OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un estudiante reparte propaganda publicitaria para conseguir ingresos. Le pagan 8 cts. de euro por cada impreso colocado en el parabrisas de un coche y 12 cts. por cada uno depositado en un buzón. Ha calculado que cada día puede repartir como máximo 150 impresos y la empresa le exige diariamente que la diferencia entre los colocados en coche y el doble de los colocados en buzones no sea inferior a 30 unidades. Además, tiene que introducir en buzones al menos 15 impresos diariamente. ¿Cuántos impresos debe colocar en coches y buzones para maximizar sus ingresos diarios? ¿Cuál es este ingreso máximo?

Solución:
Utilizamos las siguientes incógnitas

x = número de impresos a colocar diariamente en parabrisas de coches
y = número de impresos a colocar diariamente en buzones

Del enunciado deducimos:
"Le pagan 8 cts de euro por impreso en el parabrisas y 12 cts por impreso en buzón";

$$\text{ingresos diarios} = 0'08\,x + 0'12\,y$$

"cada día puede repartir como máximo 150 impresos"; $x + y \leq 150$

"la empresa le exige diariamente que la diferencia entre los colocados en coche y el doble de los colocados en buzones no sea inferior a 30 unidades"; $x - 2y \geq 30$

"tiene que introducir en buzones al menos 15 impresos diariamente"; $y \geq 15$

Como x e y representan número de impresos, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \in N$

El problema a resolver es:

$$\text{Maximizar } z = 0'08\,x + 0'12\,y$$
$$\text{s.a. } \begin{cases} x + y \leq 150 \\ x - 2y \geq 30 \\ y \geq 15 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \leq 150$

$x + y = 150$

x	y
0	150
150	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \leq 150$ Sí

(b) $x - 2y \geq 30$

$x - 2y = 30$

x	y
60	15
30	0

¿(0,0) cumple?

$0 - 2\,.\,0 \geq 30$ No

(c) $y \geq 15$

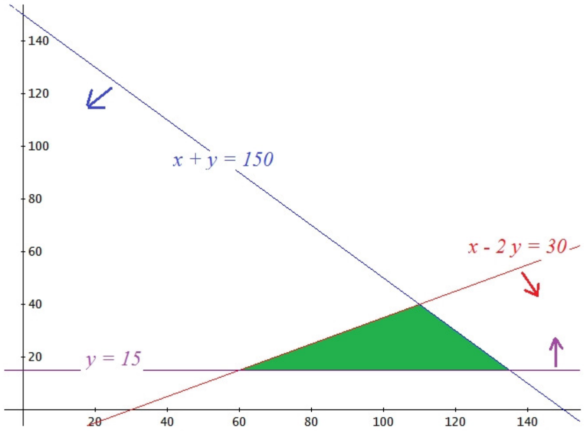
$y = 15$

x	y
0	15
10	15

¿(0,0) cumple?

$0 \geq 15$ No

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

De (a) y (b): B (110 , 40)

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ x - 2y = 30 \end{cases}$$

restando ambas ecuaciones: 3 y = 120;   y = 40

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: x + 40 = 150;   x = 110

De (a) y (c): C (135 , 15)

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ y = 15 \end{cases}$$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: x + 15 = 150;   x = 135

De (b) y (c): A (60 , 15)

$$\begin{cases} x - 2y = 30 \\ y = 15 \end{cases}$$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: x – 2 . 15 = 30;   x – 30 = 30;   x = 60

Los vértices de la región factible son: A (60, 10), B (110 , 40) y C (135 , 15).

Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	z = 0´08 x + 0´12 y	
60 , 15	0´08 . 60 + 0´12 . 15 = 6´6	
110 , 40	0´08 . 110 + 0´12 . 40 = 13´6	Máximo
135 , 15	0´08 . 135 + 0´12 . 15 = 12´6	

Solución: ***Debe colocar 110 impresos en los coches y 40 en buzones. De esta forma conseguirá unos ingresos diarios de 13´60€.***

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \dfrac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Solución:

Efectuemos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad x \geq 10$

$x = 10$

x	y
10	0
10	20

¿$(0,0)$ *cumple*? $0 \geq 10$ *No*

$(b)\quad x \leq 20$

$x = 20$

x	y
20	0
20	20

¿$(0,0)$ *cumple*? $0 \leq 20$ *Sí*

$(c)\quad x \geq y/3$

$x = y/3$

x	y
0	0
10	30

¿$(10,0)$ *cumple*? $10 \geq 0/3$

$10 \geq 0$ *Sí*

$(d)\quad 12x + 20y \geq 360$

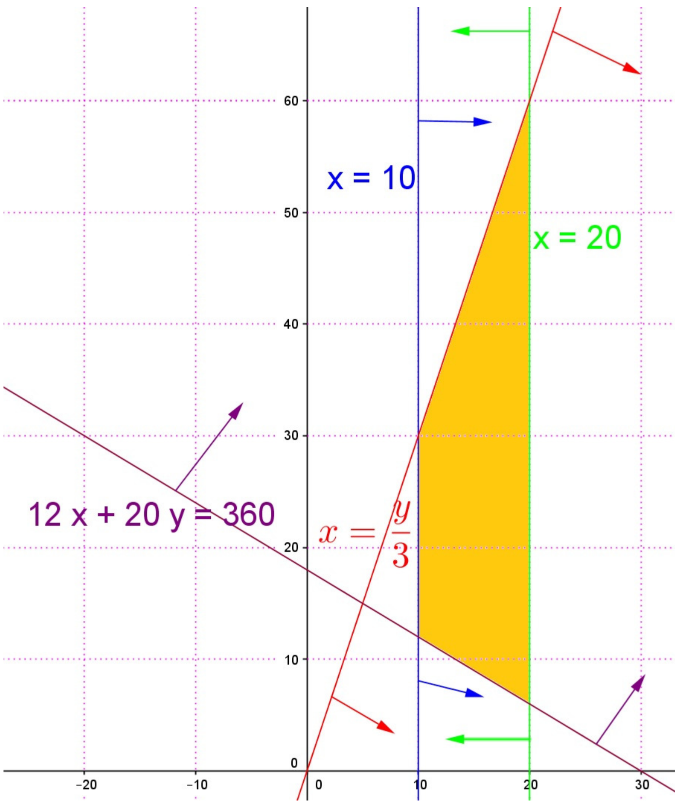
$12x + 20y = 360$

x	y
0	18
30	0

¿$(0,0)$ *cumple*? $12 \cdot 0 + 20 \cdot 0 \geq 360$

$0 \geq 360$ *No*

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región factible los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

Punto A, corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x = 10 \\ x = \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la* 2^a *ecuación:* $10 = \dfrac{y}{3} \quad \rightarrow \quad y = 30$

Luego $A\ (\ 10\ ,\ 30\ )$

Punto B, corte entre (b) y (c):

$$\begin{cases} x = 20 \\ x = \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la* 2^a *ecuación:* $20 = \dfrac{y}{3} \quad \rightarrow \quad y = 60$

Por tanto, $B\ (\ 20\ ,\ 60\ )$

Punto C, corte entre (b) y (d):

$$\begin{cases} x = 20 \\ 12x + 20y = 360 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la* 2^a *ecuación:* $12 \cdot 20 + 20\,y = 360$

$$240 + 20\,y = 360$$

$$20\,y = 360 - 240$$

$$20\,y = 120 \quad \rightarrow \quad y = \frac{120}{20} = 6$$

Luego, $C\ (\ 20\ ,\ 6\ )$

Punto D, corte entre (a) y (d):

$$\begin{cases} x = 10 \\ 12x + 20y = 360 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la* 2^a *ecuación:* $12 \cdot 10 + 20\,y = 360$

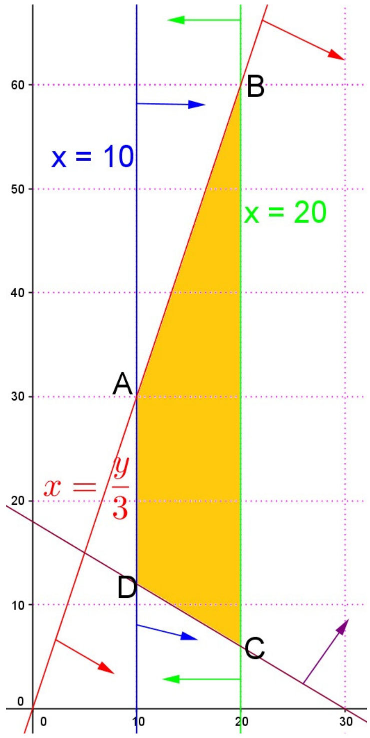
$$120 + 20\,y = 360$$

$$20\,y = 360 - 120$$

$$20\,y = 240 \quad \rightarrow \quad y = \frac{240}{20} = 12$$

Por tanto, $D\ (\ 10\ ,\ 12\ )$

Los vértices de la región son: A (10, 30), B (20 , 60), C (20 , 6) y D (10 , 12).



El mínimo de la función f(x,y) en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*f(x,y) = x – 2 y*	
10 , 30	*10 – 2 . 30 = – 50*	
20 , 60	*20 – 2 . 60 = – 100*	*mínimo*
20 , 6	*20 – 2 . 6 = 8*	
10 , 12	*10 – 2 . 12 = – 14*	

Por tanto, el mínimo de f(x,y) en esta región es – 100 y se alcanza en el punto (20 , 60).

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.
Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos.
Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.
¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso?
¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:
Llamando: x = *unidades fabricadas del producto A*
y = *unidades fabricadas del producto B*

Pasemos los minutos a horas, $30 \text{ min.} = \frac{1}{2} h, \quad 40 \text{ min.} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} h.$

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Nº unidades	*Montar*	*Pintar*	*Coste*
A	x	$30 \text{ min.} = \frac{1}{2} h$	$40 \text{ min.} = \frac{2}{3} h$	*40€*
B	y	$40 \text{ min.} = \frac{2}{3} h$	$30 \text{ min.} = \frac{1}{2} h$	*35€*

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

"Cada día 10h para montar piezas" $\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \le 10 \rightarrow 3x + 4y \le 60$.

"Cada día 11h para pintar piezas" $\rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \le 11 \rightarrow 4x + 3y \le 66$.

Como las variables x *e* y *representan número de unidades deben ser números naturales.*
El beneficio viene dada por la función: $z = 40x + 35y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 40x + 35y$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 3x + 4y \le 60 \\ 4x + 3y \le 66 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad 3x+4y\le 60$

$3x+4y=60$

x	y
0	15
20	0

¿(0,0) cumple?

$3\cdot 0+4\cdot 0\le 60$ *Sí*

$(b)\quad 4x+3y\le 66$

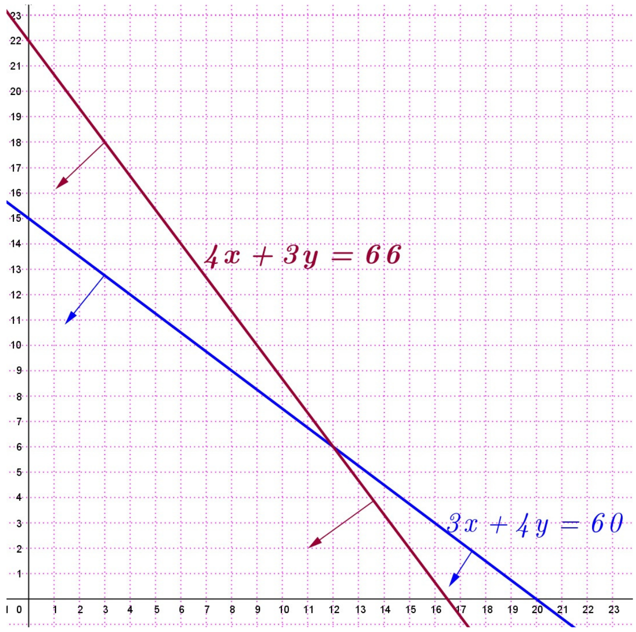
$4x+3y=66$

x	y
0	22
$16´5$	0

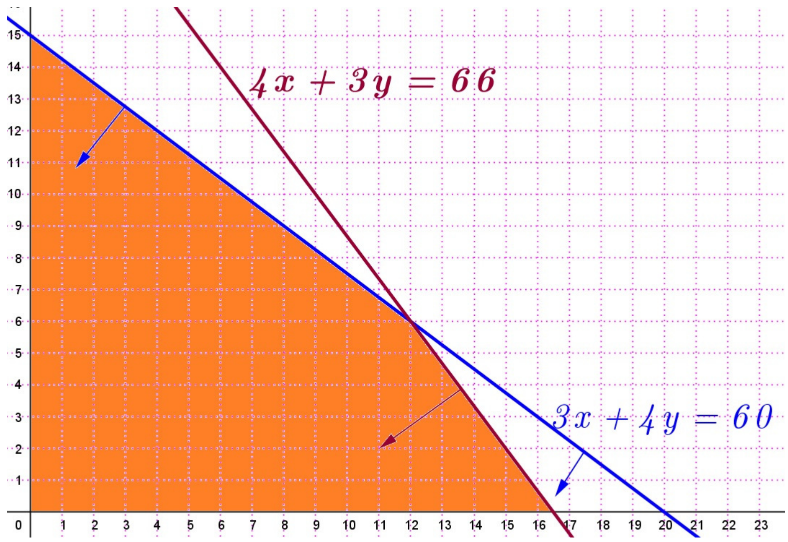
¿(0,0) cumple?

$4\cdot 0+3\cdot 0\le 66$ *Sí*

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son A (0 , 0), B (0 , 15) y D (16´5 , 0). Pero este último no es de la región factible (16´5 $\notin$ N), tendremos que tomar el (16 , 0) y esperar que el máximo se alcance en el punto de corte de las dos rectas.

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 3x+4y=60 \\ 4x+3y=66 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 4x1^{a} \\ -3x2^{a} \end{matrix} \begin{cases} 12x+16y=240 \\ -12x-9y=-198 \end{cases}$$

Sumando: $7y = 42 \quad y=\dfrac{42}{7}=6$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $3x + 4 . 6 = 60;\quad 3x + 24 = 60;\quad 3x = 60 - 24$

$3x = 36;\quad x=\dfrac{36}{3}=12$. *Luego* $C(12, 6)$

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*z = 40 x + 35 y*	
0 , 0	*40 . 0 + 35 . 0 = 0*	
0 , 15	*40 . 0 + 35 . 15 = 525*	
12 , 6	*40 . 12 + 35 . 6 = 690*	*máximo*
16 , 0	*40 . 16 + 35 . 0 = 640*	

El máximo se alcanza en el punto (12 , 6)

Por tanto,

Para obtener el máximo ingreso cada día hay que producir 12 unidades del producto A y 6 del B.
Con esta producción el máximo ingreso será de 690€.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es ese coste mínimo? *(2 puntos)*

Solución:

Llamando: x = *kilos del fertilizante A*

y = *kilos del fertilizante B*

Los datos del problema los resumimos en la tabla:

Fertilizante	*Kilos*	*Nitrógeno*	*Fósforo*	*Euros/kg*
A	x	$0´25\,x$	$0´15\,x$	$1´2$
B	y	$0´16\,y$	$0´40\,y$	$1´6$

y proporcionan las siguientes restricciones:

"se necesita un mínimo de 120 kg de nitrógeno" $\rightarrow\ 0´25\,x + 0´16\,y \geq 120$

"se necesita un mínimo de 110 kg de fósforo" $\rightarrow\ 0´15\,x + 0´40\,y \geq 110$

Como las variables x e y representan kilos de fertilizante deben ser mayores o iguales a cero.

El coste de la fertilización viene dado por la función: $z = 1´2\,x + 1´6\,y$

El problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \quad z = 1´2\,x + 1´6\,y$$

$$s.a. \quad \begin{cases} 0´25x + 0´16y \geq 120 \\ 0´15x + 0´40y \geq 110 \\ x,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad 0´25x + 0´16y \geq 120$

$0´25x + 0´16y = 120$

x	y
0	$\frac{120}{0´16} = 750$
$\frac{120}{0´25} = 480$	0

¿$(0,0)$ *cumple*?

$0´25\cdot 0 + 0´16\cdot 0 \geq 120 \quad No$

$(b)\quad 0´15x + 0´40y \geq 110$

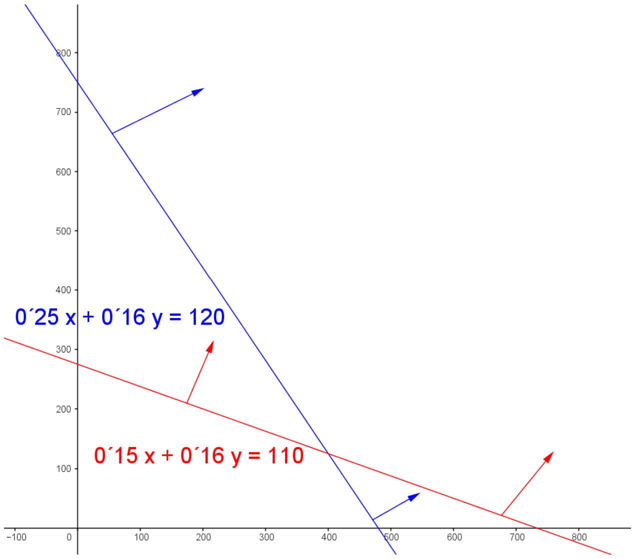
$0´15x + 0´40y = 110$

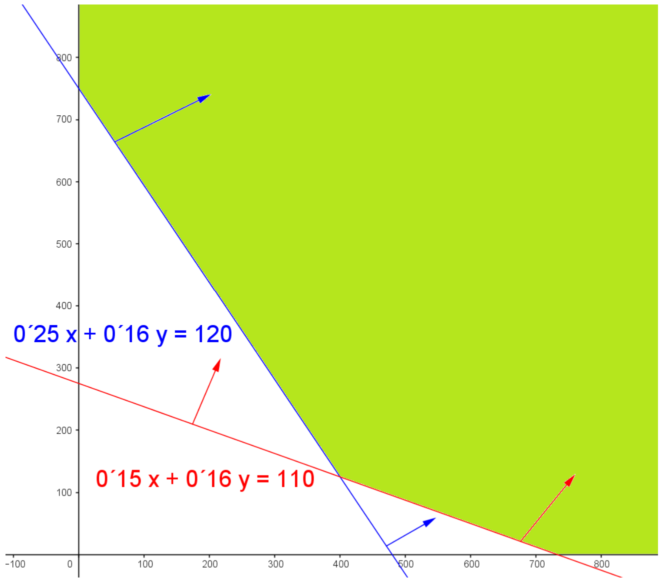
x	y
0	$\frac{110}{0´40} = 275$
$\frac{110}{0´15} = \frac{2200}{3} \cong 733´33$	0

¿$(0,0)$ *cumple*?

$0´15\cdot 0 + 0´40\cdot 0 \geq 110 \quad No$

La representación gráfica será:





La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada. Es una región factible abierta.

Vértices de la región factible:

el del eje horizontal y vertical los obtuvimos en los cálculos para la representación: $\left(\frac{2200}{3}, 0\right)$ *y* *(0 , 750). Falta el punto de corte entre las dos rectas.*

Corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 0´25x + 0´16\,y = 120 \\ 0´15x + 0´4\,y = 110 \end{cases} \to \quad \begin{matrix} \\ *(-0´4) \end{matrix}\begin{cases} 0´25x + 0´16\,y = 120 \\ 0´15x + 0´4\,y = 110 \end{cases} \to \begin{cases} 0´25x + 0´16\,y = 120 \\ -0´06\,x - 0´16\,y = -44 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $0´19\,x = 76 \;\to\; x = \dfrac{76}{0´19} = 400$

Sustituyendo el valor de x *en la* 1^a *ecuación,*

$0´25 \,.\, 400 + 0´16\,y = 120;\quad 100 + 0´16\,y = 120;\quad 0´16\,y = 20;\quad y = \dfrac{20}{0´16} = 125$

Luego punto de corte (400 , 125)

Los vértices de la región factible son: (0 , 750), (400 , 125) y $\left(\frac{2200}{3}, 0\right)$.

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*z = 1´2 x + 1´6 y*	
0 , 750	*1´2 . 0 + 1´6 . 750 = 1200*	
400 , 125	*1´2 . 400 + 1´6 . 125 = 680*	*mínimo*
$\frac{2200}{3}, 0$	$1'2 \cdot \frac{2200}{3} + 1'6 \cdot 0 = 880$	

El mínimo se alcanza en el punto (400 , 125)

Por tanto,

a) ***Para que el coste de la fertilización resulte mínimo se necesitan 400 kg del fertilizante A y 125 kg del B.***

b) ***El coste mínimo será de 680€.***

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo. *(8 puntos)*
b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo? *(2 puntos)*

Solución:
Llamando: x = *kilos de la mezcla 1, (mezcla a partes iguales)*
y = *kilos de la mezcla 1, (mezcla 1 a 3)*

En la mezcla 1, los dos tipos de café van a partes iguales; luego en x kilos de esta mezcla hay x/2 de café colombiano y x/2 de café brasileño.

En la mezcla 2, la proporción es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño; luego en y kilos de esta mezcla hay y/4 de café colombiano y 3y/4 de café brasileño.

Resumiendo:

	Café		
	colombiano	*brasileño*	*euros/Kg*
Mezcla 1	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	*15*
Mezcla 2	$\frac{y}{4}$	$\frac{3y}{4}$	*10*

Las restricciones serán:

"El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano" $\rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{4}\leq 100; \quad \frac{2x+y}{4}\leq 100; \quad 2x+y\leq 400$

"El vendedor dispone de 210 kilos de café brasileño" $\rightarrow \frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\leq 210 \quad \rightarrow \quad 2x+3y\leq 840$

Como x *e* y *representan kilos de producto,* x *e* y *deben ser mayores o iguales que* 0.

Los ingresos que obtiene el vendedor son: $z = 15x + 10y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 15x+10y$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 2x+y\leq 400 \\ 2x+3y\leq 840 \\ x,\ y\geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$2x + y \leq 400$

$2x + y = 400$

x	y
0	400
200	0

¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 0 \leq 400$ Si

$2x + 3y \leq 840$

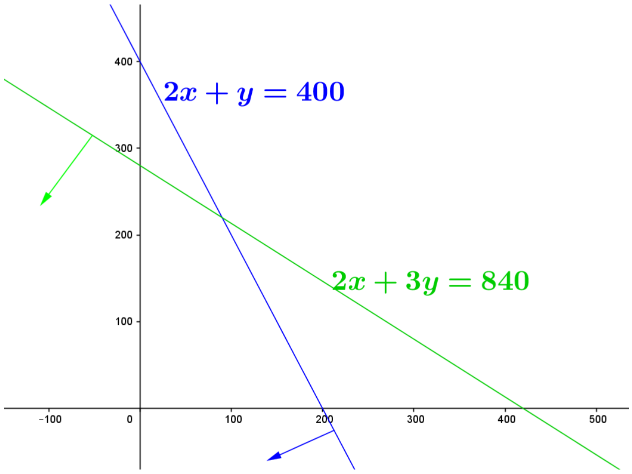
$3x + 4y = 2100$

x	y
0	280
420	0

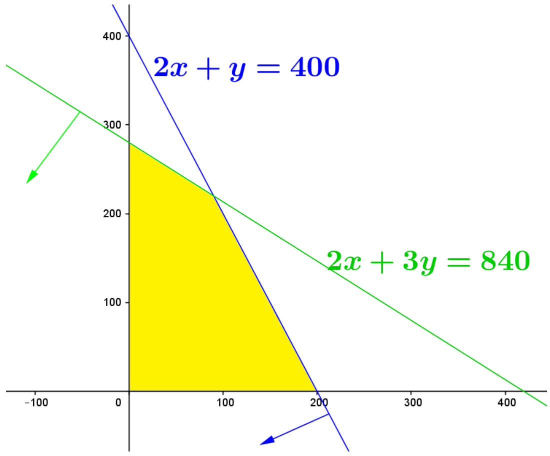
¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 840$ Si

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

(0 , 0); los de los ejes los obtuvimos en los cálculos para la representación: (200 , 0) y (0 , 280).

Falta el punto de corte entre las dos rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} 2x + y = 400 \\ 2x + 3y = 840 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones: $-2y = -440 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-440}{-2} = 220$

Sustituyendo el valor de y *en la* 1^a *ecuación,*

$2x + 220 = 400; \quad 2x = 400 - 220; \quad 2x = 180; \quad x = \dfrac{180}{2} = 90$

Luego punto de corte (90 , 220)

Los vértices de la región factible son: (0, 0), (0 , 280), (90 , 220) y (200 , 0).

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*z = 15 x + 10 y*	
0 , 0	*15 . 0 + 10 . 0 = 0*	
0 , 280	*15 . 0 + 10 . 280 = 2800*	
90, 220	*15 . 90 + 10 . 220 = 3550*	*máximo*
200 , 0	*15 .200 + 10 . 0 = 3000*	

El máximo se alcanza en el punto (900 , 220)

Por tanto,

a) ***Para obtener el ingreso máximo debe producir 90 kg de la primera mezcla y 220 kg de la segunda.***

b) ***El ingreso máximo sería de 3550€.***

Problema 1. Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? *(8 puntos)*

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? *(2 puntos)*

Solución:

Llamando: x = *nº de unidades del bolígrafo sencillo* y = *nº de unidades del bolígrafo sofisticado*

Los datos del problema los resumimos en la tabla:

bolígrafo	*tinta*	*plástico*	*ganancias/unidad*
sencillo	*1*	*1*	*0´50 €*
sofisticado	*1*	*1´5*	*0´70 €*

Las restricciones serán:

"dispone de 2500 unidades de tinta" $\rightarrow$ $x + y \leq 2500$

"dispone de 3000 unidades de plástico" $\rightarrow$ $x + 1'5\,y \leq 3000$

"no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos" $\rightarrow$ $x \leq 2000$

Como las variables x *e* y *representan latas, deben ser números naturales.*

Las ganancias de la empresa vienen dadas por la función: $z = 0'5\,x + 0'7\,y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 0'5\,x + 0'7\,y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + y \leq 2500 \\ x + 1'5\,y \leq 3000 \\ x \leq 2000 \\ x,\ y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$x + y \leq 2500$

$x + y = 2500$

x	y
0	2500
2500	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \leq 2500$ *Sí*

$x + 1'5\,y \leq 3000$

$x + 1'5\,y = 3000$

x	y
0	2000
3000	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 1'5 \cdot 0 \leq 3000$ *Sí*

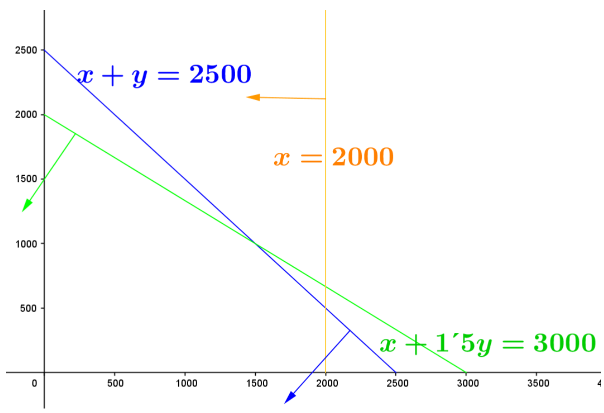
$x \leq 2000$

$x = 2000$

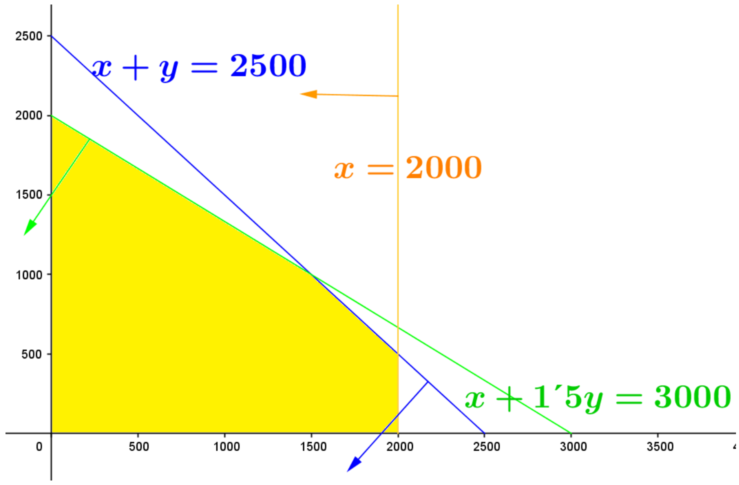
x	y
2000	0
2000	1000

¿(0,0) cumple?

$0 \leq 2000$ *Sí*



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

Los de los ejes coordenados los obtuvimos en los cálculos para la representación: (0 , 0), (0 , 2000) y (2000, 0). Faltan los puntos de corte entre las rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} x+y=2500 \\ x+1´5\,y=3000 \end{cases} \rightarrow \quad -1x1^{a} \begin{cases} -x-y=-2500 \\ x+1´5\,y=3000 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $0´5\,y = 500$; $\quad y=\dfrac{500}{0´5}=1000$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación,

$x + 1000 = 2500$; $\quad x = 2500 - 1000$; $\quad x = 1500$ *Luego punto de corte (1500 , 1000)*

$$\begin{cases} x+y=2500 \\ x=2000 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,

$2000 + y = 2500$; $\quad y = 2500 - 2000$; $\quad y = 500$ *Luego punto de corte (2000 , 500)*

Los vértices de la región factible son: (0 , 0), (0 , 2000), (1500 , 1000), (2000 , 500) y (2000 , 0).

El máximo de z en la región se alcanzará en alguno de los vértices. Calculemos la función en los vértices,

x , y	$z = 0´5\,x + 0´7\,y$	
0 , 0	$0´5 \cdot 0 + 0´7 \cdot 0 = 0$	
0 , 2000	$0´5 \cdot 0 + 0´7 \cdot 2000 = 1400$	
1500 , 1000	$0´5 \cdot 1500 + 0´7 \cdot 1000 = 1450$	*máximo*
2000 , 500	$0´5 \cdot 2000 + 0´7 \cdot 500 = 1350$	
2000 , 0	$0´5 \cdot 2000 + 0´7 \cdot 0 = 1000$	

El máximo se alcanza en el punto (1500 , 1000). Por tanto,

a) ***Para maximizar las ganancias la empresa debe producir 1500 bolígrafos sencillos y 1000 sofisticados.***

b) ***Las ganancias máximas ascienden a 1450 euros.***

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Se considera la región factible dada por el siguiente conjunto de restricciones:

$x + y \leq 5$
$x + 3y \geq 9$
$x \geq 0$, $y \geq 0$

Representar la región factible que determina el sistema de inecuaciones anterior y hallar de forma razonada el punto o puntos de la región factible donde las siguientes funciones alcanzan su máximo y su mínimo: a) $f(x,y) = 2x + 3y$, b) $f(x,y) = y - x$.

Solución:
Realicemos los cálculos para encontrar la región factible,

$x + y \leq 5$
(1) $x + y = 5$

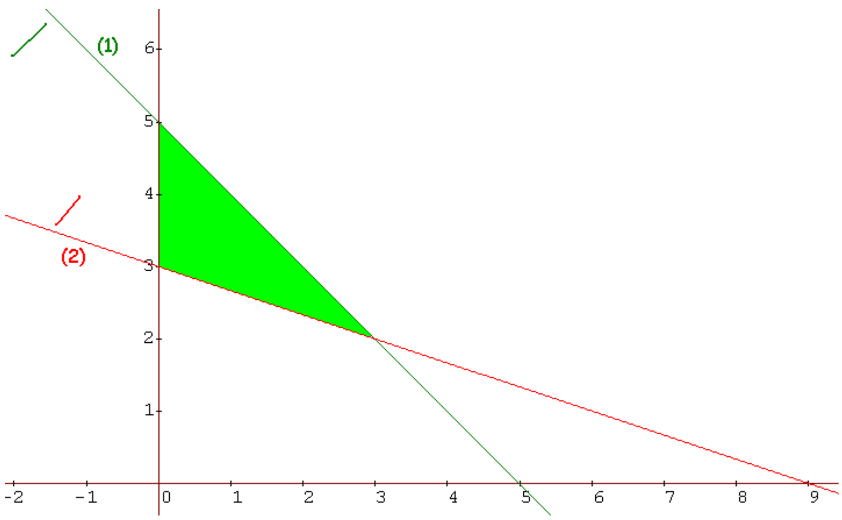
x	y
0	5
5	0

¿(0,0) *cumple*? *Sí*
$¿0+0 \leq 5?$ *Sí*

$x + 3y \geq 9$
(2) $x + 3y = 9$

x	y
0	3
9	0

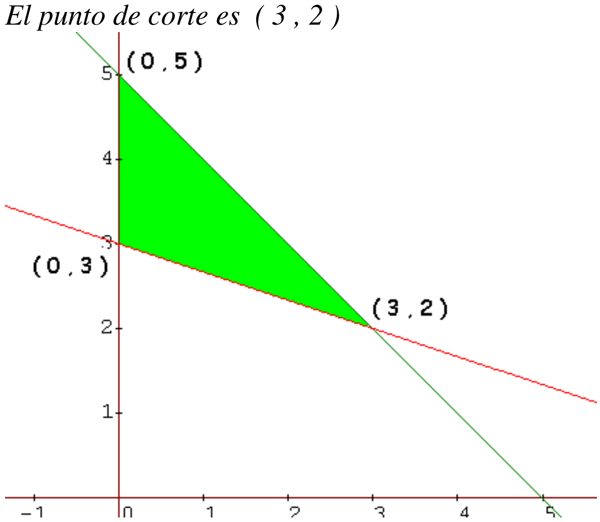
¿(0,0) *cumple*? *No*
$¿0+3.0 \geq 9?$ *No*



La región factible está formada por los puntos de la zona sombreada.
Obtengamos los extremos de esta región; nos falta el punto de corte entre las dos rectas.
Corte entre (1) y (2)

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$	*Restando ambas ecuaciones:* *2 y = 4* *y = 2*	*Sustituyendo en la 1ª ecuación* *x + 2 = 5* *x = 3*

El punto de corte es (3 , 2)



Para hallar los puntos de la región factible en que las funciones f(x,y) alcanzan su máximo o mínimo calculamos el valor de f(x,y) en los extremos de esta región.

a)

x , y	$f(x , y) = 2x + 3y$	
$0 , 5$	$2 . 0 + 3 . 5 = 15$	*máximo*
$3 , 2$	$2 . 3 + 3 . 2 = 12$	
$0 , 3$	$2 . 0 + 3 . 3 = 9$	*mínimo*

La función $f(x , y) = 2x + 3y$ alcanza su máximo en el punto (0 , 5) y su mínimo en el (0 , 3).

b)

x , y	$f(x , y) = y - x$	
$0 , 5$	$5 - 0 = 5$	*máximo*
$3 , 2$	$2 - 3 = -1$	*mínimo*
$0 , 3$	$3 - 0 = 3$	

La función $f(x , y) = y - x$ alcanza su máximo en el punto (0 , 5) y su mínimo en el (3 , 2).

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos de cola sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos. Los paquetes del tipo A contienen tres refrescos con cafeína y tres sin cafeína, y los del tipo B contienen dos con cafeína y cuatro sin cafeína. El vendedor gana 6 € por cada paquete que venda del tipo A y 5 € por cada uno que venda del tipo B. Calcular de forma razonada cuántos paquetes de cada tipo debe vender para maximizar los beneficios y calcular éste.

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

	Refrescos que contiene			
Paquetes	*Cola con cafeína*	*Cola sin cafeína*	*Ganancia/paquete*	*Nº de paquetes*
A	*3*	*3*	*6€*	*x*
B	*2*	*4*	*5€*	*y*
restricciones	*120*	*180*		

Beneficio: 6 x + 5 y

Nº de refrescos de cola con cafeína: 3 x + 2 y

Nº de refrescos de cola sin cafeína: 3 x + 4 y

El problema que debemos resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 6x + 5y$$
$$s.a. \begin{cases} 3x + 2y \le 120 \\ 3x + 4y \le 180 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones,

$3x + 2y \le 120$ $\qquad$ $3x + 4y \le 180$

(1) $3x + 2y = 120$ $\qquad$ (2) $3x + 4y = 180$

x	y
0	60
40	0

¿(0,0)? *Sí*

$3 \,.\, 0 + 2 \,.\, 0 \le 120$

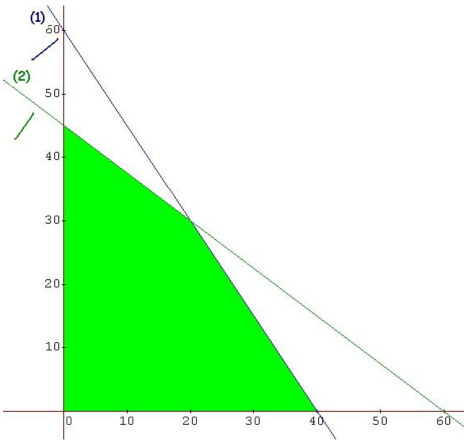
$0 \le 120$ *sí*

x	y
0	45
60	0

¿(0,0)? *Sí*

$3 \,.\, 0 + 4 \,.\, 0 \le 180$

$0 \le 180$ *sí*



La región factible son los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.

Calculemos los extremos de la región factible.

Corte entre (1) y (2),

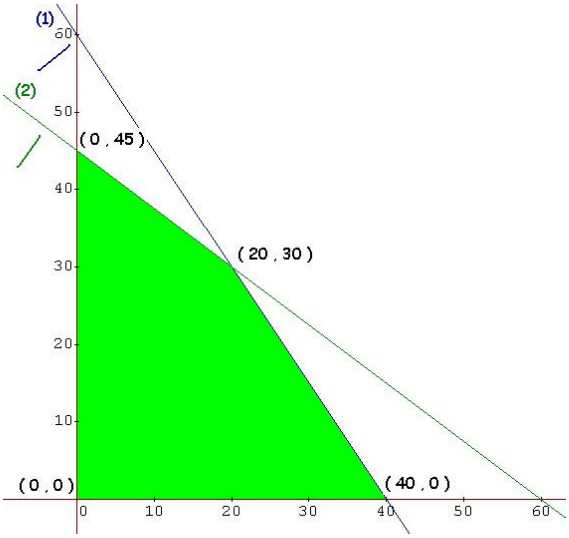
$$\begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ 3x + 4y = 180 \end{cases}$$

restando ambas ecuaciones, 2 y = 60; y = 30

sustituyendo en la 1ª, 3 x + 2 . 30 = 120; 3x + 60 = 120; 3 x = 60; x = 20

el punto de corte es (20 , 30)

Los extremos de la región factible serán:



Como la función a maximizar alcanza su máximo en los extremos de la región factible, calculemos el valor de z en esos puntos.

x, y	$z = 6x + 5y$
0,0	$6\,.\,0 + 5\,.\,0 = 0$
0,45	$6\,.\,0 + 5\,.\,45 = 225$
20,30	$6\,.\,20 + 5\,.\,30 = 270$ *máximo*
40,0	$6\,.\,40 + 5\,.\,0 = 240$

Para maximizar los beneficios debe vender 20 paquetes del tipo A y 30 del tipo B. Con estas ventas obtendrá un beneficio de 270 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámparas A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo A y 30 minutos para el modelo B; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo A y de 10 minutos para el modelo B. Se dispone para el trabajo manual de 6000 minutos al mes y para el de máquina de 4800 minutos al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 € para el modelo A y de 10 € para el modelo B, planificar la producción mensual para obtener el máximo beneficio y calcular éste.

Solución:
Resumiendo la información del ejercicio en una tabla,

Lámpara	*manual*	*máquina*	*beneficio*
A	*20 min*	*20 min*	*15 €*
B	*30 min*	*10 min*	*10 €*
disponibles	*6000 min*	*4800 min*	

Las incógnitas a utilizar son: x = *nº de lámparas del modelo A*
y = *nº de lámparas del modelo B*

El beneficio que se obtiene es: $15x + 10y$

Las restricciones del problema son: *trabajo manual* $20x + 30y \leq 6000$
trabajo de máquina $20x + 10y \leq 4800$

El problema de programación lineal a resolver es:

maximizar $z = 15x + 10y$
s.a. $20x + 30y \leq 6000$
$20x + 10y \leq 4800$
$x, y \in \mathbf{N}$

Las restricciones las simplificamos por 10 quedando:

maximizar $z = 15x + 10y$
s.a. $2x + 3y \leq 600$
$2x + y \leq 480$
$x, y \in \mathbf{N}$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$2x + 3y \leq 600$

representación de $2x + 3y = 600$

x	*y*
0	*200*
300	*0*

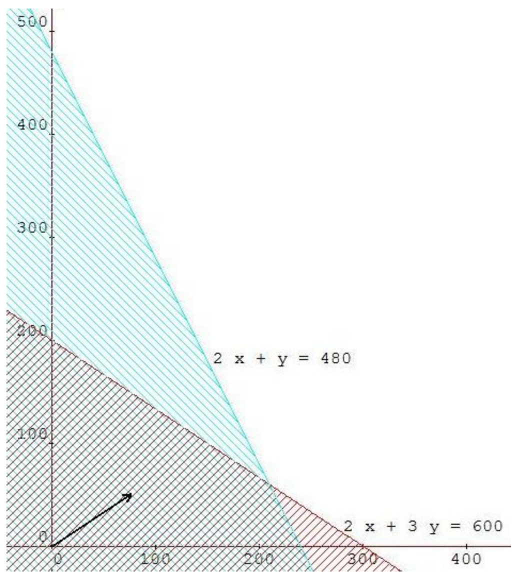
(0,0) ¿cumple la restricción? SÍ
$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 600$
$0 \leq 600$ *sí*

$2x + y \leq 480$

representación de $2x + y = 480$

x	*y*
0	*480*
240	*0*

(0,0) ¿cumple la restricción? SÍ
$2 \cdot 0 + 0 \leq 480$
$0 \leq 480$ *sí*



Cálculo del punto de corte de las dos rectas, (210 , 60),

$$\begin{cases} 2x+3y=600 \\ 2x+y=480 \end{cases}$$

Restando:
$2y = 120$
$y = 60$

Sustituyendo en 2ª ecuación
$2x+60=480$; $2x= 420$
$x = 210$

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona doblemente rayada.
Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z = 15x + 10y$	
(0,0)	*0*	
(0,200)	$15 \cdot 0 + 10 \cdot 200 = 2000$	
(210,60)	$15 \cdot 210 + 10 \cdot 60 = 3750$	*máximo*
(240,0)	$15 \cdot 240 + 10 \cdot 0 = 3600$	

Para obtener el máximo beneficio la producción mensual debe ser: 210 lámparas del modelo A y 60 del modelo B.

Con esta producción el beneficio será de 3750 €

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Debo tomar al menos 60 mgr de vitamina A y al menos 90 mgr de vitamina B diariamente. En la farmacia puedo adquirir dos pastillas de marcas diferentes X e Y. Cada pastilla de la marca X contiene 10 mgr de vitamina A y 15 mgr de vitamina B y cada pastilla de la marca Y contiene 10 mgr de cada vitamina. Además, no es conveniente tomar más de 8 pastillas diarias. Sabiendo que el precio de cada pastilla de la marca X es 50 céntimos de euro y que cada pastilla de marca Y cuesta 30 céntimos de euro, calcular de forma razonada:

a. Cuántas pastillas diarias de cada marca debo tomar para que el coste sea mínimo, y
b. Cuál es el coste mínimo.

Solución:
Resumiendo la información del ejercicio en una tabla,

marca	*Vitamina A*	*Vitamina B*	*precio*
X	*10 mgr*	*15 mgr*	*0´50 €*
Y	*10 mgr*	*10 mgr*	*0´30 €*
máximo 8	*mínimo 60 mgr*	*mínimo 90 mgr*	

Las incógnitas a utilizar son: *x = nº de pastillas de la marca X*
y = nº de pastillas de la marca Y
El coste es: $0´50\,x + 0´30\,y$
Las restricciones del problema son:
máximo número de pastillas $x + y \le 8$
mínima cantidad de vit. A $10\,x + 10\,y \ge 60$
mínima cantidad de vit. B $15\,x + 10\,y \ge 90$

El problema de programación lineal a resolver es:

minimizar $z = 0´50\,x + 0´30\,y$ *s.a.* $x + y \le 8$ $10\,x + 10\,y \ge 60$ $15\,x + 10\,y \ge 90$ $x, y \in \mathbf{N}$	*Simplificamos la segunda restricción por 10 y la tercera por 5:*	*minimizar* $z = 0´50\,x + 0´30\,y$ *s.a.* $x + y \le 8$ $x + y \ge 6$ $3\,x + 2\,y \ge 18$ $x, y \in \mathbf{N}$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$x + y \le 8$

$x + y = 8$

x	*y*
0	*8*
8	*0*

(0,0) ¿cumple la restricción? Sí
$0 + 0 \le 8$ *Sí*

$x + y \ge 6$

$x + y = 6$

x	*y*
0	*6*
6	*0*

(0,0) ¿cumple la restricción?No
$0 + 0 \ge 6$ *No*

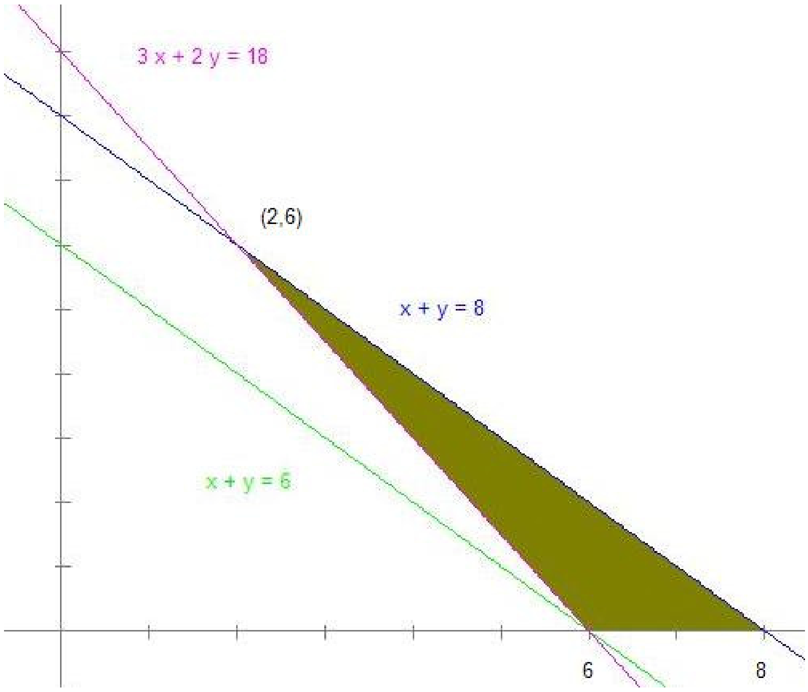
$3\,x + 2\,y \ge 18$

$3\,x + 2\,y = 18$

x	*y*
0	*9*
6	*9*

(0,0) ¿cumple la restricción?No
$3 \,.\, 0 + 2 \,.\, 0 \ge 18$ *No*

La representación gráfica es,



Calculemos el punto de corte que hace falta conocer,

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 2y = 18 \end{cases}$$

Multiplicando la 1ª *ecuación por* -2

$$\begin{cases} -2x - 2y = -16 \\ 3x + 2y = 18 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones,
x = 2
Sustituyendo en la 1ª
2 + y = 8;   y = 6

El punto de corte es (2,6)

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.
Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	*z =0´50 x + 0´30 y*		
(6,0)	*3*		**a) Para que el coste sea mínimo debo tomar diariamente 2 pastillas de la marca X y 6 de la marca Y.**
(2,6)	*2´80*	*mínimo*	
(8,0)	*4*		**b) Con este consumo el coste mínimo diario será de 2´80 €**

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Un banco dispone de 18 millones de euros para ofrecer préstamos de riesgo alto y medio, con rendimientos de 14% y 7%, respectivamente. Sabiendo que se debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio y que el dinero invertido en alto y medio riesgo debe estar a lo sumo a razón de 4 a 5, determinar cuánto debe dedicarse a cada uno de los tipos de préstamos para maximizar el beneficio y calcular éste.

Solución:
Utilizando las siguientes incognitas: *x = millones dedicados a riesgo alto*
y = millones dedicados a riesgo bajo

las restricciones del problema serán:

"Un banco dispone de 18 millones de euros" $x + y \leq 18$

"debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio" $y \geq 4$

"*el dinero invertido en alto y medio riesgo debe estar a lo sumo a razón de* 4 *a* 5" $\frac{x}{y} \leq \frac{4}{5}$

Esta última restricción se transforma en: $5x \leq 4y \rightarrow 5x - 4y \leq 0$

El beneficio que se obtiene es: $0'14\,x + 0'07\,y$

Por tanto el problema a resolver es,

maximizar $z = 0'14\,x + 0'07\,y$
s.a. $x + y \leq 18$
$y \geq 4$
$5x - 4y \leq 0$
$x \geq 0,\ y \geq 0$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$x + y \leq 18$ | $y \geq 4$ | $5x - 4y \leq 0$

$x + y = 18$ | $y = 4$ | $5x - 4y = 18$

x	y
0	18
18	0

x	y
0	4
6	4

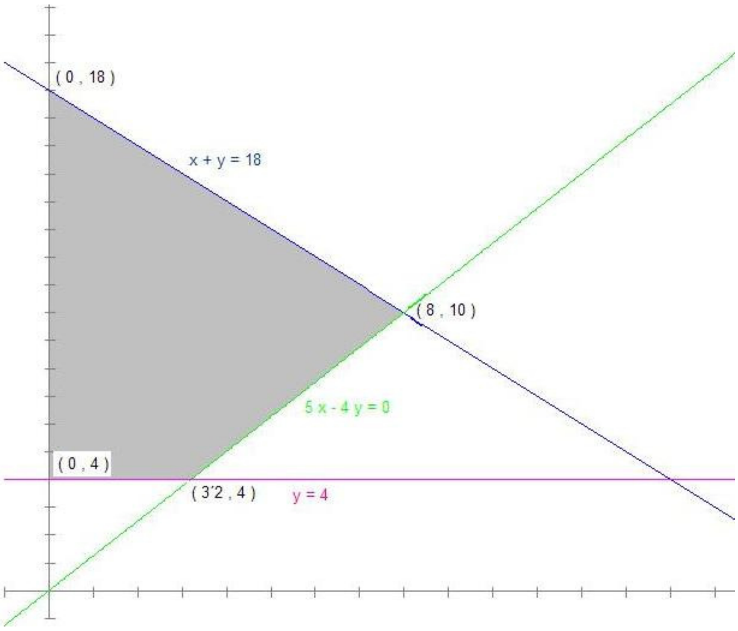
x	y
0	0
4	5

(0,0) ¿cumple la restricción? Sí
$0 + 0 \leq 18$ *Sí*

(0,0) ¿cumple la restricción?No
$0 \geq 4$ *No*

(1,0) ¿cumple la restricción?No
$5 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \leq 0$ *No*

La representación gráfica es la zona sombreada del siguiente gráfico



Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x+y=18 \\ 5x-4y=0 \end{cases}$	*Multiplicando la* 1ª *ecuación por* 4 $\begin{cases} 4x+4y=72 \\ 5x-4y=0 \end{cases}$	*Sumando ambas ecuaciones,* $9x = 72 \rightarrow x = 8$ *Sustituyendo en la 1ª* $8 + y = 18;\quad y = 10$	*El punto de corte es* *(8 , 10)*

$\begin{cases} y=4 \\ 5x-4y=0 \end{cases}$	*Sustituyendo el valor de* y *en la 2ª ecuación,* $5x - 4 \cdot 4 = 0 \rightarrow 5x - 16 = 0 \rightarrow x = 16/5 = 3´2$	*El punto de corte es* *(3´2 , 4)*

La región factible está formada por los puntos de la zona coloreada.

Estudiamos la función z *en los extremos de la región factible,*

(x,y)	$z = 0´14\,x + 0´07\,y$	
(0 , 4)	*0´28*	
(0 , 18)	*1´26*	
(8 , 10)	*1´82*	*máximo*
(3´2 , 4)	*0´728*	

Solución:
Deben dedicarse 8 millones de euros a los préstamos de riesgo alto y 10 millones a los de riesgo medio. El beneficio que se obtendrá será de 1´82 millones de euros (1.820.000€).

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Un tren de mercancías puede arrastrar, como máximo, 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones y para motocicletas no menos de la mitad de los vagones que dedica a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 € por vagón de coches y 360 € por vagón de motocicletas, calcular cómo se deben distribuir los vagones para que el beneficio de un transporte de coches y motocicletas sea máximo y cuánto vale dicho beneficio.

Solución:
Utilizando las siguientes incógnitas: x = *número de vagones dedicados a coches*
y = *número de vagones dedicados a motocicletas*

las restricciones del problema serán:

"puede arrastrar, como máximo, 27 vagones" $x + y \leq 27$

"Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones" $x \geq 12$

" para motocicletas no menos de la mitad de los vagones que dedica a los coches" $y \geq \dfrac{x}{2}$

Esta última restricción se transforma en: $2y \geq x \rightarrow 2y - x \geq 0$

El beneficio que se obtiene es: $540x + 360y$

Por tanto el problema a resolver es,

maximizar $z = 540x + 360y$

$$\text{s.a.}\quad \begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ 2y - x \geq 0 \\ x, y \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$x + y \leq 27$ $\qquad$ $x \geq 12$ $\qquad$ $2y - x \geq 0$

$x + y = 27$ $\qquad$ $x = 12$ $\qquad$ $2y - x = 0$

x	y
0	27
27	0

x	y
12	0
12	2

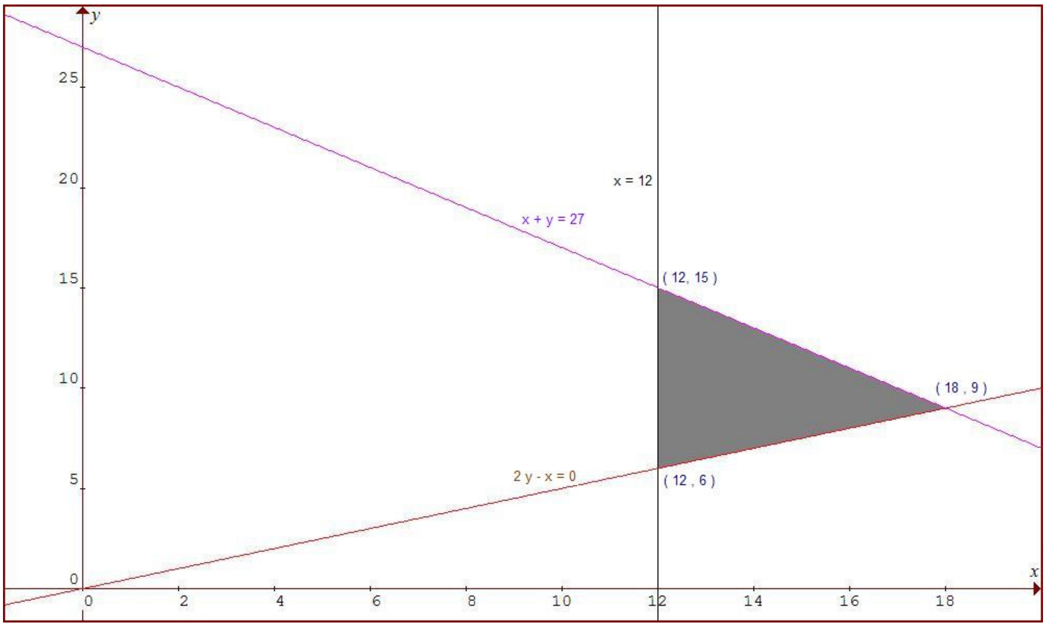
x	y
0	0
2	1

(0,0) ¿cumple la restricción? Sí $0 + 0 \leq 27$ *Sí*

(0,0) ¿cumple la restricción?No $0 \geq 12$ *No*

(1,0) ¿cumple la restricción?No $2 \cdot 0 - 1 \geq 0$ *No*

La representación gráfica es la zona sombreada del siguiente gráfico



Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x+y=27 \\ -x+2y=0 \end{cases}$	*Sumando ambas ecuaciones,* *3 y = 27 → y = 9* *Sustituyendo en la 1ª* *x + 9 = 27; x = 18*	*El punto de corte es (18 , 9)*

$\begin{cases} x=12 \\ -x+2y=0 \end{cases}$	*Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación,* *- 12 + 2 y = 0 →2 y = 12 → y = 6*	*El punto de corte es (12 , 6)*

$\begin{cases} x=12 \\ x+y=27 \end{cases}$	*Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación,* *12 + y = 27 → y = 15*	*El punto de corte es (12 , 5)*

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	*z = 540 x + 360 y*	
(12 , 6)	*540 . 12 + 360 . 6 = 8640*	
(12 , 15)	*540 . 12 + 360 . 15 = 11880*	
(18 , 9)	*540 . 18 + 360 . 9 = 12960*	*máximo*

Solución:
Para que el beneficio sea máximo deben dedicarse 18 vagones para coches y 9 para motocicletas. El beneficio que se obtendrá será de 12960 euros.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Las necesidades vitamínicas de una persona son de un mínimo de 36 mgr. de vitamina A, 28 mgr. de vitamina C Y 34 mgr. de vitamina D. Estas necesidades de cubren tomando pastillas de la marca *Energic* y de la marca *Vigor*. Cada pastilla de la marca *Energic* cuesta 0,03 € y proporciona 2 mgr. de vitamina A, 2 mgr. de vitamina C y 8 mgr. de vitamina D. Cada pastilla de la marca *Vigor* cuesta 0,04 € y proporciona 3 mgr. de vitamina A, 2 mgr. de vitamina C y 2 mgr. de vitamina D. ¿Cuántas pastillas de cada marca se han de tomar diariamente si se desean cubrir las necesidades vitamínicas básicas con el menor coste posible? Determinar dicho coste.

Solución:

Expresamos los datos del problema en una tabla,

	Vitamina A	*Vitamina C*	*Vitamina D*	*precio*
Energic	*2*	*2*	*8*	*0,03*
Vigor	*3*	*2*	*2*	*0,04*
necesidades mínimas	*36*	*28*	*34*	

Las incógnitas a utilizar son: x = *nº de pastillas de la marca Energic*

y = *nº de pastillas de la marca Vigor*

El coste es: $0'03\,x + 0'04\,y$

Las restricciones del problema son:

mínima cantidad de vit. A $2x + 3y \geq 36$

mínima cantidad de vit. C $2x + 2y \geq 28$

mínima cantidad de vit. D $8x + 2y \geq 34$

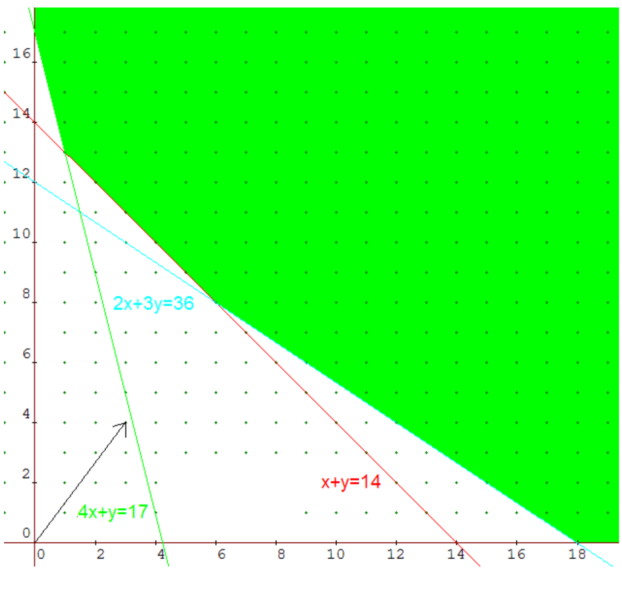
El problema de programación lineal a resolver es:

minimizar $z = 0'03\,x + 0'04\,y$ *s.a.* $2x + 3y \geq 36$ $2x + 2y \geq 28$ $8x + 2y \geq 34$ $x, y \in \mathbf{N}$	*Simplificamos las restricciones segunda y tercera por 2:*	*minimizar* $z = 0'03\,x + 0'04\,y$ *s.a.* $2x + 3y \geq 36$ $x + y \geq 14$ $4x + y \geq 17$ $x, y \in \mathbf{N}$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$2x + 3y \geq 36$			$x + y \geq 14$			$4x + y \geq 17$		
$2x + 3y = 36$			$x + y = 14$			$4x + y = 17$		
x	y		x	y		x	y	
0	*12*		*0*	*14*		*0*	*17*	
18	*0*		*14*	*0*		*4*	*1*	
(0,0) ¿cumple la restricción? No $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 36$ *No*			*(0,0) ¿cumple la restricción?No* $0 + 0 \geq 14$ *No*			*(0,0) ¿cumple la restricción?No* $4 \cdot 0 + 0 \geq 17$ *No*		

La representación gráfica es,



Calculemos los puntos de corte que hace falta conocer,

$\begin{cases} 2x+3y=36 \\ x+y=14 \end{cases}$	*- 2 x (2ª ecu)*	$\begin{cases} 2x+3y=36 \\ -2x-2y=-28 \end{cases}$	*Sumando ambas ecuaciones,* *y = 8* *Sustituyendo en la 2ª* *x + 8 = 14; x = 6*	*El punto de corte es* *(6 , 8)*
$\begin{cases} 2x+3y=36 \\ 4x+y=17 \end{cases}$	*- 2 x (1ª ecu)*	$\begin{cases} -4x-6y=-72 \\ 4x+y=17 \end{cases}$	*Sumando ambas ecuaciones,* *- 5 y = - 55; y = 11* *Sustituyendo en la 2ª* *4 x + 11 = 17; 4 x = 6; x = 1´5*	*El punto de corte es* *(1´5 , 11)*
$\begin{cases} x+y=14 \\ 4x+y=17 \end{cases}$	*2ª - 1ª*	*3 x = 3; x = 1*	*Sustituyendo en la 1ª* *1 + y = 14; y = 13*	*El punto de corte es* *(1 , 13)*

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.
Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	*z =0´03 x + 0´04 y*	
(0,17)	*0´04 . 17 = 0´68*	
(1,13)	*0´03 . 1 + 0´04 . 13 = 0´55*	
(6,8)	*0´03 . 6 + 0´04 . 8 = 0´50*	*mínimo*
(18,0)	*0´03 . 18 = 0´54*	

Para que el coste sea mínimo, diariamente se deben tomar 6 pastillas de la marca Energic   y 8 de la marca Vigor.

Con este consumo el coste mínimo diario será de 0´50 €

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Un vendedor dispone de 350000 € para invertir en dos tipos de microondas. El que dispone de más accesorios tiene un coste de 150 € y reporta un beneficio de 15 € por unidad vendida, mientras que el otro modelo sólo proporciona u beneficio de 11 € por unidad vendida y tiene un coste de 100 €. Sabiendo que sólo se pueden almacenar 3000 microondas y que no se venderán más de 2000 del modelo más caro, determinar cuántos microondas de cada clase se deben comprar para maximizar el beneficio y calcular éste.

Solución:

Expresamos los datos del problema en una tabla,

	coste	*beneficio*
modelo superior	*150*	*15*
modelo inferior	*100*	*11*

Las incógnitas a utilizar son: x = *nº de microondas de clase superior a comprar*

y = *nº de microondas de clase inferior a comprar*

El beneficio es: $15x + 11y$

Las restricciones del problema son: *"dispone de 350000 €"* $150x + 100y \leq 350000$

"sólo puede almacenar 3000 microondas" $x + y \leq 3000$

"no se venderán más de 2000 del caro" $x \leq 2000$

El problema de programación lineal a resolver es:

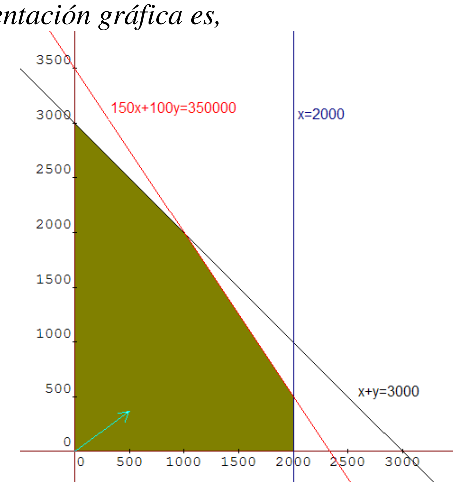
$$\text{maximizar } z = 15x + 11y$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\quad & 150x + 100y \leq 350000 \\ & x + y \leq 3000 \\ & x \leq 2000 \\ & x, y \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$150x + 100y \leq 350000$		$x + y \leq 3000$		$x \leq 2000$
$150x + 100y = 350000$		$x + y = 3000$		$x = 2000$
x	y	x	y	
0	3500	0	3000	
2333´33	0	3000	0	
(0,0) ¿cumple la restricción? Sí $150 \cdot 0 + 100 \cdot 0 \leq 350000$ Sí		(0,0) ¿cumple la restricción? Sí $0 + 0 \leq 3000$ Sí		(0,0) ¿cumple la restricción? Sí $0 \leq 2000$ Sí

La representación gráfica es,



Calculemos los puntos de corte que hace falta conocer,

$\begin{cases} x+y=3000 \\ 150x+100y=350000 \end{cases}$	*-100x(1ªecu)*	$\begin{cases} -100x-100y=300000 \\ 150x+100y=350000 \end{cases}$	*Sumando las ecuaciones,* *50 x = 50000; x = 1000* *Sustituyendo en la 1ª* *1000 + y = 3000;* *y = 2000*	*El punto de corte es* *(1000 , 2000)*
$\begin{cases} x+y=3000 \\ x=2000 \end{cases}$	*Sustituyendo en la 1ª,* *2000 + y = 30000; y = 1000*			*El punto de corte es* *(2000 , 1000)*
$\begin{cases} x=2000 \\ 150x+100y=350000 \end{cases}$	*Sustituyendo en la 2ª,* *150 . 2000 + 100 y = 350000; 300000 + 100 y = 350000;* *100 y = 50000; y = 500*			*El punto de corte es* *(2000 , 500)*

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.
Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	*z = 15 x + 11 y*	
(0,0)	*15 . 0 + 11 . 0 = 0*	
(0,3000)	*15 . 0 + 11 . 3000 = 33000*	
(1000,2000)	*15 . 1000 + 11 . 2000 = 37000*	*máximo*
(2000,500)	*15 . 2000 + 11 . 500 = 35500*	
(2000,0)	*15 . 2000 + 11 . 0 = 30000*	

Debe comprar 1000 microondas del tipo con más accesorios y 2000 del otro.

El beneficio que obtendrá será de 37000 €

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Una refinería de petróleo adquiere dos tipos de crudo, ligero y pesado, a un precio de 70 y 65 euros por barril, respectivamente. Con cada barril de crudo ligero la refinería produce 0,3 barriles de gasolina 95, 0,4 barriles de gasolina 98 y 0,2 barriles de gasoil. Asimismo, con cada barril de crudo pesado produce 0,1, 0,2 y 0,5 barriles de cada uno de estos tres productos, respectivamente. La refinería debe suministrar al menos 26.300 barriles de gasolina 95, 40.600 barriles de gasolina 98 y 29.500 barriles de gasoil. Determina cuántos barriles de cada tipo de crudo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades de producción con un coste mínimo y calcula éste.

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

		por cada barril			
crudo	*precio*	*95*	*98*	*gasoil*	*nº barriles*
ligero	*70 €/barril*	*0´3*	*0´4*	*0´2*	*x*
pesado	*65 €/barril*	*0´1*	*0´2*	*0´5*	*y*
mínimo de barriles		*26300*	*40600*	*29500*	

Coste: 70 x + 65 y

Producción: *gasolina 95,* $0'3\,x + 0'1\,y$

gasolina 98, $0'4\,x + 0'2\,y$

gasoil, $0'2\,x + 0'5\,y$

El problema a resolver es,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } z = 70x + 65y \\ &\text{s.a.} \quad 0'3x + 0'1y \geq 26300 \\ &\qquad 0'4x + 0'2y \geq 40600 \\ &\qquad 0'2x + 0'5y \geq 29500 \\ &x, y \ \text{€}\ N \end{aligned}$$

Efectuemos los cálculos necesarios para representar gráficamente las restricciones del problema

(1) $0'3x + 0'1y \geq 26300$

$0'3x + 0'1y = 26300$

x	y
0	263000
87666'6	0

(0,0) ¿*Cumple*? *No*

¿$0'3 \,.\, 0 + 0'1 \,.\, 0 \geq 26300$?

¿$0 \geq 26300$? *No*

(2) $0'4x + 0'2y \geq 40600$

$0'4x + 0'2y = 40600$

x	y
0	203000
101500	0

(0,0) ¿*Cumple*? *No*

¿$0'4 \,.\, 0 + 0'2 \,.\, 0 \geq 40600$?

¿$0 \geq 40600$? *No*

(3) $0'2x + 0'5y \geq 29500$

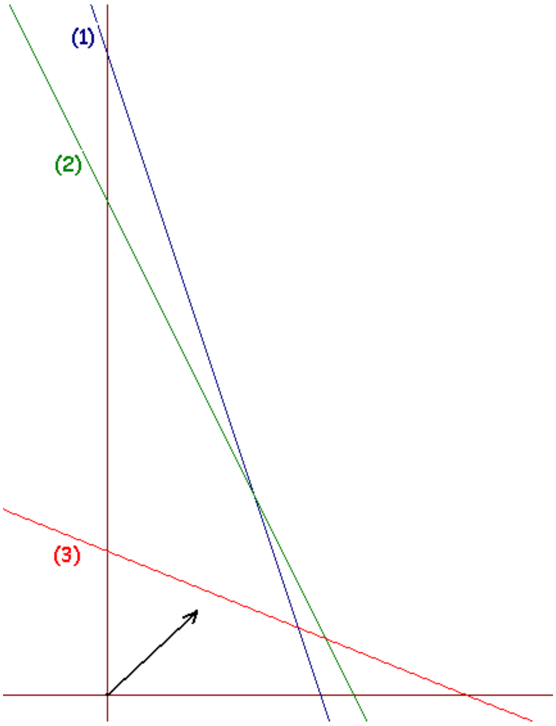
$0'2x + 0'5y = 29500$

x	y
0	59000
147500	0

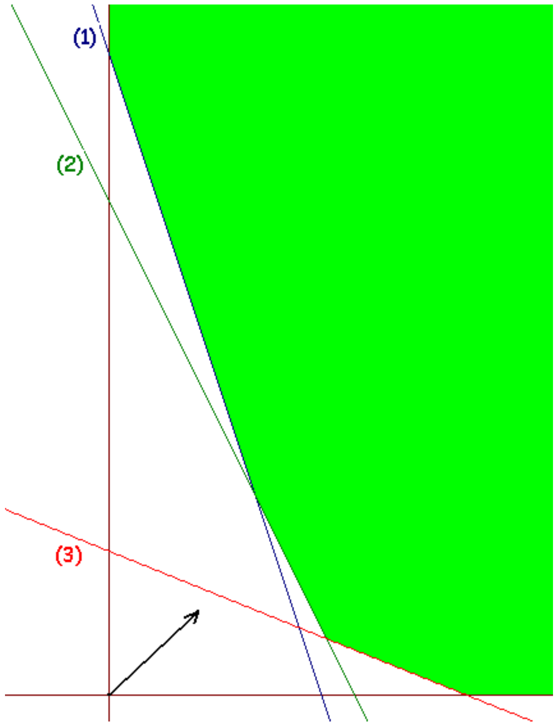
(0,0) ¿*Cumple*? *No*

¿$0'2 \,.\, 0 + 0'5 \,.\, 0 \geq 29500$?

¿$0 \geq 29500$? *No*



La región factible son los puntos de coordenada natural de la zona sombreada en la figura de la derecha.



Calculemos los extremos de la región factible.
Debemos buscar los puntos de corte entre las rectas (1) y (2) y (1) y (3)
Corte entre (1) y (2)

$$\begin{cases} 0'3\,x + 0'1\,y = 26300 \\ 0'4\,x + 0'2\,y = 40600 \end{cases} \rightarrow \quad *(-2) \begin{cases} -0'6\,x - 0'2\,y = -52600 \\ \quad 0'4\,x + 0'2\,y = \;40600 \end{cases}$$

$$Sumando\ \ ambas\ \ ecuaciones: \quad -0'2\,x = -12000$$

$$x = \frac{-12000}{-0'2} = 60000$$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,
0'3 . 60000 + 0'1 y = 26300
18000 +0'1 y = 26300
0'1 y = 8300
y = 83000

el punto de corte es (60000 , 83000)

Corte entre (2) y (3)

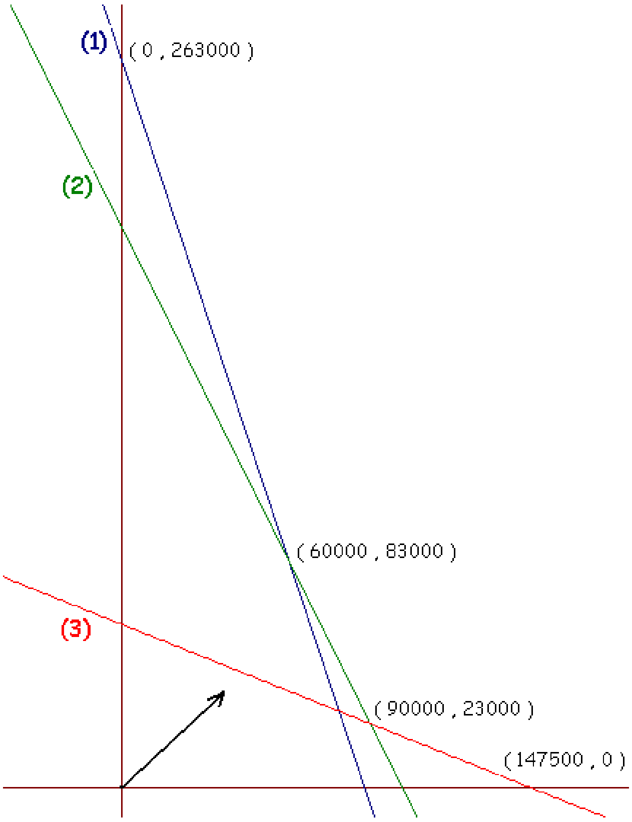
$$\begin{cases} 0'4\,x + 0'2\,y = 40600 \\ 0'2\,x + 0'5\,y = 29500 \end{cases} \rightarrow \quad :(-2) \begin{cases} -0'2\,x - 0'1\,y = -20300 \\ \quad 0'2\,x + 0'5\,y = \;29500 \end{cases}$$

$$Sumando\ \ ambas\ \ ecuaciones: \quad 0'4\,y = 9200$$

$$y = \frac{9200}{0'4} = 23000$$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación,
0'4 x + 0'2 . 23000 = 40600
0'4 x + 4600 = 40600
0'4 x = 36000
x = 90000

el punto de corte es (90000 , 23000)



Estudiemos los valores de z en los extremos de la región factible,

(x , y)	*z = 70 x + 65 y*	
(0 , 26300)	*70 . 0 + 65 . 26300 = 17 095 000*	
(60000 , 83000)	*70 . 60000 + 65 . 83000 = 9 595 000*	
(90000 , 23000)	*70 . 90000 + 65 .23000 = 7 795 000*	*Mínimo*
(147500 , 0)	*70 . 147500 + 65 . 0 = 10 325 000*	

Solución: para que la refinería cubra sus necesidades de producción con un coste mínimo debe comprar ***90000 barriles de crudo ligero*** *y* ***23000 barriles de crudo pesado****; el coste de esta operación será de* ***7795000 €****.*

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Una fábrica de fertilizantes produce dos tipos de abono, A y B, a partir de dos materias primas M_1 y M_2. Para fabricar 1 tonelada métrica de A hacen falta 500 kg de M_1 y 750 kg de M_2, mientras que las cantidades de M_1 y M_2 utilizadas para fabricar 1 tonelada de B son 800 kg y 400kg, respectivamente. La empresa tiene contratado un máximo de 10 toneladas de cada materia prima y vende a 1.000 € y 1.500 € cada tonelada de abono de A y B, respectivamente. Sabiendo que la demanda de B nunca llega a triplicar la de A, ¿cuántas toneladas de cada abono debe fabricar para maximizar sus ingresos y cuáles son éstos?

Solución:

Utilizamos las incógnitas:

x = Tm del abono del tipo A

y = Tm del abono del tipo B

De los datos del problema podemos sacar la siguiente tabla:

	Materias primas		
	M_1	*M_2*	*Venta*
Abono A	*500 Kg*	*750 Kg*	*1000 €/Tm*
Abono B	*800 Kg*	*400 Kg*	*1500 €/Tm*
restricciones	*10000 Kg*	*10000 Kg*	

Los ingresos serían: 1000 x + 1500 y

Las restricciones son:

por la disponibilidad de la materia prima M_1: $500x + 800y \le 10000$

por la disponibilidad de la materia prima M_2: $750x + 400y \le 10000$

la demanda de B nunca llega a triplicar la de A $y < 3x$

El problema a resolver es:

maximizar $z = 1000x + 1500y$

$$s.a.\quad \begin{cases} 500x + 800y \le 10000 \\ 750x + 400y \le 10000 \\ y < 3x \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

$500x + 800y \le 10000$

(1) $500x + 800y = 10000$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 12'5 \\ 20 & 0 \end{array}$$

¿(0,0) *cumple*?

$500 \cdot 0 + 800 \cdot 0 \le 10000$ *sí*

$750x + 400y \le 10000$

(2) $750x + 400y = 10000$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 25 \\ \frac{40}{3} & 0 \end{array}$$

¿(0,0) *cumple*?

$0'3 \cdot 0 + 0'5 \cdot 0 \le 90$ *sí*

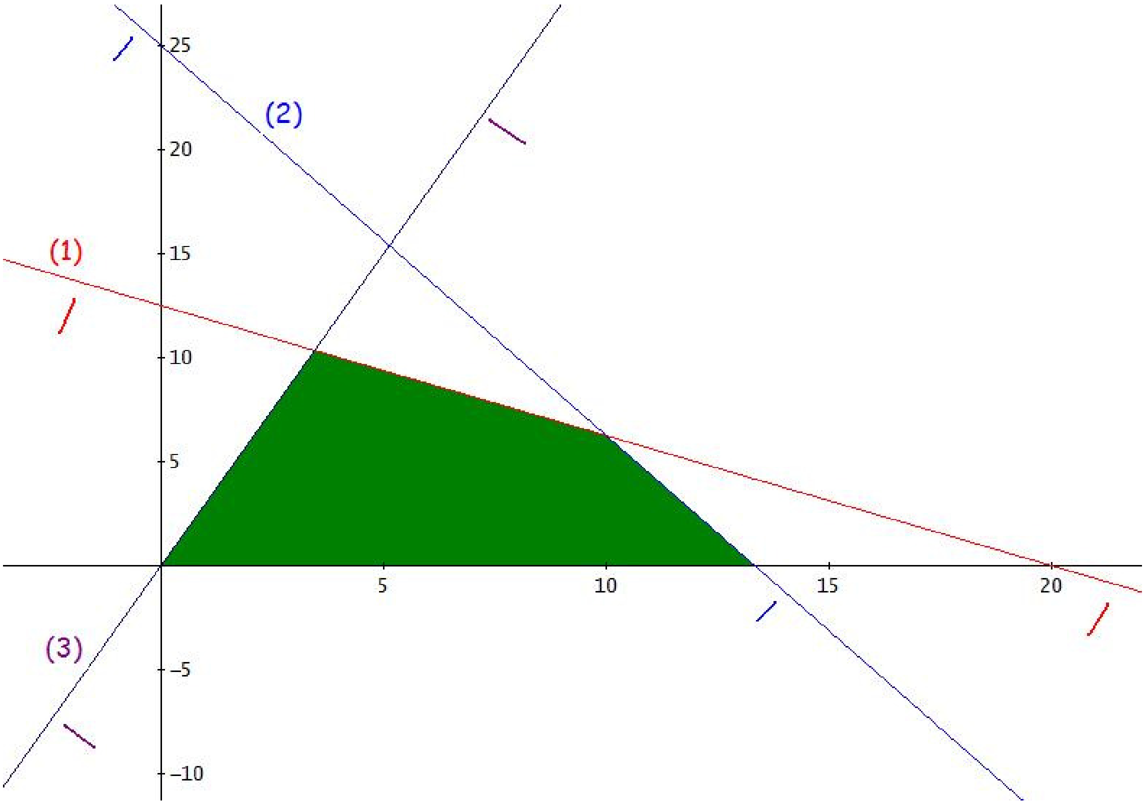
$y < 3x$

(3) $y = 3x$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 0 \\ 5 & 15 \end{array}$$

¿(5,0) *cumple*?

$0 < 3 \cdot 5$ *sí*



Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}500x+800y=10000\\ y=3x\end{cases}\qquad 500x+800\,.\,3x=10000 \;\rightarrow\; 500x+2400x=10000 \;\rightarrow\; 2900x=10000 \;\rightarrow$$

$$x=\frac{10000}{2900}=\frac{100}{29}=3'448$$

$$\rightarrow \quad y=3\frac{100}{29}=\frac{300}{29}=10'344 \quad\rightarrow\quad (\frac{100}{29}\,,\frac{300}{29})$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}500x+800y=10000\\ 750x+400y=10000\end{cases}$$

$$\begin{matrix}1^{a}:(-2)\\ 2^{a}\end{matrix}\begin{cases}-250x-400y=-5000\\ 750x+400y=10000\end{cases}$$

sumando,

$500x=5000$

$x=10$

sustituyendo en 1^{a},

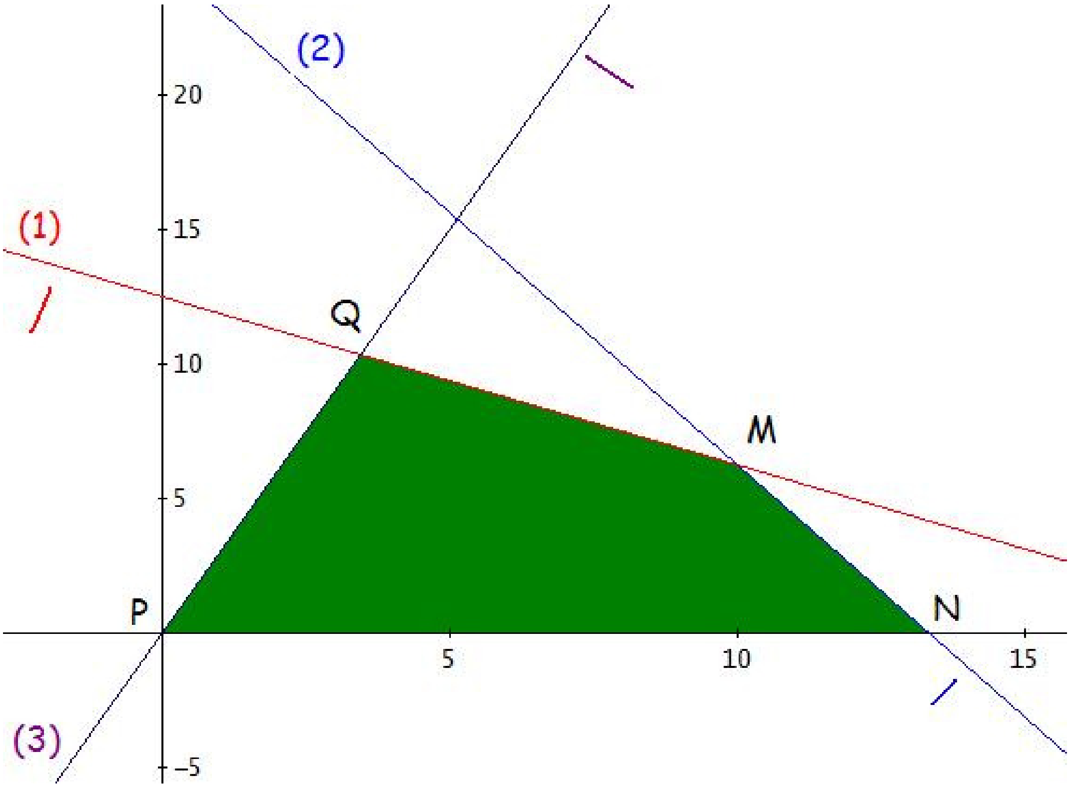
$500\,.\,10+800y=10000$

$800y=5000$

$y=\frac{5000}{800}=6'25 \quad\rightarrow\quad (10\,,6'25)$

La región factible está limitada por los puntos

$$M(10\,,\,6'25),\; N(\frac{40}{3}\,,\,0),\; P(0\,,\,0)\;\; y\; Q\left(\frac{100}{29}\,,\,\frac{300}{29}\right)$$



Sabemos que la función que queremos maximizar alcanzará su máximo en los extremos de la región factible.

(x, y)	$z = 1000x + 1500y$	
$(0,0)$	$1000 \,.\, 0 + 1500 \,.\, 0 = 0$	
$(\frac{100}{29}, \frac{300}{29})$	$1000 \,.\, \frac{100}{29} + 1500 \,.\, \frac{300}{29} = 18965{\acute{}}517$	
$(10\,,\,6{\acute{}}25)$	$1000 \,.\, 10 + 1500 \,.\, 6{\acute{}}25 = 19375$	*máximo*
$\left(\frac{40}{3}, 0\right)$	$1000 \,.\, \frac{40}{3} + 1500 \,.\, 0 = 13333{\acute{}}333$	

El máximo se alcanza en el punto (10 , 6´25). Por lo que para maximizar sus ingresos la fábrica debe producir 10 Tm del abono tipo A y 6´25 Tm del tipo B.
Con esta producción los ingresos serían de 19375 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. a) Representar gráficamente el conjunto de soluciones del sistema determinado por las inecuaciones:

$$3y-4x-8\le 0,\qquad y\ge -4x+4,\qquad y\ge 2,\qquad x\le 1$$

b) Halla los vértices de la región anterior.

c) Calcula el punto donde alcanza el mínimo la función f(x,y) = 3 x – y en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

Solución:

a)

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$3y-4x\le 8$ $y\ge -4x+4$ $y\ge 2$ $x\le 1$

(1) $3y-4x=8$ (2) $y=-4x+4$ (3) $y=2$ (4) $x=1$

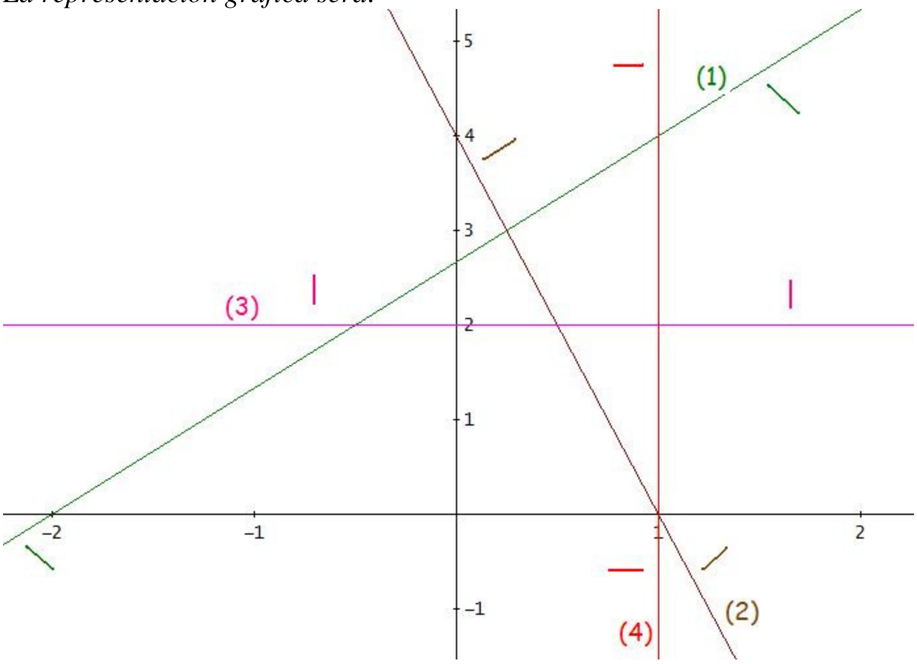
x	y
0	$\frac{8}{3}$
-2	0

x	y
0	4
1	0

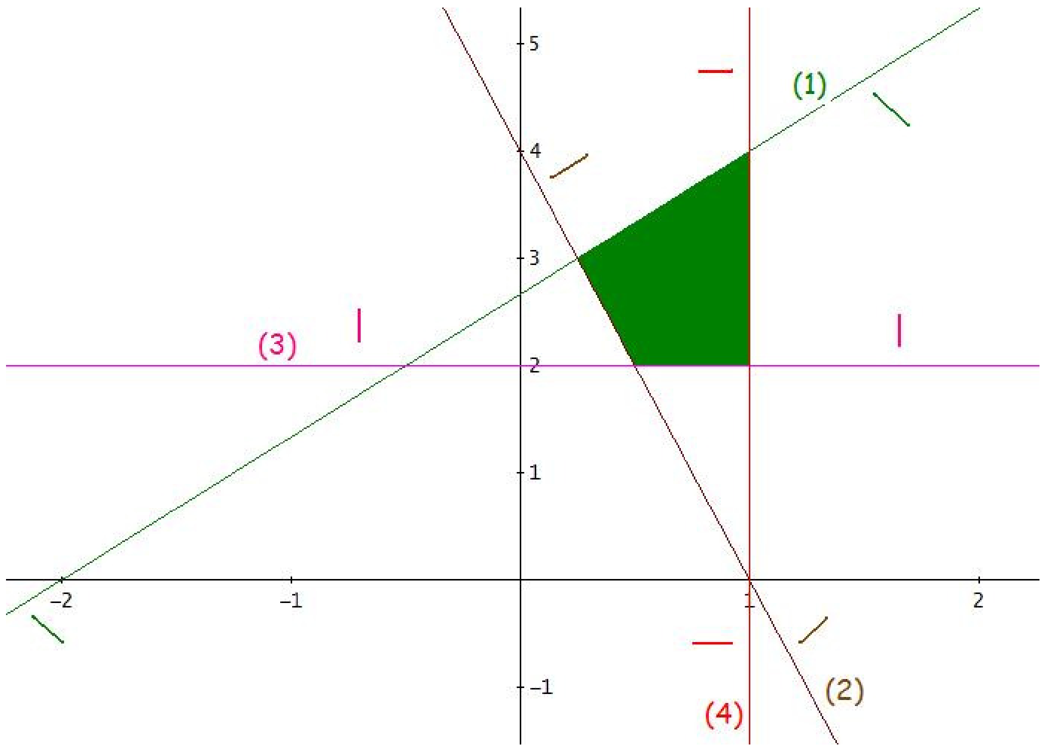
¿(0,0) *cumple*? $3.0-4.0\le 8$ *Sí*

¿(0,0) *cumple*? $0\ge -4.0+4$ *No*

La representación gráfica será:



El conjunto de soluciones será la región coloreada,



b) Para encontrar los vértices de la región debemos resolver los siguientes sistemas,

De (1) *y* (2): $A\left(\frac{1}{4}, 3\right)$

$$\begin{cases} 3y-4x=8 \\ y=-4x+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y-4x=8 \\ y+4x=4 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: 4 y = 12; y = 3

sustituyendo en la 1ª, 3 . 3 – 4 x = 8; 9 – 4 x = 8; 9 – 8 = 4 x; 1 = 4 x; $x=\frac{1}{4}$

De (1) *y* (4): $B(1, 4)$

$$\begin{cases} 3y-4x=8 \\ x=1 \end{cases}$$

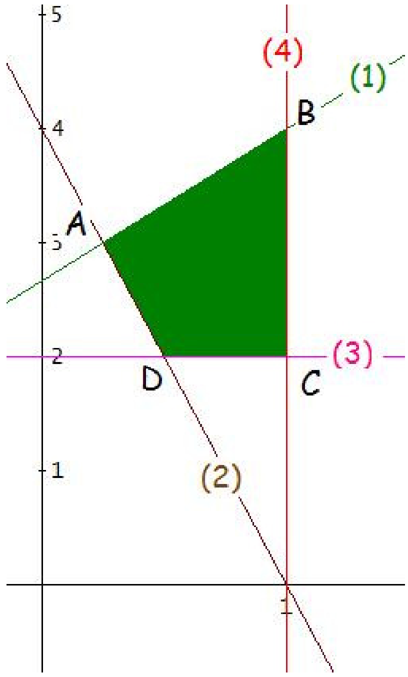
3 y – 4 . 1 = 8; 3 y – 4 = 8; 3 y = 12; y = 4

De (3) *y* (4): $C(1, 2)$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

De (2) *y* (3): $D\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$$\begin{cases} y=-4x+4 \\ y=2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 2=-4x+4 \quad \rightarrow \quad 4x=4-2 \quad \rightarrow \quad 4x=2 \quad \rightarrow \quad x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$



Los vértices de la región anterior son los puntos:

$A\left(\frac{1}{4}, 3\right),\ B(1, 4),\ C(1, 2)\quad y\ \ D\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

c)

Sabemos que la función dada alcanzará su mínimo en alguno de los extremos de la región. Calculémoslo,

x, y	$f(x, y) = 3x - y$
$\frac{1}{4},3$	$3\,\frac{1}{4} - 3 = \frac{3}{4} - 3 = \frac{3-12}{4} = \frac{-9}{4} = -2´25$ *mínimo*
$1,4$	$3\,.\,1 - 4 = -1$
$1,2$	$3\,.\,1 - 2 = 1$
$\frac{1}{2},2$	$3\,\frac{1}{2} - 2 = \frac{3-2}{2} = \frac{-1}{2} = -0´5$

La función f(x,y) alcanza su mínimo en el punto

$A\left(\frac{1}{4}, 3\right)$

con un valor de $-2´25$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2.

a) Representar gráficamente el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+2y\geq 0 \\ x-2y\geq -1 \\ 5x+4y\leq 16 \\ x-y\leq 5 \end{cases}$$

b) Determina los vértices de la región obtenida en el apartado anterior.

c) Calcula el punto donde alcanza el mínimo la función *f(x,y) = 3 x – y* en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

Solución:

a) Cálculos para representar las restricciones

$3x+2y\geq 5$

(1) $3x+2y=5$

x	y
0	$\frac{5}{2}$
$\frac{5}{3}$	0

¿(0,0) *cumple*?

$3.0+2.0\geq 5$ *No*

$x-2y\geq -1$

(2) $x-2y=1$

x	y
-1	0
0	$\frac{1}{2}$

¿(0,0) *cumple*?

$0-2.0\geq -1$ *Sí*

$5x+4y\leq 16$

(3) $5x+4y=16$

x	y
0	4
$\frac{16}{5}$	0

¿(0,0) *cumple*?

$5.0+4.0\leq 16$ *Sí*

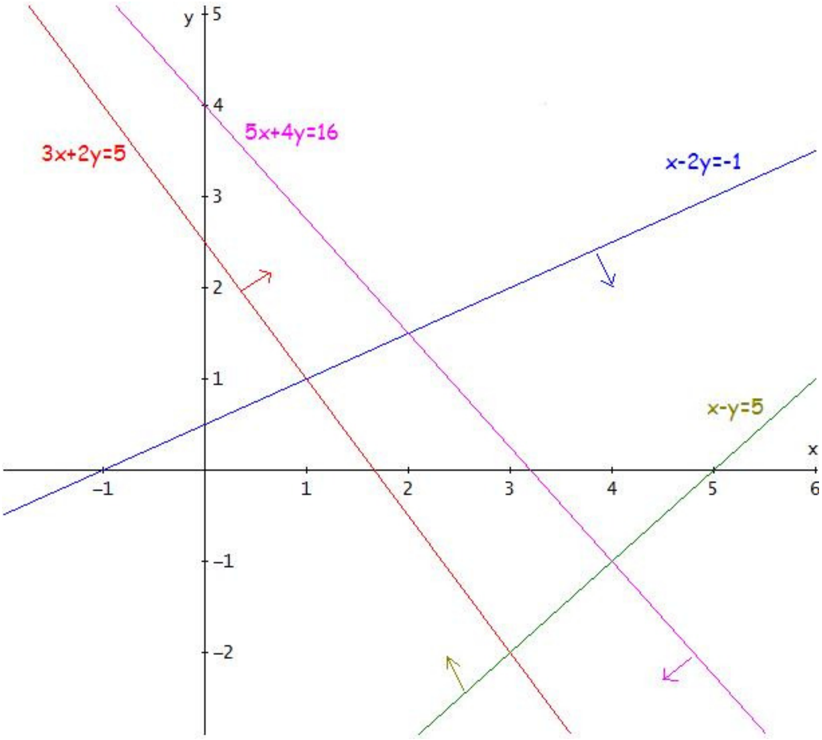
$x-y\leq 5$

(4) $x-y=5$

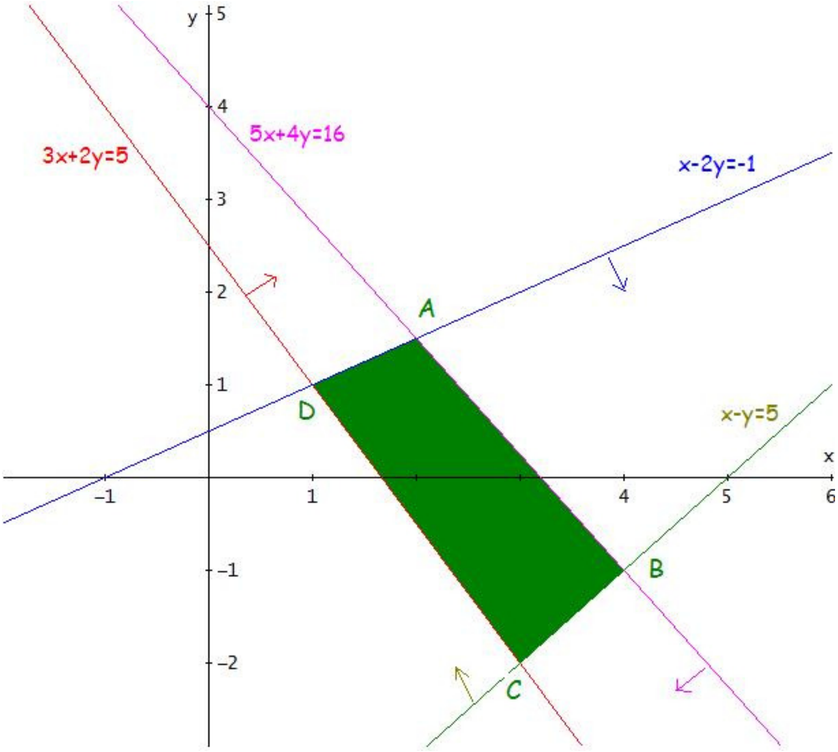
x	y
0	-5
5	0

¿(0,0) *cumple*?

$0-0\leq 5$ *Sí*



Por lo tanto el conjunto de soluciones del sistema son los puntos de la siguiente región coloreada:



b) Los vértices de la región obtenida en el apartado anterior los obtendremos calculando los siguientes puntos de corte,

$A, \quad (3)\bigcap(2)$

$$\begin{matrix}(3)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}5x+4y=16\\x-2y=-1\end{cases}$$

$$\begin{matrix}1^{a}\\2^{a}.2\end{matrix}\begin{cases}5x+4y=16\\2x-4y=-2\end{cases}$$

sumando,

$$7x=14$$
$$x=2$$

sustituyendo en 2^{a},

$$2-2y=-1$$
$$-2y=-1-2$$
$$-2y=-3$$
$$y=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad A\left(2\ ,\ \frac{3}{2}\right)$$

$C, \quad (1)\bigcap(4)$

$$\begin{matrix}(1)\\(4)\end{matrix}\begin{cases}3x+2y=5\\x-y=5\end{cases}$$

$$\begin{matrix}1^{a}\\2^{a}.2\end{matrix}\begin{cases}3x+2y=5\\2x-2y=10\end{cases}$$

sumando,

$$5x=15$$
$$x=3$$

sustituyendo en 2^{a},

$$3-y=5$$
$$-y=5-3$$
$$-y=2$$
$$y=-2 \quad \rightarrow \quad C\left(3\ ,-2\right)$$

$B, \quad (4)\cap(3)$

$$\begin{array}{l} (4) \\ (3) \end{array} \begin{cases} x-y=5 \\ 5x+4y=16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 1^a.4 \\ 2^a \end{array} \begin{cases} 4x-4y=20 \\ 5x+4y=16 \end{cases}$$

sumando,

$9x=36$

$x=4$

sustituyendo en 1^a,

$4-y=5$

$-y=5-4$

$-y=1 \quad \rightarrow \quad y=-1 \qquad \rightarrow \quad B\,(4\,,-1)$

$D, \quad (1)\cap(2)$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-2y=-1 \end{cases}$$

sumando,

$4x=4$

$x=1$

sustituyendo en 2^a,

$1-2y=-1$

$-2y=-1-1$

$-2y=-2 \quad \rightarrow \quad y=1 \qquad \rightarrow \quad D\,(1\,,1)$

Los vértices pedidos son los puntos

$$A(2\,,\frac{3}{2}),\ B(4\,,-1),\ C(3\,,-2)\ y\ D(1\,,1)$$

c) Sabemos que la función f(x,y) alcanzará el mínimo en alguno de los extremos de la región.

(x,y)	$f(x,y)=3x-y$
$(2,\frac{3}{2})$	$3\,.\,2-\frac{3}{2}=6-\frac{3}{2}=\frac{12-3}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5$
$(4,-1)$	$3\,.\,4-(-1)=12+1=13$
$(3\,,-2)$	$3\,.\,3-(-2)=9+2=11$
$(1,1)$	$3\,.\,1-1=3-1=2$ *mínimo*

Luego f(x,y) alcanza el mínimo en el punto (1 , 1) y este mínimo vale 2.

BLOQUE A

PROBLEMA A1. Un frutero quiere liquidar 500 kg de naranjas, 400 kg de manzanas y 230 de peras. Para ello prepara dos bolsas de fruta de oferta: la bolsa A consta de 1 kg de naranjas y 2 de manzanas y la bolsa B consta de 2 kg de naranjas, 1 kg de manzanas y 1 kg de peras. Por cada bolsa del tipo A se obtiene un beneficio de 2,50 euros y 3 euros por cada una del tipo B. Suponiendo que vende todas las bolsas, ¿cuántas bolsas de cada tipo debe preparar para maximizar sus ganancias? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:
Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

Tipo de bolsa	*Kg de naranjas*	*Kg de manzanas*	*Kg de peras*	*beneficio*
A	*1*	*2*	*0*	*2´5*
B	*2*	*1*	*1*	*3*
Existencias	*500*	*400*	*230*	

Utilizamos las siguientes incógnitas
x = número de bolsas del tipo A que prepara
y = número de bolsas del tipo B que prepara
Las restricciones serán:
"quiere liquidar 500 kg de naranjas"; $x + 2y \leq 500$
"quiere liquidar 400 kg de manzanas"; $2x + y \leq 400$
"quiere liquidar 230 kg de peras"; $y \leq 230$
Como x e y representan número de bolsas, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \in N$

Los beneficios que obtiene el frutero serán: $2´5x + 3y$

El problema a resolver es:

Maximizar $z = 2´5x + 3y$

$$s.a. \begin{cases} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 230 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + 2y \leq 500$

$x + 2y = 500$

x	y
0	250
500	0

¿(0,0) *cumple*?

$0 + 2.0 \leq 500$ *Sí*

(b) $2x + y \leq 400$

$2x + y = 400$

x	y
0	400
200	0

¿(0,0) *cumple*?

$2.0 + 0 \leq 400$ *Sí*

(c) $y \leq 230$

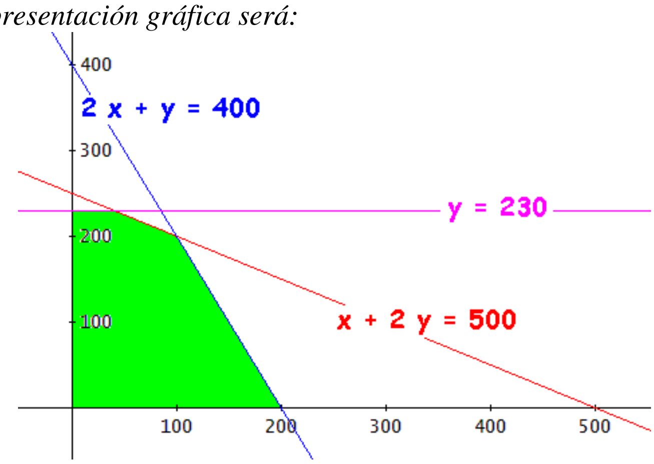
$y = 230$

x	y
0	230
100	230

¿(0,0) *cumple*?

$0 \leq 230$ *Sí*

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

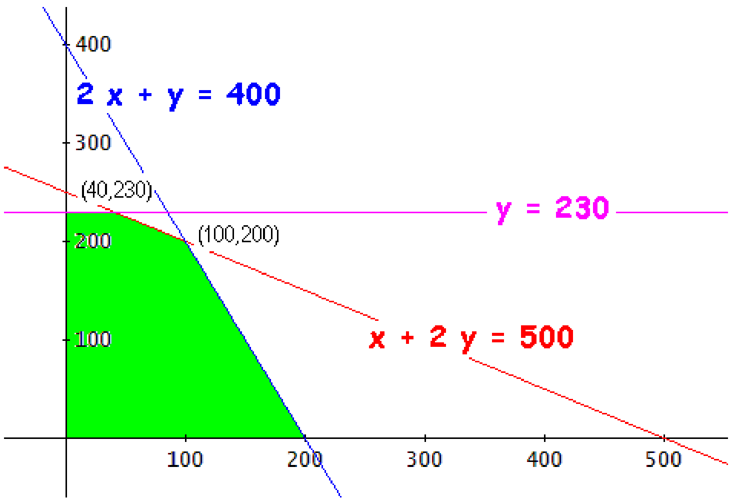
Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.
Son evidentes los vértices (0 , 0), (0 , 230) y (200 , 0); calculemos los otros dos vértices.
De (a) y (c): (40 , 230)

$$\begin{cases} x + 2y = 500 \\ y = 230 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x + 2\,.\,230 = 500 \\ x + 460 = 500 \\ x = 40 \end{array}$$

De (a) y (b): (100 , 200)

$$\begin{cases} x + 2y = 500 \\ 2x + y = 400 \end{cases} \rightarrow \quad *(-2) \begin{cases} -2x - 4y = -1000 \\ 2x + y = 400 \end{cases}$$

sumando las ecuaciones
– 3 y = – 600; y = 200
Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación: 2 x + 200 = 400; 2 x = 200; x = 100



Los vértices de la región factible son: (0, 0), (0 , 230), (40 , 230), (100 , 200) y (200 , 0). Estos vértices tienen sus coordenadas naturales, por lo que, la función de los beneficios, z, alcanza su valor máximo en los vértices de la región anterior o en alguno de los segmentos que la delimitan.
Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*z = 2´5 x + 3 y*	
0 , 0	*2´5 . 0 + 3 . 0 = 0*	
0 , 230	*2´5 . 0 + 3 . 230 = 690*	
40 , 230	*2´5 . 40 + 3 . 230 = 790*	
100 , 200	*2´5 . 100 + 3 . 200 = 850*	*Máximo*
200 , 0	*2´5 . 200 + 3 . 0 = 500*	

El máximo se alcanza en el punto (100 , 200) lo cual quiere decir que para maximizar sus ganancias el frutero debe preparar 100 bolsas del tipo A y 200 del tipo B. De esta forma conseguirá un beneficio máximo de 850€.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1. En un horno mallorquín se fabrican dos tipos de ensaimadas, grandes y pequeñas. Cada ensaimada grande requiere para su elaboración 500 g. de masa y 250 g. de relleno, mientras que una pequeña requiere 250 g. de masa y 250 g. de relleno. Se dispone de 20 kg. de masa y 15 kg. de relleno. El beneficio obtenido por la venta de una ensaimada grande es de 2 euros y el de una pequeña es de 1,5 euros.

a) ¿Cuántas ensaimadas de cada tipo tiene que fabricar el horno para que el beneficio obtenido sea máximo?
b) ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:
Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

	Masa	*Relleno*	*Beneficio*
Ensaimadas grandes	*500 g*	*250 g*	*2 €*
Ensaimadas pequeñas	*250 g*	*250 g*	*1´50 €*
Existencias	*20 Kg = 20000 g*	*15 kg= 15000 g*	

Utilizamos las siguientes incógnitas

x = *número de ensaimadas grandes*
y = *número de ensaimadas pequeñas*

Las restricciones serán:
Por la cantidad de masa disponible; $500x + 250y \le 20000$
Por la cantidad de relleno disponible; $250x + 250y \le 15000$
Podemos simplificar ambas inecuaciones entre 250;

$2x + y \le 80$
$x + y \le 60$

Como x *e* y *representan número de ensaimadas, la restricción para los valores de estas variables es* $x, y \in N$

Los beneficios obtenidos por la venta de las ensaimadas serán: $2x + 1´5y$

a) Para calcular cuántas ensaimadas de cada tipo hay que fabricar para maximizar el beneficio debemos resolver el siguiente problema:

Maximizar $z = 2x + 1´5y$

$$s.a.\ \begin{cases} 2x + y \le 80 \\ x + y \le 60 \\ x,\ y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad 2x + y \le 80$

$2x + y = 80$

x	y
0	80
40	0

¿(0,0) *cumple*?

$2.0 + 0 \le 80$ *Sí*

$(b)\quad x + y \le 60$

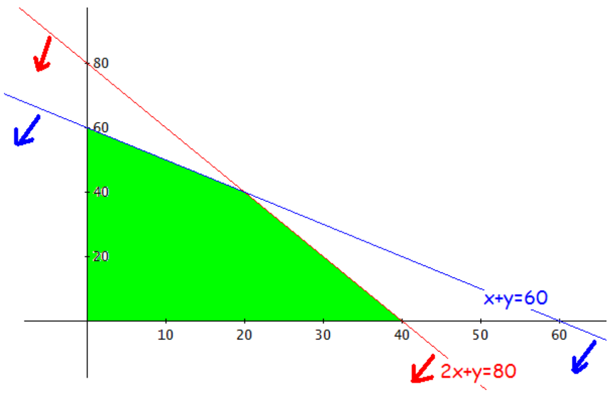
$x + y = 60$

x	y
0	60
60	0

¿(0,0) *cumple*?

$0 + 0 \le 60$ *Sí*

La representación gráfica será:



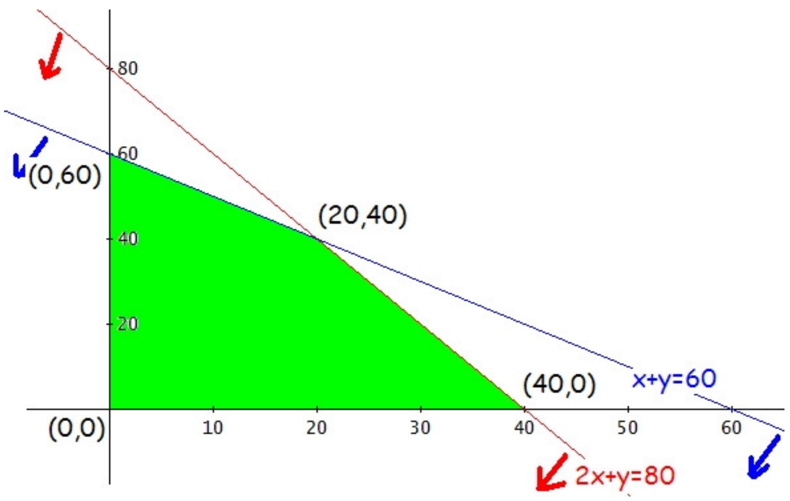
La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.
Son evidentes los vértices (0 , 0), (0 , 60) y (40 , 0); calculemos el otro vértice.
De (a) y (b):

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + y = 60 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x + y = 80 \\ -x - y = -60 \end{cases}$$

$$Sumando: \quad x \qquad = 20$$

Sustituyendo este valor de x en la 2ª ecuación, 20 + y = 60; y = 40
Punto de corte (20 , 40)



Los vértices de la región factible son: (0, 0), (0 , 60), (20 , 40) y (40 , 0). Estos vértices tienen sus coordenadas naturales, por lo que, la función de los beneficios, z, alcanza su valor máximo en los vértices de la región anterior o en alguno de los segmentos que la delimitan.
Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*z = 2 x + 1´5 y*	
0 , 0	*2 . 0 + 1´5 . 0 = 0*	
0 , 60	*2 . 0 + 1´5 . 60 = 90*	
20 , 40	*2 . 20 + 1´5 . 40 = 100*	*Máximo*
40 , 0	*2 . 40 + 1´5 . 0 = 40*	

El máximo se alcanza en el punto (20 , 40) lo cual quiere decir que para maximizar su beneficio hay que fabricar 20 ensaimadas grandes y 40 pequeñas.

b) De esta forma se conseguirá un beneficio máximo de 100 €.

BLOQUE A

PROBLEMA 1. Un comerciante quiere invertir hasta 1000 euros en la compra de dos tipos de aparatos, A y B, pudiendo almacenar en total hasta 80 aparatos. Cada aparato de tipo A le cuesta 15 euros y lo vende a 22, cada uno del tipo B le cuesta 11 y lo vende a 17 euros. ¿Cuántos aparatos debe comprar de cada tipo para maximizar su beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:
Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

Tipo de aparato	*Nº de aparatos*	*Precio compra €/unidad*	*Precio venta €/unidad*	*Beneficio*
A	*x*	*15*	*22*	*7 x*
B	*y*	*11*	*17*	*6 y*
Disponibilidad	*80*	*1000 €*		

Utilizamos las siguientes incógnitas
x = número de aparatos del tipo A
y = número de aparatos del tipo B
Las restricciones serán:
"quiere invertir hasta 1000 €"; $15\ x + 11\ y \leq 1000$
"puede almacenar hasta 80 aparatos"; $x + y \leq 80$
Como x e y representan número de aparatos, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \in N$
Los beneficios que obtiene el comerciante serán: $7x + 6y$

El problema a resolver es:

$$\text{Maximizar} \quad z = 7x + 6y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 15x + 11y \leq 1000 \\ x + y \leq 80 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a) \quad 15x + 11y \leq 1000$

$15x + 11y = 1000$

x	y
0	$\frac{1000}{11} = 90'90$
$\frac{1000}{15} = 66'66$	0

$¿(0,0)\ cumple?$

$15 . 0 + 11 . 0 \leq 1000\ Sí$

$(b) \quad x + y \leq 80$

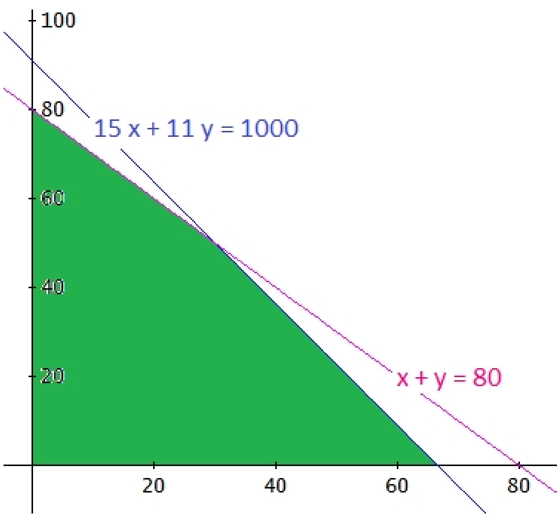
$x + y = 80$

x	y
0	80
80	0

$¿(0,0)\ cumple?$

$0 + 0 \leq 80\ Sí$

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.
Son evidentes los vértices (0 , 0), (0 , 80) y (66´66 , 0); calculemos el otro vértice.
De (a) y (b): (30 , 50)

$$\begin{cases} 15x + 11y = 1000 \\ x + y = 80 \end{cases}$$

despejando de la segunda ecuación: $y = 80 - x$
sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $15x + 11(80 - x) = 1000$;
$15x + 880 - 11x = 1000$
$4x = 120$

$$x = \frac{120}{4} = 30$$

Luego, $y = 80 - 30 = 50$

Los vértices de la región factible son: (0 , 0), (0 , 80) y (66´66 , 0) y (30 , 50).
De estos vértices el (66´66 , 0) no tiene sus coordenadas naturales, esperemos que el máximo se alcance en otro de los vértices para que el problema tenga una solución sencilla.
Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	z = 7 x + 6 y	
0 , 0	7 . 0 + 6 . 0 = 0	
0 , 80	7 . 0 + 6 . 80 = 480	
30 ,50	7 . 30 + 6 . 50 = 510	***Máximo***
66´66 , 0	7 . 66´66 + 6 . 0 = 466´62	

El máximo se alcanza en el punto (30 , 50).
Por lo tanto: para maximizar su beneficio debe comprar 30 aparatos del tipo A y 50 del tipo B.
De esta forma el beneficio máximo será de 510€.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{y}{2} \\ 760x + 370y \leq 94500 \\ y + \dfrac{x}{2} \geq 100 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el máximo de la función $f(x,y) = x + y$ en esta región. ¿En qué punto se alcanza?

Solución:
Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x \geq \dfrac{y}{2}$

$x = \dfrac{y}{2}$

x	y
0	0
100	200

$¿(100,0)$ *cumple*?

$100 \geq \dfrac{0}{2}$ *Sí*

(b) $760x + 370y \leq 94500$

$760x + 370y = 94500$

x	y
0	$\dfrac{94500}{370} \cong 255'41$
$\dfrac{94500}{760} \cong 124'34$	0

$¿(0,0)$ *cumple*?

$760 \,.\, 0 + 370 \,.\, 0 \leq 94500$

$0 \leq 94500$ *Sí*

(c) $y + \dfrac{x}{2} \geq 100$

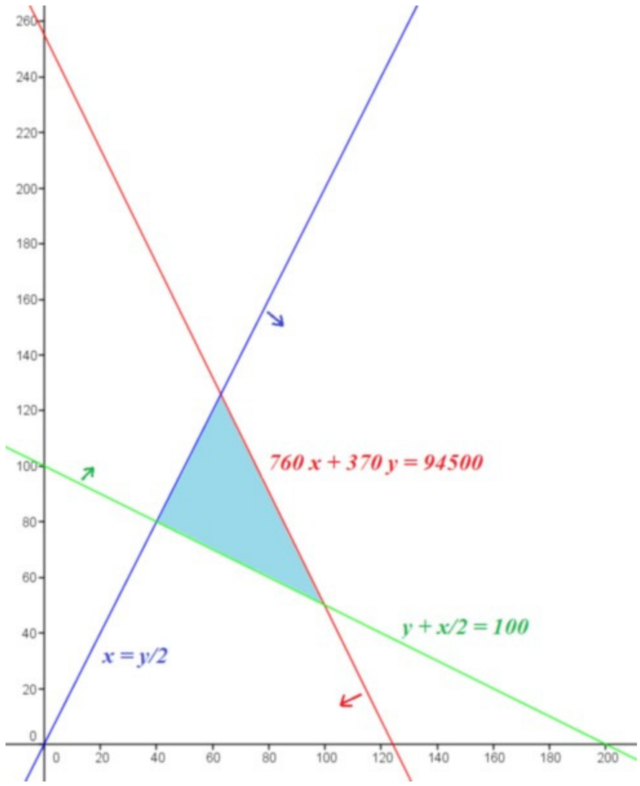
$y + \dfrac{x}{2} = 100$

x	y
0	100
200	0

$¿(0,0)$ *cumple*?

$0 + \dfrac{0}{2} \geq 1000$ *No*

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

De (a) y (c): *A (40 , 80)*

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ y + \dfrac{x}{2} = 100 \end{cases}$$ *sustituyendo el valor de x en la 2^a ecuación:*

$$y + \frac{\cancel{y}\!/2}{2} = 100 \quad \rightarrow \quad y + \frac{y}{4} = 100 \quad \rightarrow \quad \frac{4y + y}{4} = 100 \quad \rightarrow \quad 5y = 400 \quad \rightarrow \quad y = \frac{400}{5} = 80$$

Finalmente, $x = \dfrac{80}{2} = 40$

De (a) y (c): *B (63 , 126)*

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ 760x + 370y = 94500 \end{cases}$$ *sustituyendo el valor de x en la 2^a ecuación:*

$$760\,\frac{y}{2} + 370y = 94500 \quad \rightarrow \quad 380y + 370y = 94500 \quad \rightarrow \quad 750y = 94500 \quad \rightarrow \quad y = \frac{94500}{750} = 126$$

Finalmente, $x = \dfrac{126}{2} = 63$

De (b) y (c): *C (100 , 50)*

$$\begin{cases} 760x + 370y = 94500 \\ y + \dfrac{x}{2} = 100 \end{cases}$$

De la 2^a ecuación, $2y + x = 200 \quad \rightarrow \quad x = 200 - 2y$

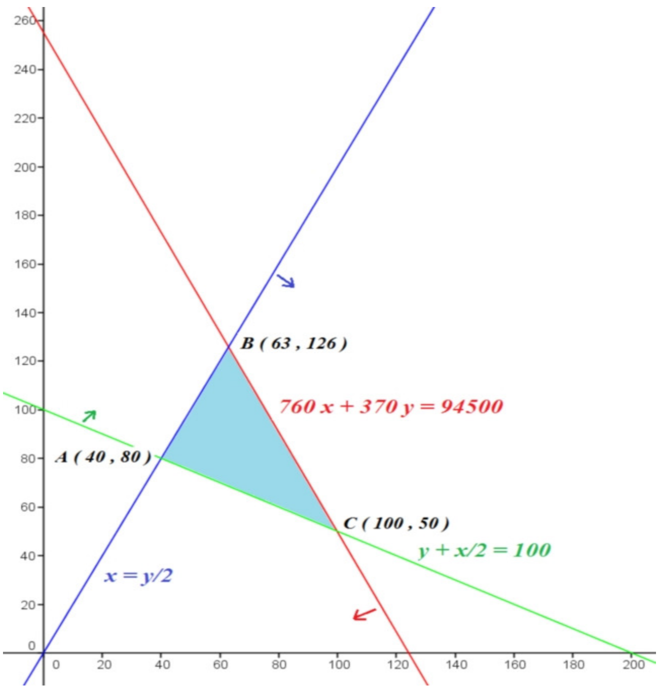
Sustituyendo el valor de x en la 1^a ecuación: $760\,(200 - 2\,y) + 370\,y = 94500;$

$152000 - 1520\,y + 370\,y = 94500; \quad 152000 - 1150\,y = 94500; \quad -1150\,y = 94500 - 152000$

$-1150\,y = -57500; \quad y = \dfrac{-57500}{-1150} = 50$

Finalmente, $x = 200 - 2 \cdot 50 = 100$

Los vértices de la región determinada por el sistema de inecuaciones son: A (40, 80), B (63 , 126) y C (100 , 50).



El máximo de la función f(x,y) en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*f (x,y) = x + y*	
40 , 80	*40 + 80 = 120*	
63 , 126	*63 + 126 = 189*	*Máximo*
100 , 500	*100 + 50 = 150*	

El máximo de la función f(x,y) = x + y en esta región es 189 y se alcanza en el punto (63 , 126).

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Se dispone de 200 hectáreas de terreno en las que se desea cultivar patatas y zanahorias. Cada hectárea dedicada al cultivo de patatas necesita 12,5 litros de agua de riego al mes, mientras que cada una de zanahorias necesita 40 litros, disponiéndose mensualmente de un total de 5000 litros de agua para el riego. Por otra parte, las necesidades por hectárea de abono nitrogenado son de 20 kg para las patatas y de 30 kg para las zanahorias, disponiéndose de un total de 4500 kg de abono nitrogenado. Si la ganancia por hectárea sembrada de patatas es de 300€ y de 400€ la ganancia por cada hectárea de zanahorias, ¿qué cantidad de hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para maximizar la ganancia? ¿Cuál sería esta?

Solución:
Llamando: x = *hectáreas dedicadas a cultivar patatas*
y = *hectáreas dedicadas a cultivar zanahorias*
Los datos del problema los podemos resumir en la tabla:

	Hectáreas	*Agua (l)*	*Abono (Kg)*	*Ganancia (€)*
Patatas	x	$12'5\,x$	$20\,x$	$300\,x$
Zanahorias	y	$40\,y$	$30\,y$	$400\,y$
Restricciones	200	5000	4500	

Como las variables x *e* y *representan hectáreas de cultivo deben ser mayores o iguales a cero.*
La ganancia viene dada por la función: $z = 300\,x + 400\,y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 300\,x + 400\,y$$

$$s.a. \quad \begin{cases} x + y \le 200 \\ 12'5\,x + 40\,y \le 5000 \\ 20\,x + 30\,y \le 4500 \\ x,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a) \quad x + y \le 200$

$x + y = 200$

x	y
0	200
200	0

$¿(0,0)\ cumple?$

$0 + 0 \le 200 \quad Sí$

$(b) \quad 12'5x + 40y \le 5000$

$12'5x + 40y = 5000$

x	y
0	$\frac{5000}{40} = 125$
$\frac{5000}{12'5} = 400$	0

$¿(0,0)\ cumple?$

$12'5\,.\,0 + 40\,.\,0 \le 5000$

$0 \le 5000 \quad Sí$

$(c) \quad 20x + 30y \le 4500$

$20x + 30y = 4500$

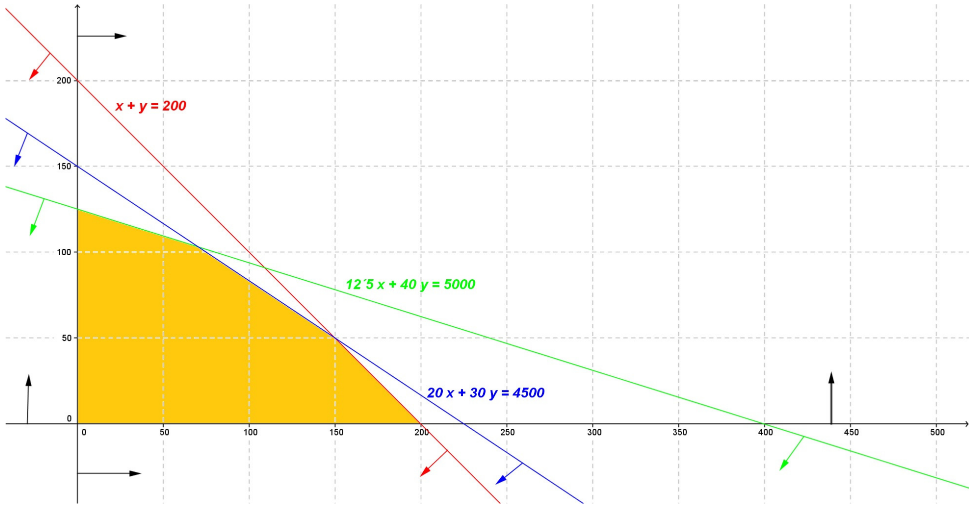
x	y
0	$\frac{4500}{30} = 150$
$\frac{4500}{20} = 225$	0

$¿(0,0)\ cumple?$

$20\,.\,0 + 30\,.\,0 \le 4500$

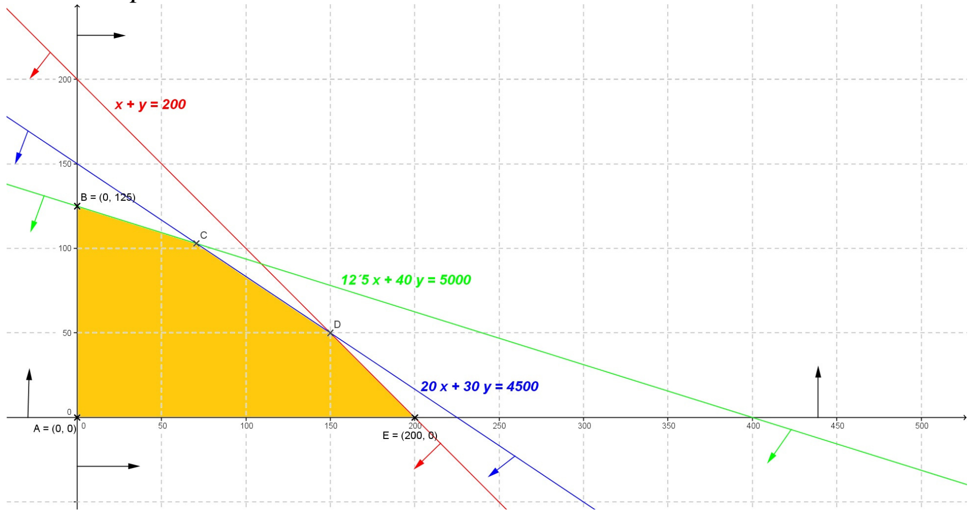
$0 \le 4500 \quad Sí$

La repre-senta-ción gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región factible son A (0, 0), B (0 , 125) , C, D y E (200 , 0). Los vértices A, B y E los conocemos directamente de la representación gráfica; los vértices C y D los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.



Punto C, corte entre (b) y (c):

$$\begin{cases} 12´5x + 40y = 5000 \\ 20x + 30y = 4500 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 1^{\text{a}}\, x3 \\ 2^{\text{a}}\, x(-4) \end{matrix} \begin{cases} 37´5x + 120y = 15000 \\ -80x - 120y = -18000 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-\,42´5\;x = -\,3000 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{-3000}{-42´5} = \dfrac{1200}{17} \cong 70´5882$

sustituyendo el valor de x *en la* 2^{a} *ecuación:*

$$20\,.\,\frac{1200}{17} + 30y = 4500 \quad \rightarrow \quad \frac{24000}{17} + 30y = 4500 \quad \rightarrow \quad 30y = 4500 - \frac{24000}{17}$$

$$\rightarrow \quad 30y = \frac{52500}{17} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\frac{52500}{17}}{30} = \frac{1750}{17} \cong 102´9412$$

Luego C (70´5882 , 102´9412)

Punto D, corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 20x + 30y = 4500 \end{cases}$$

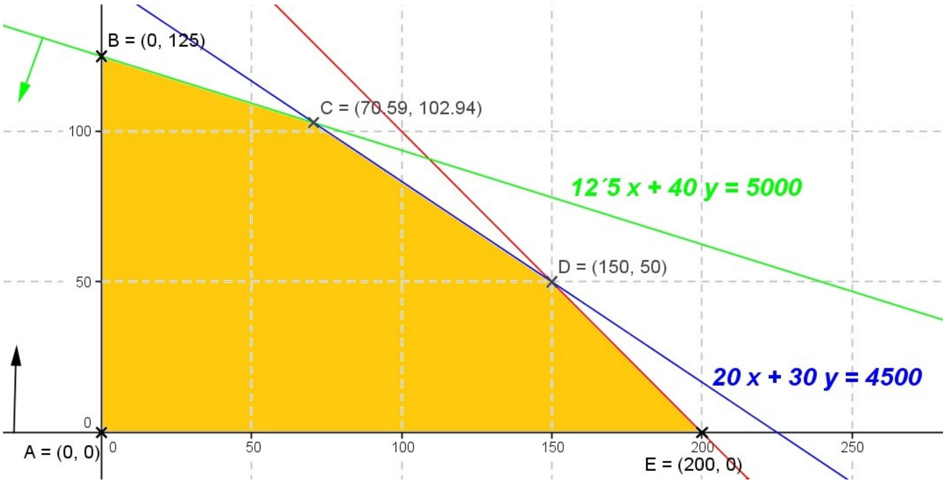
De la 1^{a} *ecuación:* $y = 200 - x$ *, sustituyendo el valor de* y *en la* 2^{a} *ecuación:*

$20\,x + 30\,(\,200 - x\,) = 4500; \quad 20\,x + 6000 - 30\,x = 4500; \quad -\,10\,x = 4500 - 6000$

$-\,10\,x = -\,1500 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{-1500}{-10} = 150$

Y, finalmente, $y = 200 - 150 = 50.$ *Por tanto, D (150 , 50)*

Los vértices de la región factible son: A (0, 0), B (0 , 125) , C (70´5882 , 102´9412), D (150 , 50) y E (200 , 0).



El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*z = 300 x + 400 y*	
0 , 0	*300 . 0 + 400 . 0 = 0*	
0 , 125	*300 . 0 + 400 . 125 = 50000*	
70´5882 , 102´9412	*300 . 70´5882 + 400 . 102´9412 = 62352´94*	
150 , 50	*300 . 150 + 400 . 50 = 65000*	*Máximo*
200 , 0	*300 . 200 + 400 . 0 = 60000*	

El máximo se alcanza en el punto (150 , 50)

Por tanto, conviene dedicar 150 hectáreas al cultivo de patatas y 50 hectáreas al de zanahorias. De esta forma la ganancia sería de 65000€.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una empresa produce dos tipos de cerveza artesanal, A y B. La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios. La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A. La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza. Los beneficios que obtiene por litro de A y B son 2 y 2,5 euros, respectivamente. ¿Cuántos litros diarios se han de producir de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución:
Llamando: x = *litros diarios de cerveza del tipo A*
y = *litros diarios de cerveza del tipo B*
Los datos del problema proporcionan las siguientes restricciones:
"La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios" $\rightarrow$ $x \geq 200$
"La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A" $\rightarrow$ $y \geq 2x$
"La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza" $\rightarrow$ $x + y \leq 900$
Como las variables x *e* y *representan hectáreas de cultivo deben ser mayores o iguales a cero.*
El beneficio viene dada por la función: $z = 2x + 2{'}5y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 2x + 2{'}5y$$

$$s.a. \quad \begin{cases} x \geq 200 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 900 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x \geq 200$

$x = 200$

x	y
0	200
200	200

¿(0,0) cumple?
$0 \geq 200$ No

(b) $y \geq 2x$

$y = 2x$

x	y
0	0
300	600

¿(200,0) cumple?
$0 \geq 2 \cdot 100$
$0 \geq 200$ Si

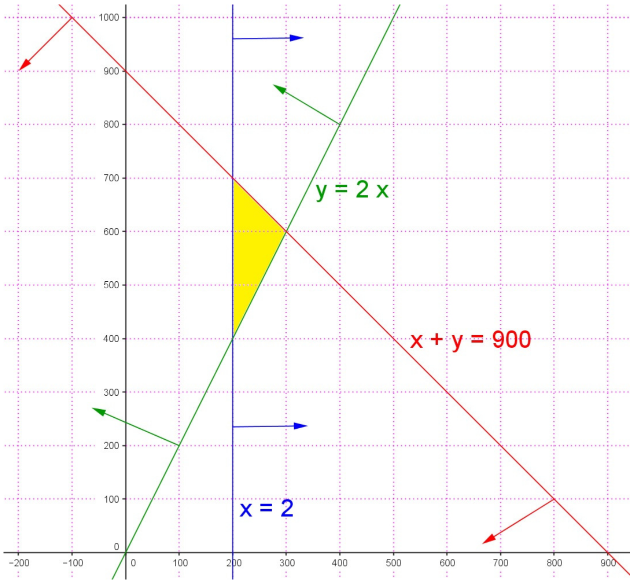
(c) $x + y \leq 900$

$x + y = 900$

x	y
0	900
900	0

¿(0,0) cumple?
$0 + 0 \leq 900$
$0 \leq 900$ Sí

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región factible los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.
Punto A, corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x = 200 \\ x + y = 900 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación: $200 + y = 900 \rightarrow y = 900 - 200 = 700$

Luego A (200 , 700)

Punto B, corte entre (b) y (c):

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 900 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación:

$x + 2x = 900; \quad 3x = 900; \quad x = \dfrac{900}{3} = 300$

Y, finalmente, $y = 2 \cdot 300 = 600$. *Por tanto, B (300 , 600)*

Punto C, corte entre (a) y (b):

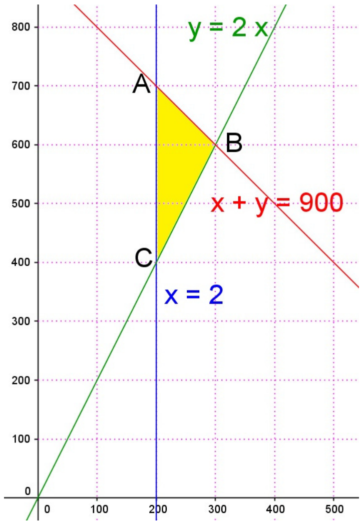
$$\begin{cases} x = 200 \\ y = 2x \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación: $y = 2 \cdot 200 = 400$

Por tanto, C (200 , 400)

Los vértices de la región factible son:

A (200, 700), B (300 , 600) y C (200 , 400).



El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 2\,x + 2'5\,y$	
$200 , 700$	$2 \cdot 200 + 2'5 \cdot 700 = 2150$	*máximo*
$300 , 600$	$2 \cdot 300 + 2'5 \cdot 600 = 2100$	
$200 , 400$	$2 \cdot 200 + 2'5 \cdot 400 = 1400$	

El máximo se alcanza en el punto (200 , 700)

Por tanto, para maximizar el beneficio hay que producir, diariamente, 200 l de cerveza del tipo A y 700 l de cerveza del tipo B. De esta forma el beneficio máximo será de 2150€.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una pastelería vende dos clases de cajas de bombones. En las cajas denominadas EXTRA incluye 15 bombones de tipo A y 30 de tipo B, mientras que las cajas denominadas DELUXE contienen 30 bombones de tipo A y 15 de tipo B.
Con cada bombón de tipo A obtiene un beneficio de 50 céntimos, y con cada uno de tipo B un beneficio de 40 céntimos. Denominando x al número de cajas EXTRA, e y al número de cajas DELUXE que vende, se pide:

a) Calcula la función de beneficios de la pastelería. *(2 puntos)*
b) Si dispone de 450 bombones de cada tipo, calcula el número de cajas x e y que deberá vender de cada clase para obtener un beneficio máximo. *(6 puntos)*
Calcula dicho beneficio máximo. *(2 puntos)*

Solución:
Llamando: x = nº de cajas EXTRA
y = nº de cajas DELUXE
Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla:

	Bombones/caja		
Tipo de caja	***A***	***B***	*nº de cajas*
EXTRA	*15*	*30*	*x*
DELUXE	*30*	*15*	*y*
Beneficio/bombón	*0´50€*	*0´40€*	

a) *¿función de beneficios de la pastelería?*
Llamando z *a la función de beneficios,*
$z = (15x + 30y)\,0´5 + (30x + 15y)\,0´4 = 7´5x + 15y + 12x + 6y = 19´5x + 21y$

La función de beneficios de la pastelería es: $z = 19´5x + 21y$

b) *¿x, y para que el beneficio sea máximo?*
Las restricciones del problema son:
"Se dispone de 450 bombones del tipo A" $\rightarrow 15x + 30y \le 450 \rightarrow x + 2y \le 30$
"Se dispone de 450 bombones del tipo B" $\rightarrow 30x + 15y \le 450 \rightarrow 2x + y \le 30$
Como las variables x e y representan número de cajas, x e y deben ser números naturales.
El beneficio viene dado por la función: $z = 19´5x + 21y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 19´5x + 21y$$

$$s.a. \quad \begin{cases} x + 2y \le 30 \\ 2x + y \le 30 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a) \quad x + 2y \le 30 \qquad (b) \quad 2x + y \le 30$

$x + 2y = 30$

x	y
0	15
30	0

¿$(0,0)$ *cumple*?

$0 + 2.0 \le 30$ *Sí*

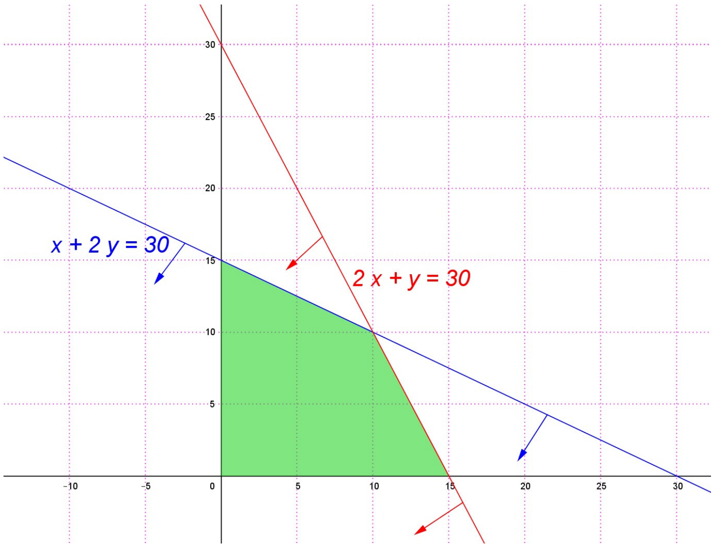
$2x + y = 30$

x	y
0	30
15	0

¿$(0,0)$ *cumple*?

$2.0 + 0 \le 30$ *Sí*

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenadas naturales de la zona sombreada.

En los cálculos realizados para representar las restricciones hemos obtenido tres de los cuatro vértices de la región factible. Sólo falta por conocer el del punto de corte de las rectas (a) y (b).
Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} x + 2y = 30 \\ 2x + y = 30 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación despejamos x, $x = 30 - 2y$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:* $2(30 - 2y) + y = 30 \rightarrow 60 - 4y + y = 30$

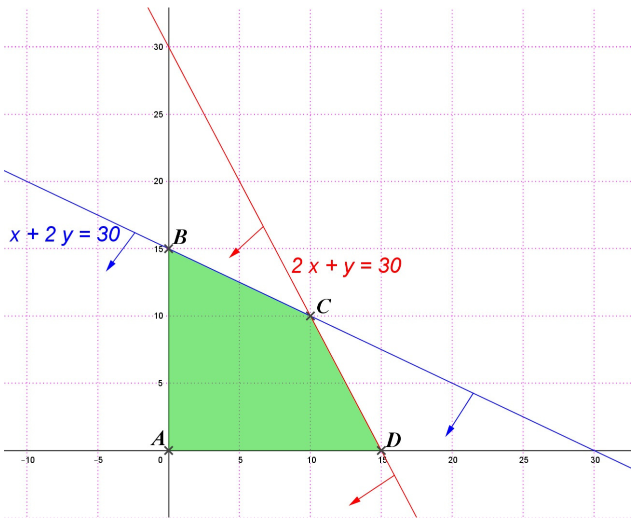
$60 - 3y = 30 \rightarrow -3y = 30 - 60 \rightarrow -3y = -30 \rightarrow y = 10$

Y, finalmente, $x = 30 - 2 \cdot 10 = 10$

Luego $C(10, 10)$

Los vértices de la región factible son:

$A(0, 0)$, $B(0, 15)$, $C(10, 10)$ *y* $D(15, 0)$.



El máximo de la función z *en la región se alcanzará en alguno de los extremos. Calculemos los valores de la función en los vértices,*

x , y	$z = 19'5\,x + 21\,y$	
$0 , 0$	$19'5 . 0 + 21 . 0 = 0$	
$0 , 15$	$19'5 . 0 + 21 . 15 = 315$	
$10 , 10$	$19'5 . 10 + 21 . 10 = 405$	*máximo*
$15 , 0$	$19'5 . 15 + 21 . 0 = 292'5$	

El máximo se alcanza en el punto (10 , 10)

Por tanto, para obtener un beneficio máximo debe vender 10 cajas de bombones EXTRA y otras 10 del tipo DELUXE.
De esta forma el beneficio máximo será de 405€.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un inversor dispone de 9000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del, 2,7% y la del producto B del 6,3%.

a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima? *(2 puntos)*

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima? *(2 puntos)*

Solución:

Llamando: x = *cantidad invertida en el producto A*

y = *cantidad invertida en el producto B*

Los datos del problema proporcionan las siguientes restricciones:

"Un inversor dispone de 9000 euros" $\to$ $x + y \leq 9000$

"La inversión en A debe superar los 5000 euros" $\to$ $x \geq 5000$

"La inversión en A debe ser el doble, al menos, que en B" $\to$ $x \geq 2y$

Como las variables x e y representan dinero deben ser mayores o iguales a cero.

A renta al 2´7 % y B al 6´3%. La rentabilidad total será: $\frac{2'7\,x}{100} + \frac{6'3\,y}{100} = 0'027x + 0'063y$

El beneficio viene dada por la función: $z = 0'027\,x + 0'063\,y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 0'027\,x + 0'063\,y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + y \leq 9000 \\ x \geq 5000 \\ x \geq 2y \\ x,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \leq 9000$

$x + y = 9000$

x	y
0	9000
9000	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \leq 9000$ Sí

(b) $x \geq 5000$

$x = 5000$

x	y
0	5000
9000	5000

¿(6000,0) cumple?

$6000 \geq 5000$ Si

(c) $x \geq 2y$

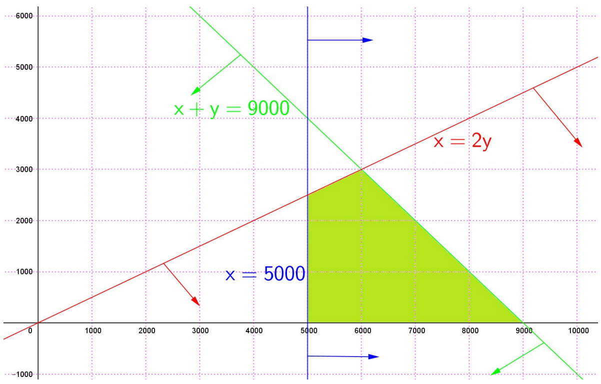
$x = 2y$

x	y
0	0
10000	5000

¿(6000,0) cumple?

$6000 \leq 2 \cdot 0$ Sí

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.

Vértices de la región factible:

los que están en el eje horizontal son A (5000 , 0) y B (9000 , 0),

los restantes los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

Punto C, corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x + y = 9000 \\ x = 2y \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $2y + y = 9000 \rightarrow 3y = 9000 \rightarrow y = 3000$

$x = 2 \cdot 3000 = 6000$

Luego C (6000 , 3000)

Punto D, corte entre (b) y (c):

$$\begin{cases} x = 5000 \\ x = 2y \end{cases}$$

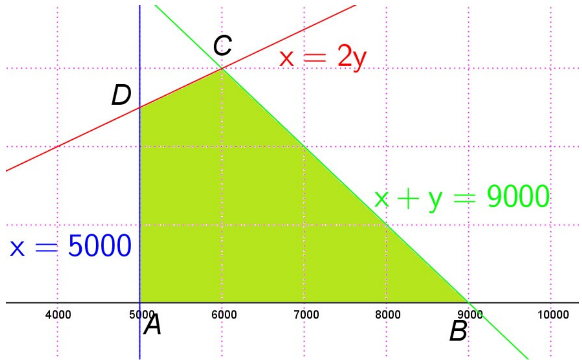
Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación:

$5000 = 2y \rightarrow y = 2500$

Por tanto, D (5000 , 2500)

Los vértices de la región factible son:

A (5000, 0), B (9000 , 0), C (6000 , 3000) y D (5000 , 2500).



El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 0'027\,x + 0'063\,y$	
5000 , 0	$0'027 \cdot 5000 + 0'063 \cdot 0 = 135$	
9000 , 0	$0'027 \cdot 9000 + 0'063 \cdot 0 = 243$	
6000 , 3000	$0'027 \cdot 6000 + 0'063 \cdot 3000 = 351$	*máximo*
5000 , 2500	$0'027 \cdot 5000 + 0'063 \cdot 2500 = 292'5$	

El máximo se alcanza en el punto (6000 , 3000)

Por tanto,

- ***a)*** ***Para que la rentabilidad sea máxima debe invertir 6000 euros en el producto A y 3000 euros en el producto B.***
- ***b)*** ***La rentabilidad máxima será de 351€.***

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

a) ¿cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste? *(8 puntos)*
b) ¿Cuál será dicho coste mínimo? *(2 puntos)*

Solución:
Llamando: x = *nº de sacos de la marca A*
y = *nº de sacos de la marca B*
Los datos del problema los resumimos en la tabla:

Saco	*Kg de piensos animales*	*Kg de piensos vegetales*	*Euros/saco*
A	*7*	*3*	*12*
B	*6*	*4*	*11*

El enunciado nos dice las necesidades diarias de cada animal y el problema pregunta por las necesidades semanales de la explotación ganadera (que tiene 100 animales).

Las restricciones serán:
"Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal" $\rightarrow$ *100 animales durante siete días necesitan* $5 . 100 . 7 = 3500$ *Kg* $\rightarrow$ $7x + 6y \geq 3500$
"Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal" $\rightarrow$ *100 animales durante siete días necesitan* $3 . 100 . 7 = 2100$ *Kg* $\rightarrow$ $\rightarrow 3x + 4y \geq 2100$

Como las variables x e y representan sacos, deben ser números naturales.

El coste de la fertilización viene dado por la función: $z = 12x + 11y$

El problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \quad z = 12x + 11y$$
$$s.a. \quad \begin{cases} 7x + 6y \geq 3500 \\ 3x + 4y \geq 2100 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$7x + 6y \geq 3500$

$7x + 6y = 3500$

x	y
0	$\frac{3500}{6} \approx 583'33$
$\frac{3500}{7} = 500$	0

$¿(0,0)$ *cumple*?
$7 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \geq 3500$ *No*

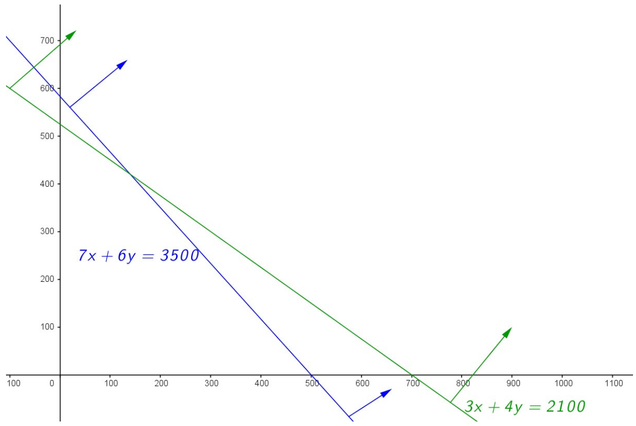
$3x + 4y \geq 2100$

$3x + 4y = 2100$

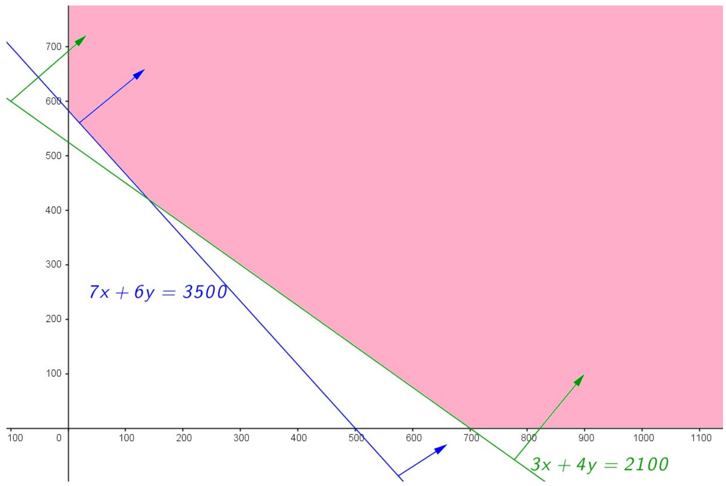
x	y
0	$\frac{2100}{4} = 525$
$\frac{2100}{3} = 700$	0

$¿(0,0)$ *cumple*? $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 2100$ *No*

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada. Es una región factible abierta.



Vértices de la región factible:

el del eje horizontal y vertical los obtuvimos en los cálculos para la representación: (700 , 0) *y* $\left(0, \dfrac{3500}{6}\right)$. *Falta el punto de corte entre las dos rectas.*

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} 7x+6y=3500 \\ 3x+4y=2100 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} *3 \\ *(-7) \end{matrix} \begin{cases} 21x+18y=10500 \\ -21x-28y=-14700 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-10y=-4200 \rightarrow y=\dfrac{-4200}{-10}=420$

Sustituyendo el valor de y *en la* 2^a *ecuación,*

$3x+4\,.\,420=2100;\quad 3x+1680=2100;\quad 3x=420;\quad x=\dfrac{420}{3}=140$

Luego punto de corte (140 , 420)

Los vértices de la región factible son: $\left(0, \dfrac{3500}{6}\right)$, (140 , 420) *y* (700 , 0).

El mínimo de la función z *en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,*

x, y	$z = 12x + 11y$	
$0, \dfrac{3500}{6}$	$12\,.\,0 + 11\,.\,\dfrac{2200}{3} = 6416'67$	
140 , 420	$12\,.\,140 + 11\,.\,420 = 6300$	*mínimo*
700, 0	$12\,.\,700 + 11\,.\,0 = 7700$	

El mínimo se alcanza en el punto (140 , 420)

Por tanto,

a) ***Para minimizar el coste, semanalmente hay que comprar 140 sacos de la marca A y 420 de la marca B.***

b) ***El coste mínimo sería de 6300€ a la semana.***

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo? *(8 puntos)*
b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? *(2 puntos)*

Solución:
Llamando: x = *nº de cajas del tipo A*
y = *nº de cajas del tipo B*
Los datos del problema los resumimos en la tabla:

	Tarros de miel			*Beneficio*
Caja	*romero*	*azahar*	*multifloral*	*euros/caja*
A	*2*	*2*	*1*	*7*
B	*1*	*2*	*2*	*5*

Las restricciones serán:
"la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero" $\rightarrow$ $2x + y \leq 280$
"la empresa dispone de 300 tarros de miel de azahar" $\rightarrow$ $2x + 2y \leq 300$
"la empresa dispone de 250 tarros de miel multifloral" $\rightarrow$ $x + 2y \leq 250$

Como las variables x *e* y *representan sacos, deben ser números naturales.*

El beneficio viene dado por la función: $z = 7x + 5y$

El problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \quad z = 7x + 5y$$

$$s.a. \quad \begin{cases} 2x + y \leq 280 \\ 2x + 2y \leq 300 \\ x + 2y \leq 250 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$2x + y \leq 280$

$2x + y = 280$

x	y
0	280
$\frac{280}{2} = 140$	0

¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 0 \leq 280$ *Sí*

$2x + 2y \leq 300$

$2x + y = 300$

x	y
0	300
$\frac{300}{2} = 150$	0

¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 300$ *Sí*

$x + 2y \leq 250$

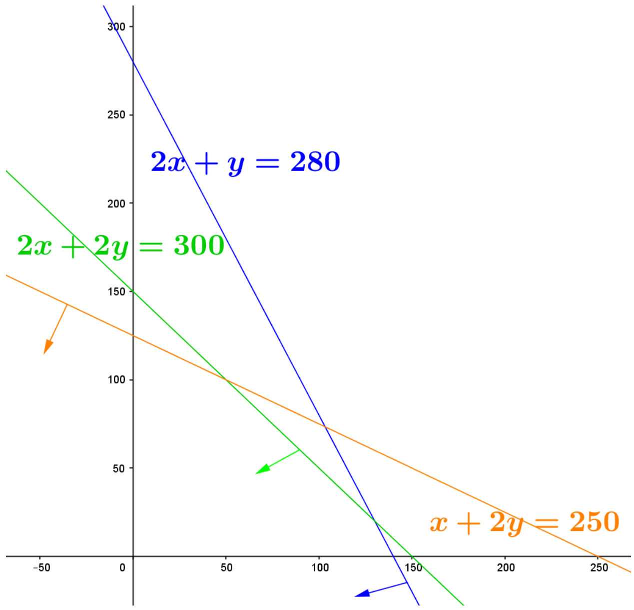
$x + y = 250$

x	y
0	$\frac{250}{2} = 125$
250	0

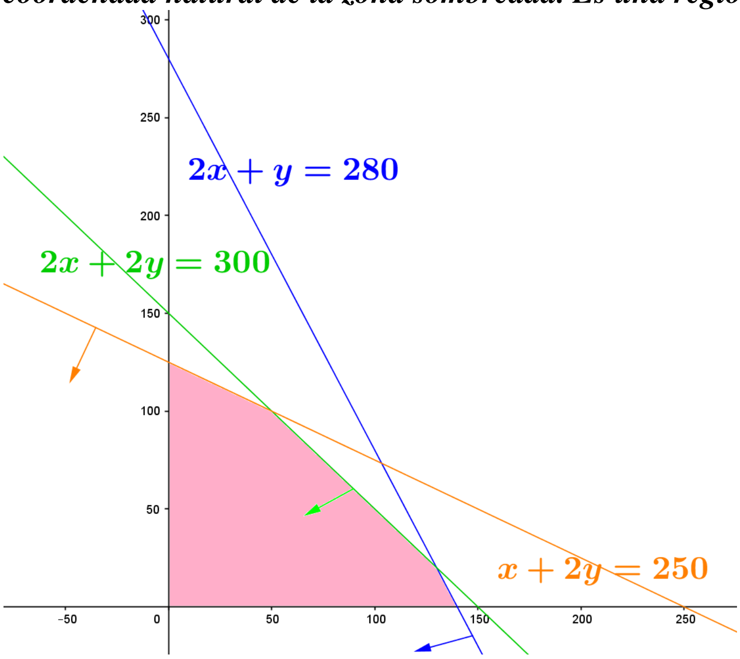
¿(0,0) cumple?

$0 + 2 \cdot 0 \leq 250$ *Sí*

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada. Es una región factible cerrada.



Vértices de la región factible:

El (0 , 0); el del eje horizontal y vertical los obtuvimos en los cálculos para la representación: (140 , 0) y (0 , 125). Faltan los puntos de corte entre las rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 300 \\ x + 2y = 250 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones: x = 50
Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación,
50 + 2 y = 250; 2 y = 250 – 50; 2 y = 200; y = 100

Luego punto de corte (50 , 100)

$$\begin{cases} 2x + 2y = 300 \\ 2x + y = 280 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones: y = 20
Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación,
2 x + 20 = 280; 2 x = 280 – 20; 2 x = 260; x = 130

Luego punto de corte (130 , 20)

Los vértices de la región factible son: (0 , 0), (0 , 125), (50 , 100), (130 , 20) y (140 , 0).

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 7x + 5y$	
$0 , 0$	$7 . 0 + 5 . 0 = 0$	
$0 , 125$	$7 . 0 + 5 . 125 = 625$	
$50 , 100$	$7 . 50 + 5 . 100 = 850$	
$130 , 20$	$7 . 130 + 5 . 20 = 1010$	*máximo*
$140 , 0$	$7 . 140 + 5 . 0 = 9800$	

El máximo se alcanza en el punto (130 , 20)

Por tanto,

a) ***Para obtener un beneficio máximo diariamente debe comercializar 130 cajas del tipo A y 20 del tipo B.***

b) ***El beneficio máximo será de 1010€ al día.***

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Junio 2023

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? *(2 puntos)*

Solución:

Llamando: x *= nº de latas del tipo A* y *= nº de latas del tipo B*

Los datos del problema los resumimos en la tabla:

Lata	*hidratos de carbono*	*proteínas*	*grasas*	*euros/lata*
A	*4*	*6*	*1*	*10*
B	*2*	*20*	*12*	*16*

Las restricciones serán:

El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente

"un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono" $\rightarrow$ $4x + 2y \geq 8$

"un mínimo de 46 unidades de proteínas" $\rightarrow$ $6x + 20y \geq 46$

"un mínimo de 12 unidades de grasas" $\rightarrow$ $x + 12y \geq 12$

Como las variables x *e* y *representan latas, deben ser números naturales.*

El precio a pagar viene dado por la función: $z = 10x + 16y$

El problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \quad z = 10x + 16y$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 4x + 2y \geq 8 \\ 6x + 20y \geq 46 \\ x + 12y \geq 12 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$4x + 2y \geq 8$

$4x + 2y = 8$

x	y
0	4
2	0

¿(0,0) cumple?

$4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \geq 8$ *No*

$6x + 20y \geq 46$

$6x + 20y = 46$

x	y
0	$\frac{46}{20} = \frac{23}{10} = 2'3$
$\frac{46}{6} = \frac{23}{3} \cong 7'6$	0

¿(0,0) cumple?

$6 \cdot 0 + 20 \cdot 0 \geq 46$ *No*

$x + 12y \geq 12$

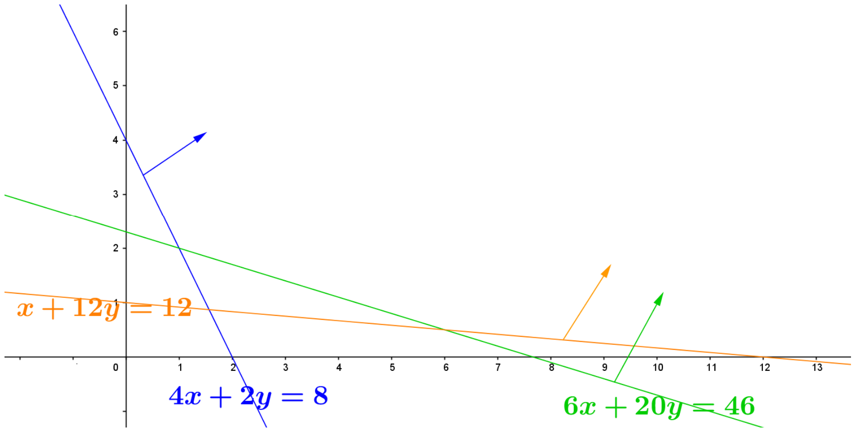
$x + 12y = 12$

x	y
0	1
12	0

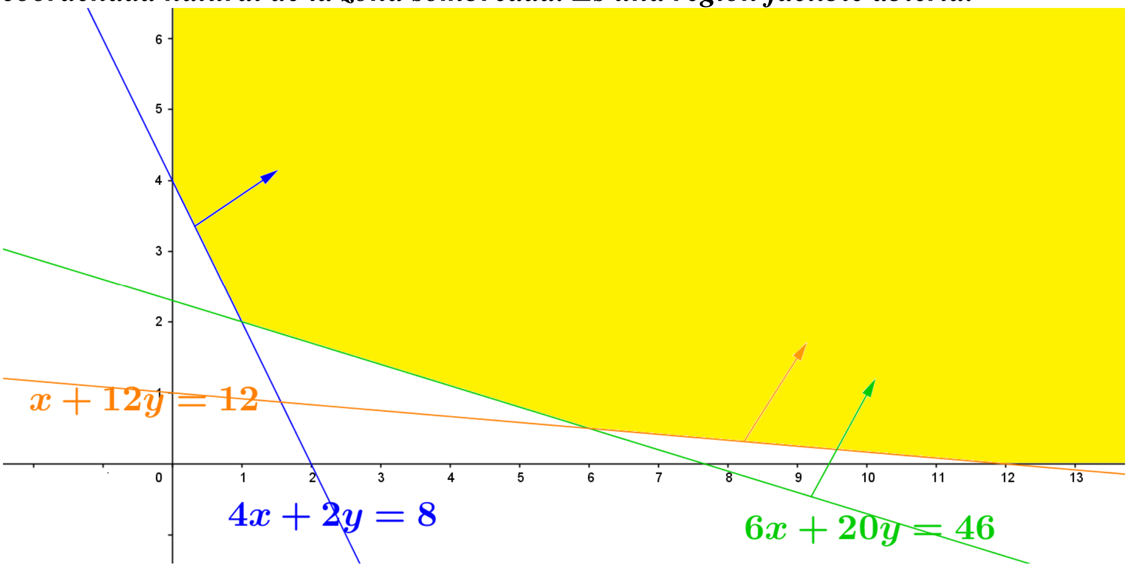
¿(0,0) cumple?

$0 + 12 \cdot 0 \geq 12$ *No*

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada. Es una región factible abierta.



Vértices de la región factible:

El del eje horizontal y vertical los obtuvimos en los cálculos para la representación: (12 , 0) y (0 , 4).

Faltan los puntos de corte entre las rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases} \quad \rightarrow \quad -10x1^{a} \begin{cases} -40x - 20y = -80 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-34\ x = -34; \quad x = \dfrac{-34}{-34} = 1$ *Luego punto de corte (1 , 2)*

Sustituyendo el valor de x *en la* 1^{a} *ecuación,*

$4 \cdot 1 + 2\ y = 8; \quad 2\ y = 8 - 4; \quad 2\ y = 4; \quad y = 2$

$$\begin{cases} x + 12y = 12 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases} \quad \rightarrow \quad -6x1^{a} \begin{cases} -6x - 72y = -72 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-52y = -26; \quad y = \dfrac{-26}{-52} = \dfrac{1}{2}$ *Luego punto de corte* $\left(6\ , \dfrac{1}{2}\right)$

Sustituyendo el valor de x *en la* 1^{a} *ecuación,*

$x + 12\dfrac{1}{2} = 12; \quad x + 6 = 12; \quad x = 12 - 6 = 6$

Los vértices de la región factible son: (0 , 4), (1 , 2), $\left(6\ , \dfrac{1}{2}\right)$ *y (12 , 0).*

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 10x + 16y$	
$0 , 4$	$10 . 0 + 16 . 4 = 64$	
$1 , 2$	$10 . 1 + 16 . 2 = 42$	*mínimo*
$6 , \frac{1}{2}$	$10 . 6 + 16 . \frac{1}{2} = 68$	
$12 , 0$	$10 . 12 + 16 . 0 = 120$	

El mínimo se alcanza en el punto (1 , 2)

Por tanto,

a) ***Para obtener la dieta deseada por el mínimo precio debe combinar 1 lata del tipo A y 2 del tipo B.***

b) ***El mínimo precio que habrá de pagar será de 42€ al día.***

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Se pretende cultivar en un terreno dos tipos de olivos: A y B. No se puede cultivar más de 8 ha. con olivos de tipo A ni más de 10 ha. con olivos de tipo B. Cada hectárea de olivos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 44 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4500 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de olivar de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 litros anuales de aceite,

a) Obtener razonadamente las hectáreas de cada tipo de olivo que se deben plantar para maximizar la producción de aceite.
b) Obtener la producción máxima.

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la tabla

Tipo de olivo	*Agua por ha. y año*	*Inversión por ha.*	*Producción por ha.*	*ha. dedicadas*
A	*4* m^3	*500 €*	*500 l*	*x*
B	*3* m^3	*225 €*	*300 l*	*y*
Restricciones	*44* m^3	*4500 €*		

Las ecuaciones de las restricciones serán,

"No se pueden cultivar más de 8 ha. con olivos del tipo A" $x \le 8$

"No se pueden cultivar más de 10 ha. con olivos del tipo B" $y \le 10$

"Se dispone de 44 m^3 *de agua al año"* $4x + 3y \le 44$

"Se dispone de 4500 € para invertir" $500x + 225y \le 4500$

Queremos maximizar la producción de aceite que será: 500 x + 300 y

El problema a resolver es:

maximizar $z = 500x + 300y$

$$s.a.\quad \begin{cases} x \le 8 \\ y \le 10 \\ 4x + 3y \le 44 \\ 500x + 225y \le 4500 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

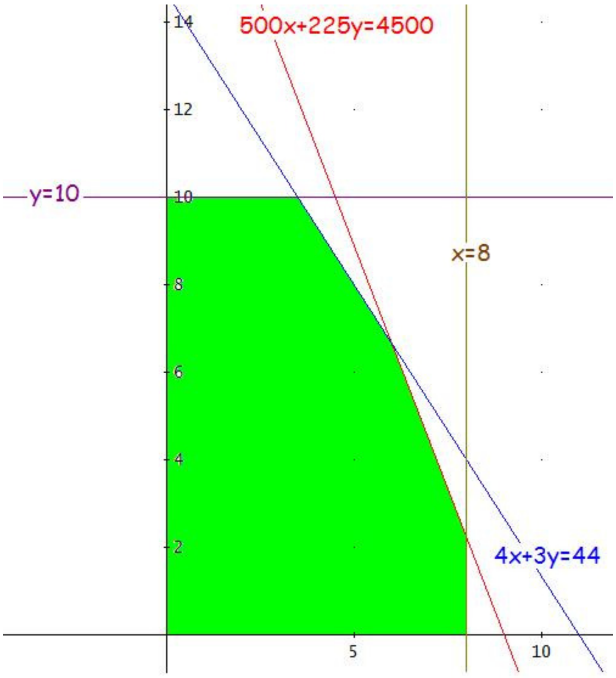
$4x + 3y \le 44$ $500x + 225y \le 4500$

$4x + 3y = 44$ $500x + 225y = 4500$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 11 & 0 \\ 0 & \dfrac{44}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 9 & 0 \\ 0 & 20 \end{array}$$

¿$(0,0)$ *cumple*?   ¿$(0,0)$ *cumple*?

$4\,.\,0 + 3\,.\,0 \le 44$ *sí* $500\,.\,0 + 225\,.\,0 \le 4500$ *sí*



Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{cases} y = 10 \\ 4x + 3y = 44 \end{cases} \quad 4x + 3.10 = 44 \quad \rightarrow \quad 4x = 14 \quad \rightarrow \quad x = \frac{14}{4} = 3'5 \quad \rightarrow \quad (3'5\,,10)$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 44 \\ 500x + 225y = 4500 \end{cases} \quad \textit{de la } 1^{a} \quad y = \frac{44 - 4x}{3}$$

sustituyendo en la 2^{a} $\quad 500x + 225\frac{44-4x}{3} = 4500$

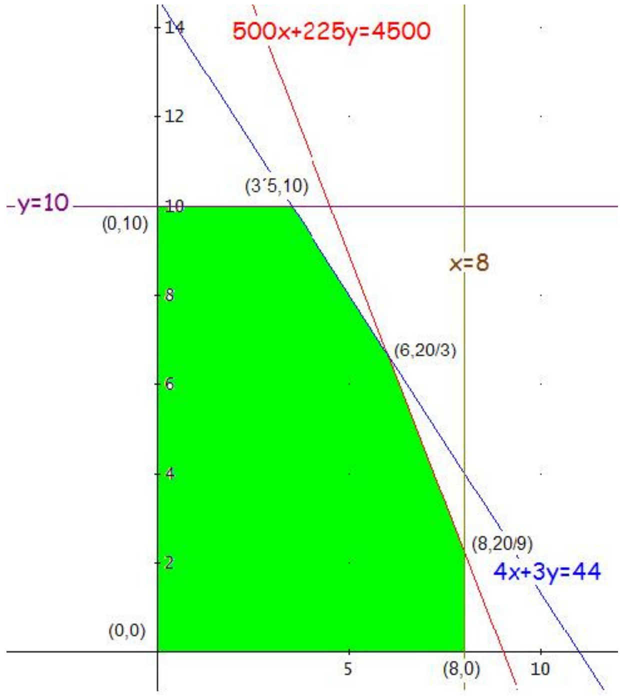
$$1500x + 9900 - 900x = 13500$$

$$600x = 3600 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3600}{600} = 6 \quad \rightarrow \quad y = \frac{44 - 4\,.\,6}{3} = \frac{20}{3} \quad \rightarrow \quad \left(6\,, \frac{20}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ 500x + 225y = 4500 \end{cases} \quad 500\,.\,8 + 225y = 4500 \quad \rightarrow \quad 225y = 500 \quad \rightarrow \quad y = \frac{500}{225} = \frac{20}{9} \quad \rightarrow \quad \left(8\,, \frac{20}{9}\right)$$

La región factible está limitada por los puntos

$(0\,,0)$, $(0\,,10)$, $(3'5\,,10)$, $\left(6\,, \frac{20}{3}\right)$, $\left(8\,, \frac{20}{9}\right)$ *y* $(8\,,0)$



Sabemos que la función que queremos maximizar alcanzará su máximo en los extremos de la región factible.

(x,y)	$z=500x+300y$	
(0,0)	$500\,.\,0+300\,.\,0=0$	
(0,10)	$500\,.\,0+300\,.\,10=3000$	
(3´5,10)	$500\,.\,3´5+300\,.\,10=4750$	
$\left(6,\dfrac{20}{3}\right)$	$500\,.\,6+300\,.\,\dfrac{20}{3}=5000$	*máximo*
$\left(8,\dfrac{20}{9}\right)$	$500\,.\,8+300\,.\,\dfrac{20}{9}=4666´666...$	
(8,0)	$500\,.\,8+300\,.\,0=4000$	

La función z = 500 x + 300 y alcanza su máximo en el punto $\left(6,\dfrac{20}{3}\right)$

Por lo tanto, para maximizar la producción de aceite se deben plantar 6 ha de olivos del tipo A y 20/3 ha de olivos del tipo B.

La producción máxima será de 5000 l de aceite.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Una empresa fabrica dos tipos de aparatos A y B que necesitan pasar por los talleres X e Y. En cada uno de los talleres se trabaja 100 horas a la semana. Cada aparato A requiere 3 horas del taller X y 1 hora del Y y cada aparato B, 1 y 2 horas, respectivamente. Cada aparato A se vende a 100 € y cada aparato B, a 150 €.

a) Obtener razonadamente cuántos aparatos de cada tipo han de producirse para que el ingreso por ventas sea máximo.

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la tabla

Aparato	*Taller X*	*Taller Y*	*Precio venta*	*Nº de aparatos*
A	*3 h*	*1 h*	*100 €*	*x*
B	*1 h*	*2 h*	*150 €*	*y*
Restricciones	*100 h*	*100 h*		

Las ecuaciones de las restricciones serán,

Horas de trabajo en el taller X $3x + y \le 100$

Horas de trabajo en el taller Y $x + 2y \le 100$

Como x e y representan el número de aparatos $x, y \in N$

Los ingresos que se obtendrán serán: 100 x + 150 y

El problema a resolver es:

maximizar z = 100 x + 150 y

$$s.a. \begin{cases} 3x + y \le 100 \\ x + 2y \le 100 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

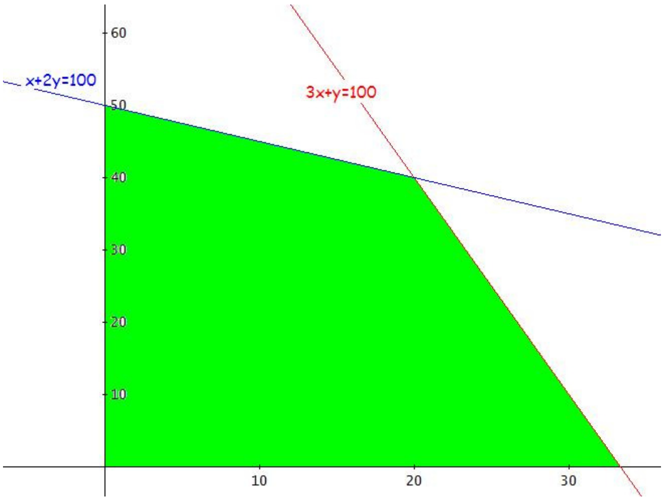
$3x + y \le 100$ $\qquad$ $x + 2y \le 100$

$3x + y = 100$ $\qquad$ $x + 2y = 100$

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 0 & 100 \\ \frac{100}{3} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 0 & 50 \\ 100 & 0 \end{array}$$

¿(0,0) *cumple*? $\qquad$ ¿(0,0) *cumple*?

$3 \,.\, 0 + 0 \le 100$ *sí* $\qquad$ $0 + 2 \,.\, 0 \le 100$ *sí*



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

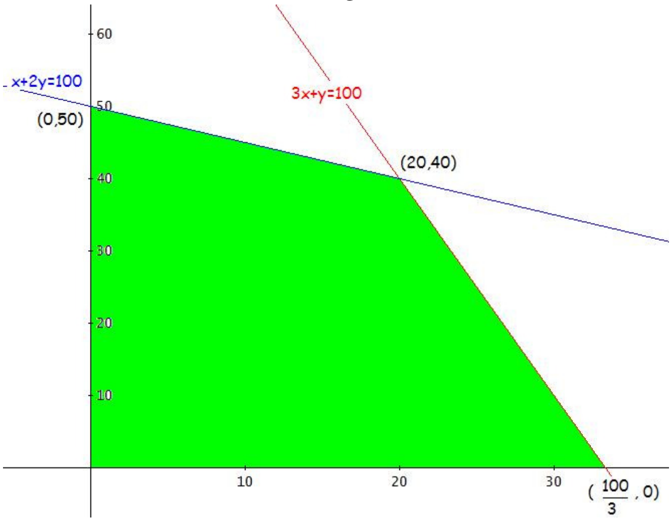
Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{cases} 3x+y=100 \\ x+2y=100 \end{cases} \quad \textit{de la } 1^{a} \quad y=100-3x$$

sustituyendo en la 2^{a} $\quad x+2(100-3x)=100$

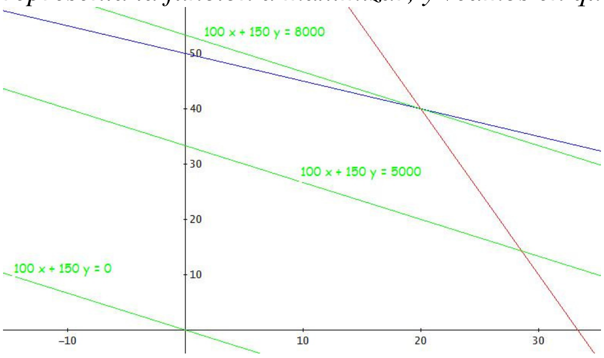
$x+200-6x=100$

$$-5x=-100 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-100}{-5}=20 \quad \rightarrow \quad y=100-3\,.\,20=40 \quad \rightarrow \quad (20\,,\,40)$$



Entre los puntos que limitan la zona sombreada está el $\left(\frac{100}{3},0\right)$ *que no es de la región factible, pues su abcisa no es natural.*

Vamos a obtener de forma gráfica la solución, para ello trazaremos rectas paralelas a la 100 x + 150 y = 0, que representa la función a maximizar, y veamos en qué punto de la región factible alcanza el máximo.



Gráficamente observamos que la función z = 100 x + 150 y alcanza su máximo en el punto (20 , 40).
Podemos comprobarlo como sigue,

(x, y)	$z=100x+150y$
$(0,50)$	$100\,.\,0+150\,.\,50=7500$
$(20,40)$	$100\,.\,20+150\,.\,40=8000$

a) *Para que el ingreso por las ventas sea máximo hay que producir 20 aparatos del tipo A y 40 del tipo B.*
b) *El ingreso máximo será de 8000 € (100 . 20 + 150 . 40 = 2000 + 6000 = 8000).*

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Un fabricante produce en dos talleres tres modelos distintos de archivadores, el A, el B y el C. Se ha comprometido a entregar 12 archivadores del modelo A, 8 del B y 24 del C. Al fabricante le cuesta 720€ al día el funcionamiento del primer taller y 960€ el del segundo. El primer taller produce diariamente 4 archivadores del modelo A, 2 del B y 4 del C, mientras que el segundo produce 2, 2 y 12 archivadores, respectivamente. ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para, cumpliendo el contrato, conseguir reducir al máximo los costes de funcionamiento? ¿Cuál es el valor de dicho coste? ¿Quedaría algún excedente de algún producto en los talleres? En caso afirmativo, determinar cuánto.

Solución:
Utilizando las siguientes incognitas: x = nº de días que trabaja el 1er taller
y = nº de días que trabaja el 2º taller

Escribimos los datos del problema en una tabla,

	A	B	C	coste
Taller 1	4	2	4	720
Taller 2	2	2	12	960
	$4x + 2y$	$2x + 2y$	$4x + 12y$	$720x + 960y$

las restricciones del problema serán:

"Se ha comprometido a entregar 12 archivadores del modelo A" $4x + 2y \geq 12$

"Se ha comprometido a entregar 8 archivadores del modelo B" $2x + 2y \geq 8$

"Se ha comprometido a entregar 24 archivadores del modelo C" $4x + 12y \geq 24$

El coste de funcionamiento de los talleres es: $720x + 960y$

Por tanto el problema a resolver es,

minimizar $z = 720x + 960y$
s.a. $4x + 2y \geq 12$
$2x + 2y \geq 8$
$4x + 12y \geq 24$
$x, y \in N$

Simplificando queda:

minimizar $z = 240(3x + 4y)$
s.a. $2x + y \geq 6$
$x + y \geq 4$
$x + 3y \geq 6$
$x, y \in N$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

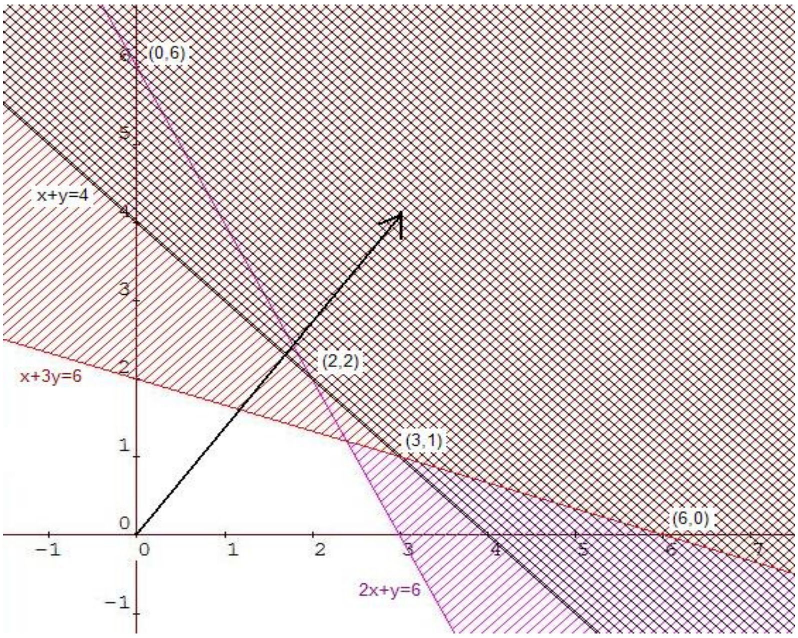
$2x + y \geq 6$		$x + y \geq 4$		$x + 3y \geq 6$	
$2x + y = 6$		$x + y = 4$		$x + 3y = 6$	
x	y	x	y	x	y
0	6	0	4	0	2
3	0	4	0	6	0
(0,0) ¿cumple la restricción? No $2 \cdot 0 + 0 \geq 6$ No		(0,0) ¿cumple la restricción?No $0 + 0 \geq 4$ No		(0,0) ¿cumple la restricción?No $0 + 3 \cdot 0 \geq 0$ No	

Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$	Restando ambas ecuaciones, $x = 2$ Sustituyendo en la 2ª $2 + y = 4;\quad y = 2$	El punto de corte es (2 , 2)

$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$	Restando ambas ecuaciones, $2y = 2 \rightarrow y = 1$ Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación, $x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$	El punto de corte es (3 , 1)

La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona triplemente rayada.



Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z = 240\,(3x + 4y)$	
(0 , 6)	240 (3 . 0 + 4 . 6)=5760	
(2 , 2)	240 (3 . 2 + 4 . 2)=3360	
(3 , 1)	240 (3 . 3 + 4 . 1)=3120	*mínimo*
(6 , 0)	240 (3 . 6 + 4 . 0)=4320	

Solución:
El primer taller debe trabajar 3 días y
el segundo 1 día.
El coste de funcionamiento sería de 3120 €.

La solución obtenida implica que se producirían los siguientes archivadores,

modelo	*nº de archivadores*
A	4 . 3 + 2 . 1 = 14
B	2 . 3 + 2 . 1 = 8
C	4 . 3 + 12 . 1 = 24

como hay que entregar 12 archivadores del modelo A, 8 del B y 24 del C, sobrarían 2 archivadores del modelo A.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Calcular los puntos de la región definida por

$$x + y \geq 6$$
$$2\,x + y \leq 15$$
$$3 \leq x \leq 6$$
$$2 \leq y \leq 5$$

donde la función $z = 3\,x + 2\,y$ alcanza los valores máximo y mínimo. Calcular dichos valores.

Solución:
Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$x + y \geq 6$			$2\,x + y \leq 15$		
$x + y = 6$			$2\,x + y = 15$		
x	*y*		*x*	*y*	
0	*6*		*0*	*15*	
6	*0*		*7´5*	*0*	
(0,0) ¿cumple la restricción? No $0 + 0 \geq 6$ *No*			*(0,0) ¿cumple la restricción? Sí* $2 \,.\, 0 + 0 \leq 15$ *Sí*		

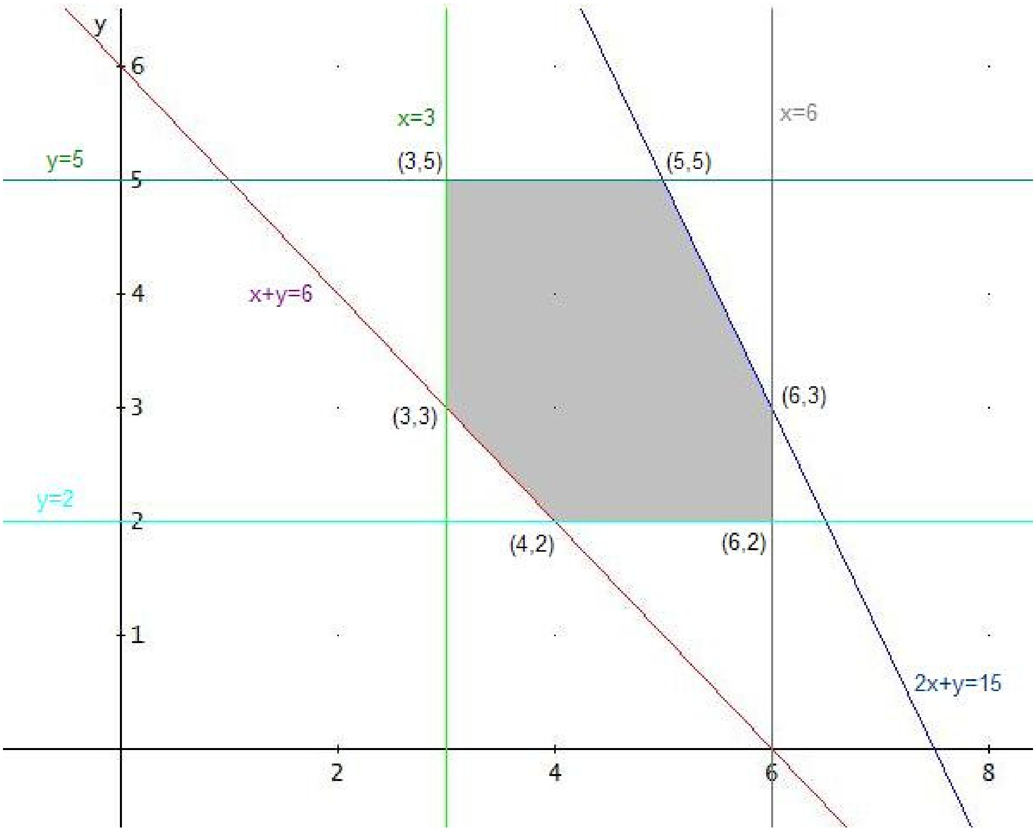
Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$	*Restando ambas ecuaciones,* $x = 9$ *Sustituyendo en la 1ª,* $9 + y = 6;\quad y = -3$	*El punto de corte es (9 , -3)*

Los restantes puntos de corte se obtienen más fácilmente,

Entre $x + y = 6$ *y* $x = 3$, *(3 , 3)*	*Entre* $2\,x + y = 15$ *y* $x = 3$, *(3 , 9)*
Entre $x + y = 6$ *y* $x = 6$, *(6 , 0)*	*Entre* $2\,x + y = 15$ *y* $x = 6$, *(6 , 3)*
Entre $x + y = 6$ *e* $y = 2$, *(4 , 2)*	*Entre* $2\,x + y = 15$ *e* $y = 2$, *(6´5 , 2)*
Entre $x + y = 6$ *e* $y = 5$, *(1 , 5)*	*Entre* $2\,x + y = 15$ *e* $y = 5$, *(5 , 5)*

La región factible está formada por los puntos de la zona coloreada.



Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	$z = 3x + 2y$	
(3 , 3)	3 . 3 + 2 . 3 = 15	*mínimo*
(3 , 5)	3 . 3 + 2 . 5 = 19	
(5 , 5)	3 . 5 + 2 . 5 = 25	*máximo*
(6 , 3)	3 . 6 + 2 . 3 = 24	
(6 , 2)	3 . 6 + 2 . 2 = 22	
(4 , 2)	3 . 4 + 2 . 2 = 16	

Solución:

La función $z = 3x + 2y$ *alcanza*

el mínimo en el punto (3 , 3) con un valor de 15

el máximo en el punto (5 , 5) con un valor de 25

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Representar la región factible dada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y &\geq -1 \\ x &\leq 2 \\ y &\geq -1 \\ x &\geq 3y-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

y hallar los puntos de la región en los que la función f(x,y) = 2 x + 3 y alcanza los valores máximo y mínimo y obtener dichos valores.

Solución:
Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$x + y \geq -1$ $x \geq 3y - \frac{1}{2}$

$x + y = -1$ $x = 3y - \frac{1}{2}$

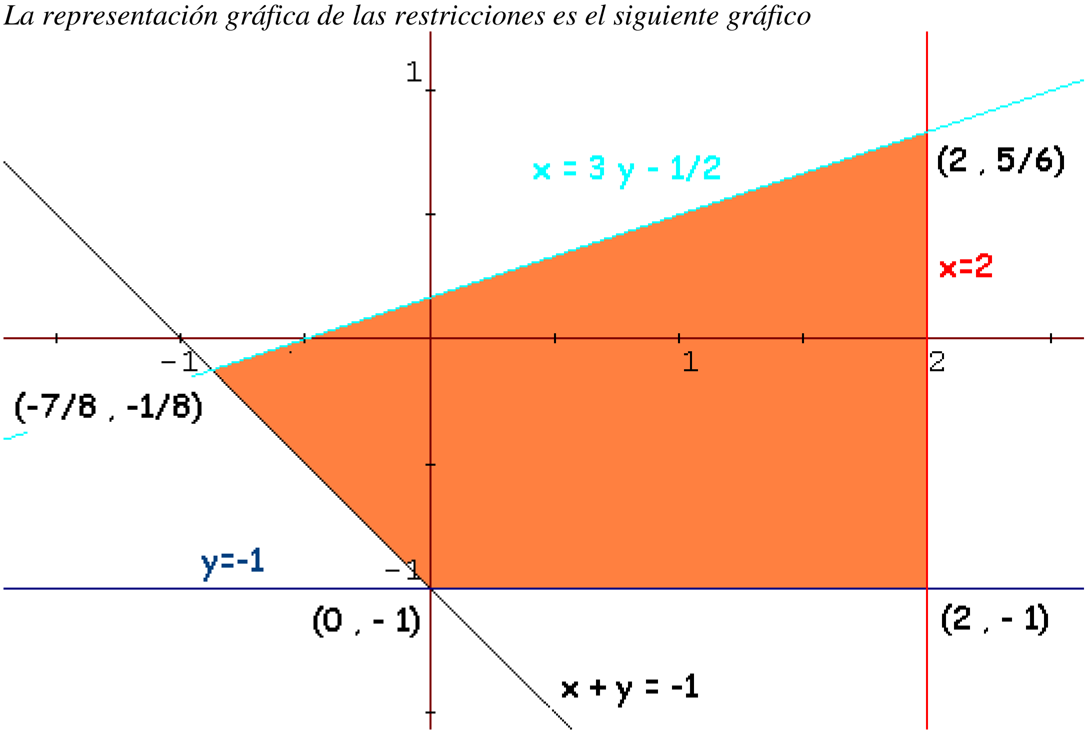
x	y
0	-1
-1	0

x	y
0	$1/6$
$-1/2$	0

(0,0) ¿cumple la restricción? Sí
$0 + 0 \geq -1$ *Sí*

(0,0) ¿cumple la restricción? Sí
$0 \geq 3 \cdot 0 - 1/2$ *Sí*

La representación gráfica de las restricciones es el siguiente gráfico



Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x+y=-1 \\ y=-1 \end{cases}$	*Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación* $x - 1 = -1$; $x = 0$	*El punto de corte es* $(0, -1)$

$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$	*El punto de corte es* $(2, -1)$

$\begin{cases} x = 3y - \dfrac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$	*Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,* $2 = 3y - \dfrac{1}{2} \quad \to \quad 2 + \dfrac{1}{2} = 3y \quad \to \quad \dfrac{5}{2} = 3y$	*El punto de corte es* $\left(2\,,\dfrac{5}{6}\right)$

$\begin{cases} x = 3y - \dfrac{1}{2} \\ x + y = -1 \end{cases}$	*Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación,* $3y - \dfrac{1}{2} + y = -1 \quad \to \quad 4y = -1 + \dfrac{1}{2} \quad \to \quad 4y$ $x = 3\,\dfrac{-1}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-7}{8}$	*El punto de corte es* $\left(\dfrac{-7}{8}\,,\dfrac{-1}{8}\right)$

La región factible está formada por los puntos de la zona coloreada.

Estudiamos la función f(x,y) en los extremos de la región factible,

(x,y)	*f(x,y) =2 x + 3 y*		*Solución:*
(0 , – 1)	*-3*	*mínimo*	***El mínimo se alcanza en (0 , – 1) y vale – 3***
(2 , – 1)	*1*		
$\left(2\,,\dfrac{5}{6}\right)$	*2 . 2 + 3 (5/6) = 4 + 5/2 = 13/2 = 6'5*	*máximo*	***El máximo se alcanza en*** $\left(2\,,\dfrac{5}{6}\right)$ ***y vale 6'5.***
$\left(\dfrac{-7}{8}\,,\dfrac{-1}{8}\right)$	*2 (-7/8) + 3 (-1/8)= -14/8 – 3/8= -17/8*		

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Una empresa farmacéutica tiene en la actualidad dos líneas de investigación, la de medicamentos antiinflamatorios no esteroides y la de fármacos ansiolíticos. Desea invertir en la investigación a lo sumo tres millones de euros, con la condición de dedicar por lo menos 1,5 millones de euros a los ansiolíticos, con los que espera obtener un beneficio del 10%. En cambio en la investigación sobre medicamentos antiinflamatorios, aunque se calcula un beneficio del 25%, no debe invertir más de un millón de euros. ¿Qué cantidad debe dedicar a cada línea de investigación para maximizar beneficios, si además debe dedicar a los ansiolíticos al menos el doble de dinero que a los antiinflamatorios? ¿Qué beneficio obtendrá de esta forma la empresa?

Solución:

Consideramos las siguientes incógnitas: *x = millones de euros para medicamentos anti. no esteroides*
y = millones de euros para fármacos ansiolíticos

Del enunciado del problema deducimos,

"Desea invertir a lo sumo 3 millones de euros" $x + y \leq 3$

"dedicar por lo menos 1'5 millones a ansiolíticos" $y \geq 1'5$

"en medicamentos no debe invertir más de 1 millón" $x \leq 1$

"debe dedicar a fármacos al menos el doble que a medicamentos" $y \geq 2x$

Como x e y son el dinero a invertir, deben ser números positivos $x \geq 0 \quad y \geq 0$

El beneficio que obtendrá viene dado por la expresión $z = 0'25\,x + 0'1\,y$

El problema a resolver es,

$$\max imizar \quad z = 0'25\,x + 0'1\,y$$
$$s.\,a.$$
$$\begin{array}{rcl} x+y & \leq & 3 \\ x & \leq & 1 \\ y & \geq & 1'5 \\ y & \geq & 2x \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$x + y \leq 3$ $y \geq 2x$

$x + y = 3$ $y = 2x$

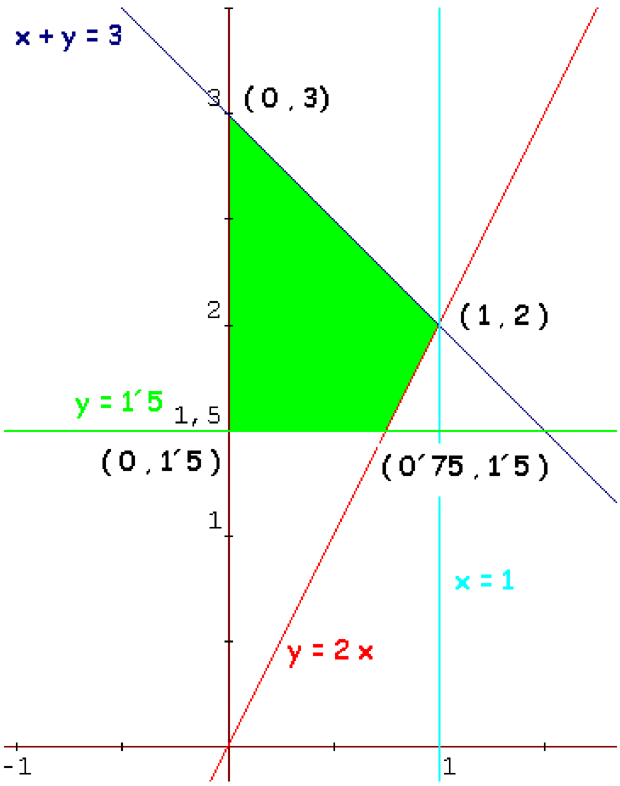
x	*y*
0	*3*
3	*0*

x	*y*
0	*0*
1	*2*

(0,0) ¿cumple la restricción? Sí
$0 + 0 \leq 3$ *Sí*

(1,0) ¿cumple la restricción? No
$0 \geq 2\,.1$ *No*

La representación gráfica de las restricciones es el siguiente gráfico



Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1'5 \end{cases}$	*El punto de corte es (0 , 1´5)*

$\begin{cases} y = 2x \\ y = 1'5 \end{cases}$	*Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación* *1´5 = 2 x; x = 0´75*	*El punto de corte es (0´75 , 1´5)*

$\begin{cases} y = 2x \\ x = 1 \end{cases}$	*Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,* *y = 2 . 1 = 2*	*El punto de corte es (1 , 2)*

$\begin{cases} x + y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$	*Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,* *0 + y = 3; y = 3*	*El punto de corte es (0 , 3)*

La región factible está formada por los puntos de la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x,y)	*z = 0´25 x + 0´1 y*	
(0 , 1´5)	*0´15*	
(0´75 , 1´5)	*0´25 . 0´75 + 0´1 . 1´5 = 0´3375*	
(1 , 2)	*0´25 . 1 + 0´1 . 2 = 0´45*	*máximo*
(0 , 3)	*0´25 . 0 + 0´1 . 3 = 0´3*	

El beneficio máximo lo obtendrá dedicando 1 millón de euros a medicamentos antiinflamatorios no esteroides y 2 millones de euros a fármacos ansiolíticos; obtendrá un beneficio de 0´45 millones de euros, es decir, 450000 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Una destilería produce dos tipos de whisky blend mezclando sólo dos maltas destiladas distintas, A y B. El primero tiene un 70% de malta A y se vende a 12€/litro, mientras que el segundo tiene un 50% de dicha malta y se vende a 16 €/litro. La disponibilidad de las maltas A y B son 132 y 90 litros, respectivamente. ¿Cuántos litros de cada whisky debe producir la destilería para maximizar sus ingresos, sabiendo que la demanda del segundo whisky nunca supera a la del primero en más del 80%? ¿Cuáles serían en este caso los ingresos de la destilería?

Solución:

Utilizamos las incógnitas:

x = litros del whisky del tipo 1

y = litros del whisky del tipo 2

De los datos del problema podemos sacar la siguiente tabla:

	Malta		
	A	*B*	*Venta*
Tipo 1	*70%*	*30%*	*12 €/l*
Tipo 2	*50%*	*5%*	*16 €/l*
restricciones	*132 l*	*90 l*	

Los ingresos serían: 12 x + 16 y

Las restricciones son:

por la malta A: $0'7x + 0'5y \le 132$

por la malta B: $0'3x + 0'5y \le 90$

la demanda del 2º whisky no supera a la del 1º en más de 80%: $y \le 1'8x$

El problema a resolver es:

maximizar z = 12 x + 16 y

$$s.a. \begin{cases} 0'7x + 0'5y \le 132 \\ 0'3x + 0'5y \le 90 \\ y \le 1'8x \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

$0'7x + 0'5y \le 132$

$0'7x + 0'5y = 132$

x	y
0	264
$\frac{1320}{7}$	0

¿(0,0) *cumple*?

$0'7 \cdot 0 + 0'5 \cdot 0 \le 132$ *sí*

$0'3x + 0'5y \le 90$

$0'3x + 0'5y = 90$

x	y
0	180
300	0

¿(0,0) *cumple*?

$0'3 \cdot 0 + 0'5 \cdot 0 \le 90$ *sí*

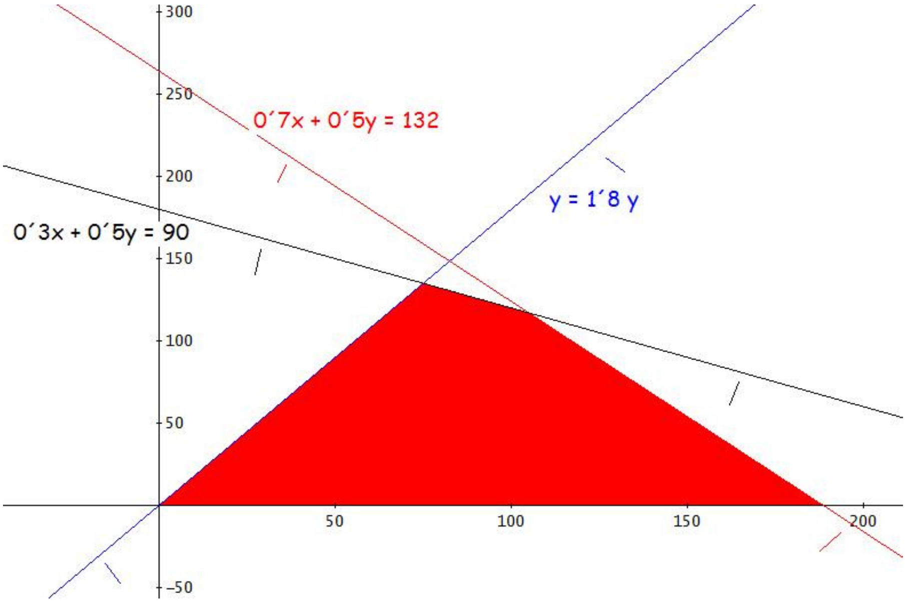
$y \le 1'8x$

$y = 1'8x$

x	y
0	0
100	180

¿(100,0) *cumple*?

$0 \le 1'8 \cdot 100$ *sí*



Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{cases} 0'3x + 0'5y = 90 \\ y = 1'8x \end{cases} \quad 0'3x + 0'5\,.\,1'8x = 90 \;\rightarrow\; 0'3x + 0'9x = 90 \;\rightarrow\; 1'2x = 90 \;\rightarrow\; x = \frac{90}{1'2} = 75$$

$$\rightarrow\; y = 1'8\,.\,75 = 135 \;\rightarrow\; (75\,,135)$$

$$\begin{cases} 0'7x + 0'5y = 132 \\ 0'3x + 0'5y = 90 \end{cases}$$

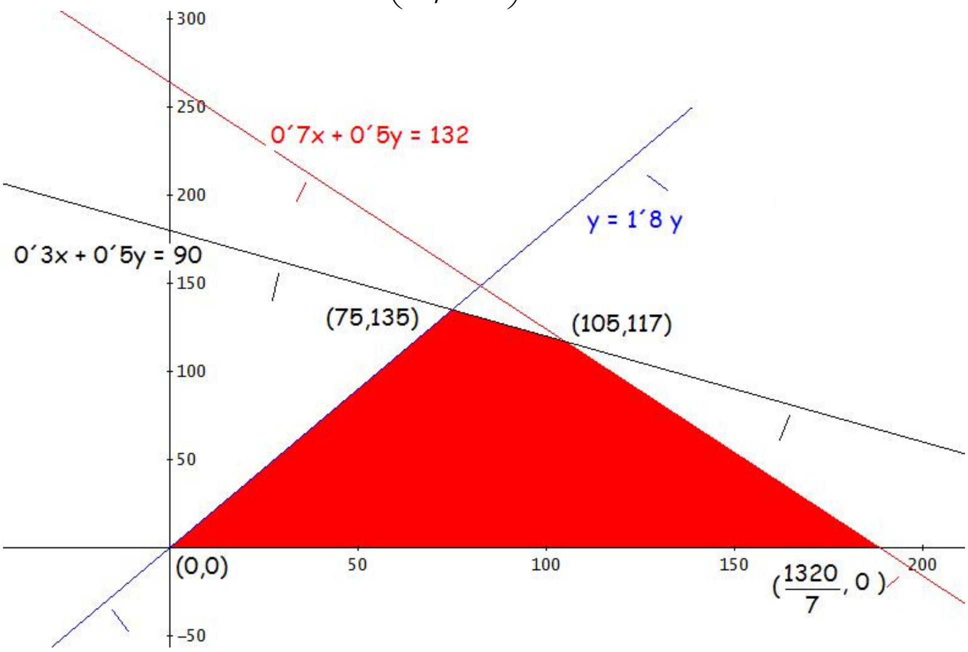
$$1^{a} - 2^{a};\quad 0'4x = 42 \;\rightarrow\; x = \frac{42}{0'4} = 105$$

sustituyendo en la 2^{a},

$$0'3\,.\,105 + 0'5y = 90$$
$$31'5 + 0'5y = 90$$
$$0'5y = 58'5$$
$$y = \frac{58'5}{0'5} = 117 \;\rightarrow\; (105\,,117)$$

La región factible está limitada por los puntos

$(0\,,0), (75\,,135), (105\,,117)$ y $\left(\frac{1320}{7}\,,0\right)$



Sabemos que la función que queremos maximizar alcanzará su máximo en los extremos de la región factible.

(x, y)	$z = 12x + 16y$	
$(0,0)$	$12 . 0 + 16 . 0 = 0$	
$(75,135)$	$12 . 75 + 16 . 135 = 3060$	
$(105,117)$	$12 . 105 + 16 . 117 = 3132$	*máximo*
$\left(\frac{1320}{7}, 0\right)$	$12 . \frac{1320}{7} + 16 . 0 = 2262'86$	

El máximo se alcanza en el punto (105,117). Por lo que para maximizar sus ingresos la destilería debe producir 105 l del whisky del primer tipo y 117 l del segundo tipo.
Con esta producción los ingresos serían de 3132 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2.

a) Halla los vértices de la región determinada por las siguientes inecuaciones:

$$3x+y\le 12,\qquad x-2y\ge -3,\qquad y\ge \frac{x}{2}-2,\qquad 2x+3y\ge 1$$

b) Calcula los puntos de la región donde la función $f(x) = 3x - 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determina éstos.

Solución:

a) Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad 3x+y\le 12$

$3x+y=12$

x	y
0	12
4	0

$3.0+0\le 12$ *Sí*

$(b)\quad x-2y\ge -3$

$x-2y=-3$

x	y
1	2
-3	0

$0-2.0\ge -3$ *Sí*

$(c)\quad y\ge \frac{x}{2}-2$

$y=\frac{x}{2}-2$

x	y
0	-2
4	0

$0\ge 0-2$ *Sí*

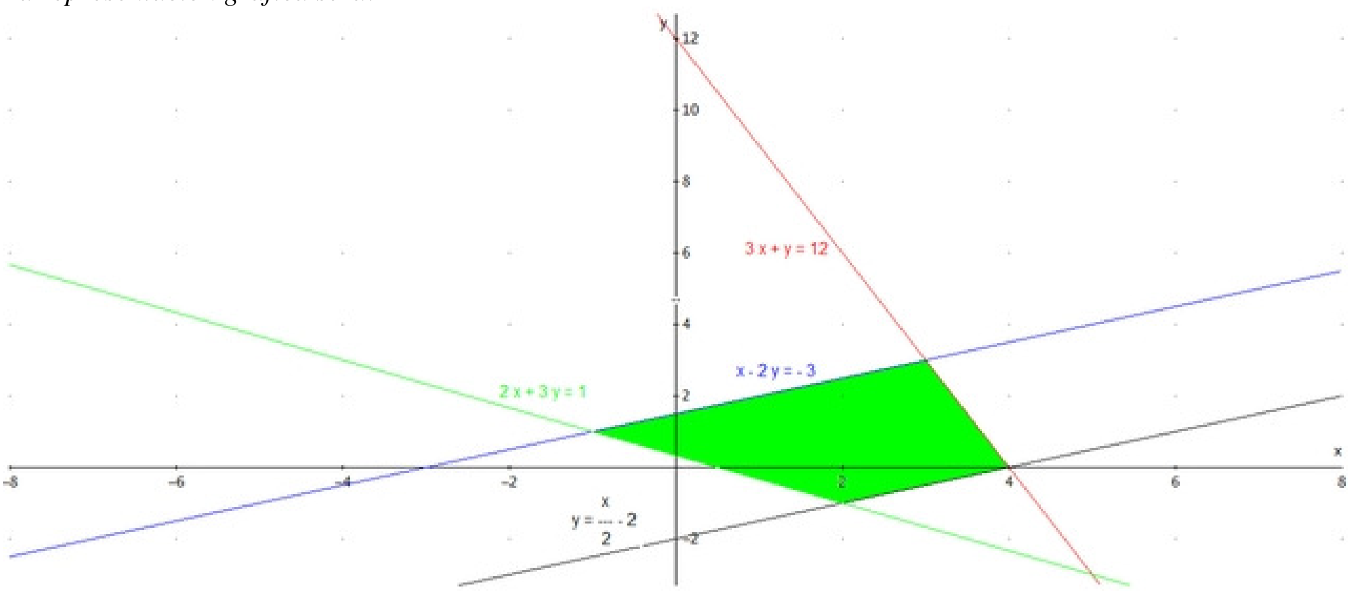
$(d)\quad 2x+3y\ge 1$

$2x+3y=1$

x	y
2	-1
-1	1

$2.0+3.0\ge 1$ *No*

La representación gráfica será:



Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

De (a) y (b): (3 , 3)

$$\begin{cases}3x+y=12\\ x-2y=-3\end{cases}\qquad 2x1^{a}\ \begin{cases}6x+2y=24\\ x-2y=-3\end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $7x = 21$; $x = 3$

sustituyendo en la 2ª ecuación: $3 - 2y = -3$; $-2y = -6$; $y = 3$

De (a) y (c): (4 , 0) (según hemos obtenido en la tabla de valores de ambas rectas)

De (c) y (d): (2 , – 1)

$$\begin{cases}y=\frac{x}{2}-2\\ 2x+3y=1\end{cases}$$ *Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación*

$$2x+3\left(\frac{x}{2}-2\right)=1;\quad 2x+\frac{3x}{2}-6=1$$

4 x + 3 x – 12 = 2; 7 x = 14; x = 2

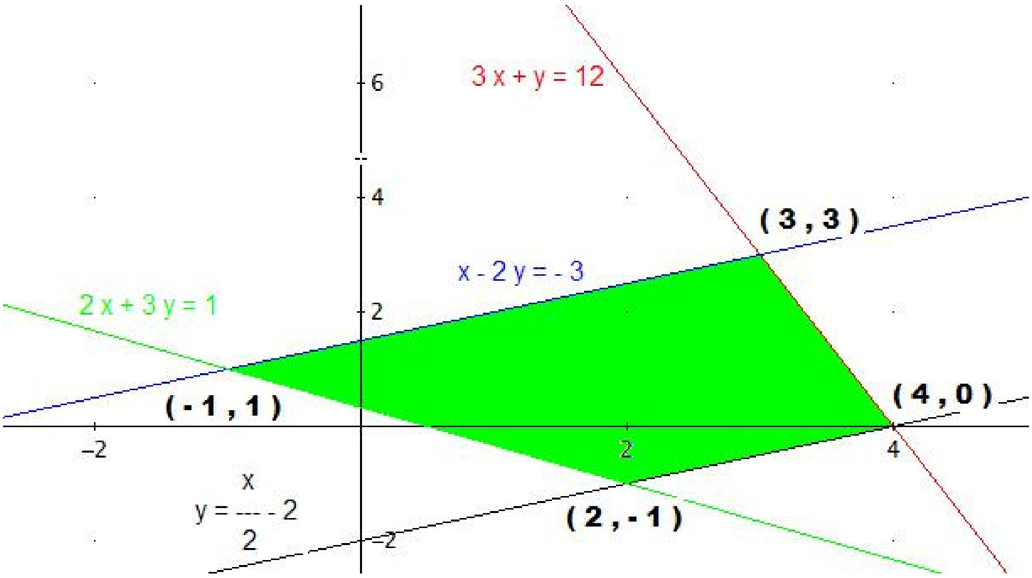
$$y=\frac{2}{2}-2=1-2=-1$$

De (d) y (b): (– 1 , 1)

$$\begin{cases}2x+3y=1\\ x-2y=-3\end{cases}\qquad -2x2^{a}\begin{cases}2x+3y=1\\ -2x+4y=6\end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: 7 y = 7; y = 1

sustituyendo en la 2ª ecuación: x – 2 . 1 = – 3; x = – 1



Los vértices de la región determinada por las inecuaciones son: (3, 3), (4 , 0), (2 , – 1) y (– 1 , 1)

b) Los puntos de la región obtenida anteriormente en que la función dada alcanza sus valores máximo y mínimo serán los vértices de ella o los puntos de alguno de los segmentos que la delimitan.

Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	f(x,y) = 3 x – 2 y	
3 , 3	3 . 3 – 2 . 3 = 3	
4 , 0	3 . 4 – 2 . 0 = 12	Máximo
2 , – 1	3 . 2 – 2 (– 1)= 8	
– 1 , 1	3 (– 1) – 2 . 1 = – 5	Mínimo

f(x,y) alcanza el máximo en el punto (4 , 0) y vale 12; y el mínimo en el punto (– 1 , 1) y vale – 5.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Cierto armador se dedica a la pesca de rape y merluza. Las cuotas pesqueras imponen que sus capturas totales no excedan las 30 toneladas (Tm). Por otro lado, la cantidad de rape como máximo puede triplicar a la de la merluza y, además, esta última no puede superar las 18 Tm. Si el precio del rape es de 15 €/kg y el de la merluza 10 €/Kg. ¿qué cantidades de cada especie debe pescar para maximizar sus ingresos?

Solución:
Utilizamos las siguientes incógnitas
x = kg de rape a pescar
y = kg de merluza a pescar
Las restricciones serán:
"sus capturas totales no excedan las 30 toneladas (30000 kg)"; $x + y \le 30000$
"la cantidad de rape como máximo puede triplicar a la de merluza"; $x \le 3y$
"la cantidad de merluza no pued superar las 18 Tm (18000 kg)"; $y \le 18000$
Como x e y representan kilos de pescado, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \ge 0$

Los ingresos que obtiene el armador serán: $15x + 10y$

El problema a resolver es:
Maximizar $z = 15x + 10y$

$$s.a. \begin{cases} x + y \le 30000 \\ x \le 3y \\ y \le 18000 \\ x,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad x + y \le 30000$

$x + y = 30000$

x	y
0	30000
30000	0

¿(0,0) *cumple*?
$0 + 0 \le 30000$ *Sí*

$(b)\quad x \le 3y$

$x = 3y$

x	y
30000	10000
0	0

¿(0,10000) *cumple*?
$0 \le 3.10000$ *Sí*

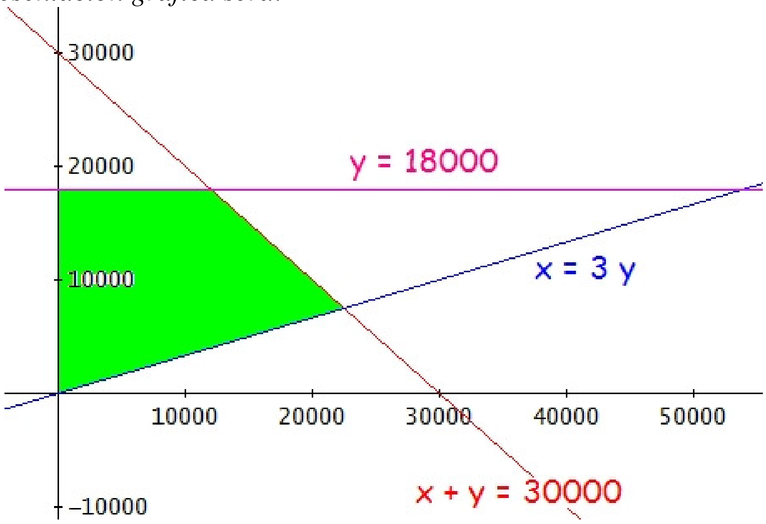
$(c)\quad y \le 18000$

$y = 18000$

x	y
0	18000
10000	18000

¿(0,0) *cumple*?
$0 \le 18000$ *Sí*

La representación gráfica será:



Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

Son evidentes los vértices (0 , 0) y (0 , 18000); calculemos los otros dos vértices.

De (a) y (c): (12000 , 18000)

$$\begin{cases} x + y = 30000 \\ y = 18000 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} x + 18000 = 30000 \\ x = 12000 \end{array}$$

De (b) y (c): (22500 , 7500)

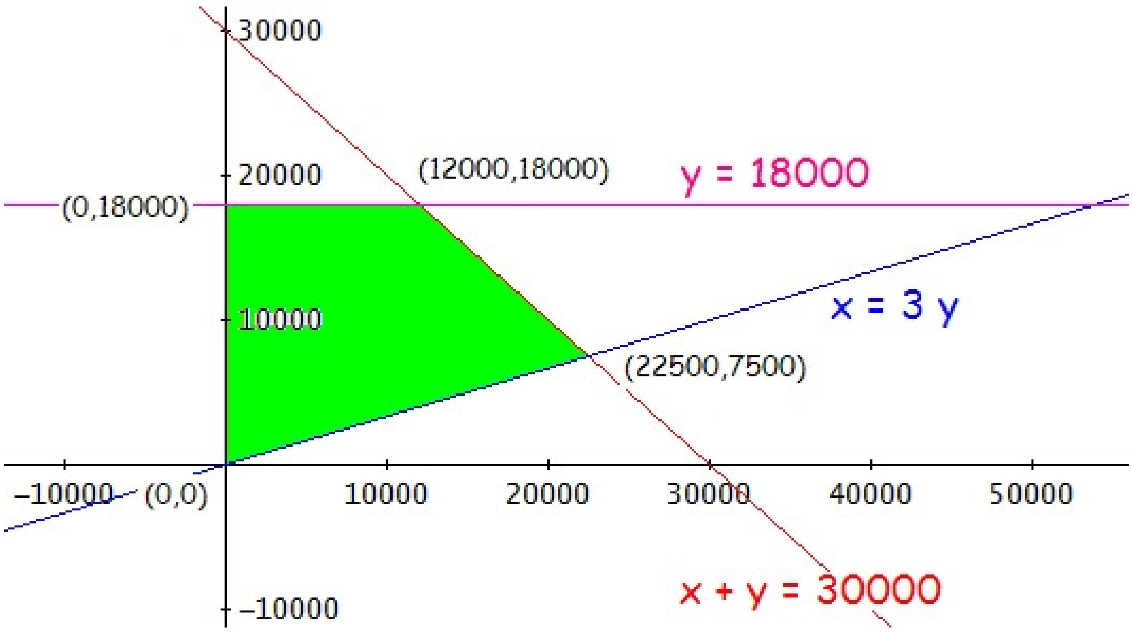
$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 30000 \end{cases}$$

$$3y + y = 30000$$

$$4y = 30000$$

$$y = \frac{30000}{4} = 7500$$

$$luego \quad x + 7500 = 30000 \quad \rightarrow \quad x = 22500$$



Los vértices de la región son: (0, 0), (0 , 18000), (12000 , 18000) y (22500 , 7500)

La función de los ingresos alcanza su valor máximo en los vértices de la región anterior o en alguno de los segmentos que la delimitan.
Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*z = 15 x + 10 y*	
0 , 0	*15 . 0 + 10 . 0 = 0*	
0 , 18000	*15 . 0 + 10 . 18000 = 18000*	
12000 , 18000	*15 . 12000 + 10 . 18000 = 360000*	
22500 , 7500	*15 . 22500 + 10 . 7500 = 412500*	*Máximo*

Para maximizar sus ingresos debe pescar 22500 kg de rape y 7500 kg de merluza

BLOQUE D

PROBLEMA D1. Una empresa va a construir dos tipos de apartamentos, uno de lujo y otro de superlujo. El coste del modelo de lujo es de 1 millón de euros y del de superlujo 1,5 millones, disponiendo para la operación 60 millones de euros. Para evitar riesgos, se cree conveniente construir al menos tantos apartamento de lujo como de superlujo y, en todo caso, no construir más de 45 apartamentos de lujo. ¿Cuántos apartamentos de cada tipo le interesa construir a la empresa si quiere maximizar el número total de apartamentos construidos? ¿Agotará el presupuesto disponible?

Solución:
Utilizamos las siguientes variables:
x = nº de apartamentos de lujo
y = nº de apartamentos de superlujo

Del enunciado del problema obtenemos:
"Dispone para la operación de 60 millones de euros" $\rightarrow$ $1.000.000\,x + 1.500.000\,y \leq 60.000.000$ $\rightarrow$
$10\,x + 15\,y \leq 600$ $\rightarrow$ $2\,x + 3\,y \leq 120$
"construir al menos tantos apartamento de lujo como de superlujo" $\rightarrow$ $x \geq y$
"no construir más de 45 apartamentos de lujo" $\rightarrow$ $x \leq 45$
"maximizar el número total de apartamentos construidos" $\rightarrow$ *maximizar* $z = x + y$

Por lo tanto el problema a resolver será:

$$\text{Maximizar } z = x + y$$

$$s.a.\ \begin{cases} 2x+3y \leq 120 \\ x \leq 45 \\ x \geq y \\ x, y \in N \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

$2x+3y \leq 120$

(1) $2x+3y=10$

x	y
0	40
60	0

¿(0,0) *cumple*?

$2\,.\,0+3\,.\,0 \leq 120$ *Sí*

$x \leq 45$

(2) $x = 45$

x	y
45	0
45	40

¿(0,0) *cumple*?

$0 \leq 45$ *Sí*

$x \geq y$

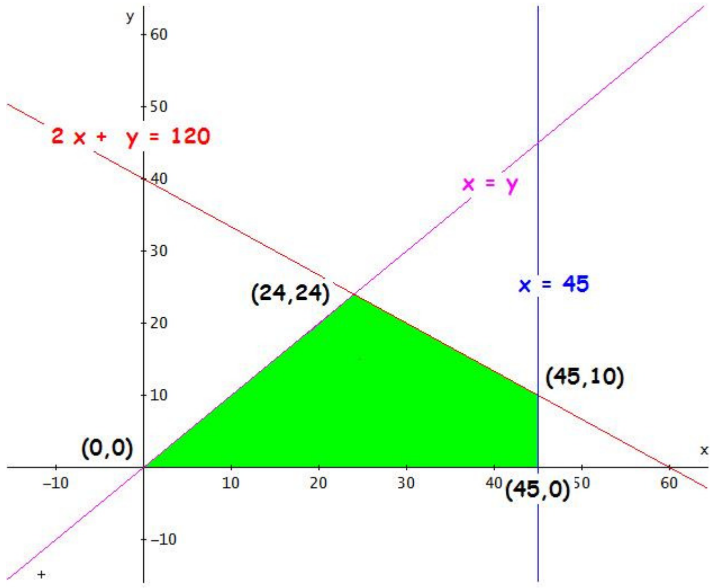
(3) $x = y$

x	y
0	0
60	60

¿(20,10) *cumple*?

$20 \geq 10$ *Sí*

La representación gráfica:



La región factible es cerrada y limitada por los puntos que calcularemos a continuación.

La región factible son los puntos de coordenada natural de la zona coloreada.

Los vértices de la región del apartado anterior los obtendremos calculando los siguientes puntos de corte,

$A, \quad (1) \cap (3)$

$$\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}2x+3y=120\\x=y\end{cases}$$

sustituyendo el valor de x en la 1ª *ecuación,*

$$2y+3y=120$$
$$5y=120$$
$$y=\frac{120}{5}=24$$
$$\text{luego } x=24 \quad \rightarrow \quad A\,(24\,,24)$$

$B, \quad (1) \cap (2)$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}2x+3y=120\\x=45\end{cases}$$

sustituyendo el valor de x en la 1ª *ecuación,*

$$2\,.\,45+3y=120$$
$$90+3y=120$$
$$3y=120-90$$
$$3y=30$$
$$y=\frac{30}{3}=10 \quad \rightarrow \quad B\,(45\,,10)$$

Los otros dos vértices de la región son, evidentemente, (0 , 0) y (45 , 0)

Sabemos que la función z alcanzará el máximo en alguno de los extremos de la región.

(x, y)	$z = x + y$	
$(0,0)$	0	
$(24,24)$	$24+24=48$	
$(45\,,10)$	$45+10=55$	*máximo*
$(45,0)$	45	

El máximo se alcanza en el punto (45 , 10) que significa: la empresa debe construir 45 apartamento de lujo y 10 de superlujo para maximizar el número total de apartamentos construidos con las restricciones impuestas.

El coste de construir este número de apartamentos será de,
1.000.000 . 45 + 1.500.000 . 10 = 45.000.000 + 15.000.000 = 60.000.000 €,
por lo que agota el presupuesto disponible.

BLOQUE D

PROBLEMA D2. Dado el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x+3y+5 \geq 0 \\ y-4x \geq -6 \\ 3y-x \leq 4 \\ y-x \leq 2 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones del mismo y determina sus vértices.
b) Obtén los puntos donde la función *f(x, y) = 2 x – 3 y* alcanza los valores mínimo y máximo en dicha región.

Solución:

a) Cálculos para representar las restricciones

$x+3y+5 \geq 0$

(1) $x+3y+5=0$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & \frac{-5}{3} \\ -5 & 0 \end{array}$$

¿(0,0) *cumple*?

$0+3\,.\,0+5 \geq 0$ *Sí*

$y-4x \geq -6$

(2) $y-4x=-6$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -6 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{array}$$

¿(0,0) *cumple*?

$0-4\,.\,0 \geq -6$ *Sí*

$3y-x \leq 4$

(3) $3y-x=4$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & \frac{4}{3} \\ -4 & 0 \end{array}$$

¿(0,0) *cumple*?

$3\,.\,0-0 \leq 4$ *Sí*

$y-x \leq 2$

(4) $y-x=2$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{array}$$

¿(0,0) *cumple*?

$0-0 \leq 2$ *Sí*

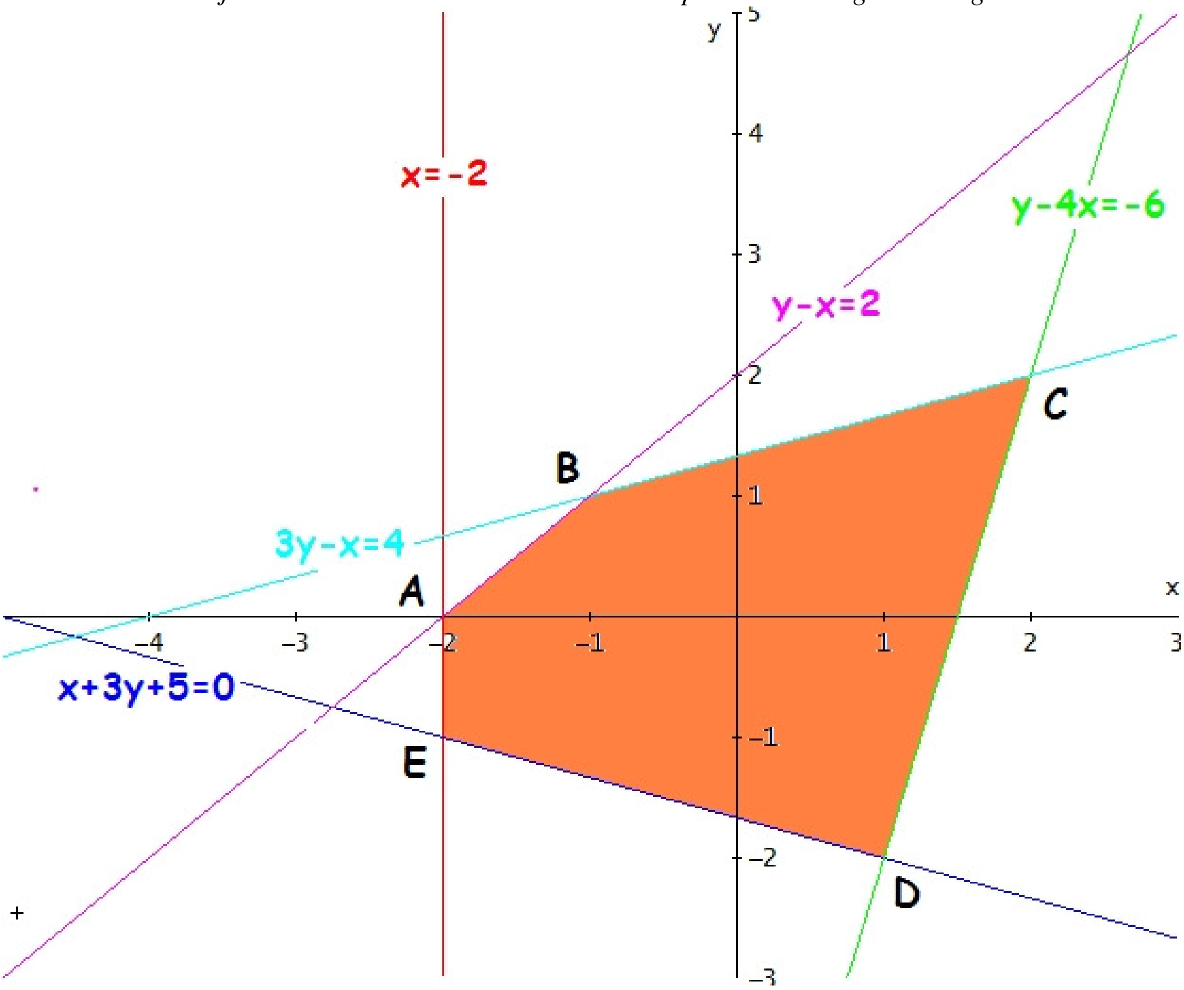
$x \geq -2$

(5) $x=-2$

¿(0,0) *cumple*?

$0 \geq -2$ *Sí*

Por lo tanto el conjunto de soluciones del sistema son los puntos de la siguiente región coloreada:



Los vértices de la región factible los obtendremos calculando los siguientes puntos de corte,

A, $(4)\cap(5)$

$$\begin{matrix}(3)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}y-x=-2\\x=-2\end{cases}$$

sustituyendo en valor de x en 1^{a} *ecuación,*

$y-(-2)=-2$

$y+2=2$

$y=0 \quad \to \quad A(-2\,,0)$

B, $(3)\cap(4)$

$$\begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}\begin{cases}3y-x=4\\y-x=2\end{cases}$$

$$\begin{matrix}1^{a}.(-1)\\2^{a}\end{matrix}\begin{cases}-3y+x=-4\\y-x=2\end{cases}$$

sumando,

$-2y=-2$

$y=1$

sustituyendo en 2^{a},

$1-x=2$

$-x=2-1$

$-x=1 \quad \to \quad x=-1 \quad \to \quad B(-1\,,1)$

C, $(2)\cap(3)$

$$\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}y-4x=-6\\3y-x=4\end{cases}$$

$$\begin{matrix}1^{a}.(-3)\\2^{a}\end{matrix}\begin{cases}-3y+12x=18\\3y-x=4\end{cases}$$

sumando,

$11x=22 \quad \to \quad x=\dfrac{22}{11}=2$

sustituyendo en 1^{a},

$y-4\,.\,2=-6 \quad \to \quad y-8=-6 \quad \to \quad y=-6+8$

$y=2 \quad \to \quad C(2\,,2)$

D, $(1)\cap(2)$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x+3y+5=0\\y-4x=-6\end{cases}$$

arreglamos el sistema $\begin{cases}x+3y=-5\\-4x+y=-6\end{cases}$

$$\begin{matrix}1^{a}.4\\2^{a}\end{matrix}\begin{cases}4x+12y=-20\\-4x+y=-6\end{cases}$$

sumando,

$13y=-26 \quad \to \quad y=\dfrac{-26}{13}=-2$

sustituyendo en 2^{a},

$-2-4x=-6 \quad \to \quad -4x=-6+2 \quad \to \quad -4x=-4$

$x=\dfrac{-4}{-4}=1 \quad \to \quad D(1\,,-2)$

E, $(1)\cap(5)$

$$\begin{matrix}(3)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x+3y+5=0\\x=-2\end{cases}$$

sustituyendo en valor de x en 1^{a} *ecuación,*

$-2+3y+5=0$

$3y=2-5$

$3y=-3$

$y=\dfrac{-3}{3}=1 \quad \to \quad A(-2\,,-1)$

Los vértices pedidos son los puntos

$A(-2\,,0)$, $B(-1\,,1)$, $C(2\,,2)$, $D(1\,,-2)$ *y* $E(-2\,,-1)$

c) Sabemos que la función f(x,y) alcanzará el mínimo y el máximo en los extremos de la región.

(x, y)	$f(x, y) = 2x - 3y$	
$(-2, 0)$	$2 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 = -4$	
$(-1, 1)$	$2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -2 - 3 = -5$	*mínimo*
$(2, 2)$	$2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$	
$(1, -2)$	$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 2 + 6 = 8$	*máximo*
$(-2, -1)$	$2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -4 + 3 = -1$	

Luego f(x,y), en dicha región, alcanza su máximo en el punto (1 , – 2) {que es 8} y su mínimo en el punto (– 1 , 1) {que es – 5}.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1. Un ganadero dispone de alimento concentrado y forraje para alimentar sus vacas. Cada kg. de alimento concentrado contiene 300 gr. de Proteína Cruda (PC), 100 gr. de Fibra Cruda (FC) y 2 Mcal. de Energía Neta de Lactancia (ENL) y su coste es 11 euros. Por su parte, cada kg. de forraje contiene 400gr. de PC, 300 gr. de FC y 1 Mcal. de ENL, siendo su coste de 6,50 euros. Determina la ración alimenticia de mínimo coste si sabemos que cada vaca debe ingerir al menos 3500 gr. de PC, 1500 gr. de FC y 15 Mcal. de ENL. ¿Cuál es su coste?

Solución:
Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

	PC	*FC*	*ENL*	*Coste*
1 Kg de alimento concentrado	*300 gr*	*100 gr*	*2 Mcal*	*11 €*
1 Kg de forraje	*400 gr*	*300 gr*	*1 Mcal*	*6´50 €*

La ración alimenticia estará formada por
x = Kg de alimento concentrado
y = Kg de forraje

Las restricciones serán:
"cada vaca debe ingerir al menos 3500 gr de PC"; $300x + 400y \geq 3500 \rightarrow 3x + 4y \geq 35$
"cada vaca debe ingerir al menos 1500 gr de FC"; $100x + 300y \geq 1500 \rightarrow x + 3y \geq 15$
"cada vaca debe ingerir al menos 15 Mcal de ENL"; $2x + y \geq 15$
Como x e y representan Kg de alimentos, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \geq 0$

El coste de la ración alimenticia será: $11x + 6'5y$

Para determinar la ración alimenticia de mínimo coste debemos resolver el siguiente problema:

Minimizar $z = 11x + 6'5y$

$$s.a. \begin{cases} 3x + 4y \geq 35 \\ x + 3y \geq 15 \\ 2x + y \geq 15 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad 3x + 4y \geq 35$

$3x + 4y = 35$

$$\begin{array}{r|c} x & y \\ \hline 0 & 35/4 \\ 35/3 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

$3.0 + 4.0 \geq 35\ No$

$(b)\quad x + 3y \geq 15$

$x + 3y = 15$

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 0 & 5 \\ 15 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

$0 + 3.0 \geq 15\ No$

$(c)\quad 2x + y \geq 15$

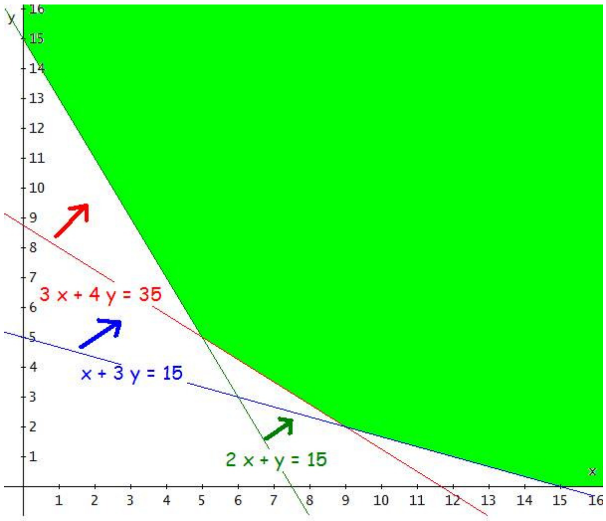
$2x + y = 15$

$$\begin{array}{r|c} x & y \\ \hline 0 & 15 \\ 15/2 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

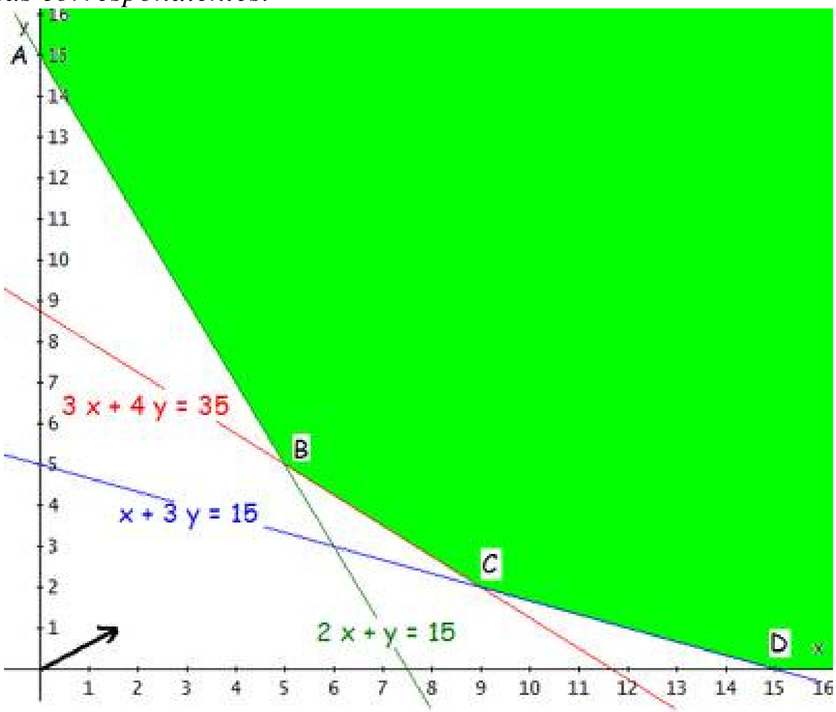
$2.0 + 0 \geq 15\ No$

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.



Es una región factible abierta.
Como el vector perpendicular a la función de coste es el representado a partir del origen, la función de coste no alcanza el máximo en esta región pero si su mínimo.

Son evidentes los vértices A (0 , 15) y D (15 , 0); calculemos los otros vértices.

B, (a) y (c):

$$\begin{cases} 3x+4y=35 \\ 2x+y=15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+4y=35 \\ -8x-4y=-60 \end{cases}$$

$$Sumando: \quad -5x \quad = -25 \quad \rightarrow \quad x=5$$

Sustituyendo este valor de x en la 2ª ecuación, 2 . 5 + y = 15; y = 5

Punto de corte B (5 , 5)

C, (a) y (b):

$$\begin{cases} 3x+4y=35 \\ x+3y=15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+4y=35 \\ -3x-9y=-45 \end{cases}$$

$$Sumando: \quad -5y \quad = -10 \quad \rightarrow \quad y=2$$

Sustituyendo este valor de y en la 2ª ecuación, x + 3 . 2 = 15; x = 9

Punto de corte C (9 , 2)

Los vértices de la región factible son: (0, 15), (5 , 5), (9 , 2) y (15 , 0).

La función de coste, z, alcanza su valor mínimo en los vértices de la región anterior o en alguno de los segmentos que la delimitan.
Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	z = 11 x + 6´5 y	
0 , 15	11 . 0 + 6´5 . 15 = 97´5	
5 , 5	11 . 5 + 6´5 . 5 = 87´5	Mínimo
9 , 2	11 . 9 + 6´5 . 2 = 112	
15 , 0	11 . 15 + 6´5 . 0 = 165	

Para que el coste sea mínimo la ración alimenticia debe estar formada por 5 Kg. de alimento concentrado y 5 Kg. de forraje.
El coste de esta ración alimenticia será de 87´50 euros.

BLOQUE A

PROBLEMA 1. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,50 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros. ¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos? Determina los ingresos máximos.

Solución:
Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

Tipo de paquete	Paquetes de pipas	Chicles	Bombones	Precio de venta
A	1	2	2	1´50 €
B	1	4	1	2 €
Existencias	10	30	18	

Utilizamos las siguientes incógnitas

x = número de paquetes del tipo A que confecciona
y = número de paquetes del tipo B que confecciona

Las restricciones serán:
"dispone de 10 paquetes de pipas"; $x + y \leq 10$
"dispone de 30 chicles"; $2x + 4y \leq 30 \rightarrow x + 2y \leq 15$
"dispone de 18 bombones"; $2x + y \leq 18$
Como x e y representan número de paquetes, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \in N$
Los beneficios que obtiene el frutero serán: $1´5x + 2y$

El problema a resolver es:
$$\text{Maximizar} \quad z = 1´5x + 2y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 15 \\ 2x + y \leq 18 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \leq 10$

$x + y = 10$

x	y
0	10
10	0

¿(0,0) cumple?
$0 + 0 \leq 10$ Sí

(b) $x + 2y \leq 15$

$x + 2y = 15$

x	y
0	7,5
15	0

¿(0,0) cumple?
$0 + 2 . 0 \leq 15$ Sí

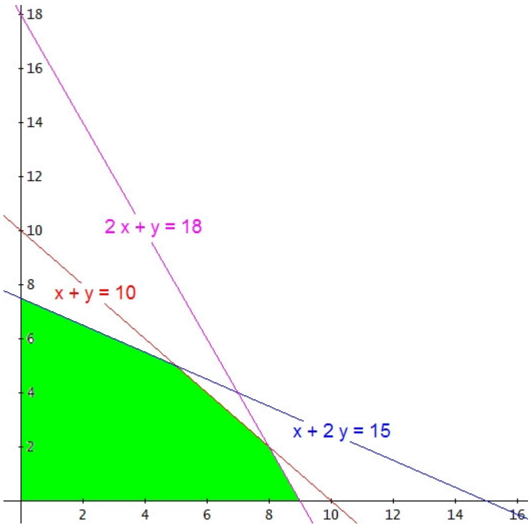
(c) $2x + y \leq 18$

$2x + y = 18$

x	y
0	18
9	0

¿(0,0) cumple?
$2 . 0 + 0 \leq 18$ Sí

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.
Son evidentes los vértices (0 , 0), (0 , 7´5) y (9 , 0); calculemos los otros dos vértices.
De (a) y (b): (5 , 5)

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 2y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = -10 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: y = 5
sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: x + 5 = 10; x = 5

De (a) y (c): (8 , 2)

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = -10 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: x = 8
sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: 8 + y = 10; y = 2

Los vértices de la región factible son: (0, 0), (0 , 7´5), (9 , 0), (5 , 5) y (8 , 2). De estos vértices el (7´5 , 0) no tiene sus coordenadas naturales, esperemos que el máximo se alcance en otro de los vértices para que el problema tenga una solución sencilla.
Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	z = 1´5 x + 2 y	
0 , 0	1´5 . 0 + 2 . 0 = 0	
0 , 7´5	1´5 . 0 + 2 . 7´5 = 15	
9 , 0	1´5 . 9 + 2 . 0 = 13´5	
5 , 5	1´5 . 5 + 2 . 5 = 17´5	Máximo
8 , 2	1´5 . 8 + 2 . 2 = 16	

El máximo se alcanza en el punto (5 , 5) lo cual quiere decir que para maximizar sus ingresos el tendero debe preparar 5 paquetes del tipo A y 5 del tipo B. De esta forma conseguirá un ingreso máximo de 17´50€.

OPCIÓN B

Problema 1. Sea el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 2 \\ -x+y \leq 1 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$$

a) Resuélvelo gráficamente.
b) Halla el máximo y el mínimo de la función $z = 2x + y$ en el conjunto solución de dicho sistema.

Solución:

a) Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a) \quad x+y \geq 1$

$x+y=1$

x	y
0	1
1	0

$¿(0,0)$ *cumple*?

$0+0 \geq 1$ *No*

$(b) \quad x+y \leq 2$

$x+y=2$

x	y
0	2
2	0

$¿(0,0)$ *cumple*?

$0+0 \leq 2$ *Sí*

$(c) \quad -x+y \leq 1$

$-x+y=1$

x	y
0	1
-1	0

$¿(0,0)$ *cumple*?

$0+0 \leq 1$ *Sí*

$(c) \quad x-y \leq 1$

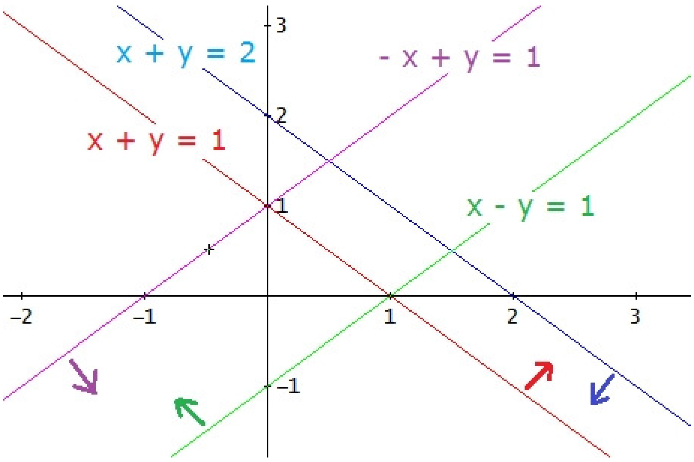
$x-y=1$

x	y
0	-1
1	0

$¿(0,0)$ *cumple*?

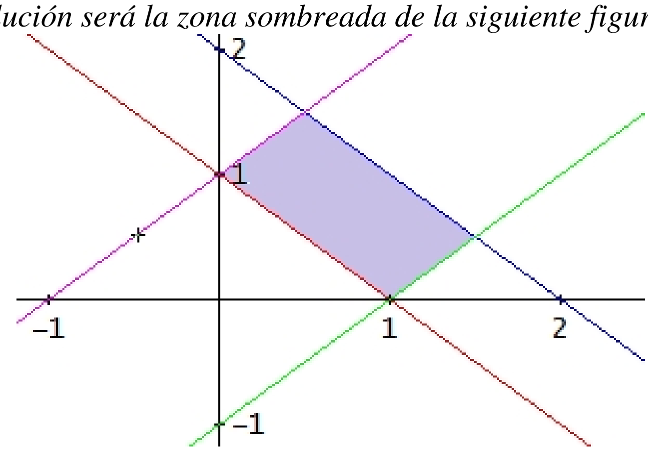
$0-0 \leq 1$ *Sí*

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

La solución será la zona sombreada de la siguiente figura:



b) Obtengamos los vértices de la región anterior.

Por construcción conocemos los siguientes vértices: A (0 , 1) y B (1 , 0). Obtengamos los otros dos.

C, corte entre (b) y (d): $C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: 2 x = 3, luego $x=\frac{3}{2}$

sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $\frac{3}{2}+y=2 \quad \rightarrow \quad y=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

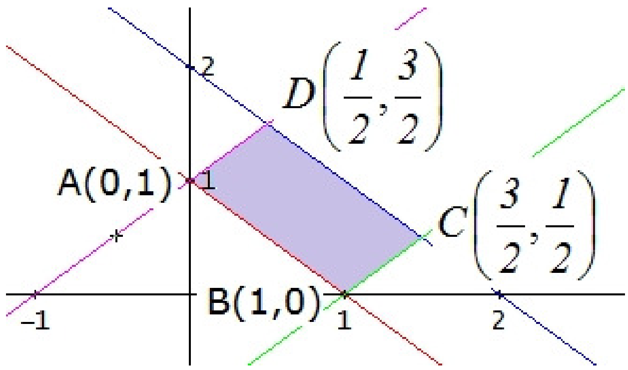
D, corte entre (b) y (c): $D\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=1 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: 2 y = 3, luego $y=\frac{3}{2}$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $x+\frac{3}{2}=2 \quad \rightarrow \quad x=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

Los vértices del conjunto solución del apartado a) son:



Sabemos que los extremos de la función z se alcanzan en los vértices del conjunto solución anterior. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 2x + y$	
0 , 1	2 . 0 + 1 = 1	*mínimo*
1 , 0	2 . 1 + 0 = 2	
$\frac{3}{2},\frac{1}{2}$	$2\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3{\prime}5$	*máximo*
$\frac{1}{2},\frac{3}{2}$	$2\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}=2{\prime}5$	

La función z = 2 x + y alcanza el máximo, que vale 3´5, en el punto $C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ ***y***

el mínimo, que vale 1, en el punto A (0 , 1).