 4" de pantalla (básico)
M = móvil con 4,7" de pantalla (mediano)
A = móvil con 5" de pantalla (alto)
U = utiliza protector de pantalla
$\overline{U}$ *= no utiliza protector de pantalla*

Del enunciado del problema se deduce que:

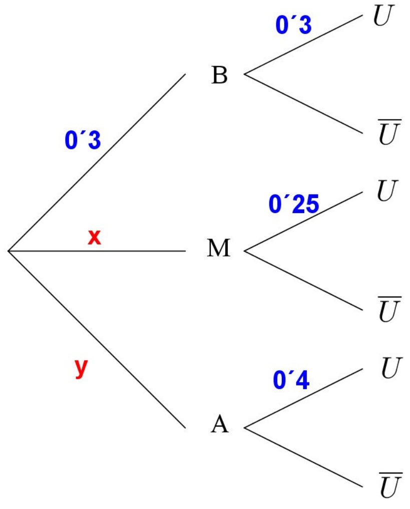
"el 30% de los teléfonos móviles tienen una pantalla de 4 pulgadas" $\rightarrow$ $P(B) = 0'3$

"el 30% de los usuarios con pantalla de 4" utilizan un protector de pantalla" $\rightarrow$ $P\left(U/B\right) = 0'3$

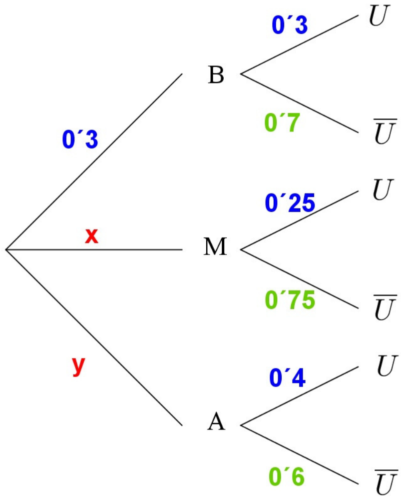
"también es el caso del 25% de los que poseen uno con 4,7" de pantalla" $\rightarrow$ $P\left(U/M\right) = 0'25$

"y del 40% de los que poseen uno con 5" de pantalla" $\rightarrow$ $P\left(U/A\right) = 0'4$

El árbol del problema será:



Es fácil completar las probabilidades de las ramas que faltan (la suma de la ramas a U y a $\overline{U}$ *debe ser 1),* *El árbol del problema queda:*



Como estos son los tres tipos de móviles que se poseen, $0'3 + x + y = 1$; $x + y = 1 - 0'3$; $\mathbf{x + y = 0'7}$;
La otra ecuación para calcular x e y la obtendremos en el siguiente apartado.

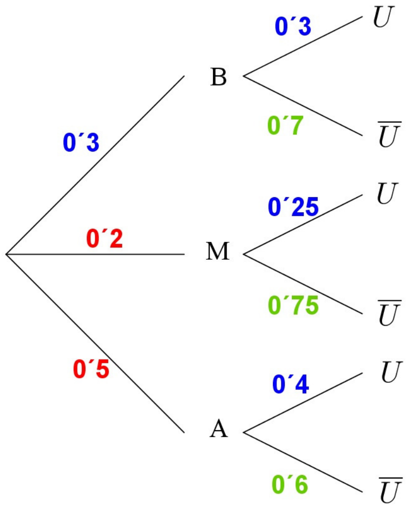
a) *Sabemos que "el 34% de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla"*
Es decir $P(U) = 0'34$
Del árbol del problema: $P(U) = 0'3 \cdot 0'3 + x \cdot 0'25 + y \cdot 0'4 = 0'25\,x + 0'4\,y + 0'09 \rightarrow$
$0'25\,x + 0'4\,y + 0'09 = 0'34 \rightarrow 0'25\,x + 0'4\,y = 0'34 - 0'09 \rightarrow \mathbf{0'25\,x + 0'4\,y = 0'25}$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} 0'25x + 0'4y = 0'25 \\ x + y = 0'7 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} \\ *(-0'25) \end{matrix} \begin{cases} 0'25x + 0'4y = 0'25 \\ -0'25x - 0'25y = -0'175 \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones: $0'15\,y = 0'075 \rightarrow y = \dfrac{0'075}{0'15} = 0'5$

Sustituyendo este valor de y en la segunda ecuación: $x + 0'5 = 0'7 \rightarrow x = 0'7 - 0'5 = 0'2$

El árbol del problema queda:



Por lo que $P(M) = 0'2 \rightarrow$ *el 20% usa móvil de 4´7"* y $P(A) = 0'5 \rightarrow$ *el 50% usa móvil de 5".*

Respuesta: el 20% usan un teléfono móvil de 4,7 pulgadas y el 50% usan un teléfono móvil de 5 pulgadas.

b) *Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.*
La probabilidad pedida es: $P\left(A/U\right)$

$$P\left(A/U\right) = \frac{P(A \cap U)}{P(U)} = \frac{0'5 \cdot 0'4}{0'34} = \frac{0'2}{0'34} = \frac{10}{17} \approx 0'5882$$

La probabilidad pedida es 0´5882.

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4,7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

Para el cálculo de esta probabilidad del árbol tachamos la rama de M (móviles de 4´7")
La probabilidad pedida sería:

$$P\left(A/_{U}\right)=\frac{P(A\cap U)}{P(U)}=\frac{0'5\cdot 0'4}{0'3\cdot 0'3+0'5\cdot 0'4}=\frac{0'2}{0'29}=\frac{20}{29}\approx 0'6897$$

La probabilidad pedida es 0´6897.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30% tiene menos de 30 años, un 55% tiene entre 30 y 60 años, y el 15% restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

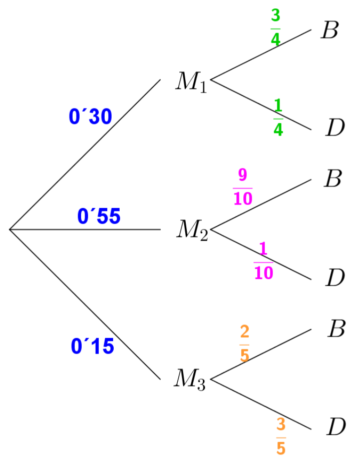
a) Llamemos A al suceso "el cliente seleccionado tiene más de 60 años" y llamemos B al suceso "el cliente seleccionado no presentó parte de accidente año pasado". Calcula $P(A \cup B)$. *(3 puntos)*
b) Llamemos C al suceso "el cliente seleccionado tiene 30 años o más" y D al suceso "el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(C \cap D)$. *(3 puntos)*
c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos. *(4 puntos)*

Solución:
En este problema en los datos iniciales hay unos rangos de edades pero posteriormente en los apartados hay otros. Vamos a considerar los siguientes sucesos:

M_1 = el cliente seleccionado tiene menos de 30 años
M_2 = el cliente seleccionado tiene entre 30 y 60 años
M_3 = el cliente seleccionado tiene más de 60 años
B = el cliente seleccionado no presento parte de accidentes
D = el cliente seleccionado presento parte de accidentes

Del enunciado del problema se deduce que:
"un 30% tiene menos de 30 años" $\rightarrow$ $P(M_1) = 0{\acute{}}30$
"un 55% tiene entre 30 y 60 años" $\rightarrow$ $P(M_2) = 0{\acute{}}55$
"el 15% restante tiene más de 60 años" $\rightarrow$ $P(M_3) = 0{\acute{}}15$
"entre los de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte" $\rightarrow$ $P\left(B/M_1\right) = \frac{3}{4}$ y $P\left(D/M_1\right) = \frac{1}{4}$
"entre los que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte" $\rightarrow$ $P\left(B/M_2\right) = \frac{9}{10}$ y $P\left(D/M_2\right) = \frac{1}{10}$
"entre los de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte" $\rightarrow$ $P\left(B/M_3\right) = \frac{2}{5}$ y $P\left(D/M_3\right) = \frac{3}{5}$

El árbol del problema será:



a) Llamamos A ="el cliente seleccionado tiene más de 60 años" = M_3

Debemos calcular $P(A \cup B) = P(M_3 \cup B)$

$$P(M_3 \cup B) = P(M_3) + P(B) - P(M_3 \cap B)$$

Del árbol del problema obtenemos:

$$P(M_3) = 0'15; \qquad P(B) = 0'30\,\frac{3}{4} + 0'55\,\frac{9}{10} + 0'15\,\frac{2}{5} = \frac{39}{50} = 0'78; \qquad P(M_3 \cap B) = 0'15\,\frac{2}{5} = 0'06$$

y $P(M_3 \cup B) = 0'15 + 0'78 - 0'06 = 0'87$

Respuesta: P (A ∪B) = 0´87.

b) Llamamos C ="el cliente seleccionado tiene más de 30 o más años" = $M_2 \cup M_3$

Debemos calcular $P(C \cap D) = P[(M_2 \cup M_3) \cap D] = P[(M_2 \cap D) \cup (M_3 \cap D)] =$

$$= P(M_2 \cap D) + P((M_3 \cap D)) - P[(M_2 \cap D) \cap (M_3 \cap D)] \overset{*}{=}$$

Por definición M_2 y M_3 son sucesos incompatibles, se refieran a rangos de edades diferentes, y por tanto $M_2 \cap M_3 = \varnothing$, *luego* $P[(M_2 \cap D) \cap (M_3 \cap D)] = 0$

Las otras dos probabilidades las obtenemos del árbol del problema,

$$\overset{*}{=} 0'55\,\frac{1}{10} + 0'15\,\frac{3}{5} = 0'145.$$

Solución: P (C ∩D) = 0´145.

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos.

La probabilidad pedida es $P\left(M_1 \cup M_2 / D\right)$

Por definición de los sucesos M_1, M_2 y M_3, M_3 es el complementario de $M_1 \cup M_2$

Por tanto,

$$P\left(M_1 \cup M_2 / D\right) = 1 - P\left(M_3 / D\right) = 1 - \frac{P(M_3 \cap D)}{P(D)} = 1 - \frac{0'15\,\frac{3}{5}}{0'30\,\frac{1}{4} + 0'55\,\frac{1}{10} + 0'15\,\frac{3}{5}} = 1 - \frac{9}{22} = \frac{13}{22} = 0'59090...$$

Solución: $P\left(M_1 \cup M_2 / D\right) = \frac{13}{22} \cong 0'5909$.

El cálculo directo sería:

$P\left(M_1 \cup M_2 / D\right) = \frac{P[(M_1 \cup M_2) \cap D]}{P(D)} =$ *{el desarrollo del numerados es similar al realizado en el apartado a) y quedaría}* $\frac{P(M_1 \cap D) + (M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0'30\,\frac{1}{4} + 0'55\,\frac{1}{10}}{0'30\,\frac{1}{4} + 0'55\,\frac{1}{10} + 0'15\,\frac{3}{5}} = \frac{13}{22}$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane. *(2´5 puntos)*

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas? *(2´5 puntos)*

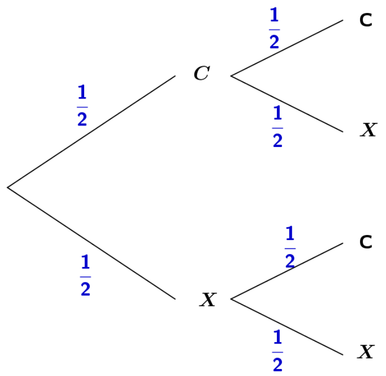
c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado? *(2´5 puntos)*

d) Llamemos A al suceso “el jugador no gana” y llamemos B al suceso “el jugador obtiene un seis al lanzar el dado”. ¿Son independientes los sucesos? *(2´5 puntos)*

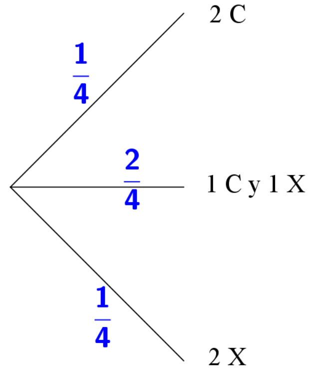
Solución:

Este problema consiste en lanzar dos monedas y un dado, directamente su árbol sería bastante grande (24 resultados). Ahora bien, considerando las condiciones en que se gana podremos simplificar el árbol.

Veamos el árbol del lanzamiento de dos monedas,

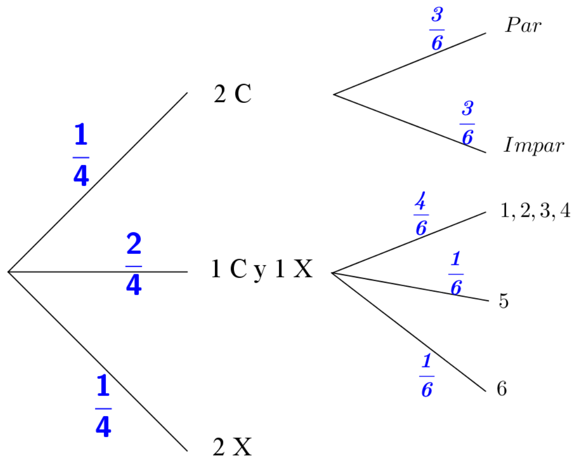


Nos interesan los resultados
2 caras,
1 cara y 1 cruz,
2 cruces,



Del resultado del dado no interesa, cuando salen dos caras si es par o no y cuando sale una cara que sea 5 o 6. Cuando salen dos cruces no interesa el resultado del dado.

Por tanto el árbol “completo” sería:



a) Probabilidad de que el jugador gane.

El jugador gana cuando obtiene dos caras y número par o una sola cara y 5 o 6.

$$P(ganar)=\frac{1}{4}\frac{3}{6}+\frac{2}{4}\frac{1}{6}+\frac{2}{4}\frac{1}{6}=\frac{3}{24}+\frac{2}{24}+\frac{2}{24}+=\frac{7}{24}$$

Respuesta: la probabilidad de que el jugador gane es 7/24.

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

La probabilidad pedida es: $P\left(2C / ganar \right)$

$$P\left(2C / ganar \right) = \frac{P(2C \cap ganar)}{P(ganar)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7}$$

La probabilidad pedida es 3/7.

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado?

La probabilidad pedida es: $P\left(obtener\ 5 / ganar \right)$

$$P\left(obtener\ 5 / ganar \right) = \frac{P(obtener\ 5 \cap ganar)}{P(ganar)} = \frac{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{2}{24}}{\frac{7}{24}} = \frac{2}{7}$$

La probabilidad pedida es 2/7.

d) Llamemos A al suceso "el jugador no gana" y llamemos B al suceso "el jugador obtiene un seis al lanzar el dado". ¿Son independientes los sucesos?

Estos dos sucesos serán independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A) = 1 - P(ganar) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}, \qquad P(B) = \frac{1}{6}$$

Al obtener un 6 en el dado para que no gane tienen que salir 2 cruces en las monedas, por tanto $P(A \cap B) = \frac{1}{4}\frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{1}{24} \\ P(A)\cdot P(B) = \frac{17}{24}\cdot\frac{1}{6} = \frac{17}{144} \end{array}\right\} \rightarrow \quad P(A \cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? *(4 puntos)*

b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París? *(3 puntos)*

c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? *(3 puntos)*

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

R = Arsenio Lupin atraca el Banco de Paris el 31 de diciembre

$\overline{R}$ = Arsenio Lupin ***no*** *atraca el Banco de Paris el 31 de diciembre*

S = la alarma suena *$\overline{S}$ = la alarma no suena*

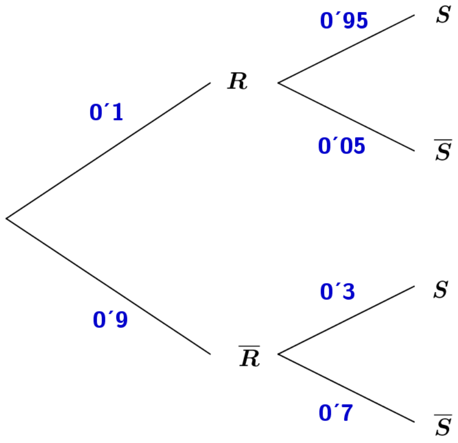
De los datos del enunciado, la probabilidad de que la alarma suene depende de si se está cometiendo atraco o no. Arsenio Lupin es el único atracador al banco el día 31 de diciembre.

"El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco población" $\rightarrow$

$P(R) = 0'1$ y como se produce atraco $P(S) = 0'95$ y $P(\overline{S}) = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(\overline{R}) = 1 - 0'1 = 0'9$ y como no se produce atraco $P(S) = 0'3$ y $P(\overline{S}) = 1 - 0'3 = 0'7$

El árbol del problema es:



a) Probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma test.

La probabilidad pedida es: $P(R \cap \overline{S})$

$$P(R \cap \overline{S}) = 0'1 \cdot 0'05 = 0'005$$

b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París?

La probabilidad pedida es: $P\left(S/\overline{R}\right)$

$$P\left(\overline{R}/S\right) = \frac{P(\overline{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{0'9 \cdot 0'3}{0'1 \cdot 0'95 + 0'9 \cdot 0'3} = \frac{54}{73} \cong 0'7397$$

c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París?

La probabilidad pedida es: $P\left(R/\overline{S}\right)$

$$P\left(R/\overline{S}\right)=\frac{P\left(R\cap\overline{S}\right)}{P(\overline{S})}=\frac{0'1\cdot 0'05}{0'1\cdot 0'05+0'9\cdot 0'7}=\frac{1}{127}\cong 0'0079$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? *(3 puntos)*

b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$. *(3 puntos)*

c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes? *(4 puntos)*

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

J = el cliente está casado *G = el cliente no está casado*

1V= el cliente realiza un viaje al año

2V = el cliente realiza dos viajes al año

3V = el cliente realiza tres o más viajes al año

Los datos del enunciado podemos resumirlos en la siguiente tabla. Como en el enunciado se indican tantos por ciento, consideramos que hay 100 clientes.

	1V un viaje	2V dos viajes	3V tres o más viajes	
J (casados)	54	14	2	
G (no casados)				
	60	30	10	

Completamos la tabla con las restas y sumas correspondientes

	1V un viaje	2V dos viajes	3V tres o más viajes	
J (casados)	54	14	2	70
G (no casados)	6	16	8	30
	60	30	10	100

a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado?

La probabilidad pedida es: $P\left(G/(2V \cup 3V)\right)$

$$P\left(G/(2V \cup 3V)\right) = \frac{16+8}{30+10} = \frac{24}{40} = 0'6$$

b) Calcula $P(G \cup H)$

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = \frac{30}{100} + \frac{60+30}{100} - \frac{6+16}{100} = \frac{30+90-22}{100} = \frac{98}{100} = 0'98$$

c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes?

Debemos comprobar si $P(J \cap K) = P(J) \cdot P(K)$

$$\left.\begin{aligned} P(J \cap K) &= \frac{54+2}{100} = \frac{56}{100} \\ P(J) &= \frac{70}{100} \\ P(K) &= \frac{60+10}{100} = \frac{70}{100} \end{aligned}\right\} \quad ¿\frac{56}{100} = \frac{70}{100}\,\frac{70}{100}?; \quad ¿\frac{56}{100} = \frac{49}{100}? \quad No$$

Por tanto, los sucesos J y K no son independientes.

Problema 5. Un *30 %* de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el *40 %* de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el *40 %* sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? *(4 puntos)*
b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? *(3 puntos)*
c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? (3 puntos)

Solución:
Utilizando los sucesos: I = el directivo sabe inglés y A = el directivo sabe alemán

(Denotamos por I^c y A^c, respectivamente, el suceso complementario de I y el suceso complementario de A).

Los datos del problema son:

"Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán" $\rightarrow P(I\cap A) = 0´30,$

"el 40 % de los directivos sabe inglés" $\rightarrow P(I) = 0´40$ *y*

"Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés" $\rightarrow P\left(I/A\right)=0´40.$

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? Debemos obtener P(A).

$$P\left(I/A\right)=\frac{P(I\cap A)}{P(A)} \quad \rightarrow \quad 0´40=\frac{0´30}{P(A)} \quad \rightarrow \quad P(A)=\frac{0´3}{0´4}=0´75$$

Solución: P(A) = 0´75.

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? Debemos obtener $P(A\cap I^c)$

$$A=\{I\cup I^c=U \quad \text{suceso seguro}\} A\cap(I\cup I^c)=(A\cap I)\cup(A\cap I^c), \quad \text{luego}$$

$$P(A)=P[(A\cap I)\cup(A\cap I^c)]=P(A\cap I)+P(A\cap I^c)-P(A\cap I\cap A\cap I^c)=$$

$$A\cap I\cap A\cap I^c=A\cap I\cap I^c=\{\text{Como} \quad I\cap I^c=\varnothing\}=A\cap\varnothing=\varnothing \quad \{\text{suceso imposible}\}$$

$$=P(A\cap I)+P(A\cap I^c)-P(\varnothing)=P(A\cap I)+P(A\cap I^c)-0=P(A\cap I)+P(A\cap I^c)$$

Hemos obtenido: $P(A)=P(A\cap I)+P(A\cap I^c)$

Sustituyendo las probabilidades conocidas:

$$\rightarrow \quad 0´75=0´3+P(A\cap I^c) \quad \rightarrow \quad P(A\cap B^c)=0´75-0´3=0´45$$

Solución: la probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés es 0´45.

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? Debemos obtener $P\left(I/A^c\right)$

$$P\left(I/A^c\right)=\frac{P(I\cap A^c)}{P(A^c)}=\frac{P(I\cap A^c)}{1-P(A)}=\frac{P(I\cap A^c)}{1-0´75}=\frac{P(I\cap A^c)}{0´25}=$$

Calculemos $P(I\cap A^c)$ *de forma similar al cálculo realizado en el apartado anterior.*

$$I=\{A\cup A^c=U \quad \text{suceso seguro}\} I\cap(A\cup A^c)=(I\cap A)\cup(I\cap A^c), \quad \text{luego}$$

$$P(I)=P[(I\cap A)\cup(I\cap A^c)]=P(I\cap A)+P(I\cap A^c)-P(I\cap A\cap I\cap A^c)=$$

$$A\cap I\cap A\cap I^c=A\cap I\cap I^c=\{\text{Como} \quad I\cap I^c=\varnothing\}=A\cap\varnothing=\varnothing \quad \{\text{suceso imposible}\}$$

Entonces $P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) - P(\varnothing) = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) - 0 = P(I \cap A) + P(I \cap A^c)$

Hemos obtenido: $P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) \rightarrow 0´4 = 0´3 + P(I \cap A^c) \rightarrow P(I \cap A^c) = 0´4 - 0´3 = 0´1$

Finalmente, $P\left(I/_{A^c}\right) = \dfrac{P(I \cap A^c)}{0´25} = \dfrac{0´1}{0´25} = 0´4$

Solución: la probabilidad hay de que si el directivo no sabe alemán sepa inglés es 0´40.

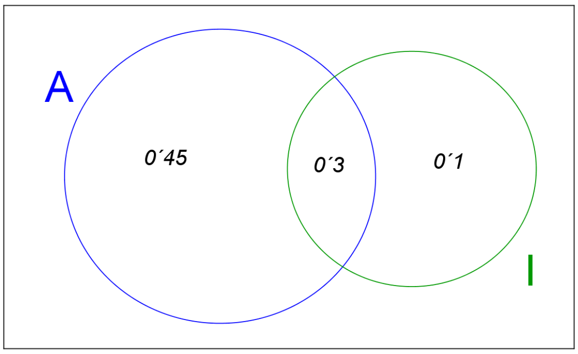
* * * * * * *

Los apartados b y c podemos resolverlos utilizando el diagrama de Venn de estos dos sucesos.
De los datos y cálculos realizados inicialmente y en el apartado a) se deduce que:

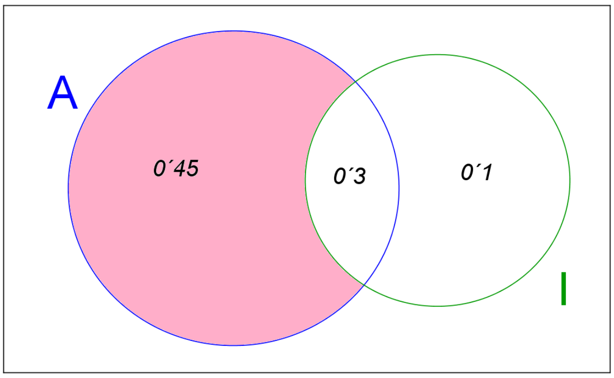
$P(I) = 0´4$

$P(I \cap A) = 0´3$

$P(A) = 0´75 \rightarrow P(A^c) = 0´25$



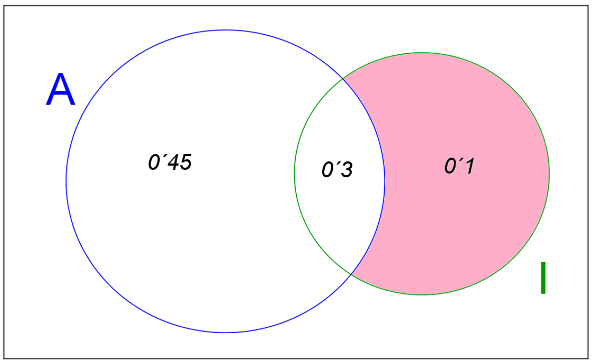
b) ¿ $P(A \cap I^c)$?



$P(A \cap I^c) = 0´45$

c) ¿ $P\left(I/_{A^c}\right)$?

$I \cap A^c$ *es*:



$P\left(I/_{A^c}\right) = \dfrac{P(I \cap A^c)}{P(A^c)} = \dfrac{0´1}{0´25} = 0´4$

Problema 6. Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? *(3 puntos)*

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado" y "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda". *(4 puntos)*

c) ¿Son independientes los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda"? *(3 puntos)*

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:
En el dado equilibrado,

A = *obtener un número mayor que dos* $\rightarrow \; P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

B = *obtener un número menor o igual que dos* $\rightarrow \; P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

C = *obtener cara* y X = *obtener cruz*

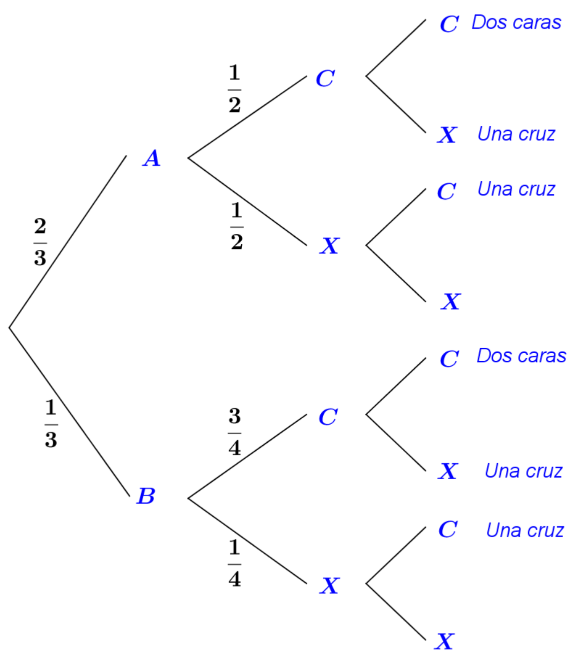
En la moneda bien construida, $P(C)=P(X)=\frac{1}{2}$.

En la moneda defectuosa la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz,

$$P(C)=3\,P(X) \;\rightarrow\; \text{como} \quad P(C)+P(X)=1 \;\rightarrow\; 3\,P(X)+P(X)=1 \;\rightarrow\; 4P(X)=1 \;\rightarrow\; P(X)=\frac{1}{4}$$

$$\text{y} \quad P(C)=3\,\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

El árbol del problema es:



a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado?

Llamando CC = obtener dos caras en los dos lanzamientos de la moneda,

la probabilidad pedida es: $P\left(A/_{CC}\right)$

$$P\left(A/_{CC}\right)=\frac{P(A\cap CC)}{P(CC)}=\frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{3}{16}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}}=\frac{8}{17}\cong 0'4706$$

Solución: $P\left(A/_{CC}\right)=\frac{8}{17}\cong 0'4706.$

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado" y "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda"

Llamando D = obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda

la probabilidad pedida es: $P(B\cup D)$

$$P(B\cup D)=P(B)+P(D)-P(B\cap D)=\frac{1}{3}+\frac{13}{16}-\frac{5}{16}=\frac{5}{6}\cong 0'8333$$

$$P(B)=\frac{1}{3}$$

$$P(D)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\frac{15}{16}=\frac{13}{16}$$

$$P(B\cap D)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3}\frac{15}{16}=\frac{5}{16}$$

Solución: $P(B\cup D)=\frac{5}{6}\cong 0'8333.$

c) ¿Son independientes los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda"?

Llamamos: F = obtener un 6 al lanzar el dado y G = obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda.

F y G serán independientes si P(F∩G) = P(F) . P(G)

$$P(F)=\frac{1}{6}$$

$$P(G)=\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{48}=\frac{3}{16}$$

$P(F\cap G)=$ *{como se obtiene un 6 (>2) la moneda que se lanza está bien construida}* $\frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$

$$P(F)P(G)=\frac{1}{6}\frac{3}{16}=\frac{1}{32}\neq\frac{1}{24}=P(F\cap G)$$

Solución: los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda" no son independientes.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. El 60% de los alumnos de Bachillerato de un Instituto son chicas y el 40% chicos. La mitad de los chicos lee asiduamente la revista COMIC, mientras que sólo el 30% de las chicas la lee.

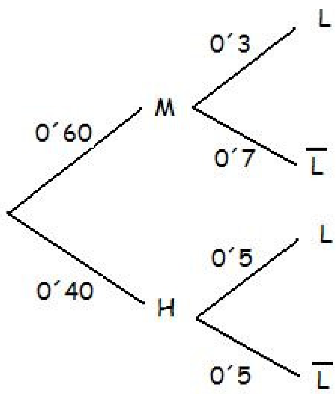
a) Obtener de forma razonada la probabilidad de que un alumno elegido al azar lea esta revista.
b) Si un alumno elegido al azar nos dice que no lee la revista, obtener de forma razonada la probabilidad de que sea chica.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

M = ser chica
H = ser chico
L = leer la revista COMIC

De los datos del problema el árbol es:



Obtengamos las probabilidades pedidas,

a) $p(L) = 0'6\ .\ 0'3 + 0'4\ .\ 0'5 = 0'18 + 0'20 = 0'38$

b) $p\left(M/\overline{L}\right) = \dfrac{p\left(M \cap \overline{L}\right)}{p\left(\overline{L}\right)} = \dfrac{0'6\ .\ 0'7}{1 - p(L)} = \dfrac{0'42}{1 - 0'38} = \dfrac{0'42}{0'62} = 0'68$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. En una bolsa de caramelos surtidos hay 10 caramelos con sabor a naranja, 5 con sabor a limón y 3 con sabor a fresa. Todos tienen el mismo tamaño y hasta extraerlos de la bolsa no se sabe de qué sabor son. Se extraen tres caramelos al azar.

a) Calcular de forma razonada la probabilidad de extraer primero uno con sabor a naranja, luego otro con sabor a fresa y, por último, uno con sabor a limón.

b) Calcular de forma razonada la probabilidad que sean de tres sabores diferentes.

Solución:

El proceso consiste en una extracción sin devolución.

Llamando N = caramelo con sabor a naranja, F = caramelo con sabor a fresa y L = caramelo con sabor a limón

a) p(1ºN, 2ºF, 3ºL)= $\frac{10}{18}\frac{3}{17}\frac{5}{16}=\frac{150}{4896}=\frac{25}{816}=0'0306$

b) Este caso difiere del anterior en que no importa el orden en que se extraigan los tres caramelos diferentes.

Los resultados posibles para que los tres caramelos sean diferentes son:

$$N\left\langle\begin{matrix} L & - & F \\ F & - & L\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} 1^{\text{o}}\,N,\, 2^{\text{o}}\,L,\, 3^{\text{o}}\,F \\ 1^{\text{o}}\,N,\, 2^{\text{o}}\,F,\, 3^{\text{o}}\,L\end{matrix}$$

$$F\left\langle\begin{matrix} N & - & L \\ L & - & N\end{matrix}\right.$$

$$L\left\langle\begin{matrix} N & - & F \\ F & - & N\end{matrix}\right.$$

es decir, hay 6 resultados posibles y cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad, la calculada en el apartado anterior. Luego

$$p(\textit{tres sabores diferentes}) = 6\,\frac{25}{816}=\frac{25}{136}=0'1838$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Un ordenador personal tiene cargados dos programas antivirus A_1 y A_2 que actúan simultánea e independientemente. Ante la presencia de un virus, el programa A_1 lo detecta con una probabilidad de 0´9 y el programa A_2 lo detecta con una probabilidad de 0´8. Calcular de forma razonada:

a) La probabilidad de que un virus cualquiera sea detectado.
b) La probabilidad de que un virus sea detectado por el programa A_1 y no por A_2.

Solución:
Nombramos los siguientes sucesos:

D_1 = *el programa* A_1 *detecta el virus*	$p(D_1) = 0´9$
$D_1´$ = *el programa* A_1 *no detecta el virus*	$p(D_1´) = 0´1$
D_2 = *el programa* A_2 *detecta el virus*	$p(D_2) = 0´8$
$D_2´$ = *el programa* A_2 *no detecta el virus*	$p(D_2´) = 0´2$

Ante la presencia de un virus los sucesos que pueden ocurrir son:

$D_1 \cap D_2$
$D_1 \cap D_2´$
$D_1´ \cap D_2$
$D_1´ \cap D_2´$

Como los antivirus A_1 y A_2 actúan simultánea e independientemente $p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \cdot p(D_2)$ *y análogamente con los otros sucesos.*

a) Sea D = un virus es detectado
Un virus es detectado cuando lo detecta cualquiera de los dos programas, por lo tanto $D = (D_1´ \cap D_2´)´$
$p(D) = p(\,(D_1´ \cap D_2´)´\,) = 1 - p(D_1´ \cap D_2´) = 1 - p(D_1´) \cdot p(D_2´) = 1 - 0´1 \cdot 0´2 = 1 - 0´02 = 0´98$

b) La probabilidad de que un virus sea detectado por el programa A_1 *y no por* A_2 *la calculamos mediante* $p(D_1 \cap D_2´)$
$p(D_1 \cap D_2´) = p(D_1) \cdot p(D_2´) = 0´9 \cdot 0´2 = 0´18$

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Septiembre 2003

EJERCICIO B

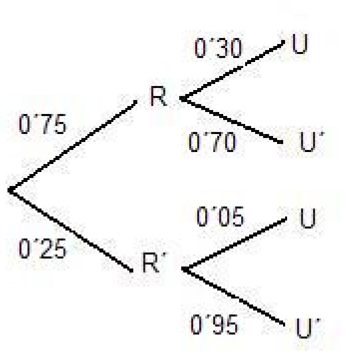
PROBLEMA 4. El 75 % de los jóvenes que tienen vídeo consola ha recibido propaganda de un determinado vídeo juego y el 25% restante no. El 30% de los que recibieron la propaganda ha utilizado después dicho vídeo juego y también lo ha hecho el 5% de los que no la recibieron. Calcular de forma razonada:

a) La probabilidad de que un joven con vídeo consola seleccionado al azar haya utilizado este vídeo juego.
b) La probabilidad de que un joven con vídeo consola seleccionado al azar haya recibido propaganda y no haya utilizado el vídeo juego.

Solución:

Utilizamos los sucesos:
R = el joven con vídeo consola ha recibido propaganda del juego.
R' = el joven con vídeo consola no ha recibido propaganda del juego.
U = el joven ha utilizado el juego.
U´= el joven no ha utilizado el juego.

El árbol del problema será



$a)\quad p(U) = p(U \cap R) + p(U \cap R') = 0´75\ .\ 0´30 + 0´25\ .\ 0´05 = 0´2250 + 0´0125 = 0´2375$

$b)\quad p(R \cap U') = 0´75\ .\ 0´70 = 0´525$

EJERCICIO A

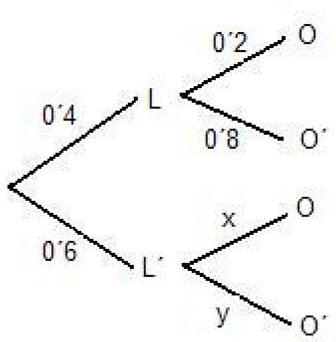
PROBLEMA 4. Se ha realizado una encuesta a un grupo de estudiantes de informática. Entre sus conclusiones está que en un 40% ha recibido algún curso de LINUX. Además, el 20% de aquellos que recibieron algún curso de LINUX tienen ordenador en casa. Si un 10% de estudiantes de informática tienen ordenador en casa y no han recibido ningún curso de LINUX, calcular:

a) La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa y haya recibido un curso de LINUX.
b) La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa.
c) Si un estudiante de informática tiene ordenador en casa, la probabilidad de que haya recibido un curso de LINUX.

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:

L = recibir curso de LINUX
L´= no recibir curso de LINUX
O = tener ordenador en casa
O´= no tener ordenador en casa

De los datos del enunciado obtenemos el siguiente árbol,



Cálculo de los valores de x e y.
Como sabemos, por el enunciado, que un 10% de estudiantes de informática tienen ordenador en casa y no han recibido ningún curso de LINUX, esto quiere decir que $P(L´ \cap O) = 0´1$

$P(L´ \cap O) = P(L´)\, P(O / L´)$

$0´1 = 0´6\, x$, *por lo tanto,* $x = 1/6$

$P(L \cap O) + P(L \cap O´) + P(L´ \cap O) + P(L´ \cap O´) = 1$

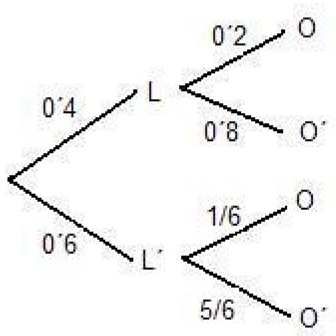
$0´4 \cdot 0´2 + 0´4 \cdot 0´8 + 0´1 + 0´6 \cdot y = 1$

$0´08 + 0´32 + 0´1 + 0´6\, y = 1$

$0´5 + 0´6\, y = 1$

$0´6\, y = 0´5 \rightarrow y = 0´5/0´6 \rightarrow y = 5/6$

El árbol del problema será,



a) $P(L \cap O) = 0´4 \cdot 0´2 = 0´08$

b) $P(O) = P(L \cap O) + P(L´ \cap O) = 0´08 + 0´1 = 0´18$

c) $$P(L/O) = \frac{P(L \cap O)}{P(O)} = \frac{0´08}{0´18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

EJERCICIO B

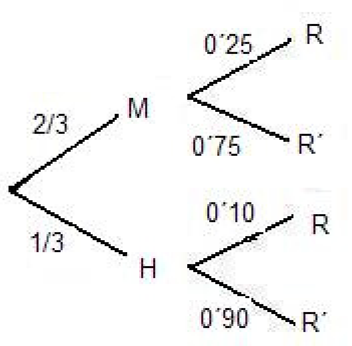
PROBLEMA 4. En una población hay el doble de mujeres que de hombres. El 25% de las mujeres son rubias y el 10% de los hombres también son rubios. Calcular:

a) Se elige al azar una persona y resulta ser rubia, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre y no sea rubio?

Solución:
Consideramos los sucesos,

M = ser mujer
H = ser hombre
R = ser rubio
R´= no ser rubio

El árbol del problema es,



$$a)\quad P(M/R)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{2}{3}0'25}{\frac{2}{3}0'25+\frac{1}{3}0'10}=\frac{\frac{0'5}{3}}{\frac{0'5}{3}+\frac{0'1}{3}}=\frac{\frac{0'5}{3}}{\frac{0'6}{3}}=\frac{0'5}{0'6}=\frac{5}{6}$$

$$b)\quad P(H\cap R')=\frac{1}{3}0'90=0'3$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. En un grupo de 2º de bachillerato el 15% estudia Matemáticas, el 30% estudia Economía y el 10% ambas materias. Se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos *Estudiar Matemáticas* y *Estudiar Economía*?

b) Si se escoge un estudiante del grupo al azar, calcular la probabilidad de que no estudie ni Matemáticas ni Economía.

Solución:

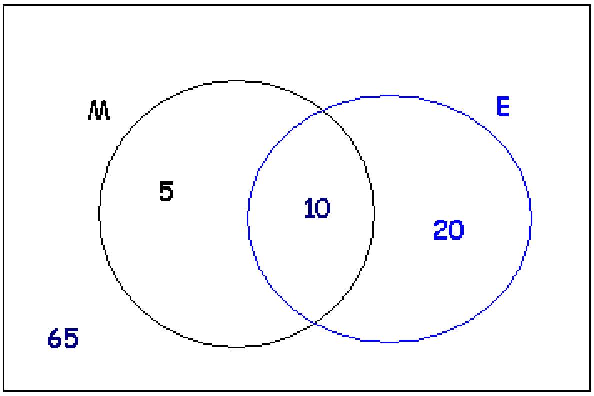
Consideramos los siguientes sucesos:

M = estudiar Matemáticas

E = estudiar Economía

Por el enunciado conocemos que $P(M) = 0'15$, $P(E) = 0'30$ *y* $P(M \cap E) = 0'10$

El diagrama de los sucesos sería:



a) Para comprobar si los sucesos M *y* E *son independientes veamos si se cumple que* $P(M/E) = P(M)$ *y* $P(E/M) = P(E)$

$$P\left(M/E\right) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0'10}{0'30} = 0'33 \neq 0'15 = P(M)$$

$$P\left(E/M\right) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{0'10}{0'15} = 0'67 \neq 0'30 = P(E)$$

Por lo tanto los sucesos M *y* E *no son independientes.*

b) No estudiar ni Matemáticas ni Economía es el suceso $\overline{M} \cap \overline{E} = \overline{M \cup E}$ *(por las leyes de Morgan)*

$$P\left(\overline{M \cup E}\right) = 1 - P(M \cup E) = 1 - [P(M) + P(E) - P(M \cap E)] = 1 - [0'15 + 0'30 - 0'10] = 1 - 0'35 = 0'65$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. En un centro escolar, 22 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos llevan gafas. Si el número de chicas es tres veces superior al de chicos, hallar la probabilidad de que un estudiante elegido al azar:

a) No lleve gafas
b) Sea chica y lleve gafas
c) Sea chica, sabiendo que lleva gafas.

Solución:

Consideramos los sucesos:

G = Llevar gafas
B = ser chica
C = ser chico

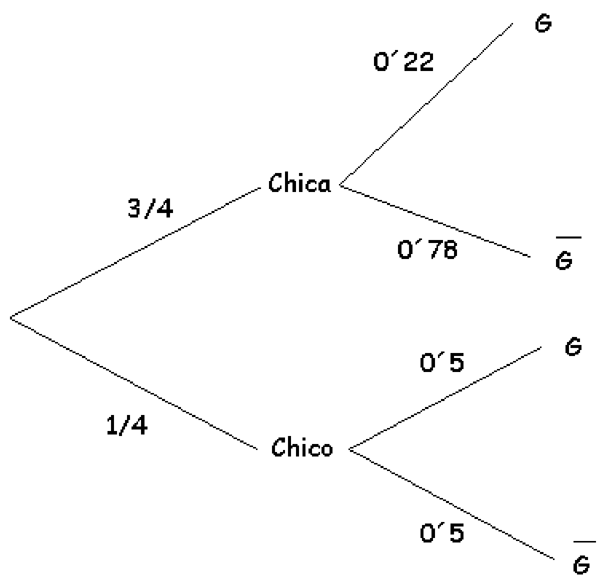
De los datos del problema sabemos:

P (G / B) = 22/100 = 0´22
P (G / C) = 5/10 = 0´5
P (B) = 3 P (C); como la población estudiada del centro escolar está formada chicos y chicas se cumple que P (B) + P (C) = 1

Resolviendo el sistema $\begin{cases} P(B)+P(C)=1 \\ P(B)=3P(C) \end{cases}$

Sustituyendo P(B) en la 1ª ecuación
3 P (C) + P (C) = 1
4 P (C) = 1;   P (C) = ¼
Luego P (B) = 3/4

El árbol del problema es,



a)

$$P(\overline{G})=P\left(\overline{G}/B\right)P(B)+P\left(\overline{G}/C\right)P(C)=0'78\,\frac{3}{4}+0'5\,\frac{1}{4}=0'71$$

b)

$$P(B\cap G)=\frac{3}{4}\,0'22=0'165$$

c)

$$P\left(B/G\right)=\frac{P(B\cap G)}{P(G)}=\frac{0'165}{P\left(G/B\right)P(B)+P\left(G/C\right)P(C)}=\frac{0'165}{0'22\,\frac{3}{4}+0'5\,\frac{1}{4}}=\frac{0'165}{0'29}=0'569$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Un estudio revela que el 10% de los oyentes de radio sintoniza a diario las cadenas Music y Rhythm, que un 35% sintoniza a diario con Music y que el 55% de los oyentes no escucha ninguna de las dos emisoras. Obtén:

a) La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm.
b) La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm pero no la Music.
c) La probabilidad de que un oyente, del que sabemos que escucha Rhythm, escuche Music.

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos: M = oyente sintoniza Music; R = oyente sintoniza Thythm
De los datos del problema obtenemos las siguientes probabilidades:

el 10% de los oyentes de radio sintoniza a diario las cadenas Music y Rhythm $p(M \cap R) = 0'1$

un 35% sintoniza a diario con Music $p(M) = 0'35$

el 55% de los oyentes no escucha ninguna de las dos emisoras $p(\overline{M \cup R}) = 0'55$

a) Probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm, p(R).

$p(\overline{M \cup R}) = 0'55 \quad \rightarrow \quad p(M \cup R) = 1 - 0'55 = 0'45$

Por otro lado, $p(M \cup R) = p(M) + p(R) - p(M \cap R)$

Sustituyendo los valores conocidos,
$0'45 = 0'35 + p(R) - 0'1;$
$p(R) = 0'45 - 0'35 + 0'1 = 0'2$

b) Probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm pero no la Music, $p(R \cap \overline{M})$

Llamando E al suceso seguro y Φ al suceso imposible,

$R = R \cap E = R \cap (M \cup \overline{M}) = (R \cap M) \cup (R \cap \overline{M})$

como $(R \cap M) \cap (R \cap \overline{M}) = R \cap M \cap \overline{M} = R \cap \Phi = \Phi$

$p(R) = p[(R \cap M) \cup (R \cap \overline{M})] = p(R \cap M) + p(R \cap \overline{M})$

Sustituyendo los valores conocidos,

$0'2 = 0'1 + p(R \cap \overline{M}) \quad \rightarrow \quad p(R \cap \overline{M}) = 0'2 - 0'1 = 0'1$

c) Probabilidad de que un oyente, del que sabemos que escucha Rhythm, escuche Music, $p(M/R)$

$$p(M/R) = \frac{p(M \cap R)}{p(R)} = \frac{0'1}{0'2} = 0'5$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Dados dos sucesos aleatorios independientes se sabe que la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es 3/25 y la de que ocurra al menos uno de los dos es 17/25. Calcula la probabilidad de cada uno de los dos sucesos.

Solución:

Sean A y B los sucesos aleatorios. Sabemos que,

la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es 3/25, $p(A\cap B)=\dfrac{3}{25}$

la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos es 17/25 $p(A\cup B)=\dfrac{17}{25}$

Busquemos una relación entre las probabilidades conocidas y las de los sucesos A y B.

Como los sucesos son independientes

$$p(A/B)=p(A) \quad y \quad p(B/A)=p(B)$$

como $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} \;\rightarrow\; \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=p(A) \;\rightarrow\; p(A\cap B)=p(A).\,p(B)$

Por otro lado sabemos que $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

Podemos plantear el siguiente sistema,

$$\begin{cases} p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B) \\ p(A\cap B)=p(A).\,p(B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{17}{25}=p(A)+p(B)-\dfrac{3}{25} \\ \dfrac{3}{25}=p(A).\,p(B) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{20}{25}=p(A)+p(B) \\ \dfrac{3}{25}=p(A).\,p(B) \end{cases}$$

de 1ª, $p(A)=\dfrac{20}{25}-p(B)$

sustituyendo en la 2ª, $\dfrac{3}{25}=\left[\dfrac{20}{25}-p(B)\right].\,p(B)$

$$\frac{3}{25}=\frac{20}{25}p(B)-[p(B)]^2$$

$$[p(B)]^2-\frac{20}{25}p(B)+\frac{3}{25}=0$$

$$p(B)=\frac{\frac{20}{25}\pm\sqrt{\left(-\frac{20}{25}\right)^2-4.1.\frac{3}{25}}}{2.1}=\frac{\frac{20}{25}\pm\sqrt{\frac{400}{625}-\frac{12}{25}}}{2}=\frac{\frac{20}{25}\pm\sqrt{\frac{400}{625}-\frac{300}{625}}}{2}=\frac{\frac{20}{25}\pm\sqrt{\frac{100}{625}}}{2}=\frac{\frac{20}{25}\pm\frac{10}{25}}{2}=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\frac{20}{25}+\frac{10}{25}}{2}=\dfrac{\frac{30}{25}}{2}=\dfrac{30}{50}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{\frac{20}{25}-\frac{10}{25}}{2}=\dfrac{\frac{10}{25}}{2}=\dfrac{10}{50}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Sí $p(B)=\dfrac{3}{5} \;\rightarrow\; p(A)=\dfrac{20}{25}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{20-15}{25}=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$

Sí $p(B)=\dfrac{1}{5} \;\rightarrow\; p(A)=\dfrac{20}{25}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{20-5}{25}=\dfrac{15}{25}=\dfrac{3}{5}$

Por lo tanto las probabilidades de los dos sucesos pueden ser,

$$1^{\text{a}})\quad p(A)=\frac{1}{5}\quad y\quad p(B)=\frac{3}{5}$$

o

$$2^{\text{a}})\quad p(A)=\frac{3}{5}\quad y\quad p(B)=\frac{1}{5}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Se sabe que p(A) = 0,4, p(B) = 0,6 y p(A $\cup$ B) = 0,7.

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

b) Calcula p(A $\cap \overline{B}$), donde $\overline{B}$ denota el suceso contrario o complementario de B.

c) Calcula p($\overline{A} \cap \overline{B}$).

Solución:

a) A y B son sucesos independientes cuando $p(A \cap B) = p(A)\ p(B)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$0'7 = 0'4 + 0'6 - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = 1'3 - 0'7 = 0'3$$

$$p(A)\ p(B) = 0'4\,.\,0'6 = 0'24 \neq 0'3$$

Luego A y B no son independientes.

b) Podemos expresar,

$$A = A \cap E = A \cap \left(B \cup \overline{B}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$$

$$p(A) = p\left[(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right] = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) - p\left[(A \cap B) \cap \left(A \cap \overline{B}\right)\right] =$$

$$= p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) - p\left(A \cap B \cap A \cap \overline{B}\right) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) - p(\varnothing) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$$

sustituyendo las probabilidades conocidas,

$$0'4 = 0'3 + p(A \cap \overline{B}) \quad \rightarrow \quad p(A \cap \overline{B}) = 0'1$$

c) Sabemos que

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

$$\textit{por lo que}: \quad p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - p\left(A \cup B\right) = 1 - 0'7 = 0'3$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace 2 dianas de cada 3 disparos, y el otro consigue 3 dianas de cada 4 disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcula:

a) La probabilidad de que los dos acierten.
b) La probabilidad de que uno acierte y el otro no.
c) La probabilidad de que ninguno acierte.
d) La probabilidad de que alguno acierte.
e) Sumar las probabilidades de a), b) y c), justificando la suma obtenida.

Solución:

Utilizamos los sucesos: A = primer tirador acierta; B = segundo tirador acierta

De los datos del problema sabemos que

$$p(A)=\frac{2}{3} \quad y \quad p(B)=\frac{3}{4}$$
$$p(\overline{A})=\frac{1}{3} \quad y \quad p(\overline{B})=\frac{1}{4}$$

Como los resultados de un tirador no influyen en el otro, los dos disparan simultáneamente, A y B son sucesos independientes.

Los posibles resultados al disparar los dos tiradores serán

$$\begin{cases} A \begin{cases} B & A\cap B \\ \overline{B} & A\cap \overline{B} \end{cases} \\ \overline{A} \begin{cases} B & \overline{A}\cap B \\ \overline{B} & \overline{A}\cap \overline{B} \end{cases} \end{cases}$$

a) *Los dos acierten*

$$p(A\cap B)=\frac{2}{3}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

b) *Uno acierte y el otro no*

$$p(A\cap \overline{B})+p(\overline{A}\cap B)=\frac{2}{3}\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\frac{3}{4}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$$

c) *Ninguno acierte*

$$p(\overline{A}\cap \overline{B})=\frac{1}{3}\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

d) *Alguno acierte*

$$p(A\cap \overline{B})+p(\overline{A}\cap B)+p(A\cap B)=\frac{5}{12}+\frac{1}{2}=\frac{11}{12}$$

(para el cálculo usamos los resultados de los apartados b) y a))

e) *Sumar apartados a), b) y c)*

$$a)+b)+c)=\frac{1}{2}+\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6+5+1}{12}=\frac{12}{12}=1$$

Los resultados posibles de este "experimento" son los cuatro descritos inicialmente en el árbol, al sumar las probabilidades de los apartados a), b) y c) sumamos las de todos los resultados posibles, esta es la razón de que la suma sea 1.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Una empresa automovilística fabrica su modelo *Assegurat* en cuatro factorías distintas, A, B, C y D. La factoría A produce el 40% de los coches de este modelo con un 5% de defectuosos, la B produce el 30% con un 4% de defectuosos, la C el 20% con un 3% de defectuosos y, por último, la factoría D el 10% restante con un 2% de defectuosos. Si elegimos un coche del modelo *Assegurat* al azar, calcula:

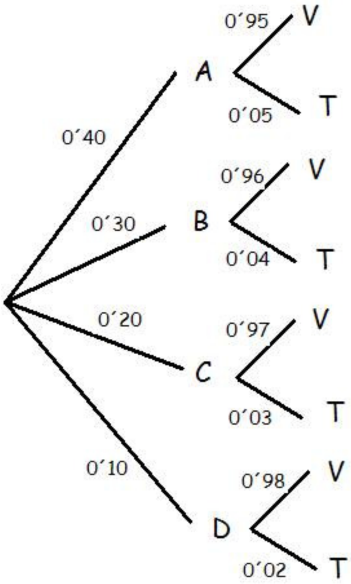
a) La probabilidad de que sea defectuoso.
b) Si no es defectuoso, la probabilidad de que haya sido fabricado en la factoría C.

Solución:

Si usamos los siguientes sucesos:

A = coche producido en la factoría A
B = coche producido en la factoría B
C = coche producido en la factoría C
D = coche producido en la factoría D
V = modelo correcto
T = modelo defectuoso

el árbol del problema podemos representarlo de la siguiente forma,



a)

$$p(T) = 0{\acute{}}40\,.\,0{\acute{}}05 + 0{\acute{}}30\,.\,0{\acute{}}04 + 0{\acute{}}20\,.\,0{\acute{}}03 + 0{\acute{}}10\,.\,0{\acute{}}02 = 0{\acute{}}04$$

b)

$$p\left(C/V\right) = \frac{p(C \cap V)}{p(V)} = \frac{0{\acute{}}20\,.\,0{\acute{}}97}{1 - p(T)} = \frac{0{\acute{}}194}{1 - 0{\acute{}}04} = 0{\acute{}}2020833 \cong 0{\acute{}}20$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que P(A) = 0,7 , P(B) = 0,2 y P(A / B) = 1 .

a) Calcula las probabilidades siguientes: $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ y $P(B/A)$.
b) ¿Son los sucesos A y B independientes?

Solución:

a)

$P(A \cap B)$

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow 1 = \frac{P(A \cap B)}{0'2} \rightarrow P(A \cap B) = 0'2$$

$P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'7 + 0'2 - 0'2 = 0'7$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{0'2}{0'7} = \frac{2}{7} = 0'285... \cong 0'3$$

b) Los sucesos A y B son independientes si la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades. Veamos si es así,

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0'2 \\ P(A)\,.\,P(B) = 0'7\,.\,0'2 = 0'14 \end{array}\right\} \textit{luego no son independientes.}$$

BLOQUE C

PROBLEMA C1. Cierto estudio de mercado revela que el 50% de los entrevistados consume el producto A, el 40% consume el producto B y el 25% no consume ninguno de ellos. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados, expresa los siguientes sucesos en función de los sucesos simples A={Consumir A} y B={Consumir B}, y calcula su probabilidad

a) Que consuma los dos productos.
b) Que sólo consuma uno de los productos.
c) Si sabemos que consume el producto A, que consuma también el B.

Solución:

De los datos del problema sabemos que P(A) = 0´5, P(B) = 0´4 y $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0'25$

a) *Probabilidad que consuma los dos productos, nos piden* $P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

como $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) \quad \rightarrow \quad 0'25 = 1 - P(A \cup B) \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = 1 - 0'25 = 0'75$

Por lo que

$$0'75 = 0'5 + 0'4 - P(A \cap B) \quad \rightarrow \quad 0'75 = 0'9 - P(A \cap B) \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = 0'9 - 0'75 = 0'15$$

b) *Probabilidad que sólo consuma uno de los productos.*
Llamando C ={consumir sólo uno de los productos}

$$P(C) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0'75 - 0'15 = 0'6$$

c) *Probabilidad que consuma el producto B, sabiendo que consume el A.*

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0'15}{0'5} = 0'3$$

BLOQUE C

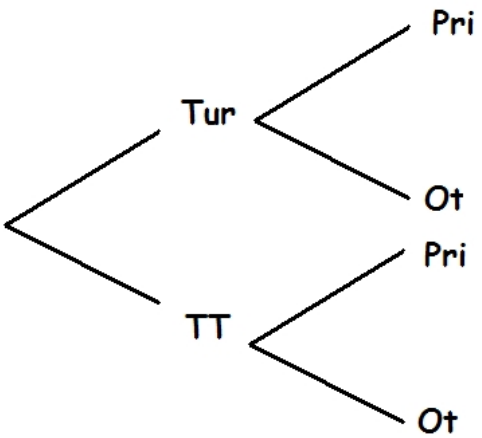
PROBLEMA C2. Se realiza un estudio de mercado sobre la venta de turismos y coches todoterreno y se observa que el 20% de las compras de todoterreno corresponden a personas que adquieren un coche por primera vez, mientras que este porcentaje se duplica en el caso de los turismos. Además, el 75% de las ventas de coches corresponde a turismos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que ha comprado un coche y que éste no sea el primer coche que compra?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer coche adquirido por una persona sea un turismo?
c) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que ha comprado un coche y que éste no sea el primer coche que compra y, además, sea un todoterreno?

Solución:
Si utilizamos los siguientes sucesos:

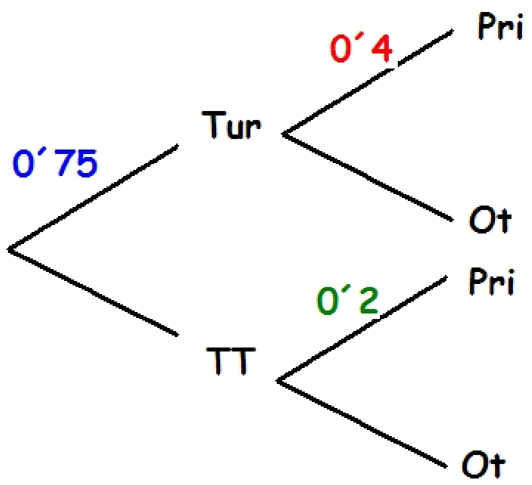
Tur = comprar un turismo
TT = comprar un todoterreno
Pri = adquirir un coche por primera vez
Ot = adquirir un coche por otras veces

El árbol del problema sería:

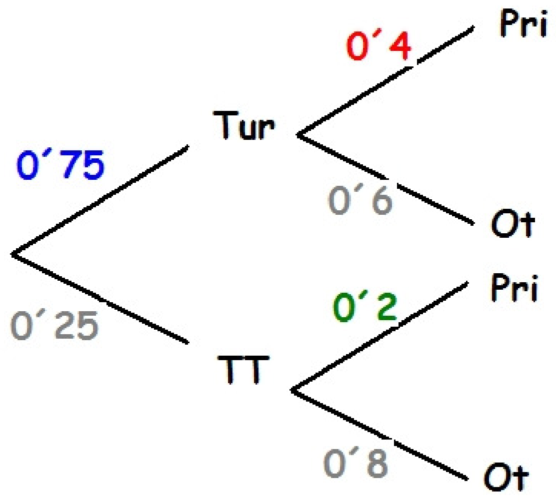


Añadiendo los datos del problema al árbol,

"el 75% de las ventas de coches corresponde a turismos",
"se observa que el 20% de las compras de todoterreno corresponden a personas que adquieren un coche por primera vez"
"mientras que este porcentaje se duplica en el caso de los turismos"



Finalmente, el árbol completo sería,



En la resolución del problema hay que tener en cuenta que el estudio se refiere únicamente a personas que compran coches, no están consideradas en el estudio la personas que no compran coches.

a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que ha comprado un coche y que éste no sea el primer coche que compra?

$P(Ot) = P(Tur \cap Ot) + P(TT \cap Ot) = 0´75 \,.\, 0´6 + 0´25 \,.\, 0´8 = 0´65$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer coche adquirido por una persona sea un turismo?

$P(Tur \cap Pri) = 0´75 \,.\, 0´4 = 0´3$

c) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que ha comprado un coche y que éste no sea el primer coche que compra y, además, sea un todoterreno?

$P(TT \cap Ot) = 0´25 \,.\, 0´8 = 0´2$

OPCIÓN A

PROBLEMA 3. En un colegio se va a hacer una excursión a una estación de esquí con tres autobuses: uno grande, uno mediano y uno pequeño. La cuarta parte de los alumnos apuntados a la excursión irá en el autobús pequeño, la tercera parte en el mediano y el resto en el grande. Saben esquiar el 80% de los alumnos que viajarán en el autobús pequeño, el 60% de los que irán en el mediano y el 40% de los del autobús grande.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno de la excursión, elegido al azar, sepa esquiar.
b) Elegimos un alumno de la excursión al azar y se observa que no sabe esquiar. ¿Cuál es la probabilidad de que viaje en el autobús mediano?
c) Se toma un alumno de la excursión al azar y se observa que sabe esquiar. ¿Cuál es la probabilidad de que viaje en el autobús grande o en el pequeño?

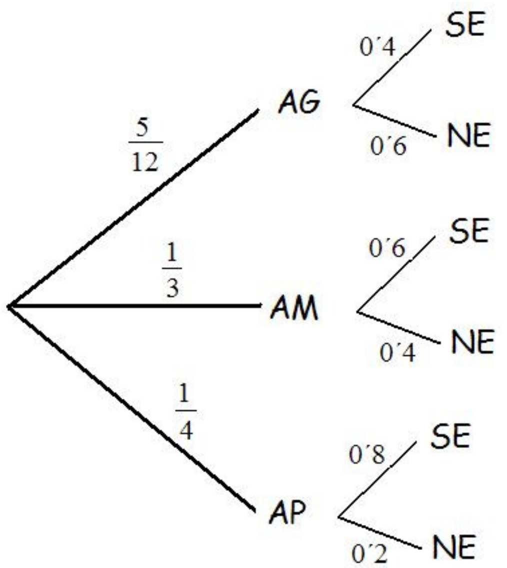
Solución:
Utilizando los siguientes sucesos

AG = viaja en autobús grande   *AM = viaja en autobús mediano*   *AP = viaja en autobús pequeño*

SE = sabe esquiar   *NE = no sabe esquiar* $\left(\text{siendo} \quad \overline{SE} = NE \right)$

Los datos del problema podemos resumirlos en el siguiente árbol:

En el autobús grande viaja: $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12-4-3}{12} = \frac{5}{12}$ *de los alumnos*



a)

$$P(SE) = \frac{5}{12} \,.\, 0´4 + \frac{1}{3} \,.\, 0´6 + \frac{1}{4} \,.\, 0´8 = 0´5667$$

b)

$$P\left(AM/_{NE}\right) = \frac{P(AM \cap NE)}{P(NE))}$$

Como $\overline{SE} = NE$ *y* $P(SE) = 0´5667 \quad \rightarrow \quad P(NE) = 1 - P(SE) = 1 - 0´5667 = 0´4333$

Luego $P\left(AM/_{NE}\right) = \frac{P(AM \cap NE)}{P(NE))} = \frac{\frac{1}{3} \,.\, 0´4}{0´4333} = 0´3077$

c)

$$Luego \quad P\left({}^{(AG \cup AP)}\!\big/_{SE} \right) = \frac{P((AG \cup AP) \cap SE)}{P(SE))} = \frac{\frac{5}{12}\,.\,0{\acute{}}4 + \frac{1}{4}\,.\,0{\acute{}}8}{0{\acute{}}5667} = \frac{0{\acute{}}3667}{0{\acute{}}5667} = 0{\acute{}}6471$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 3. Se tienen 10 monedas en una bolsa. Seis monedas son legales mientras que las restantes tienen dos caras. Se elige al azar una moneda.

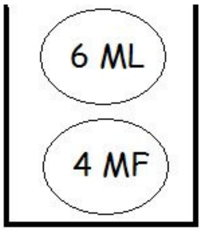
a) Calcula la probabilidad de obtener cara al lanzarla.
b) Si al lanzarla se ha obtenido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda sea de curso legal?

Si se sacan dos monedas al azar sucesivamente y sin reemplazamiento

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una sea legal y la otra no lo sea?

Solución:

La urna del problema es:

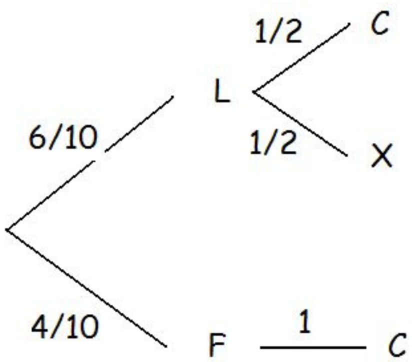


Siendo ML las monedas legales y MF las monedas falsas

Utilizamos los siguientes sucesos:

L = sacar moneda legal (tiene cara y cruz)
F = sacar moneda falsa (tiene dos caras)
C = obtener cara
X = obtener cruz

Elegimos una moneda al azar y observamos si es cara o cruz. El árbol de este problema será:



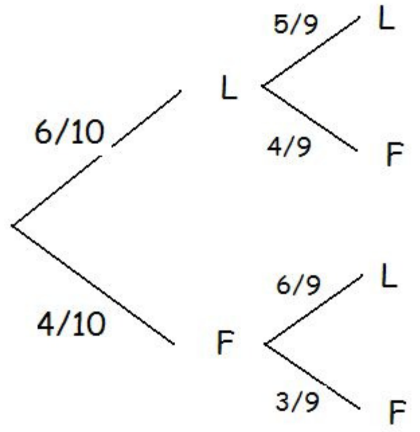
a)

$$P(C) = \frac{6}{10}\frac{1}{2} + \frac{4}{10}1 = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

b)

$$P\left(L/C\right) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{6}{10}\frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{3}{7}$$

Se sacan dos monedas al azar y sin reemplazamiento, el árbol del problema es:



c)

$$P(una\ legal\ \ y\ la\ otra\ no) = P(L \cap F) + P(F \cap L) = \frac{6}{10}\frac{4}{9} + \frac{4}{10}\frac{6}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

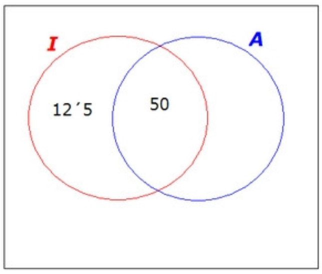
OPCIÓN A

PROBLEMA 3. En una cierta empresa de exportación el 62,5% de los empleados habla inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80% habla también alemán. Se sabe que sólo la tercera parte de los empleados que no hablan inglés si habla alemán.

a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?
b) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?
c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?

Solución:
De los datos del problema sabemos:
El 62´5% habla inglés (I) y de estos el 80% habla alemán (A), luego hablan alemán e inglés el 80% del 62´5% = 50%.
Luego los que sólo hablan inglés son: 62´5% – 50% = 12´5%

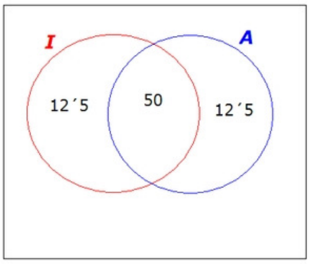
Por ahora sabemos:



De los que no hablan inglés, 100% – 62´5% = 37´5%, la tercera parte habla alemán.

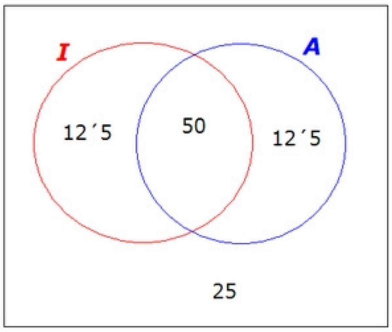
Luego los que sólo hablan alemán son: $\frac{37'5\%}{3} = 12'5\%$.

Por lo que:



Finalmente, no hablan ni alemán ni inglés el (100 – 12´5 – 50 – 12´5)% = 25%

Es decir:



A partir de estos datos vamos a responder a las preguntas.

a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas? El 50%

b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán? El (50 + 12´5)% = 62´5%

c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?

$$P\left(I / \overline{A} \right) = \frac{P\left(I \cap \overline{A} \right)}{P\left(\overline{A} \right)} = \frac{12'5}{12'5 + 25} = \frac{12'5}{37'5} = \frac{1}{3}$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 3. En un instituto hay dos grupos de segundo de Bachillerato. En el grupo A hay 10 chicas y 15 chicos, de los que 2 chicas y 2 chicos cursan francés. En el grupo B hay 12 chicas y 13 chicos, de los que 2 chicas y 3 chicos cursan francés.

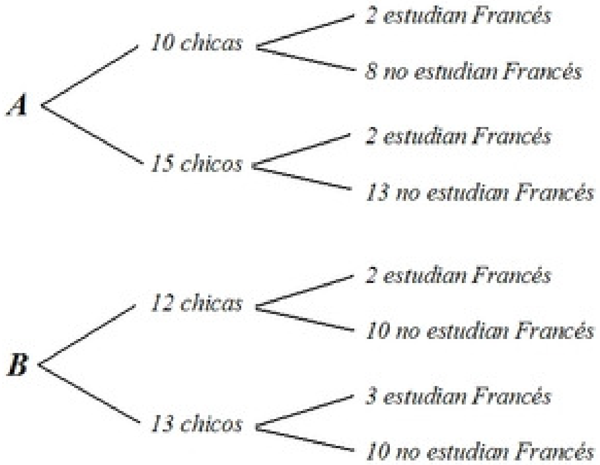
a) Se elige una persona de segundo de Bachillerato al azar. ¿Cuál es a probabilidad de que no curse francés?

b) Sabemos que una determinada persona matriculada en segundo de Bachillerato cursa francés. ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo B?

c) Se elige al azar una persona de segundo de Bachillerato del grupo A. ¿Cuál es a probabilidad de que sea un chico y no curse francés?

Solución:

Los datos del problema podemos representarlos mediante el siguiente árbol,



Y en total hay 50 personas de las cuales 9 estudian Francés.

a) Llamando F = la persona estudia Francés

Probabilidad de que no curse francés $= P(\overline{F}) = \frac{41}{50}$

b) Llamando B = la persona pertenece al grupo B

$$P\left(B/F\right) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{5/50}{9/50} = \frac{5 \cdot 50}{9 \cdot 50} = \frac{5}{9}$$

c) La persona elegida es de 2ºA, probabilidad de ser chico y no estudiar Francés $= \frac{13}{25}$

2 estudian Francés

10 chicas

8 no estudian Francés

A

2 estudian Francés

15 chicos

13 no estudian Francés

2 estudian Francés

12 chicas

10 no estudian Francés

B

3 estudian Francés

13 chicos

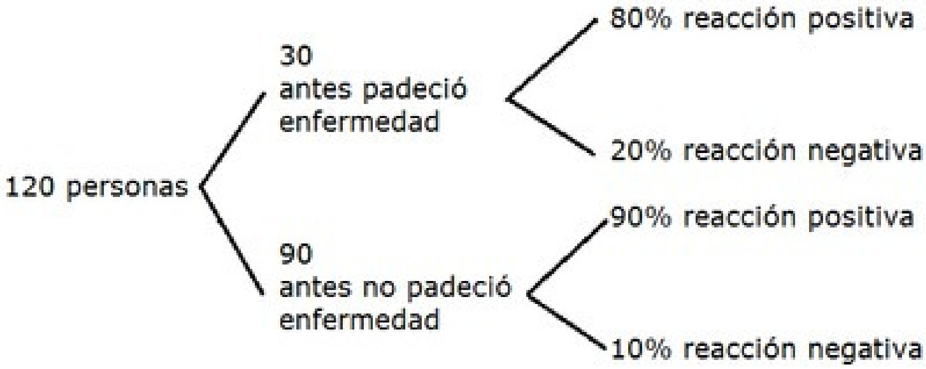
10 no estudian Francés

OPCIÓN A

Problema 3. Se ha hecho un estudio de un nuevo tratamiento en un colectivo de 120 personas aquejadas de cierta enfermedad, 30 de las cuales ya habían padecido la enfermedad con anterioridad. Entre las que habían padecido la enfermedad con anterioridad, el 80% ha reaccionado positivamente al nuevo tratamiento. Entre las que no la habían padecido, ha sido el 90% el que reaccionó positivamente.

a) Si elegimos un paciente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no reaccione positivamente al nuevo tratamiento?
b) Si un paciente ha reaccionado positivamente el tratamiento, ¿cuál es la probabilidad de que no haya padecido la enfermedad con anterioridad?
c) Si elegimos dos pacientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos pacientes hayan padecido la enfermedad con anterioridad?

Solución:
Los datos del problema podemos resumirlos en el siguiente árbol,



Utilizamos los sucesos:
RP = reaccionar positivamente al tratamiento
E = padeció la enfermedad con anterioridad
Resolvamos los apartados

a) Probabilidad de que no reaccione positivamente al nuevo tratamiento

$$p(\overline{RP}) = \frac{30}{120}\frac{20}{100} + \frac{90}{120}\frac{10}{100} = \frac{6}{120} + \frac{9}{120} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

b) Si un paciente ha reaccionado positivamente el tratamiento, ¿cuál es la probabilidad de que no haya padecido la enfermedad con anterioridad?

$$p\left(\overline{E}/_{RP}\right) = \frac{p(\overline{E}\cap RP)}{p(RP)} = \frac{\frac{90}{120}\frac{90}{100}}{\frac{30}{120}\frac{80}{100} + \frac{90}{120}\frac{90}{100}} = \frac{\frac{81}{120}}{\frac{24}{120} + \frac{81}{120}} = \frac{\frac{81}{120}}{\frac{105}{120}} = \frac{81}{105} = \frac{27}{35}$$

c) Si elegimos dos pacientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos pacientes hayan padecido la enfermedad con anterioridad?
Como hemos estudiado 120 pacientes y de ellos 30 habían padecido la enfermedad con anterioridad, la probabilidad pedida será:

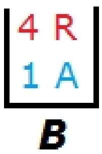
$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{30}{120}\frac{29}{119} = \frac{1}{4}\frac{29}{119} = \frac{29}{476}$$

OPCIÓN B

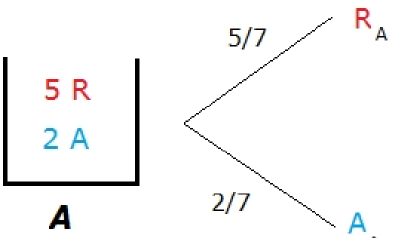
Problema 3. Una urna A contiene cinco bolas rojas y dos azules. Otra urna B contiene cuatro bolas rojas y una azul. Tomamos al azar una bola de la urna A y, sin mirarla, la pasamos a la urna B. A continuación extraemos con reemplazamiento dos bolas de la urna B. Halla la probabilidad de que:

a) Ambas bolas sean de color rojo.
b) Ambas bolas sean de distinto color.
c) Si la primera bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la bola que hemos pasado de la urna A a la urna B haya sido azul?

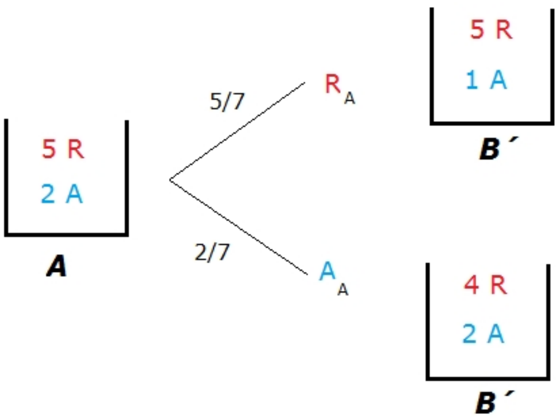
Solución:

Tenemos una urna B cuyo contenido es 

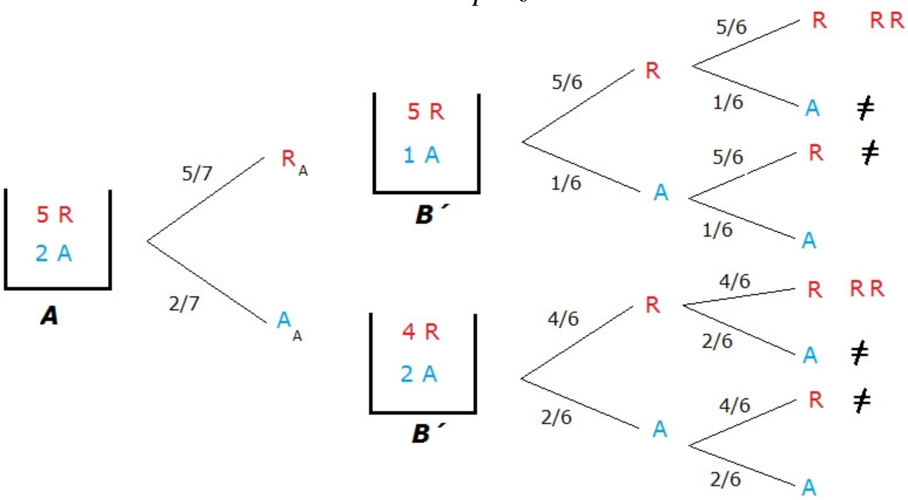
Empezamos con una urna A, de la que sacamos una bola que puede ser roja (R_A) o azul (A_A)



Esta bola la introducimos en el urna B, por lo que el contenido de la urna B cambiará, a la urna B modificada la llamamos B´



Extraemos de la urna B´ dos bolas con reemplazamiento



El gráfico anterior es el árbol del problema para resolver los dos primeros apartados.

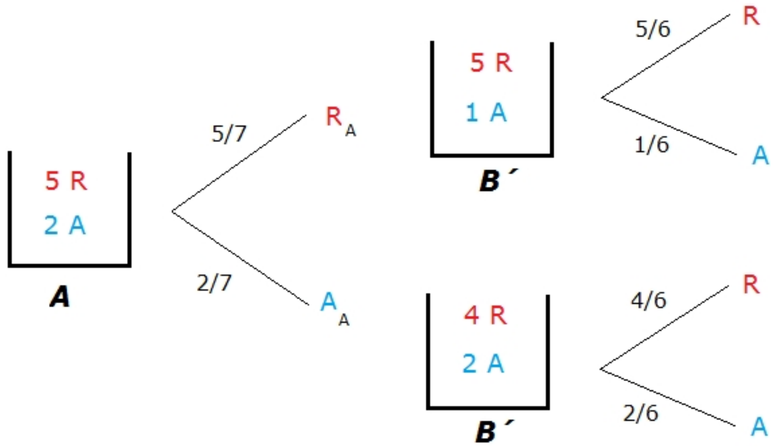
a) Llamando RR = ambas bolas sean de color rojo, la probabilidad a calcular es:

$$p(RR)=\frac{5}{7}\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\frac{2}{7}\frac{4}{6}\frac{4}{6}=\frac{125}{252}+\frac{32}{252}=\frac{157}{252}=0'6230$$

b) Llamando ≠ = ambas bolas sean de distinto color, la probabilidad a calcular es:

$$p(\neq)=\frac{5}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\frac{5}{7}\frac{1}{6}\frac{5}{6}+\frac{2}{7}\frac{4}{6}\frac{2}{6}+\frac{2}{7}\frac{2}{6}\frac{4}{6}=\frac{25}{252}+\frac{25}{252}+\frac{16}{252}+\frac{16}{252}=\frac{82}{252}=0'3254$$

c) En este apartado de la urna B´ sólo sacamos una bola. El árbol del problema será:



Llamando: A_A *= la bola pasada del la urna A a la B es azul*
R = la bola extraída de B´ es roja
la probabilidad a calcular es:

$$p\left(\frac{A_A}{R}\right)=\frac{p(A_A\cap R)}{p(R)}=\frac{\frac{2}{7}\frac{4}{6}}{\frac{5}{7}\frac{5}{6}+\frac{2}{7}\frac{4}{6}}=\frac{\frac{8}{42}}{\frac{25}{42}+\frac{8}{42}}=\frac{\frac{8}{42}}{\frac{33}{42}}=\frac{8}{33}=0'2424$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que P(A)=0,4, P($A \cup B$)=0,8 y P($A^c \cup B^c$)=0,7, donde A^c y B^c representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B, respectivamente. Se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? *(2´5 puntos)*
b) La probabilidad de que sólo se verifique uno de los sucesos. *(2´5 puntos)*
c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^c. *(2´5 puntos)*
d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^c/B. *(2´5 puntos)*

Solución:
a) ¿A y B son independientes?
Los sucesos A y B son independientes si $P(A\cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

A partir de los datos del problema calculemos las probabilidades que faltan {P(B) y P(A∩B)}

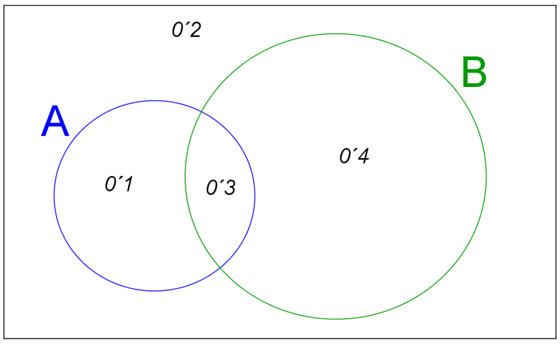
Como $P(A^c \cup B^c) = 0´7$, *aplicando las leyes de Morgan:* $P(A^c \cup B^c) = P(\,(A\cap B)^c\,) = 1 - P(A\cap B)$, *luego:* $0´7 = 1 - P(A\cap B)$; $P(A\cap B) = 1 - 0´7 = 0´3$.

Por otro lado, $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ *entonces:* $0´8 = 0´4 + P(B) - 0´3$; $0´8 = 0´1 + P(B)$; $P(B) = 0´8 - 0´1 = 0´7$.

Por tanto, $P(A\cap B) = 0´3$
$P(A) \,.\, P(B) = 0´4 \,.\, 0´7 = 0´28$

Es decir, $P(A\cap B) \neq P(A) \,.\, P(B)$ *y, en conclusión,* ***A y B no son sucesos independientes***.

Para resolver los siguientes apartados utilizaremos el diagrama de Venn con estos dos sucesos:



b) Probabilidad de que sólo se verifique uno de los sucesos.
Del diagrama anterior, P(sólo se verifica A) = 0´1 y P(sólo se verifica B) = 0´4.
P(sólo se verifique uno de los sucesos) = 0´1 + 0´4 = 0´5

P(sólo se verifique uno de los sucesos) = 0´5

c) $P(B^c)$
$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0´7 = 0´3$.

$\boldsymbol{P(B^c) = 0´3}$

d) P(A^c/B)

$$P\left(A^c/B\right)=\frac{P\left(A^c\cap B\right)}{P(B)}=\frac{0'4}{0'7}=\frac{4}{7}$$

Por tanto, $P\left(A^c/B\right)=\frac{4}{7}$.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. En una determinada ciudad, se sabe que el 80% de los hogares están formados por más de una persona. Se sabe también que el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal *Panoramix*. Por último, se sabe que el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal *Panoramix*. Seleccionamos al azar un hogar de esta ciudad.

a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal *Panoramix*.
b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal *Panoramix*. *(4 puntos)*
c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal *Panoramix*?
d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal *Panoramix*, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

(Cada apartado puntúa 2´5 puntos)

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:
A = hogar formado por una única persona *B = hogar formado por más de una persona*
C = el hogar está suscrito a Panoramix *D = el hogar no está suscrito a Panoramix*

Por definición de los sucesos A y B son complementarios, luego P(A) = 1 – P(B).
Lo mismo ocurre con los sucesos C y D.

Considerando todos los datos del enunciado,
"el 80% de los hogares están formados por más de una persona" $\rightarrow$ *P(B) = 0´80 y P(A) = 1 – 0´8 = 0´2*

"el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix" $\rightarrow$ *P(C) = 0´30*
"el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix" $\rightarrow$ $P(B \cap C) = 0{'}20$

a) Probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal Panoramix.
La probabilidad pedida es: P(D)

Como C y D son sucesos complementarios, ***P(D) =*** *1 – P(C) = 1 – 0´3 =* ***0´7***

b) Probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix.
La probabilidad pedida es: $P(A \cap C)$
A y B es el conjunto de todos los hogares, luego $C = C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) \rightarrow$
$P(C) = P[(C \cap A) \cup (C \cap B)] = P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(C \cap A \cap C \cap B) =$
$= P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(C \cap A \cap B) =$
{como A y B son complementarios: $A \cap B = \varnothing \rightarrow A \cap B \cap C = \varnothing$ *y* $P(A \cap B \cap C) = 0$*}*
$= P(C \cap A) + P(C \cap B)$
De los datos del problema conocemos P(C) y $P(B \cap C)$*, luego*
$0{'}3 = P(A \cap C) + 0{'}2 \rightarrow P(A \cap C) = 0{'}3 - 0{'}2 = 0{'}1$

Luego $P(A \cap C) = 0{'}1 \cdot$

c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal Panoramix?

La probabilidad pedida es: $P\left(C/A\right)$

$$P\left(C/A\right) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{0'1}{0'2} = 0'5$$

Por tanto, $P\left(C/A\right) = 0'5$.

d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal Panoramix, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

La probabilidad pedida es: $P\left(B/C\right)$

$$P\left(B/C\right) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0'2}{0'3} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, $P\left(B/C\right) = \frac{2}{3}$.