IES Carlos Casares

Viana do Bolo

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS I

1º Bacharelato

Profesor:
José Luis Villarino Barja

Índice xeral

Páxina

Parte I

NÚMEROS E ÁLXEBRA

Unidade 1

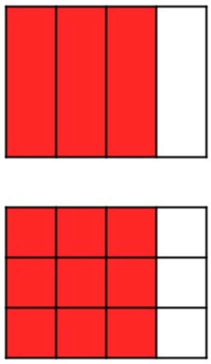
NÚMEROS REAIS

1.1. Coñecementos previos

Concepto de fraccións equivalentes

Dúas fraccións son **equivalentes** cando representan o mesmo número. Podemos comprobar que dúas fraccións son equivalentes de distintas formas:

- As súas representacións gráficas son iguais: $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$



- Teñen a mesma expresión decimal.

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ e } \frac{9}{12} = 0{,}75$$

- Os seus produtos cruzados son iguais:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \text{ xa que } 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 36$$

Podemos obter fraccións equivalentes de dúas maneiras:

- **Amplificación**: multiplicamos o numerador e o denominador polo mesmo número.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

- **Simplificación**: dividimos o numerador e o denominador polo mesmo número. Se non podemos seguir simplificando unha fracción, decimos que a fracción é **irredutible**.

$$\frac{24}{32}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

Concepto de fracción propia e impropia

Unha fracción é **propia** se o numerador é máis pequeno que o denominador. Representa un número decimal entre 0 e 1.

$$\frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{8}{10}$$

Unha fracción é **impropia** se o numerador é máis grande ou igual que o denominador. Representa un número maior ou igual ca 1.

$$\frac{8}{5},\ \frac{9}{4},\ \frac{6}{3}$$

As fraccións impropias pódense expresar como **números mixtos**, que están formados por un número enteiro máis unha fracción propia.

Para pasar de fracción impropia a número mixto debemos facer a división do numerador entre o denominador, pero sen obter decimais. O número enteiro será o cociente da división, e a fracción propia estará formada polo resto da división como numerador e o divisor como denominador. Ás veces podemos ver o número mixto sen o signo da suma entre o número enteiro e a fracción propia.

$$\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$$

Para pasar de número mixto a fracción impropia basta con realizar a suma e deixar a fracción resultante.

$$1+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

Paso de decimal a fracción

- Números **decimais exactos**: son aqueles que teñen un número determinado (finito) de decimais. Para expresalos como fracción debemos ter en conta a multiplicación pola unidade seguida de ceros.

  Por exemplo, sexa $N = 2{,}75$. Multiplicamos neste caso por 100 cada lado da igualdade para transformalo nun número enteiro e a partir de aí despexamos o N e simplificamos no caso de poder.

$$N=2{,}75\Rightarrow 100N=275\Rightarrow N=\frac{275}{100}=\frac{11}{4}$$

  Esta forma que acabamos de ver é a máis recomendada xa que supón exercitar o pensamento matemático, pero tamén existe outra maneira para expresar un **decimal exacto** como fracción.

  Para iso poñemos no numerador o número sen a coma e no denominador a unidade seguida de tantos ceros como decimais teña o número e, ao igual que antes, a fracción obtida podémola simplificar.

$$2{,}75=\frac{275}{100}=\frac{11}{4}$$

- Números **decimais periódicos puros**: son aqueles que teñen un número infinito de decimais, pero que se repiten na súa totalidade continuadamente (empézanse a repetir inmediatamente despois da coma). O conxunto de cifras decimais que se repiten recibe o nome de período. Para expresalos como fracción debemos ter en conta a multiplicación pola unidade seguida de ceros e que se restamos dous números coa mesma parte decimal, o resultado é un enteiro.

  Por exemplo, sexa $N = 2,\widehat{36}$. Multiplicamos neste caso por 100 cada lado da igualdade para transformalo nun número que conteña o período unha vez na parte enteira e despois procedemos a restar esas expresións obtendo así un número enteiro e a partir de aí despexamos o N e simplificamos no caso de poder.

$$N = 2,\widehat{36} \Rightarrow 100N = 236,\widehat{36}$$

$$\begin{array}{rrcr} & 100N & = & 236,\widehat{36} \\ - & N & = & 2,\widehat{36} \\ \hline & 99N & = & 234{,}00 \end{array}$$

$$99N = 234 \Rightarrow N = \frac{234}{99} = \frac{26}{11}$$

  Esta forma que acabamos de ver, ao igual que no caso anterior, é a máis recomendada xa que supón exercitar o pensamento matemático, pero tamén existe outra maneira para expresar un **decimal periódico puro** como fracción.

  Para iso debemos poñer no numerador a resta entre o número sen coma (parte enteira e período) e a parte que non se repite (parte enteira) e no denominador tantos noves como cifras teña o período. Ao igual que todas as fraccións, a que obtemos tamén podemos tratar de simplificala.

$$2,\widehat{36} = \frac{236-2}{99} = \frac{234}{99} = \frac{26}{11}$$

- Números **decimais periódicos mixtos**: son aqueles que teñen un número infinito de decimais que se repiten indefinidamente (período) e un número determinado de decimais que non se repiten (anteperíodo). Para expresalos como fracción debemos ter en conta, do mesmo xeito que no caso anterior, a multiplicación pola unidade seguida de ceros e que se restamos dous números coa mesma parte decimal, o resultado é un enteiro.

  Por exemplo, sexa $N = 2{,}8\widehat{3}$. Multiplicamos neste caso por 10 cada lado da igualdade para transformalo nun número periódico puro. A continuación, volvemos a multiplicar por 10 este número (en total por 100) para conseguir un número que conteña o período unha vez na parte enteira. A continuación, analogamente procedemos a restar esas expresións obtendo así un número enteiro e a partir de aí despexamos o N e simplificamos no caso de poder.

$$N = 2{,}8\widehat{3} \Rightarrow 10N = 28,\widehat{3} \Rightarrow 100N = 283,\widehat{3}$$

$$\begin{array}{rrcr} & 100N & = & 283,\widehat{3} \\ - & 10N & = & 28,\widehat{3} \\ \hline & 90N & = & 255{,}0 \end{array}$$

$$90N = 255 \Rightarrow N = \frac{255}{90} = \frac{17}{6}$$

Coma nos dous casos anteriores, é preferible esta forma que acabamos de ver, xa que supón exercitar o pensamento matemático, pero debemos indicar que tamén existe outra maneira para expresar un **decimal periódico puro** como fracción.

Para iso debemos poñer no numerador a resta entre o número sen coma (parte enteira, anteperíodo e período) e a parte que non se repite (parte enteira e anteperíodo) e no denominador tantos noves como cifras teña o período e tantos ceros como cifras teña o anteperíodo. Ao igual que todas as fraccións, a que obtemos tamén podemos tratar de simplificala.

$$2{,}8\widehat{3} = \frac{283 - 28}{90} = \frac{255}{90} = \frac{17}{6}$$

Clasificación dos números decimais a partir da fracción irredutible

Dada unha fracción, podemos saber que tipo de número decimal é sen necesidade de realizar a división. Para iso deberemos traballar coa fracción irredutible. Unha vez que temos a fracción irredutible debemos descompoñer en factores primos o seu denominador.

- Se na descomposición do denominador só hai 2 e/ou 5, a fracción correspóndese cun número decimal exacto.

$$\frac{9}{20}, \frac{21}{25}, \frac{81}{100}$$

- Se na descomposición do denominador non aparecen nin o 2 nin o 5, a fracción correspóndese cun número decimal periódico puro.

$$\frac{4}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{21}$$

- Se na descomposición do denominador aparecen outros factores ademais do 2 e/ou 5, a fracción correspóndese cun número decimal periódico mixto.

$$\frac{23}{12}, \frac{17}{6}, \frac{2}{15}$$

1.2. Números racionais e irracionais

Os número **naturais** son os números $\{0, 1, 2, 3...\}$ e utilízanse para contar e para ordenar os elementos dun conxunto. Cómpre remarcar que o feito de considerar ou non o cero depende de se traballamos en Cálculo, no que non se considera; ou en Álxebra no que se consideran os cardinais e, por tanto, o cero si que se inclúe.

O conxunto dos enteiros está formado polos naturais e os enteiros negativos $\{-1, -2, -3, -4...\}$.

O conxunto dos números racionais está formado polos enteiros e as fraccións.

Todos os conxuntos dos que acabamos de falar son infinitos e a súa relación pódese ver dunha maneira máis clara no seguinte esquema:

$$\text{Números racionais}(\mathbb{Q}) \begin{cases} \text{Números enteiros}(\mathbb{Z}) \begin{cases} \text{Números naturais}(\mathbb{N}) : \{1, 2, \frac{6}{2}, \sqrt{16}, ...\} \\ \text{Números enteiros negativos} : \{-1, -\frac{8}{4}, \sqrt[3]{-27}, ...\} \end{cases} \\ \text{Números decimais} \begin{cases} \text{Números decimais exactos} : \{0,7; 1,25, ...\} \\ \text{Números decimais periódicos} \begin{cases} \text{Periódicos puros} : \{1, \widehat{4}, ...\} \\ \text{Periódicos mixtos} : \{2,3\,\widehat{56}, ...\} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Números irracionais

O conxunto dos números que non se poden representar en forma de fracción forma o conxunto dos números **irracionais**. A súa expresión ten un número infinito de cifras decimais, pero que non se repiten periodicamente. Existen infinitos números irracionais, algúns exemplos son:

$$0{,}010\ 010\ 001\ 000\ 01...$$
$$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562...$$
$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653...$$
$$e = 2{,}718\ 281\ 828...$$

Vexamos, por exemplo, que efectivamente $\sqrt{2}$ non se pode representar mediante unha fracción. Supoñamos que efectivamente si que se pode e chegaremos a un absurdo. Tomemos entón dita fracción de modo que sexa irredutible:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

Elevamos ao cadrado ambos membros e chegamos a que

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

Por tanto a^2 debe ser múltiplo de 2, e por tanto tamén a é múltiplo de 2, xa que a e b son coprimos. Tomamos agora $a = 2k$ e substituindo obtemos:

$$2b^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

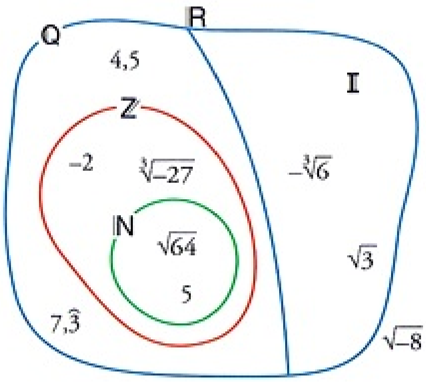
Temos agora que b^2 é múltiplo de 2, o que fai que tamén o sexa b. Chegamos así a unha contradición, pois agora temos que a e b son múltiplos de 2, feito que non pode suceder pois a e b non teñen ningún divisor en común. Temos entón, por tanto, que $\sqrt{2}$ é irracional.

1.3. Notacións

Aínda que algunha notación xa a puidemos ver escrita no anterior epígrafe, vexámola agora con máis detalle e profundidade, e tamén a relación entre os diferentes números.

- $\mathbb{N}$ representa o conxunto dos números **naturais**.
- $\mathbb{Z}$ representa o conxunto dos números **enteiros**.
- $\mathbb{Q}$ representa o conxunto dos números **racionais**.
- $\mathbb{I}$ representa o conxunto dos números **irracionais**.
- $\mathbb{R}$ representa o conxunto dos números **reais**.

Ademais, a relación de inclusión deles é a seguinte: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Tamén temos que dicir que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ e $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.
Vexamos un exemplo, onde podemos ver os distintos tipos de números:



1.4. Valor absoluto

O **valor absoluto** dun número é a distancia do propio número á orixe. Temos entón que o valor absoluto é o mesmo número se este é positivo, e o oposto se é negativo.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Tendo en conta esta definición vemos que o valor absoluto verifica as seguintes propiedades para todo a,$b \in \mathbb{R}$:

- $|a| \geq 0$ para calquera número real e ademais $|a| = 0$ se e só se $a = 0$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$. A esta propiedade coñecémola co nome de *desigualdade triangular*.

Exemplo 1.1

$$|-8| = 8 \qquad |3| = 3$$

1.5. Distancia

A **distancia** entre dous números reais é o valor absoluto da súa diferenza.

$$d(a, b) = |b - a|$$

Por estar definida como o valor absoluto dun número real cumpre as seguintes propiedades:

- $d(a, b) \geq 0 \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$
- $d(a, a) = 0 \ \forall \ a \in \mathbb{R}$
- $d(a, b) = d(b, a) \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$. É a propiedade *simétrica*.
- $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \ \forall \ a, b, c \in \mathbb{R}$. É a propiedade da *desigualdade triangular*.

Exemplo 1.2

$$d(3, 8) = |8 - 3| = |5| = 5$$

$$d(-5, -1) = |-1 - (-5)| = |-1 + 5| = |4| = 4$$

1.6. Intervalos

Un **intervalo** é un conxunto de números reais que se poden representar graficamente cun segmento ou unha semirrecta na recta real.

No caso de que sexa un segmento, o intervalo vén determinado por dous extremos, e no caso de que sexa unha semirrecta só tén un extremo.

En función de se incluímos ou non os extremos, os intervalos poden ser abertos, pechados ou semiabertos.

Intervalo aberto

Intervalo aberto (a,b) é o conxunto de todos os números reais maiores que a e menores que b. Os extremos do intervalo non están incluídos.

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Intervalo pechado

Intervalo pechado $[a,b]$ é o conxunto de todos os números reais maiores ou iguais que a e menores ou iguais que b. Os extremos do intervalo si están incluídos.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Intervalo semiaberto

Intervalo semiaberto é aquel conxunto dos números reais no que si está incluído un dos extremos, pero o outro non. En función de cal dos extremos non estea incluído, reciben o nome de *intervalo semiaberto pola esquerda* ou *intervalo semiaberto pola dereita*.

Intervalo semiaberto pola esquerda

Intervalo semiaberto pola esquerda é o conxunto de todos os números reais maiores que a e menores ou iguais que b. Só se inclúe o extremo dereito.

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Intervalo semiaberto pola dereita

Intervalo semiaberto pola dereita é o conxunto de todos os números reais maiores ou iguais que a e menores que b. Só se inclúe o extremo esquerdo.

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Semirrectas

Unha *semirrecta* é o conxunto de todos os números reais que só teñen un extremo. Ao igual que sucede cos intervalos, clasifícanse en *abertas* ou *pechadas* dependendo de se inclúen ou non os extremos.

Semirrectas abertas

Unha semirrecta é *aberta* se non inclúe o extremo. Vexamos dous exemplos:

- $(a, +\infty)$ é o conxunto de todos os números reais maiores que a.

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

- $(-\infty, a)$ é o conxunto de todos os números reais menores que a.

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Semirrectas pechadas

Unha semirrecta é *pechada* se si inclúe o extremo. Vexamos dous exemplos:

- $[a, +\infty)$ é o conxunto de todos os números reais maiores ou iguais que a.

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

- $(-\infty, a]$ é o conxunto de todos os números reais menores ou iguais que a.

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

Tanto a representación dalgúns números como os intervalos ou semirrectas podémolos ver dun xeito máis interactivo no seguinte enlace: `https://www.geogebra.org/m/bw85KpRz`

1.7. Aproximación e erros

Todos os números reais teñen unha expresión decimal, que pode ser exacta, periódica ou ningunha das dúas, tal como vimos en apartados anteriores. Debido a isto, cando facemos cálculos con algúns deles, ás veces non podemos traballar co número exacto, senón con algunha aproximación, para simplificar as operacións. Existen dous tipos de aproximacións:

- Aproximación por defecto, tamén coñecida como aproximación por **truncamento**: consiste en eliminar as cifras a partir da orde considerada.
- Aproximación por **redondeo**: consiste en eliminar as cifras a partir da orde considerada, pero tendo en conta que se a primeira cifra eliminada é menor que 5, mantemos a última cifra conservada; e se a primeira cifra eliminada é maior ou igual que 5, aumentamos nunha unidade a última cifra conservada.

Erros

O **erro absoluto,** E_a, é a diferenza en valor absoluto entre o valor real e o valor aproximado.

$$E_a = |V_{real} - V_{aproximado}|$$

O **erro relativo,** E_r, é o cociente en valor absoluto entre o erro absoluto e o valor real.

$$E_r = \left| \frac{E_a}{V_{real}} \right|$$

Exemplo 1.3

Calcula os erros cometidos ao redondear 5,268 ás centésimas.

$$5{,}268 \approx 5{,}27 \text{ (redondeo ás centésimas).}$$

$$E_a = |5{,}268 - 5{,}27| = |-0{,}002| = 0{,}002$$

$$E_r = \left| \frac{0{,}002}{5{,}268} \right| = 0{,}0003797 = 3{,}797 \cdot 10^{-4}$$

1.8. Notación científica

A notación científica utílizase para representar dun modo máis sinxelo números moi grandes e números moi pequenos, para poder facer tamén cálculos dunha maneira máis doada con eles. Un número en notación científica vén dado da forma $N \cdot 10^n$, onde:

N: recibe o nome de *mantisa* e ademais é un número decimal exacto cunha soa cifra non decimal. Isto é $N \in [1, 10)$.

n: é a *orde de magnitude*. É un número enteiro, que é positivo se o número que expresamos en notación científica é moi grande en valor absoluto. En cambio, é negativo se o número é moi pequeno en valor absoluto. Para calcular o expoñente que hai que usar, cóntanse as cifras que ten o número desde a primeira cifra significativa, distinta de cero, ata as unidades sen contar esta (a variación da coma).

Exemplo 1.4

$$-5\ 783\ 460\ 000 = -5{,}783\ 46 \cdot 10^9$$

$$0{,}000\ 000\ 000\ 045 = 4,5 \cdot 10^{-11}$$

Operacións con números en notación científica

- Para **sumar** ou **restar** números en notación científica, han de ter a mesma orde de magnitude. No caso de que non a teñan, transformamos un deles. Unha vez que teñen a mesma orde, basta con operar as mantisas e deixar a mesma potencia. Por último debemos "*arranxar*" o número para que a mantisa cumpra as condicións que debe cumprir.

- Para **multiplicar** ou **dividir** números en notación científica, multiplícanse ou divídense por un lado as mantisas e por outro lado as potencias de 10. Neste caso tamén debemos "*arranxar*" o número para que a mantisa cumpra as condicións que debe cumprir.

Exemplo 1.5

$$9{,}8 \cdot 10^6 + 3{,}5 \cdot 10^5 = 98 \cdot 10^5 + 3{,}5 \cdot 10^5 = 101{,}5 \cdot 10^5 = 1{,}015 \cdot 10^7$$

$$(4{,}5 \cdot 10^9) : (9 \cdot 10^7) = (4{,}5 : 9) \cdot 10^{9-7} = 0{,}5 \cdot 10^2 = 5 \cdot 10^1 = 50$$

1.9. Radicais

Definición de raíz.

A raíz *n-ésima* dun número a é outro número b, tal que b elevado a n é a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

A raíz *n-ésima* é a operación inversa da potencia de expoñente n.

Cando calculamos a raíz *n-ésima* dun número, debemos ter en conta se o seu índice é par ou impar e o signo do radicando.

Radical

	Radicando	Índice	Nº de raíces reais
$\sqrt[n]{a}$	$a > 0$	n impar	1 raíz positiva
		n par	2 raíces: unha positiva e a súa oposta
	$a = 0$	n par ou impar	1 raíz $\sqrt[n]{0} = 0$
	$a < 0$	n impar	1 raíz negativa
		n par	Ningunha raíz en $\mathbb{R}$

Relación entre radicais e potencias de expoñente fraccionario

Un radical pódese expresar mediante unha potencia de expoñente fraccionario onde o índice coincide co denominador e a base e o numerador veñen dados polo radicando.

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$

Exemplo 1.6

$$\sqrt[5]{8} = 8^{\frac{1}{5}} \qquad \frac{1}{\sqrt[5]{2}} = 2^{-\frac{1}{5}}$$
$$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}} = 4^{-\frac{2}{3}}$$

Dise que dous radicais son **equivalentes** cando as fraccións dos expoñentes ao expresalos en forma de potencia son equivalentes e as bases son iguais. Por tanto se multiplicamos ou dividimos o expoñente do radicando e o índice polo mesmo número natural distinto de cero, obtemos radicais equivalentes.

Simplificación de radicais

Para simplificar un radical extráense todos os factores posibles da raíz. Para iso debemos descompoñer en factores primos o radicando. Só poderemos simplificar o radical no caso de que algún dos expoñentes da factorización sexa maior có índice do radical. Unha vez feita a factorización, e no caso dalgún expoñente que cumpra as condicións, dividímolo entre o índice. Fóra do radical escribimos o factor elevado ao cociente e dentro do radical deixamos o factor elevado ao resto da división.

Exemplo 1.7

$$\sqrt{200} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2} = 2^1 \cdot 5^1 \cdot \sqrt{2^1 \cdot 5^0} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$
$$\sqrt[3]{4000} = \sqrt[3]{2^5 \cdot 5^3} = 2^1 \cdot 5^1 \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 5^0} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 10\sqrt[3]{4}$$

Introdución de factores nun radical

Para introducir factores dentro dun radical basta con introducilos elevados ao índice do radical.

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Redución de radicais a común índice

Reducir radicais a común índice consiste en atopar radicais equivalentes que teñan o mesmo índice.

Para facelo podemos traballar coa forma exponencial das raíces e reducir a común denominador os seus expoñentes, sen embargo é máis rápido facendo os seguintes pasos (na práctica):

1. Atopamos un múltiplo común aos índices dos radicais. Normalmente será o m.c.m. deles, pero pode ser un múltiplo maior. O múltiplo atopado será o índice común.

2. Como este novo índice é múltiplo de todos os anteriores podémolo dividir por cada un deles. Efectivamente, agora é o que hai que facer; dividir o índice común entre cada índice e multiplicar o resultado por cada expoñente.

Exemplo 1.8

$$\sqrt{3} \quad \sqrt[3]{2^2} \quad \sqrt[4]{2\cdot 3^2}$$
$$m.c.m.(2,3,4) = 12$$

Temos por tanto que:

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6}$$

$$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{(2^2)^4} = \sqrt[12]{2^8}$$

$$\sqrt[4]{2\cdot 3^2} = \sqrt[12]{2^3\cdot(3^2)^3} = \sqrt[12]{2^3\cdot 3^6}$$

Suma e resta de radicais

Dicimos que dous radicais son **semellantes** se unha vez simplificados teñen o mesmo radicando e o mesmo índice, aínda que teñan distinto coeficiente.

$\sqrt{2}$ e $\sqrt{18}$ son semellantes entre eles porque $\sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

Dous radicais que non son semellantes non poden sumarse se non é obtendo as súas expresións decimais aproximadas. Só poden sumarse radicais semellantes.

Por exemplo, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ou $\sqrt{5}+\sqrt[3]{5}$ só poden realizarse de forma aproximada ou deixándoas indicadas.

Para sumar ou restar radicais equivalentes, previamente debemos transformalos en radicais semellantes. Unha vez que temos feito isto, basta con sacar factor común o radical e operar cos coeficientes:

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

Exemplo 1.9

$$5\sqrt{3}+2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-6\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4}-\sqrt{18}+\sqrt{72} = \sqrt{2}-\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3\cdot 3^2} = \sqrt{2}-3\sqrt{2}+6\sqrt{2} = 4\sqrt{2} = \sqrt{2\cdot 4^2} = \sqrt{32}$$

Propiedades dos radicais

Produto e cociente de radicais

Para multiplicar ou dividir radicais cómpre que teñan o mesmo índice. En caso de que non o teñan, pódese conseguir reducindo a común índice. Tendo en conta isto, imos ver dúas propiedades relacionadas co produto e o cociente de radicais.

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$

   Esta propiedade ten as seguintes aplicacións:

   - Xuntar varios radicais nun só.
   - Efectuar a multiplicación.
   - Sacar un factor fóra da raíz.

2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

   Esta propiedade, ademais de permitirnos efectuar o cociente de raíces, ás veces axúdanos tamén á simplificación de radicais.

Exemplo 1.10

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 18} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{3^3\cdot 2^4} = \sqrt[6]{432}$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Potencias e raíces de radicais

3. $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

   Xa vimos a utilidade desta propiedade para simplificar radicais e para reducir a índice común.

4. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Exemplo 1.11

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$$

$$(\sqrt[3]{12})^2 = \sqrt[3]{12^2} = \sqrt[3]{(2^2\cdot 3)^2} = \sqrt[3]{2^4\cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2\cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}} = \sqrt[2\cdot 3\cdot 5]{2} = \sqrt[30]{2}$$

Racionalización de denominadores

Ás veces convén suprimir os radicais que hai nun denominador. Para iso, debemos multiplicar a fracción por unha expresión que faga que o denominador se transforme nun número ou expresión sen radicais. Este proceso recibe o nome de **racionalización** de denominadores.

Vexamos os procedementos para eliminar as raíces do denominador nos casos que se repiten máis a miúdo:

- No denominador só hai unha raíz cadrada.

  Para quitar os radicais dos denominadores en fraccións do tipo $\dfrac{a}{b\cdot\sqrt{c}}$, multiplicamos numerador e denominador pola mesma raíz.

$$\frac{a}{b\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

- No denominador só hai unha raíz n-ésima. Para quitar os radicais dos denominadores en fraccións do tipo $\dfrac{a}{b\cdot\sqrt[n]{c^p}}$, multiplicamos numerador e denominador pola raíz que completa a raíz n-ésima ou sexa por $\sqrt[n]{c^{n-p}}$.

$$\frac{a}{b\cdot\sqrt[n]{c^p}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-p}}}{b\cdot\sqrt[n]{c^p}\cdot\sqrt[n]{c^{n-p}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-p}}}{b\cdot c}$$

- No denominador hai unha suma ou unha resta de raíces cadradas.

  Para quitar os radicais dos denominadores en fraccións do tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$, multiplicamos numerador e denominador polo conxugado (igual có denominador pero co signo central cambiado) de dito denominador $\sqrt{b}\mp\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}=\frac{a\cdot(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})\cdot(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}=\frac{a\cdot(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}$$

  Cómpre recordar que: "Suma por diferenza" é igual a "diferenza de cadrados"; por tanto, neste caso $(\sqrt{b}+\sqrt{c})\cdot(\sqrt{b}-\sqrt{c})=(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2=b-c$.

Exemplo 1.12

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{8}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}=\frac{1\cdot\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}}=\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{\sqrt[5]{2^2}}{2}$$

$$\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{8\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{8\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\frac{8\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=4\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

1.10. Logaritmos

Se $a>0$ e $a\neq 1$, chámase **logaritmo en base *a*** de P, e designase por $\log_a P$, o expoñente ao que hai que elevar a base a para obter P.

$$\log_a P=b\Leftrightarrow a^b=P$$

Exemplo 1.13

Por exemplo:

$\log_2 8=3$ porque $2^3=8$ $\qquad$ $\log_2\dfrac{1}{16}=-4$ porque $2^{-4}=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$

$\log_3 81=4$ porque $3^4=81$ $\qquad$ $\log_3\dfrac{1}{9}=-2$ porque $3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

$\log_5 25=2$ porque $5^2=25$ $\qquad$ $\log_5\dfrac{1}{125}=-3$ porque $5^{-3}=\dfrac{1}{5^3}=\dfrac{1}{125}$

Exercicio resolto 1.1

Calcula o valor de x nas seguintes igualades:

$$\log_3(x-2) = 5; \qquad \log_{x-1} 125 = 3$$

Resolución

Tendo en conta a definición:

- $\log_3(x-2) = 5 \Leftrightarrow x - 2 = 3^5$
  Polo que basta resolver $x - 2 = 243$, e temos por solución $x = 245$

- $\log_{x-1} 125 = 3 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 125$
  Polo que basta resolver $x - 1 = 5$, e temos por solución $x = 6$

Propiedades dos logaritmos

Antes de enumerar as propiedades teñamos en conta os seguintes logaritmos: $\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$ e $\log_a Q = y \Leftrightarrow a^y = Q$

1. O **logaritmo da base** é 1:

$$\log_a a = 1 \text{ porque } a^1 = a$$

2. O **logaritmo de 1** é 0, calquera que sexa a base:

$$\log_a 1 = 0 \text{ porque } a^0 = 1$$

3. O **logaritmo dun produto** é igual á suma dos logaritmos dos factores:

$$\log_a(P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

   Isto demóstrase:

$$\log_a(P \cdot Q) = \log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a(a^{x+y}) = x + y = \log_a P + \log_a Q$$

4. O **logaritmo dun cociente** é igual á diferenza dos logaritmos dos factores:

$$\log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$$

   Isto demóstrase:

$$\log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = \log_a(a^{x-y}) = x - y = \log_a P - \log_a Q$$

5. O **logaritmo dunha potencia** é igual ao produto do expoñente polo logaritmo da base da potencia:

$$\log_a P^n = n \log_a P$$

Isto demóstrase:

$$\log_a P^n = \log_a(P \cdot ... \cdot P) = \log_a P + ... + \log_a P = n \log_a P$$

Ou ben

$$\log_a P^n = \log_a(a^x)^n = \log_a a^{nx} = nx = n \cdot \log_a P$$

6. O **logaritmo dunha raíz** é igual ao logaritmo do radicando dividido polo índice:

$$\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$$

Isto demóstrase:

$$\log_a \sqrt[n]{P} = \log_a P^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a P = \frac{\log_a P}{n}$$

Ou ben

$$\log_a \sqrt[n]{P} = \log_a \sqrt[n]{a^x} = \log_a a^{\frac{x}{n}} = \frac{x}{n} = \frac{\log_a P}{n}$$

7. **Cambio de base de logaritmos.** O logaritmo en base a dun número pódese obter a partir de logaritmos noutra base:

$$\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}$$

Logaritmos decimais

Os logaritmos en base 10 chámanse **logaritmos decimais**, e neste caso a base non se escribe. Temos por tanto que para designar un logaritmo decimal usamos simplemente log. Obtemos así o seguinte:

$$\log b = c \Leftrightarrow 10^c = b$$

Logaritmos neperianos

Anteriormente vimos o número e como outro número irracional. Este número tamén posúe gran trascendencia nos logaritmos. Os logaritmos que teñen como base o número e chámanse **logaritmos neperianos** e desígnanse mediante ln. Obtemos así o seguinte:

$$\ln b = c \Leftrightarrow e^c = b$$

Tanto os logaritmos decimais coma os logaritmos neperianos son moi útiles para o cálculo dos demais logaritmos a partir das propiedades antes expostas, en especial, o cambio de base. Pois permítenos, coa axuda da calculadora, calcular calquera logaritmo.

Exemplo 1.14

Por exemplo:

$$\log_5 500 = \frac{\log 500}{\log 5} = \frac{\log(5 \cdot 100)}{\log 5} = \frac{\log 5 + \log 100}{\log 5} = 1 + \frac{2}{\log 5}$$

Se sabemos que $\log 5 = 0,698\,97$ obtemos facilmente que

$$\log_5 500 = 1 + \frac{2}{\log 5} = 1 + \frac{2}{0{,}698\,97} = 3,861\,35$$

Exercicio resolto 1.2

Usando logaritmos decimais e a calculadora, calcula os seguintes logaritmos:

$$\log_2 3000;\ \log_\pi \frac{1}{2};\ \ln 100;\ \log_5 500$$

Resolución

Coa fórmula do cambio de base obtense que:

$$\log_2 3000 = \frac{\log 3000}{\log 2} = \frac{3{,}477\,1}{0{,}301} = 11{,}550\,7$$

$$\log_\pi \frac{1}{2} = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \pi} = \frac{-0{,}301}{0{,}497\,1} = 0{,}605\,5$$

$$\ln 100 = \frac{\log 100}{\log e} = \frac{2}{0{,}434\,2} = 4{,}605\,1$$

$$\log_5 500 = \frac{\log 500}{\log 5} = \frac{2{,}698\,97}{0{,}698\,97} = 3,861\,35$$

1.11. Exercicios

Números racionais e irracionais

1. Clasifica estes números segundo o tipo ao que pertencen:

$$\begin{array}{cccc} 0,\widehat{7} & -8 & 43,00\widehat{94} & \sqrt{36} \\ -0,0304 & 42 & -32,35 & \sqrt[3]{-8} \end{array}$$

2. Di que tipo de número representan as seguintes fraccións sen calcular o número decimal que representan:

$$\frac{8}{18} \quad \frac{8}{25} \quad \frac{38}{24} \quad \frac{27}{21} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{-15}{5}$$

3. Expresa en forma de fracción e simplifica sempre que poidas:

$$\begin{array}{ccc} 4,25 & 5,\widehat{09} & 3,2\widehat{56} \\ -1,0\widehat{304} & 3,14159... & 1,83333... \end{array}$$

Sol: $\frac{17}{4}$, $\frac{56}{11}$, $\frac{1612}{495}$, $-\frac{5147}{4995}$, *non se pode e* $\frac{11}{6}$

4. Escribe 4 números irracionais, especificando a súa regra de formación.

Valor absoluto

5. Obtén o valor absoluto dos números:

$$7 \quad 0 \quad -1 \quad -6^2 \quad (-4)^2 \quad -3^3$$

6. Representa sobre a recta real os seguintes números:

$$-\frac{3}{4} \quad \frac{2}{5} \quad -\frac{20}{3} \quad \frac{13}{4}$$

Intervalos

7. Expresa como desigualdade e como intervalo, e represéntaos:

   a) x é menor ca -5.
   b) 3 é menor ou igual ca x.
   c) x está comprendido entre -5 e 1.
   d) x está entre -2 e 0, ámbolos dous incluídos.

Sol: a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\} = (-\infty, -5]$,
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x\} = [3, +\infty)$,
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 1\} = (-5, 1)$,
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0\} = [-2, 0]$

8. Representa graficamente e expresa como intervalos estas desigualdades:

   a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < \frac{5}{2}\}$
   e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x\}$
   f) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}$

Sol: a) $[-3, 2]$, b) $(5, +\infty)$, c) $[-3, +\infty)$,
d) $[1, \frac{5}{2})$, e) $[\sqrt{2}, +\infty)$, f) $(-2, 2)$

Aproximación e erros

9. Coa axuda da calculadora, escribe $\sqrt{7}$ en forma decimal e as súas aproximacións por truncamento e por redondeo.

   a) Ás dezmilésimas.
   b) Ás cenmilésimas.
   c) Ás millonésimas.

10. Analiza en cal destas ofertas che fan maior desconto se o prezo que figura na etiqueta é o mesmo:

   - Oferta A : Compre 5 e regalámoslle 1 .
   - Oferta B : Compre 5 e pague 4.

Notación científica

11. Efectúa, realizando paso a paso, e dá o resultado en notación científica con tres cifras significativas:

   a) $\dfrac{(3{,}12 \cdot 10^{-5} + 7{,}03 \cdot 10^{-4}) \cdot 8{,}3 \cdot 10^{8}}{4{,}32 \cdot 10^{3}}$
   b) $\dfrac{(12{,}5 \cdot 10^{7} - 8 \cdot 10^{9})(3{,}5 \cdot 10^{-5} + 1{,}5 \cdot 10^{-8})}{9{,}2 \cdot 10^{6}}$
   c) $\dfrac{5{,}431 \cdot 10^{3} - 6{,}51 \cdot 10^{4} + 385 \cdot 10^{2}}{8{,}2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

Sol: a) $1{,}41 \cdot 10^{2}$, b) $-2{,}99 \cdot 10^{-2}$ e c) $-2{,}64 \cdot 10^{6}$

12. Efectúa sen axuda da calculadora, razonando todos os pasos:

$$\frac{2\cdot 10^{-7}-3\cdot 10^{-5}}{4\cdot 10^{6}+10^{5}}$$

Sol: $-7{,}27\cdot 10^{-12}$

Radicais

13. Simplifica os seguintes radicais:

a) $\sqrt[4]{27216}$

b) $\sqrt[4]{(4a^3)^3\cdot(2a^2)^2}$

Sol: a) $6\sqrt[4]{21}$ *e b)* $4a^3\sqrt[4]{a}$

14. Calcula:

$$4\sqrt{12}-\sqrt{\frac{3}{16}}$$

Sol: $\frac{31}{4}\sqrt{3}$

15. Reduce a índice común:

a) $\sqrt[12]{a^5}$ e $\sqrt[18]{a^7}$ b) $\sqrt[9]{132650}$ e $\sqrt[3]{51}$

Sol: a) $\sqrt[36]{a^{15}}$ *e* $\sqrt[36]{a^{14}}$, *b)* $\sqrt[9]{132650}$ *e* $\sqrt[9]{132651}$

16. Cal é maior, $\sqrt[4]{31}$ ou $\sqrt[3]{13}$?

Sol: $\sqrt[4]{31}$

17. Reduce:

a) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}})^8$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ c) $\sqrt[6]{(\sqrt{x})^3}$

Sol: a) k, *b)* $\sqrt[3]{x^2}$ *e c)* $\sqrt[4]{x}$

18. Reduce:

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$ d) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4}$

Sol: a) $\sqrt[15]{2^8}$, *b)* $\sqrt[6]{243}$, *c)* $\sqrt[8]{2^7}$ *e d)* $2\sqrt[12]{32}$

19. Suma e simplifica:

a) $5\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}$

b) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}+\sqrt{8}$

c) $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}$

d) $\sqrt[3]{2000}+5\sqrt[3]{3456}-2\sqrt[3]{1458}$

Sol: a) $10\sqrt{x}$, *b)* $9\sqrt{2}$, *c)* $5\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ *e d)* $52\sqrt[3]{2}$

20. Efectúa e simplifica:

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{9}+\sqrt{8})^2\cdot\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

d) $(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)$

Sol: a) $4\sqrt{6}$, *b)* $24+17\sqrt{2}$, *c)* 1 *e d)* 2

21. Racionaliza:

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$

Sol: a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, *b)* $\frac{6+\sqrt{6}}{6}$, *c)* $-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ *e d)* $\sqrt{7}+2$

22. Efectúa e simplifica:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Sol: a) $\sqrt{3}+5\sqrt{2}$ *e b)* $-2\sqrt{35}$

Logaritmos

23. Calcula os seguintes logaritmos:

a) $\log_3 243$ b) $\log_9 81$

c) $\log_7 343$ d) $\log_2 8$

e) $\log_3 9$ f) $\log_2\dfrac{1}{32}$

g) $\log_4\dfrac{1}{256}$ h) $\log_3\dfrac{1}{27}$

Sol: a) 5; b) 2; c) 3; d) 3, e) 2; f) −5; g) −4; h) −3

24. Determina o valor de x nestas expresións aplicando as propiedades dos logaritmos

   a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$
   b) $\log x = \log 36 - \log 9$
   c) $\ln x = 4\ln 3$
   d) $\log x = \log 12 + \log 25 - 3\log 4$
   e) $\ln x = 4\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 25$

Sol: a) 221; *b)* 4; *c)* 81; *d)* $\frac{75}{16}$, *e)* $\frac{16}{5}$

25. Sabendo que $\log k = 14,4$, calcula o valor das seguintes expresións:

   a) $\log \frac{k}{100}$ b) $\log 0{,}1k^2$

   c) $\log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ d) $(\log k)^{1/2}$

Sol: a) 12,4; *b)* 27,8; *c)* $-4{,}8$; *d)* 3,795

26. Sabendo que $\ln k = 0{,}45$, calcula o valor de:

   a) $\ln \frac{k}{e}$ b) $\ln \sqrt[3]{k}$ c) $\ln \frac{e^2}{k}$

Sol: a) $-0{,}55$; *b)* 0,15; *c)* 1,55

27. Se $\log k = x$, escribe en función de x:

   a) $\log k^2$ b) $\log \frac{k}{100}$ c) $\log \sqrt{10k}$

Sol: a) $2x$; *b)* $x-2$; *c)* $\frac{1+x}{2}$

28. Que relación existe entre a e b nos seguintes casos:

   a) $\log a = 1 + \log b$ b) $\log a + \log \frac{1}{b} = 0$

Sol: a) $a = 10b$; *b)* $a = b$

29. Aplica a definición de logaritmo e obtén x:

   a) $\log_3 x = -\frac{1}{4}$
   b) $\ln \frac{x}{3} = -1$
   c) $\log_x 125 = 3$

Sol: a) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; *b)* $\frac{3}{e}$; *c)* 5

30. Aplica as propiedades dos logaritmos e indica A.

$$\log A = 2\log 3 + 0,5\log 4 - 3\log 2$$

Sol: $\frac{9}{4}$

31. Sabendo que $\log 5 = 0{,}699$, e aplicando as propiedades calcula:

   a) $\log 25$
   b) $\log 125$
   c) $\log 625$
   d) $\log \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$
   e) $\log(0{,}2)^2$

Sol: a) 1,398; *b)* 2,097; *c)* 2,796; *d)* $-0{,}17475$, *e)* $-1{,}398$

32. Opera aplicando as propiedades:

   a) $\log_3 7 \cdot \log_7 3$
   b) $\log e^2 \cdot \ln 10$
   c) $\log e^3 \cdot \ln 10000$
   d) $\log_a \sqrt[3]{b} \cdot \log_b a^9$

Sol: a) 1; *b)* 2; *c)* 12; *d)* 3

Unidade 2

MATEMÁTICA FINANCEIRA

2.1. Introducción

Dende o século XIV, os italianos coñecían as regras máis sinxelas da contabilidade, pero hai que agardar a **Luca Pacioli** (finais do século XV) para que un matemático se preocupe de engadir á súa aritmética un tratado sobre problemas comerciais. Deste xeito sentáronse as bases da **aritmética finaceira**: a repartición de beneficios, o cálculo de perdas, o intercambio de moedas, etc. Estes eran problemas que se podían resolver aplicando convenientemente un pensamento proporcional.

E xa no século XVI, o maior desenvolvemento das actividades bancarias e comerciais pedían unha mellor aritmética. A resposta a estes intereses faise evidente no *Tratado xeral de números e medidas* de **Tartaglia**, que contén unha gran cantidade de problemas de aritmética mercantil.

2.2. Coñecementos previos

Lembremos, por velo en cursos anteriores, que para calcular unha porcentaxe é moito máis cómodo expresala en número decimal e traballar con ela. Ese número recibe o nome de **índice de variación**.

Ademais, algunhas veces dannos a cantidade inicial á que lle debemos aplicar a procentaxe e temos que calcular a cantidade final, pero outras veces é ao revés, e temos que calcular a cantidade inicial a partir da cantidade inicial.

Para iso temos en conta o seguinte:

- **Coñecendo a cantidade inicial**

  Este caso é o máis sinxelo. Se chamamos C_i á cantidade inicial e C_f á cantidade final basta aplicar o seguinte:

  $$C_i \cdot \text{índice de variación} = C_f$$

- **Coñecendo a cantidade final**

  Este caso redúcese a unha multiplicación na que descoñecemos un dos factores polo que aplicando o mesmo que antes poderiamos obter a cantidade inicial. Porén, podemos poñer a operación que debemos efectuar directamente. Temos entón as dúas seguintes opcións:

  $$C_i \cdot \text{índice de variación} = C_f$$
  $$C_f = C_i : \text{índice de variación}$$

2.3. Aumentos e disminucións porcentuais

Nos problemas de aumentos e disminucións porcentuais pártese dunha cantidade inicial, que como vimos antes denotaremos por C_i, que debe incrementarse ou diminuirse nunha porcentaxe que denotamos por r.

- **Aumentos porcentuais**

  Se se quere aumentar un $r\,\%$, temos que a cantidade final será o $(100+r)\,\%$ da cantidade inicial. Será moi cómodo neste momento, como vimos anteriormente, utilizar o número decimal asociado a esa porcentaxe, xa ben sexa directamente ou o número decimal asociado á r. Aínda así, existe unha fórmula derivada dese razoamento que é a seguinte:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

  Todas esas formas son igual de válidas á hora de traballar cos aumentos porcentuais. Vexámolo máis claro cun exemplo.

Exemplo 2.1

Se unha cantidade C_i aumenta o $15\,\%$ temos as diferentes opcións.

- Como aumenta o $15\,\%$, sabemos que a cantidade final representa un $115\,\%$ da cantidade inicial. Como o índice de variación correspondente é 1,15 realizaremos o seguinte:

$$C_f = C_i \cdot 1{,}15$$

- Como aumenta o $15\,\%$, sabemos que o seu índice de variación é dun 0,15, que sumamos ao 1 que expresa o $100\,\%$ inicial e realizamos o seguinte:

$$C_f = C_i \cdot (1 + 0{,}15)$$

- Como o aumento é $r = 15\,\%$, se aplicamos a fórmula temos que :

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)$$

- **Diminucións porcentuais**

  En cambio, se o que se quere é diminuir un $r\,\%$, temos que a cantidade final será o $(100-r)\,\%$ da cantidade inicial. Tamén será moi cómodo neste momento, como vimos anteriormente, utilizar o número decimal asociado a esa porcentaxe, xa ben sexa directamente ou o número decimal asociado á r. Aínda así, existe unha fórmula derivada dese razoamento que é a seguinte:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$$

  Todas esas formas son igual de válidas á hora de traballar coas diminucións porcentuais. Vexámolo tamén con un exemplo.

Exemplo 2.2

Se unha cantidade C_i diminúe o 20 % temos as diferentes opcións.

- Como diminúe un 20 %, sabemos que a cantidade final representa un 80 % da cantidade inicial. Como o índice de variación correspondente é 0,8 realizaremos o seguinte:

$$C_f = C_i \cdot 0{,}80$$

- Como diminúe un 20 %, sabemos que o seu índice de variación é dun 0,20, que restamos ao 1 que expresa o 100 % inicial e realizamos o seguinte:

$$C_f = C_i \cdot (1 - 0{,}20)$$

- Como a diminución é $r = 20\,\%$, se aplicamos a fórmula temos que :

$$C_f = C_i \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)$$

Aumentos ou diminucións encadeados

Para calcular **aumentos ou diminucións encadeados**, trabállase cos índices de variación correspondentes aos distintos pasos e multiplícanse. Obténse así o **índice de variación global**.

Exemplo 2.3

Se unha cantidade C_i aumenta primeiro o 20 %, diminúe despois un 20 %, volve a subir, agora un 10 % e por última baixa un 25 %. Temos aquí as diferentes opcións.

- Calculamos as porcentaxes que representa cada paso, sendo neste caso as seguintes: 120 %, 80 %, 110 % e 75 %. Os seus índices de variación son: 1,20; 0,80; 1,10 e 0,75. Temos por tanto que

$$C_f = C_i \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}80 \cdot 1{,}10 \cdot 0{,}75 = C_i \cdot 0{,}792$$

- Indicamos o índice de variación asociada a cada variación e multiplicamos

$$C_f = C_i \cdot (1 + 0{,}20) \cdot (1 - 0{,}20) \cdot (1 + 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}25) = C_i \cdot 0{,}792$$

Temos que o **índice de variación global é** 0,792

Cálculo da variación porcentual

Tanto se obtemos o índice de variación global a partir de aumentos e diminucións encadeados, como se o obtemos coñecendo as cantidades iniciais e finais podemos indicar sempre que tipo de variación porcentual lle corresponde a ese índice. Para iso, se o índice é maior ca 1 saberemos que corresponde a un aumento porcentual. En cambio se o índice de variación é menor ca 1 temos unha diminución porcentual.

Unha vez determinado o tipo de variación, debemos indicar a porcentaxe, $r\,\%$ de variación. Para iso, debemos pasar o índice a porcentaxe e indicar o que pasa do 100 % (aumentos) ou lle falta (diminucións). Aínda que tamén se podería facer, indicando o índice de variación que pasa ou sobra do 1 e pasalo despois a porcentaxe.

Exemplo 2.4

No exemplo anterior, temos que o índice de variación global é 0,792. Deducimos rapidamente que se trata dunha diminución porcentual. Vexamos a porcentaxe de diminución:

- Un índice de variación dun 0,792 equivale a unha porcentaxe do 79,20 %. Vemos que lle falta para o 100 %, unha porcentaxe do 20,80 %.
- Se restamos 1 menos o índice de variación, obtemos un índice de variación dun 0,208 que equivale a un 20,80 %.

Temos entón que se trata dunha diminución porcentual dun 20,80 %.

2.4. Xuros bancarios

Como todos sabemos, as entidades bancarias (financeiras) non garda, especificamente, o diñeiro de cada un dos seus clientes, senón que negocian e operan con el. Como consecuencia, páganlle ao seu cliente por depositalo alí. O que se gaña polo diñeiro depositado nunha entidade financeira son os **xuros**.

Ditas entidades tamén prestan cartos, e nese caso, **cobran xuros**. Naturalmente, cobran máis do que pagan. Ese é o negocio dese tipo de entidades.

Cando, na linguaxe coloquial, usamos expresións como un 4 % de xuros, en realidade estámonos referindo ao rédito. O rédito é unha porcentaxe, mentres que o xuro é unha cantidade.

Existen dous tipos principais de xuros, simple e composto.

Xuro simple

O **tanto por cento anual** que un banco paga aos seus clientes polo diñeiro depositado denomínase **rédito, r**.

Invertir un capital inicial a un **xuro simple** do $r\,\%$ anual, consiste un xuro do $r\,\%$ do capital inicial por cada ano que se teña invertido, sen reinvertir os beneficios obtidos ao final de cada ano.

Normalmente os xuros páganse anualmente, polo que se invertimos un capital inicial C_i a un rédito $r\,\%$ anual, o xuro producido nese ano sería o $r\,\%$ do C_i, $I = \dfrac{C_i \cdot r}{100}$. Se obtemos ese xuro durante un período de tempo t (en anos), entón o xuro sería $I = \dfrac{C_i \cdot r \cdot t}{100}$

As fórmulas que proporcionan o xuro e o capital final usando o rédito r ou o tanto por un i son:

$$I = \frac{C_i \cdot r \cdot t}{100}$$

$$C_f = C_i + I = C_i + \frac{C_i \cdot r \cdot t}{100} = Ci \cdot \left(1 + \frac{r \cdot t}{100}\right) = C_i \cdot (1 + i \cdot t)$$

Distintos períodos de tempo

Se o tempo que se desposita o diñero non é un ano, cóbrase a parte proporcional do xuro anual. Se p é o número de períodos que ten un ano, o rédito aplicable en cada intre é $r' = \dfrac{r}{p}$. Así temos algúns casos como os seguintes:

- Se o tempo está en meses, teríamos que o rédito co que temos que traballar sería $r'\,\% = \dfrac{r}{12}\,\%$. Neste caso a redución das fórmulas anteriores lévanos a:

$$I = \frac{C_i \cdot r' \cdot t}{100} = \frac{C_i \cdot \frac{r}{12} \cdot t}{100} = \frac{C_i \cdot r \cdot t}{1200}$$

$$C_f = C_i + I = C_i + \frac{C_i \cdot r' \cdot t}{100} = Ci \cdot \left(1 + \frac{r' \cdot t}{100}\right) = C_i \cdot (1 + i' \cdot t)$$

- Se o tempo está en días, teríamos que o rédito co que temos que traballar sería $r'\,\% = \frac{r}{365}\,\%$. Temos que ter en conta que ás veces considérase un ano como a suma de doce meses iguais de 30 días, polo que podería darse o caso de dividir entres 360 en lugar de 365. No caso de 365 días, a redución das fórmulas lévanos a:

$$I = \frac{C_i \cdot r' \cdot t}{100} = \frac{C_i \cdot \frac{r}{365} \cdot t}{100} = \frac{C_i \cdot r \cdot t}{36500}$$

$$C_f = C_i + I = C_i + \frac{C_i \cdot r' \cdot t}{100} = Ci \cdot \left(1 + \frac{r' \cdot t}{100}\right) = C_i \cdot (1 + i' \cdot t)$$

Exercicio resolto 2.1

Unha entidade financeira ofrece un depósito no que os xuros aboánse anualmente nunha conta distinta á do depósito. Se o depósito ofrece o 5 % anual e se invisten 12 000 €m canto diñeiro se retirará ao final do quinto ano?
Resolución
Como os beneficios de cada ano non se reinvirten, temos que se trata dun xuro simple.
O capital final podese calcular usándo calquera das fórmulas anteriores, pero neste caso imos utilizar a do tanto por un. Que r sexa igual a 5, implica que $i = 0{,}05$. Por tanto, o capital ao final do período é:

$$C_f = 12\,000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 5) = 12\,000 \cdot 1{,}25 = 12\,500$$

Retiraranse 12 500 €, obtendo así uns xuros de 2500 €.

Exercicio resolto 2.2

Unha entidade financeira ofrece un depósito no que os xuros aboánse anualmente nunha conta distinta á do depósito. En 5 anos, recibironse 2500 € de xuros para un capital inicial de 10 000 €. Cal é o rédito que ofrece o banco neste depósito?
Resolución
Como os beneficios de cada ano non se reinvirten, temos que se trata dun xuro simple. Aquí podemos ter en conta nada máis que os intereses ou traballar coa cantidade final. Imos traballar, neste caso, só cos intereses, na que traballamos co rédito directamente.

$$2500 = \frac{10\,000 \cdot r \cdot 5}{100} \Rightarrow r = \frac{2500 \cdot 100}{10\,000 \cdot 5} = 5$$

Logo o rédito é do 5 %.

Xuro composto

Os bancos, na meirande parte das veces, non aplican un tipo de xuro simple, senón que aplican un **xuro composto**. A diferencia entre o simple o composto reside no feito de que no xuro composto os xuros vanse acumulando áo capital inicial e vai xerando novos xuros.

Como o xuro composto produce un aumento porcentual poderiamolo facer directamente tendo en conta que serían varios aumentos porcentuais encadeados. Por iso, basta con ter en conta o que vimos ao principio da unidade.

Aínda así, podemos velo mediante as fórmula seguintes:

$$C_f = C_i \cdot \left(\frac{100 + r}{100}\right)^t = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = C_i \cdot (1 + i)^t$$

Distintos períodos de tempo

Dun xeito similar ao que vimos no xuro simple, o tempo de abono de intereses pode non ser un ano, e aí aplícase a parte proporcional do xuro anual. Se p é o número de períodos que ten un ano nos que se abonan os xuros, o rédito aplicable en cada intre é $r' = \frac{r}{p}$. Eses períodos, que son equivalentes ao tempor que o banco deixa transcorrer para que un capital produza intereses denomínsase período de capitalización. Así temos algúns casos como os seguintes:

- Con período de **capitalización mensual**. O rédito aplicable nese período de capitalización (no caso de que nolo dean anual) sería $r' = \frac{r}{12}$.

  Nese caso o capital final, ao pasar t meses é o seguinte:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r'}{100}\right)^t = C_i \cdot \left(1 + \frac{r/12}{100}\right)^t = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^t$$

- Con período de **capitalización diario**. O rédito aplicable nese período de capitalización (no caso de que nolo dean anual) sería $r' = \frac{r}{365}$ (ou $r' = \frac{r}{360}$).

  Nese caso o capital final, ao pasar t días é o seguinte:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r'}{100}\right)^t = C_i \cdot \left(1 + \frac{r/365}{100}\right)^t = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{36500}\right)^t$$

Independentemente do período de capitalización aplicado, temos que neste tipo de problemas non sempre temos que coñecer o capital final, podendo ter que averiguar o capital inicial, o rédito aplicado ou incluso o tempo.

De todos os casos, quizais o máis complexo sexa o de calcular o tempo. Para este caso teremos que usar a definición de logaritmo, pois o que descoñecemos á hora de substituir será un expoñente. Aínda así, se introducimos o mesmo logaritmo a cada parte da igualdade e aplicando as propiedades dos logaritmos tamén podemos obter ese valor buscado.

Veremos agora catro exercicios resoltos cos mesmo datos nos que en cada un deles averiguaremos o valor descoñecido.

Exercicio resolto 2.3

Unha entidade financeira propón un depósito a xuro composto.
O depósito ofrece un 3,5 % anual para un investimento de 7 500 €, canto diñeiro se percibirá aos 3 anos?

Resolución

Como se trata dun aumento porcentual poderíamos ter que a cantidade inicial se vai multiplicar por 1,035 tres veces. E teriamos así que:

$$C_f = 7\,500 \cdot (1{,}035)^3 = 8\,315{,}38$$

Se utilizasemos as fórmulas teríamos que:

$$C_f = 7\,500 \cdot \left(1 + \frac{3{,}5}{100}\right)^3 = 7\,500 \cdot (1 + 0{,}035)^3 = 8\,315{,}38$$

Recibiremos 8 315,38 €.

Exercicio resolto 2.4

Unha entidade financeira propón un depósito a xuro composto.
Que capital habería que investir inicialmente se queremos ter 8 315,38 € dentro de 3 anos ao 3,5 % anual?

Resolución

Como se trata dun aumento porcentual poderíamos ter que a cantidade inicial se vai multiplicar por 1,035 tres veces. E teriamos así que:

$$8\,315{,}38 = C_i \cdot (1{,}035)^3 \Rightarrow C_i = \frac{8\,315{,}38}{(1{,}035)^3} = 7\,500$$

O mesmo obteriamos se utilizasemos as fórmulas, xa ben sexa co rédito ou o tanto por un asociado.

$$8\,315{,}38 = C_i \cdot \left(1 + \frac{3{,}5}{100}\right)^3 = C_i \cdot (1{,}035)^3 \Rightarrow C_i = \frac{8\,315{,}38}{(1{,}035)^3} = 7\,500$$

Teriamos que investir 7 500 €.

Exercicio resolto 2.5

Unha entidade financeira propón un depósito a xuro composto.
Se investimos 7 500 € e obtemos 8 315,38 € en 3 anos, cal é o rédito?

Resolución

Como se trata dun aumento porcentual poderíamos ter que a cantidade inicial se vai multiplicar por un índice que descoñecemos tres veces. Se chamamos a ese índice i teriamos que:

$$8\,315{,}38 = 7\,500 \cdot i^3 \Rightarrow \frac{8\,315{,}38}{7\,500} = i^3 \Rightarrow i = \sqrt[3]{\frac{8\,315{,}38}{7\,500}} = 1{,}035$$

Por ser ese índice $i = 1{,}035$, obtemos inmediatamente que o rédito é $r = 3{,}5\,\%$.
Se utilizasemos as fórmulas teríamos que:

$$8\,315{,}38 = 7\,500 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 \Rightarrow \frac{8\,315{,}38}{7\,500} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[3]{\frac{8\,315{,}38}{7\,500}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \left(\sqrt[3]{\frac{8\,315{,}38}{7\,500}} - 1\right) \cdot 100 = 3{,}5$$

Deste xeito tamén obtemos que o rédito é $r = 3{,}5\,\%$

Exercicio resolto ★★★ 2.6

Unha entidade financeira propón un depósito a xuro composto.
Investimos 7 500 € ao 3,5 % anual e obtemos 8 315,38 € Canto tempo estivo investido?
Resolución
Como se trata dun aumento porcentual poderíamos ter que a cantidade inicial se vai multiplicar por 1,035 un número de veces descoñecido. E teriamos así que:

$$8\,315{,}38 = 7\,500 \cdot (1{,}035)^t \Rightarrow \frac{8\,315{,}38}{7\,500} = 1{,}035^t$$

Como xa comentamos, para cando buscamos o valor de t estamos buscando o logaritmo en base 1,035. Temos así que:

$$t = \log_{1{,}035}\left(\frac{8\,315{,}38}{7\,500}\right) = 3$$

Se non nos damos conta de que o que estamos a buscar é o logartimos en base 1,035, podemos introducir o logaritmo decimal nos dous membros da última igualdade da primeira liña.

$$\log\frac{8\,315{,}38}{7\,500} = \log 1{,}035^t$$

Se aplicamos propiedades obtemos o seguinte:

$$\log\frac{8\,315{,}38}{7\,500} = t\cdot\log 1{,}035 \Rightarrow t = \frac{\log\dfrac{8\,315{,}38}{7\,500}}{\log 1{,}035} = 3$$

Estivo investido 3 anos.

2.5. Taxas. Números índice

Taxa Anual Equivalente (T.A.E.)

Cando falamos cunha entidade bancaria, adoitanos dar a información do produto que queremos contratar xunto con unhas siglas, T.A.E. Que significan esas siglas? Para responder a esta pregunta é mellor ver un exemplo.

Supoñamos que despositamos unha certa cantidade de diñeiro nun depósito que teña uns xuros anuais dun 6 % e pago mensual e analicemos o caso.

O primeiro que facemos é transformar a porcentaxe anual en porcentaxe mensual. Temos aquí neste caso que a un 6 % anual lle corresponde un 0,5 % mensual.

Ao ser un aumento porcentual e ter en conta o que xa vimos no apartado dos xuros, temos que cada mes a cantidade se multiplica por 1,005. Se aplicamos o xuro composto temos que ao final do ano o capital inicial, C_i, se transformou en $C_i \cdot 1{,}005^{12} = 1{,}06168 \cdot C_i$.

Isto é, o capital, nun ano, aumentou un 6,168 %.

Se analizamos agora a información, o 6 % anual, con períodos de capitalización mensuais, convírtese nun aumento real dun 6,168 %. Pois ese porcentaxe é a T.A.E.

Para calcular a **T.A.E.** dun produto bancario temos que calcular o xuro anual que equivale ao xuro que realmente nos están aplicando coa capitalización parcial. A **T.A.E.** representa, deste xeito, a porcentaxe real de incremento de capital nun ano.

OLLO. Ao calcular a T.A.E. tamén se inclúen os pagos fixos (comisións e gastos) que cobra o banco para conceder un préstamo.

A **T.A.E.** foi introducida polo Bando de España no ano 1990 para facilitar a comparación entre produtos financeiros, cando o xuro nominal é distinto e o período de capitalización tamén.

Cálculo da T.A.E.

Para calcular a T.A.E. dun xeito sistemático temos que

$$1+\frac{\text{T.A.E.}}{100}=\left(1+\frac{r/p}{100}\right)^p=\left(1+\frac{r}{p\cdot 100}\right)^p$$

Nesa fórmula temos que ter en conta que r é o xuro nominal anual, e p é o número de capitalizacións. Así, r/p é o xuro aplicable en cada capitalizacón.

Exercicio resolto 2.7

Un produto financeiro con capitalización semestral ten unha T.A.E. do 3,74 %. Calcula o xuro nominal do produto.

Resolución

Podemos facelo tendo en conta as fórmulas pero imos a facelo razoando. Que a T.A.E. sexa dun 3,74 % significa que o capital inicial multiplícase por 1,0374. ($C\cdot 1{,}0374$).

Como a capitalización é semestral, temos que hai dúas capitalizacións no ano, polo que temos que averiguar o xuro semestral. Para iso temos que

$$C_i\cdot i^2=C_i\cdot 1{,}0374$$

Así, a variación semestral vén dada por 1,01853, obtendo así que o xuro semestral é de 1,853 %. Ao trasladar esa porcentaxe ao ano, temos que $1{,}853\cdot 2=3{,}706$. Se redondeamos esta última cifra, temos que o xuro nominal é de 3,71 %.

Unha vez que o temos resolto mediante razoamento, trataremos de ver o mesmo exercicio resolto mediante a fórmula que vimos antes.

Exercicio resolto 2.8

Un produto financeiro con capitalización semestral ten unha T.A.E. do 3,74 %. Calcula o xuro nominal do produto.

Resolución

Como a capitalización é semestral, temos que hai dúas revisións do capital, ou o que é o mesmo $p=2$.

$$1+\frac{3{,}74}{100}=\left(1+\frac{r/2}{2\cdot 100}\right)^2\Rightarrow 1{,}0374=\left(1+\frac{r}{200}\right)^2$$
$$\Rightarrow\sqrt{1{,}0374}=1+\frac{r}{200}\Rightarrow r=200\cdot(\sqrt{1{,}0374}-1)\Rightarrow r=3{,}71$$

Por tanto, o xuro nominal é de 3,71 %.

Veremos agora outro exercicio resolto, neste caso para calcular a T.A.E. partindo dun xuro. Ao igual que antes verémolo das dúas formas: razoando e aplicando a fórmula inmediatamente.

Exercicio resolto 2.9

Calcula a T.A.E. do 6 % anual capitalizable trimestralmente.

Resolución

- Razoando.
  Como a porcentaxe anual é do 6 %, temos que corresponde a un 1,5 %.
  Como neste caso non indican a existencia de comisións nin gastos, temos que a porcentaxe real de incremento só a determina a capitalización. Chegamos entón a que o capital varía da seguinte forma: $C_i \cdot 1{,}015^4 = C_i \cdot 1{,}0614$.
  Se transformamos isto en porcentaxe temos que a T.A.E. correpondente é do 6,14 %.
- Aplicando a fórmula. Neste caso $p = 4$, pois son os trimestres que ten un ano. Temos entón que:

$$1+\frac{\text{T.A.E.}}{100} = \left(1+\frac{6/4}{100}\right)^4 = \left(1+\frac{6}{400}\right)^4 \Rightarrow 1+\frac{\text{T.A.E.}}{100} = 1{,}0614 \Rightarrow \frac{\text{T.A.E}}{100} = 1{,}0614-1$$
$$\Rightarrow \text{T.A.E.} = 6{,}14\,\%$$

Como se indicou antes, para o cálculo da T.A.E. tamén se inclúen os pagos fixos como poden ser as comisións e os gastos. Vexamos agora un exercicio no que se calcula a T.A.E. tendo en conta os gastos.

Exercicio resolto ★★★ 2.10

Un banco concédenos un préstamos de 10 000 € ao 12 % anual. No momento da formalización, cóbranos uns gastos de 500 €.

a) Se facemos un só pago ao cabo dun ano, cal é a T.A.E.?

b) E se tivesemos que devolver o préstamos ao cabo de dous anos?

Resolución

a) Aquí temos que ter en conta que o préstamo é de 9 500 € pero temos que devolver 10 000 € máis os seus xuros correspondentes.
Por ser un 12 % anual temos que a porcentaxe mensual é dun 1 %, polo que temos que devolver a seguinte cantidade: $10\,000 \cdot 1,01^{12} = 11\,268{,}25$ €.
Se pedimos 9 500 € e devolvemos 11 268,25 € temos que representa unha variación de:

$$\frac{11\,268{,}25}{9\,500} = 1{,}186$$

Por tanto a T.A.E. é dun 18,6 %.

b) Aquí tamén temos que ter en conta que o préstamo é de 9 500 € pero temos que devolver 10 000 € máis os seus xuros correspondentes.
Por ser un 12 % anual temos que a porcentaxe mensual é dun 1 %, polo que temos que devolver a seguinte cantidade: $10\,000 \cdot 1,01^{24} = 12\,697{,}35$ €.
Se pedimos 9 500 € e devolvemos 12 697,255 € temos que representa unha variación acumulado nos dous anos de:

$$\frac{12\,697{,}35}{9\,500} = 1{,}3366$$

Como a T.A.E. (ao ser anual) aplícase dous anos temos que $x^2 = 1{,}3366$, entón $x = 1{,}156$
Tamos entón que a taxa de variación anual é de 1,156, o que fai que a T.A.E. sexa dun 15,6 %.

Números índice

Un **número índice** é unha medida estatística que permite estudar as fluctuacións ou variacións dunha ou varias magnitudes en relación co tempo.

Os número índice nacen da necesidade de coñecer en profundade a magnitude dun fenómeno e poder realizar comparacións deste en distintos territorios ao longo do tempo. Inicialmente podemos pensar en resolver o problema referindo cada situación á anterior, pero isto non fai viable a posibilidade de comparacións significativas, polo menos dun xeito directo, excepto no que se refire a dúas inmediatas. Debido a isto, cómpre escoller unha situación determinada como punto de referencia inicial, para remitir a ela todas as demais observacións. Esta situación denomínase situación base e as comparacións que se fan veñen establecidas a través dun número índice.

Índice de Precios de Consumo (IPC)

Entre os número índice máis utilizado está o **Índice de Precios de Consumo (IPC)** que mide estatisticamente a evolución dos precios dos bens e servicios que consume a poboación española.

O IPC está elaborado polo Instituto Nacional de Estatística e publícase mensualemente, incluíndo tres datos: a variación dos prezos ese mes, o índice acumulado no que vai de ano e o IPC interanual, isto é, o acumulado nos últimos 12 meses.

Ponderacións no IPC

Para elaborar o IPC, tense en conta a importancia que teñen os diferentes produtos no consumo habitual. Por exemplo, non ten a mesma influencia no gasto do consumidor a subida de produtos habituais no seu consumo, como pode ser o pan, como a de produtos que consumo con menor frecuencia, como pode ser os mobles. Chámase **cesta da compra do IPC** á táboa de ponderacións de cada un dos produtos que interveñen no seu cálculo.

Actualmente para o cálculo tómase como base o ano 2016.

2.6. Capitalización e amortización

Capitalización

Se unha persoa quere ir depositando unha cantidade **fixa** de xeito periódico irá xerando un capital. Se esas cantidade se van aportando cada ano (sempre ao comezo do período) recibe o nome de **anualidade de capitalización**.

Unha vez que transcorra certo tempo teremos un capital que ven orixidando polos xuros que produciu cada unha das cuotas.

Así, se chamamos C_0 á cantidade fixa que se ingresa, r ao rédito e t ao número de cuotas (neste caso anos) temos que:

O valor actual da primeira cuota será $\longrightarrow C_0 \cdot \left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t$

O valor actual da segunda cuota será $\longrightarrow C_0 \cdot \left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{t-1}$

...

O valor actual da última cuota será $\longrightarrow C_0 \cdot \left(1+\dfrac{r}{100}\right)$

Por ser todas esas cantidades termos dunha progresión xeométrica na que o primeiro termo é $a_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$,e a razón $1 + \frac{r}{100}$ podemos calcular a suma de todas esas cantidades. Se chamamos C_f ao capital final temos que:

$$C_f = \frac{C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - 1\right]}{\frac{r}{100}}$$

Como ao haber tanta fracción de por medio, pode resultar máis cómodo traballar en tanto por un, polo que se $i = \frac{r}{100}$ temos que:

$$C_f = \frac{C_0 \cdot (1+i)[(1+i)^t - 1]}{i}$$

Un exemplo deste concepto de capitalización é o **fondo de pensións**. Este consiste en facer unhas achegas periodicamente dunha cantidade e, ao chegar á idade de xubilación, rescatar o capital acumulado.

Distintos períodos de tempo

Podería darse o caso de que as aportacións non fosen anuais, pero o proceder sería similar. Bastaría con calcular o rédito correspondente ao período de aportación, xa ben sexa en porcentaxe $r' = \frac{r}{p}$ ou en tanto por un $i' = \frac{i}{p}$ e a cantidade de períodos que hai ata que se calcula o capital.

Exercicio resolto 2.11

Unha persoa deposita anualmente 720 € durante 30 anos e garánteselle un 7 % de xuro. Que capital terá ao cabo dese período?

Resolución

Utilizaremos a fórmula do tanto por un, que cos valores que temos resulta o seguinte:

$$C_f = \frac{720 \cdot (1 + 0{,}07) \cdot [(1 + 0{,}07)^{30} - 1]}{0{,}07} = \frac{720 \cdot (1{,}07) \cdot (1{,}07^{30} - 1)}{0{,}07} = 72772{,}59$$

O seu capital ascenderá a 72 772,59 €.

Exercicio resolto 2.12

Unha persoa ingresa mensualmente 50 € durante 30 anos e garánteselle un 6 % anual. Que capital terá ao cabo dese período?

Resolución

Utilizaremos a fórmula do tanto por un, pero adaptando o rédito, que cos valores que temos resulta o seguinte:

Neste caso $r' = \frac{6}{12} = 0{,}5 \Rightarrow i' = 0{,}005$, que é exacto polo que podemos substituír sen risco ningún.

$$C_f = \frac{50 \cdot (1 + 0{,}005) \cdot [(1 + 0{,}005)^{360} - 1]}{0{,}005} = \frac{50 \cdot (1{,}005) \cdot (1{,}005^{360} - 1)}{0{,}005} = 50476{,}88$$

O seu capital ascenderá a 50 476,88 €.

Amortización

Un **crédito** é unha cantidade de diñeiro que se pide prestado e que se debe devolver cun determinado xuro e nun certo tempo. **Amortizar** un crédit é devolver a cantidade que se pediu e os xuros correspondentes. Pódese deolver nun pago único (polo que sería un exemplo de cálculo de capital final a un xuro composto) ou en varios pagos. Se os pagos son fixos e de carácter anual reciben o nome de **anualidade de amortización**.

Así, se chamamos C_0 á cuota fixa fixa que se ingresa, r ao rédito e t ao número de cuotas (neste caso anos) temos que:

A primeira anualidade convértese en $\longrightarrow C_0 \cdot \left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{t-1}$

A segunda anualidade convértese en $\longrightarrow C_0 \cdot \left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{t-2}$

...

A última anualidade, como non produce intereses é $\longrightarrow C_0$

A suma do diñeiro pagado debe ser igual ao diñeiro recibido máis os xuros correspondentes. Calculamos entón a suma das anualidades, que están en progresión xeométrica con $a_1 = C_0$ e con razón $1+\dfrac{r}{100}$ e igualamola ao que temos que devolver (débeda (D) e os xuros xerados nese tempo) e temos o seguinte:

$$D \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t = \frac{C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - 1}{\frac{r}{100}}$$

Se despexamos C_0 para calcular cada cuota temos o seguinte:

$$C_0 = \frac{D \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \cdot \frac{r}{100}}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - 1}$$

Ao igual que antes, pode resultar máis cómodo traballar en tanto por un, polo que se $i = \dfrac{r}{100}$ temos que:

$$C_0 = \frac{D \cdot (1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1}$$

Os créditos máis frecuentas son:

Persoais: aqueles que se piden para uns gastos calquera.

Hipotecas: aqueles que se piden para mercar unha vivenda. Adoitase facer amortizacións mensualmente.

Distintos períodos de tempo

Podería darse o caso de que as amortizacións non fosen anuais, pero o proceder sería similar. Bastaría con calcular o rédito correspondente ao período de amortización, xa ben sexa en porcentaxe $r' = \dfrac{r}{p}$ ou en tanto por un $i' = \dfrac{i}{p}$ e a cantidade de amortizacións que hai ata que se salda a débeda.

Exercicio resolto 2.13

Recibimos un préstamo de 20 000 €, cun tipo de xuro do 12 % anual, e debemos devolvelo en catro anos en pagamentos iguais. Cal será a anualidade?
Resolución
Utilizaremos a fórmula do tanto por un, que cos valores que temos resulta o seguinte:

$$C_0 = \frac{20000 \cdot (1+0{,}12)^4 \cdot 0{,}12}{(1+0{,}12)^4 - 1} = \frac{20000 \cdot 1{,}12^4 \cdot 0{,}12}{1{,}12^4 - 1} = 6584{,}69$$

A anualidade será de 6 584,69 €.

Exercicio resolto 2.14

Debemos amortizar 100 000 € ao 4 % anual en 20 anos. Cal será a mensualidade?
Resolución
Utilizaremos a fórmula do tanto por un, pero adaptando o rédito, que cos valores que temos resulta o seguinte:
Neste caso $r' = \frac{4}{12} = 0,\widehat{3} \Rightarrow i' = 0{,}00\widehat{3}$, que non é exacto polo que podemos correr riscos á hora de substituír. Indicaremos entón o rédito en fracción.

$$C_0 = \frac{100\,000 \cdot \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^{240} \cdot \frac{4}{1200}}{\left(1 + \frac{4}{1200}\right)^{240} - 1} = 605{,}98$$

A mensualidade será de 605,98 €.

2.7. Exercicios

Aumentos e disminucións porcentuais

1. Unha viaxe que custaba 1690 € sufriu un desconto do 20 % e uns meses despois volveron a subirlle o prezo un 20 %. Canto custa agora?

Sol: 1622,40 €

2. Despois de aplicarlle un 20 % de desconto a unha cazadora, queda nun prezo de 72 €. Cal era o prezo inicial da cazadora?

Sol: 90 €

3. O prezo dun determinado artigo aumenta un 15 %, co que queda en 287,50 €. Cal era o prezo inicial?

Sol: 250 €

4. Nunha papelaría realizan un desconto do 15 % e cargan un 4 % de IVE, polo que o total da factura ascende a 145,86 €. Cal era o prezo inicial da compra?

Sol: 165 €

5. Unha entrada de cine custaba o ano pasado 5 €. Este ano custa 5,60 €. Cal é a porcentaxe de subida?

Sol: 12 %

6. Unha certa cadena de venda de electrodomésticos realiza unha oferta que denomina *Día sen IVE*, no que certos productos sofren un desconto equivalente ao 21 % de IVE. En canto nos quedará un ordenador portátil que normalmente 968 €.

Sol: 800 €

7. Antes da coñecida campaña de venta online *Black Friday*, certa compañía sobe o precio dun televisor un 20 % previamente para enganar á xente. Se o día da oferta pon que está rebaixado un 30 % e custa 414,96 €, cal é a rebaixa real e canto custaba antes?

Sol: 16 % e 494€

Xuros

8. Calcula en canto tempo, cun xuro composto, un capital de 36700 € ao 5 % con aboamento de xuros anual se converterá en 42500 €.

Sol: 3 anos

9. Que capital inicial é necesario ter depositado para que cun xuro composto durante 5 anos ao 6,5 % anual e con periódos de capitalización mensusais se acumule un capital final de 21433,67 €?

Sol: 15 500€

10. Un capital colocado ao 2,5 % anual con xuro composto durante catro anos converteuse en 11 038,13 €. A canto ascendía ese capital?

Sol: 10 000€

11. Cantos anos tería que estar depositado un capital de 15000 €, ao 4,7 % anual, para converterse en 18000 €?

Sol: 4 anos

12. Calcula o tanto por cento anual ao que se deben colocar 600€ para que en dous anos se convertan en 699,84 €.

Sol: 8 %

13. Calcula o tanto por cento anual ao que se deben colocar un capital para que se duplique ao longo 12 anos.

Sol: 5,95 %

14. Durante cantos anos se debe depositar un capital a un xuro composto ao 7,2 % anual para duplicalo.

Sol: 10 anos

Taxas. Números índice

15. Calcula a T.A.E. correspondente a un rédito anual do 9 % con capitalización mensual.

Sol: 9,38 %

16. Calcula a T.A.E. do 5 % anual con capitalización trimestral.

Sol: 5,09 %

17. Unha entidade bancaria ofrece un 8 % de xuro anual, cunha liquidación semestral de xuros. Unha segunda entidade bancaria ofrece un 7,5 % de xuro anual con liquidación trimestral de xuros. Que entidade ten a T.A.E. máis alta e por tanto é máis conveniente para colocar o capital?

Sol: A primeira. 8,16 %

18. Unha entidade bancaria ofrece un produto financeiro cunha T.A.E. do 5.46 %. Cal é a taxa de xuro nominal se a capitalización é cuatrimestral?

Sol: 5,36 %

Capitalización e amortización

19. Calcula o capital acumulado ao 5 % anual, se ingresamos 2000€ ao ano durante 15 anos.

Sol: 45314,98 €

20. Calcula a cantidade anual necesaria para formar un capital de 50000 € e 20 anos ao 6 % de xuro composto.

Sol: 1282,29 €

21. Unha parella ábrelle á súa filla unha conta xoven, que lles dá un 2,4 % anual. Pretenden ingresarlle 300 € semestralmente durante os próximos 8 anos. Canto diñeiro haberá na conta ao final?

Sol: 5320,25 €

22. Un plan de pensións ao 3 % anual implica achegas de 600 € ao ano. Se unha persoa 33 anos, que capital obterei cando me xubile aos 65 anos?

Sol: 27038,92 €

23. Pedimos un préstamo de 120000 € para a compra dunha vivenda. Se o xuro anual é do 6 %. Calcula o importe de cada cuota se temos que devolvelo aos 20 anos en:

    a) cuotas anuais.
    b) cuotas mensuais.

    En que modalidade pagaríamos máis?

Sol: 10462,79 €; 859,72 € e na primeira

24. Un empresario solicita un préstamo de 500000 euros. Concédenllo a un xuro fixo do 11 %, tendo que pagalo en 8 anualidades. De canto será cada anualidade?

Sol: 97160,53 €

25. Que débeda se amortiza pediante o pago de 15 anualidades de 6000€ ao 4 % de xuro?

Sol: 66710,32 €

26. Durante cantos anos se debe pagar unha hipoteca de 80000 € ao 5 % de xuro fixo se a anualidade que se pode pagar é de 9026 €?

Sol: 12 anos

27. Quero comprar unha bicicleta e non teño cartos. Pído un préstamo a unha coñecida financeira de diñeiro rápido. Se merco a bicicleta custa 3000€, e teño que devolver os cartos en 12 mensualidades ao 18 % anual canto terei que pagar ao mes? Canto pago pola bicicleta?

Sol: 275,04 € e 3300,48

Unidade 3

ÁLXEBRA

3.1. Coñecementos previos

Polinomios e operacións

Un **monomio** é unha expresión alxébrica formada por unha parte numérica chamada coeficiente, e unha parte formada por letras, relacionadas pola operación produto.
Dous monomios son **semellantes** se teñen a mesma parte literal.
O **grao** dun monomio é igual a suma dos expoñentes das variables que o compoñen.

Un **polinomio** é a suma de dous ou máis monomios non semellantes. Se falamos dun polinomio cunha sóa variable, podemos definir un polinomio nunha variable x como calquera expresión do tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_x x^2 + a_1 x + a_0$$

Onde:

- n é un número natural que chamamos **grao** do polinomio. É o maior dos graos de cada monomio.
- Cada un dos elementos (sumandos) do polinomio chámanse **termos**.
- $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ chámanse **coeficientes** do polinomio.
- a_0 é o **termo independente**.

O **valor numérico** dun polinomio $P(x)$ para $x = a$ é o valor que resulta de substituír x por a no polinomio, e desígnase por $P(a)$.

Dous polinomios $P(x)$ e $Q(x)$ son iguais se teñen iguais os coeficientes dos termos do mesmo grao.

Para operar os polinomios:

- **Suma** de dous polinomios. Obtense sumando os termos semellantes dos polinomios sumados.
- **Resta** de dous polinomios. Obtense sumando ao minuendo o oposto do substraendo.
- **Produto** de dous polinomios. Obtense multiplicando cada un dos termos dun deles por todos os termos do outro e sumar os que resulten ser semellantes.
- **División** de polinomios. Obtense:
  - Colocando os polinomios da mesma forma que na división numérica. Se o dividendo é incompleto, (falta algún termo), deixamos espazos en branco que corresponden aos termos que faltan.

- Dividimos o primer monomio do dividendo entre o monomio de maior grao do divisor, obtendo así o primeiro termo do cociente.
- Multiplicamos o resultado obtido no paso anterior polo divisor e restámosllo ao dividendo para obter o primeiro resto parcial.
- Continuamos o proceso do mesmo xeito ata que obteñamos un resto parcial de inferior grao ao do divisor.

Identidades notables

Cómpre ter ben claras as identidades notables, pois serán manexadas en moitas situacións:

- O cadrado dunha suma de dous monomios: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- O cadrado dunha diferenza de dous monomios: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- A suma multiplicada por unha diferenza de dous monomios: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Regra de Ruffini

A regra de Ruffini é unha ferramenta que facilita a división de polinomios cando o divisor é da forma $(x-a)$.

Para recordar como funciona a regra de Ruffini observemos un exemplo.

Exemplo 3.1

Vexamos como dividir $(2x^3 - 3x + 5)$ entre $(x+2)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -3 & 5 \\ -2 & & -4 & 8 & -10 \\ \hline & 2 & -4 & 5 & \multicolumn{1}{|r}{-5} \end{array}$$

Sitúase a esquerda a (neste caso -2), e na parte de arriba os coeficientes do polinomio que se vai dividir ordenados de xeito decrecente, poñendo 0 se falta algún coeficiente.

Baixase o primeiro coeficiente, neste caso o 2. Agora multiplícase por a, (-2), e ponse debaixo do seguinte coeficiente, sumando ambos números, e volvendo a escribir debaixo o resultado.

Reiteramos o proceso ata que chegamos ao final. O número que queda a dereita é o resto da división e os demais son os coeficientes ordenados do cociente.

Obtemos así que:

- Cociente: $2x^2 - 4x + 5$
- Resto: -5

Teorema do resto

O **teorema do resto** afirma que o resto r que resulta da división dun polinomio $P(x)$ por $(x-a)$ é igual ao valor numérico do polinomio para ese valor de a.

Exemplo 3.2

Sexa $P(x) = 2x^3 - 3x + 5$. Ao dividir $P(x)$ entre $(x+2)$ obtemos que:

- Cociente: $2x^2 - 4x + 5$
- Resto: -5

Podemos asegurar entón que $P(-2) = -5$. Vexamos que efectivamente sucede así:
$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 5 = 2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-2) + 5 = -16 + 6 + 5 = -5$

Factor común

Sacar factor común é expresar como produto unha suma ou unha resta:

Exemplo 3.3

Vexamos como sacar factor común ás seguintes expresións:

- $4x^4y^2z^6 - 6x^2y^3z^4 + 8x^3y^4z^2 = 2x^2y^2z^2 \cdot (2x^2z^4 - 3yz^2 + 4xy^2)$
- $abx + byz + x^3b = b \cdot (ax + yz + x^3)$
- $(x-1) \cdot (x+3) + (x-1)^2 = (x-1) \cdot [(x+3) + (x-1)] = (x-1) \cdot (2x+2)$

Ecuacións

Resolver unha ecuación é buscar o valor ou os valores numéricos que fan que a igualdade sexa certa.

Exemplo 3.4

Vexamos que dada a seguinte ecuación $5 + \sqrt{x-3} = x$, se procedemos a resolución chegaríamos a que $x = 7$ e $x = 4$ son posibles solucións. Vexamos cal delas é solución.

Se substituímos na ecuación $x = 7$ obtemos que:
$5 + \sqrt{7-3} = 7$ que efectivamente é certo.

En cambio se substituímos na ecuación $x = 4$ obtemos que:
$5 + \sqrt{4-3} = 4$ que é falso, polo que a solución da ecuación é $x = 7$

3.2. Polinomios

Raíces dun polinomio

Dicimos que a é **raíz** dun polinomio se o valor numérico do polinomio en a é cero.

$$a \text{ é raíz do polinomio } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Exemplo 3.5

O polinomio $P(x) = x^2 + 3x - 10$ ten por raíces $x = 2$ e $x = -5$

Comprobemos que efectivamente $P(2) = 0$ e $P(-5) = 0$

$P(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$
$P(-5) = (-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$

Polo que 2 e -5 son raíces do polinomio.

Propiedades das raíces

Vexamos algunhas propiedades que cómpre ter en conta:

1. As raíces enteiras dun polinomio son divisores do termo independente do polinomio.
2. Todo polinomio que non teña termo independente ten como raíz $x = 0$.
3. O número de raíces **reais** dun polinomio é sempre menor ou igual ao grao.
4. Se a é raíz dun polinomio $P(x)$, entón $(x - a)$ é divisor de $P(x)$, ou o que é o mesmo, existe $Q(x)$ tal que $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.

Exemplo 3.6

Dado o polinomio $x^3 + 7x - 8$, as raíces enteiras poden ser $Div(8) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$.

Exercicio resolto 3.1

Atopa as raíces do polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Resolución

Primeiro achamos os divisores do termo independente, $Div(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

Con estes valores aplicamos a definición de raíz (se $P(a) = 0$, entón a será raíz).

$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 12 = 1 - 3 - 4 + 12 = 6$. Por tanto $x = 1$ non é raíz.

$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 12 = -1 - 3 + 4 + 12 = 12$. Por tanto $x = -1$ non é raíz.

$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$. Por tanto $x = 2$ é raíz.

$P(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 12 = -8 - 12 + 8 + 12 = 0$. Por tanto $x = -2$ é raíz.

$P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 12 = 27 - 27 - 12 + 12 = 0$. Por tanto $x = 3$ é raíz.

Como o número de raíces non pode ser maior que 3, (pola propiedade 3 das raíces), non fai falla mirar os demais valores, tendo que as raíces son $x = 2$, $x = -2$ e $x = 3$.

Tamén podemos obter ditos valores probando as divisions entre $x - a$ e utilizando o método de Ruffini, na que o resto debe dar 0.

Factorización dun polinomio

Factorizar un polinomio $P(x)$, é poñelo como producto de polinomios do menor grao posible.

Tomando a propiedade 4 das raíces, sabes que se a é raíz, entón $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, polo que, factorizar un polinomio consiste en buscar as raíces do polinomio $P(x)$. Ademais, usando a propiedade 3, se o grao do polinomio é n, a descomposición pode ter como moito n factores.

Para factorizar un polinomio debemos ter en conta:

- Se non ten termo independente, unha das raíces é 0 (propiedade 2), por tanto divisible entre x, que vén sendo o mesmo a sacar factor común x.
- Se ten termo independente podemos actuar de varias maneiras, sempre e cando sexa posible:
  - Utilizando as identidades notables.
  - Usar Ruffini, que xunto co **Teorema do Resto**, nos permite ir obtendo as posibles raíces enteiras, e a súa vez os factores.
  - Se chegado o caso estamos ante un polinomio de grao 2, podese obter as raíces mediante a resolución da ecuación resultante de igualar o polinomio a 0.
- Sexa cal sexa o método do que nos sirvamos para factorizar o polinomio, $P(x)$, unha vez obtido un factor, $x - a$, traballaremos co polinomio $Q(x)$, que resulta de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$.

Exercicio resolto 3.2

Factoriza o polinomio $P(x) = 4x^6 - 12x^5 - x^4 + 27x^3 - 18x^2$.

<u>*Resolución*</u>

Primeiro debemos sacar factor común x^2.

$$x^2(4x^4 - 12x^3 - x^2 + 27x - 18)$$

Factorizamos agora o segundo termo mediante Ruffini:

$$4x^4 - 12x^3 - x^2 + 27x - 18$$

	4	-12	-1	27	-18
1		4	-8	-9	18
	4	-8	-9	18	0
2		8	0	-18	
	4	0	-9	0	

Así:

$$4x^6 - 12x^5 - x^4 + 27x^3 - 18x^2 = x^2(4x^4 - 12x^3 - x^2 + 27x - 18) = x^2(x-1)(x-2)(4x^2 - 9)$$

Para factorizar $4x^2 - 9$ usamos as identidades notables, pois observamos que é unha diferenza de cadrados polo que $4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$.

Obtemos así que:

$$4x^6 - 12x^5 - x^4 + 27x^3 - 18x^2 =$$

$$\begin{aligned} &= x^2(4x^4 - 12x^3 - x^2 + 27x - 18) = \\ &= x^2(x-1)(x-2)(4x^2 - 9) = \\ &= x^2(x-1)(x-2)(2x+3)(2x-3) \end{aligned}$$

3.3. Fraccións alxébricas

Chámase **fracción alxébrica** o cociente de dous poninomios, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Exemplo 3.7

Son fraccións alxébricas:

$$\frac{x}{2x^3-4};\ \frac{2}{x-2};\ \frac{2x+4}{8}=\frac{x}{4}+\frac{1}{2};\ \frac{14}{2}=7$$

Simplificación

Se o numerador e o denominador dunha fracción alxébrica se poden dividir por un mesmo polinomio, ao facelo simplifícase a fracción.

Se non se pode simplificar (dividir entre un mesmo polinomio numerador e denominador) dicimos que a fracción é **irredutible**.

Ao igual que se facía cos números reais, aquí tamén se pode obter o **máximo común divisor** (m.c.d.) e o **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de dous ou máis polinomios.

Para iso procedemos dun xeito similar ao que facíamos cos números reais:

- Para calcular o **m.c.d.** descompoñemos os polinomios e de entre os factores collemos aqueles que formen parte de todas as descomposicións coa súa multiplicidade máis pequena.
- Para calcular o **m.c.m.** descompoñemos os polinomios e collemos todos os factores coa multiplicidade máis grande coa que aparecen

Exemplo 3.8

Sexan $P(x)=x^2-1$, $Q(x)=x^2+2x+1$ e $R(x)=x^2+3x+2$. Vexamos como se calculan o seu **m.c.m** e o seu **m.c.d.**

Primeiro factoricemos cada un dos polinomios:

$P(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$
$Q(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$
$R(x)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

Temos entón que:

$m.c.m.(P(x),Q(x),R(x))=(x+1)^2(x-1)(x+2)=x^4+3x^3+x^2-3x-2$
$m.c.d.(P(x),Q(x),R(x))=x+1$

Para simplificar nun só paso unha fracción e obter a fracción irredutible debemos dividir numerador e denominador entre o seu máximo común divisor.

Fraccións equivalentes

Dúas fraccións son equivalentes se:

- Unha delas se obtén simplificando a outra

- Ou ben, as dúas, ao simplificarse, dan lugar á mesma fracción.

Se dúas fraccións $\frac{P(x)}{Q(x)}$ e $\frac{M(x)}{N(x)}$, son equivalentes, tamén se cumpre que os produtos cruzados son iguais:

$$P(x) \cdot N(x) = Q(x) \cdot M(x)$$

Exemplo 3.9

As fraccións $\frac{x-2}{x^2-4}$ e $\frac{x}{x^2+2x}$ son equivalentes porque ao simplificarse as dúas dan lugar a $\frac{1}{x+2}$.
Os seus produtos cruzados coinciden:

$$(x-2)(x^2+2x) = (x^2-4)x = x^3 - 4x$$

Reducción a común denominador

Do mesmo xeito que obtemos fraccións equivalentes simplificando, tamén podemos obter fraccións equivalentes multiplicando o numerador e o denominador dunha fracción alxébrica por un mesmo polinomio para obter outra fracción equivalente.

Se temos varias fraccións equivalentes, podemos obter outras que, sendo respectivamente equivalentes ás primeiras, teñan entre si o mesmo denominador. Este proceso recibo o nome de **reducción a común denominador**.

Se o denominador resultante é o mínimo común múltiplo dos denominadores dise que se **reducción a mínimo denominador común**.

Exemplo 3.10

Se queremos reducir a común denominador as fraccións $\frac{1}{x+1}$ e $\frac{x+2}{x+3}$, calcularemos o $m.c.m.(x+1, x+3) = (x+1)(x+3)$ polo que xa temos o denominador resultante.

Obtemos así que $\frac{(x+3)}{(x+1)(x+3)}$ e $\frac{(x+2)(x+1)}{(x+3)(x+1)}$ son fraccións equivalentes ás iniciais e que teñen as dúas o mesmo denominador.

Operacións

Suma e resta

Para **sumar** ou **restar** fraccións alxébricas, redúcense a común denominador (se non o están xa) e súmanse ou réstanse os seus numeradores.

Produto e cociente

O **produto** de dúas fraccións alxébricas é o produto dos seus numeradores partido polo produto dos seus denominadores.

A fracción **inversa** doutra fracción dada conséguese intercambiando numerador e denominador, pois o produto de elas é igual a 1.

O **cociente** de dúas fraccións alxébricas é igual ao produto da primeira pola inversa da segunda.

Exemplo 3.11

Vexamos algúns exemplos de operacións:

- **Suma** $\frac{1}{x+1}+\frac{x+2}{x+3}$
  Reducímolas a común denominador e despois sumamos:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{(x+3)}{(x+1)(x+3)}+\frac{(x+2)(x+1)}{(x+3)(x+1)}=\frac{(x+3)}{(x+1)(x+3)}+\frac{x^2+3x+2}{(x+3)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+4x+5}{(x+3)(x+1)}=\frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+3}$$

.

En todas as operacións resulta útil non multiplicar inmediatamente pois pode que ao final o ter o numerador e o denominador factorizados nos axude a simplificar.

- **Produto** $\frac{x^2-9}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-3}$
  Multiplicamos numerador por numerador e denominador por denominador.

$$\frac{x^2-9}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-3}=\frac{(x^2-9)(x-1)}{(x+2)(x-3)}=\frac{(x+3)(x-3)(x-1)}{(x+2)(x+3)}=\frac{(x-3)(x-1)}{x+2}=$$

$$=\frac{x^2-4x+3}{x+2}$$

.

- **Cociente** $\frac{2x}{x+2}:\frac{x-2}{2x}$
  Multiplicamos a primeira fracción pola inversa da segunda:

$$\frac{2x}{x+2}:\frac{x-2}{2x}=\frac{2x}{x+2}\cdot\frac{2x}{x-2}=\frac{4x^2}{x^2-4}$$

3.4. Ecuacións

Ecuacións de segundo grao

As ecuacións de segundo grao son da forma $ax^2+bx+c=0$, onde a, b e c son números reais e $a\neq 0$.

As súas solución obtéñense aplicando a seguinte fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Chamamos **discriminante** dunha ecuación de segundo grao a $\Delta=b^2-4ac$. O discriminante indícanos o número de solucións:

- $\Delta>0$, hai dúas solucións reais.
- $\Delta=0$, hai unha única solución (con dobre multiplicidade)
- $\Delta<0$, non hai solucións reais. Si tén solucións complexas, e as dúas solucións son conxugadas entr si.

Cando $b = 0$ ou $c = 0$, a ecuación chámase **incompleta** e pódese resolver de forma sinxela sen necesidade de aplicar a fórmula, aínda que tamén se pode utilizar.

- Se $b = 0$ temos $ax^2 + c = 0$. Basta con despexar x^2 e despois facer a raíz cadrada (collendo os valores positivos e negativos).
- Se $c = 0$ temos $ax^2 + bx = 0$. Basta con sacar factor común $(ax + b)x = 0$ e igualar cada un dos factores a 0 e despexar. $ax + b = 0$ e $x = 0$

Ecuacións bicadradas

As ecuacións **bicadradas** son ecuacións de cuarto grao sen termos de grao impar.

Para resolvela efectuamos o cambio $x^2 = y$, e por tanto, tamén $x^4 = y^2$, co que queda unha ecuación de segundo grao na incógnita y:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \rightarrow ay^2 + by + c = 0$$

Unha vez resolta esta ecuación debemos desfacer o cambio igualando y^2 a cada das solucións anteriores. Se as solución da ecuación en y son positivas darán lugar a dúas solucións reais e opostas na ecuación en x. Se son negativas só teñen solución no corpo dos números complexos, e son dous pares de números conxugados.

Exemplo 3.12

Resolvamos a seguinte ecuación $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Comezamos facéndo o cambio $x^2 = y$, polo que obtemos a seguinte ecuación $y^2 - 8y - 9 = 0$. Esta é unha ecuación de segundo grao que se resolve mediante a fórmula escrita no apartado anterior:

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} y_1 = \dfrac{8+10}{2} = 9 \\ y_2 = \dfrac{8-10}{2} = -1 \end{cases}$$

Desfacemos agora o cambio obtendo dúas igualdades:

$$y_1 = \frac{8+10}{2} = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \text{Ten solucións reais} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{8-10}{2} = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{Non ten solucións reais}$$

Aínda que non as imos a estudar en profundidade, procedendo dun xeito similar poderemos resolver ecuacións de maior grao como as da seguinte forma $ax^6 + bx^3 + c = 0$, que se poden resolver tamén facendo o cambio $x^3 = y$ e transformándoa nunha ecuación de segundo grao.

Ecuacións polinómicas de grao superior a dous

Se exceptuamos algúns casos particulares como o das ecuacións bicadradas, non temos ningún método xeral para achar as solucións dunha ecuación polinómica de grao superior a dous.

Soamente seremos quen de resolver estas ecuacións se somos capaces de **factorizar** o polinomio $P(x)$ en polinomios de primeiro e de segundo grao.

Unha vez factorizado o polinomio basta con igualar a cero cada factor e resolver as ecuacións resultantes.

Exemplo 3.13

Resolvamos a seguinte ecuación $4x^6 - 12x^5 - x^4 + 27x^3 - 18x^2 = 0$.

Se procedemos a factorizar do mesmo xeito que no exercicio resolto 4.2, poderemos chegar ao seguinte $4x^6 - 12x^5 - x^4 + 27x^3 - 18x^2 = x^2(x-1)(x-2)(4x^2-9)$

No exercicio resolto inda se conseguía factorizar máis, pero neste caso podemos parar aquí, pois xa está descomposto en factores de segundo e de primeiro grao. Resolver a ecuación inicial é equivalente a igualar a cero cada un dos factores nos que se descompuxo o polinomio.

$$4x^6 - 12x^5 - x^4 + 27x^3 - 18x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1)(x-2)(4x^2-9) = 0$$

Temos por tanto que:

$$x^2(x-1)(x-2)(4x^2-9) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 0 \to x_1 = 0 \text{ (É unha solución dobre)} \\ x - 1 = 0 \to x_2 = 1 \\ x - 2 = 0 \to x_3 = 2 \\ 4x^2 - 9 = 0 \to x^2 = \dfrac{9}{4} \to x = \pm\dfrac{3}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = \dfrac{3}{2} \\ x_5 = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ecuacións racionais

Unha ecuación racional é aquela na que aparecen fraccións alxébricas. Para resolver estas ecuacións debemos transformalas en ecuacións polinómicas.

Os denominadores alxébricos, ao igual que os numéricos, suprímense multiplicando polo produto de todos eles ou, incluso mellor, polo seu mínimo común múltiplo. Deste xeito, chégase a unha ecuación que, probablemente, se sabe resolver.

No proceso de multiplicar por expresións polinómicas, ás veces aparecen solucións falsas. Polo tanto, sempre que o fagamos, **deberemos comprobar todas as solucións** obtidas.

Exemplo 3.14

Resolvamos a seguinte ecuación $\dfrac{x^2-3x}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$.

O mínimo común múltiplo dos denominadores é $(x+1)(x-1) = x^2-1$. Polo que multiplicaremos cada miembro da ecuación por el.

$$x^2 - 3x = (x-1) - (x+1) \Longrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

Como é unha ecuación de segundo grao, podemos resolvela mediante a fórmula e obtemos as seguintes solucións:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2$$

Agora só queda comprobar as solucións:

$x = 1$:	$\dfrac{1^2 - 3\cdot 1}{1^2-1} = \dfrac{1}{1+1} - \dfrac{1}{1-1}$	$x = 1$ non é solución da ecuación inicial xa que anula algúns denominadores
$x = 2$:	$\dfrac{2^2 - 3\cdot 2}{2^2-2} = \dfrac{1}{2+1} - \dfrac{1}{2-1} \Rightarrow -\dfrac{2}{3} = -\dfrac{2}{3}$	$x = 2$ é solución da ecuación inicial

Ecuacións irracionais

Chamamos **ecuacións irracionais** ás ecuacións que conteñen polinomios ou fraccións alxébricas baixo un signo radical.

Só estudaremos o caso das ecuacións con radicais cadráticos. Para resolver este tipo de ecuacións:

- illamos a raíz cadrada nun membro.
- elevamos os dous membros ao cadrado.
- Se a ecuación resultante é irracional, repetimos o proceso anterior as veces que faga falta ata que desaparezan todos os radicais.

Neste proceso poden aparecer solucións falsas que naturalmente, hai que rexeitar. Por iso, neste tipo de ecuacións **é funtamental comprobar todas as solucións**.

Exemplo 3.15

Resolvamos a seguinte ecuación $\sqrt{x-3}+\sqrt{3x-5}=6$.

Illamos no primeiro membro un dos radicais.

$$\sqrt{3x-5}=6-\sqrt{x-3}$$

Elevamos ao cadado os dous membros e reducimos a expresión. Neste caso, como a ecuación resultante é irracional, volvemos a illar o radical.

$$3x-5=36-12\sqrt{x-3}+(x-3)\Rightarrow 2x-38=-12\sqrt{x-3}$$

Volvemos a elevar ao cadrado e reducir a expresión.

$$4x^2-152x+1444=144(x-3)\Rightarrow 4x^2-152x+1444=144x-432\Rightarrow 4x^2-296x+1876=0$$

Resolvemos a ecuación sen radicais resultante.

$$4x^2-296x+1876=0\Rightarrow x^2-74x+469=0\left\{\begin{array}{l}x_1=7\\x_2=67\end{array}\right.$$

Agora só queda comprobar as solucións:

$x=7$:	$\sqrt{7-3}+\sqrt{3\cdot 7-5}=6\Rightarrow 2+4=6$	$x=7$ é solución da ecuación inicial
$x=67$:	$\sqrt{67-3}+\sqrt{3\cdot 67-5}=6\Rightarrow \xcancel{8+14=6}$	$x=67$ non é solución da ecuación inicial

Ecuacións exponenciais

Chamamos **ecuacións exponenciais** ás ecuacións nas que a incógnita aparece no expoñente dunha potencia.

Para resolvela úsanse as propiedades das potencias se teñen a mesma base e temos en conta que

$$A^x=A^y\Leftrightarrow x=y$$

Se isto non funciona, ás veces convén facer algún cambio de variable.

Exercicio resolto 3.3

Resolve as seguintes ecuacións exponenciais:

a) $4 \cdot 2^{4x} = 1024$

b) $3^x + 3^{x+2} = 90$

Resolución

a) Para resolver esta ecuación despexamos primeiro 2^{4x}.

$$2^{4x} = \frac{1024}{4} = 256$$

Tratamos de poñer 256 como potencia de 2. Efectivamente, temos que $2^8 = 256$.

Polo que a igualdade transfórmase en $2^{4x} = 2^8$, obtendo así que $4x = 8 \Rightarrow x = 2$.

b) Para resolver esta ecuación é útil realizar un cambio de variable, pero tras aplicar antes algunha das propiedades das potencias.

$$3^x + 3^{x+2} = 90 \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3^2 = 90$$

Agora facemos o seguinte cambio $3^x = y$ e obtemos $y + 9y = 90$.
Se resolvemos a ecuación obtemos que $y = 9$. Neste momento desfacemos o cambio de variable co que chegamos a $3^x = 9$, obtendo así que $x = 2$.

Ecuacións logarítmicas

Chamamos **ecuacións logarítmicas** ás ecuacións nas que interveñen logaritmos.
Para resolver úsanse as propiedades dos logaritmos e temos en conta que:

$$\log A = \log B \Leftrightarrow A = B$$

No caso de que cheguemos a unha expresión do tipo $\log A = B$ debemos expresar B como un logaritmo.
Unha vez resolta a ecuación temos que **comprobar as solucións** para que non aparezan logaritmos de cero ou de números negativos.

Exercicio resolto 3.4

Resolve a seguinte ecuación logarítmica $\log x + \log(x + 6) = 4 \log 2$

Resolución

Usamos as propiedades dos logaritmos

$$\log x(x + 6) = \log 2^4 \Rightarrow \log x^2 + 6x = \log 16$$

Se quitamos os logaritmos temos $x^2 + 6x = 16 \rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$.
Se resolvemos a ecuación obtemos as seguintes solucións: $x = 2$ e $x = -8$.
Como temos que comprobar se algunha delas non sirve por dar lugar a logaritmos de cero de número negativos, quedamos que a solución é $x = 2$, descartando $x = -8$

3.5. Inecuacións

Unha **inecuación** é unha desigualdade entre dúas expresións alxébricas, na que os seus membros aparecen ligados por algún destes signos ($<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$).

Os valores das **incógnitas** que fan que sexa certa a desigualdade son solucións da inecuación. O conxunto de todas as solución chámase **conxunto solución** e represéntase por **S**, e expresámolo en forma de intervalo.

Do mesmo xeito que sucede coas ecuacións, coas inecuacións podemos clasificalas en función do seu grao e da número de incógnitas. Polo momento traballaremos coas inecuacións dunha sóa incógnita e estudaremolas en función do seu grao:

Inecuacións de primeiro grao

Son inecuacións nas que o grao da expresión alxébrica é un. A súa estructura é similar á das ecuacións de primeiro grao exceptuando que os membros están enlazados por un dos signos das inecuacións.

Para resolver este tipo de inecuacións procédese igual que coas ecuacións de primeiro grao coa salvedade de que ao multiplicar ou dividir por un número negativo, a desigualdade cambia de sentido.

Outra maneira de resolvela consiste en resolver a ecuación correspondente a inecuación e posteriormente mirar os signos en cada intervalo.

Exercicio resolto 3.5

Resolve a seguinte inecuación: $2(x-2)+3x<4x+6$

Resolución

Vexamos como resolvelo de dúas maneiras diferentes:

- Procedemos exactamente igual que nas ecuacións de primeiro grao coa excepción da orientación do signo de desigualdade antes comentada.

$$2(x-2)+3x<4x+6 \Rightarrow 2x-4+3x<4x+6 \Rightarrow x<10$$

  Unha vez que chegamos a este paso expresamos a solución mediante un intervalo que neste caso é: **S**$=(-\infty,10)$

- Nesta outra maneira, primeiro transformamos a inecuación noutra inecuación equivalente na que no segundo membro só teñamos o 0, chegando neste caso a $x-10<0$. Unha vez aquí, resolvemos a ecuación correspondente a esta inecuación, obtendo que $x=10$. Agora analizamos o signo en cada intervalo determinado por este punto.

	$(-\infty,10)$	$(10,+\infty)$
Signo da expresión $x-10$	$-$	$+$

  Como precisamos aqueles valores nos que a expresión é negativa temos doadamente que a solución é **S**$=(-\infty,10)$

Se a inecuación se cumpre para todos os valores diremos que a solución é **S**$=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. En cambio se non hai ningunha solución da inecuación diremos que **S**$=\emptyset$.

Tamén cómpre recordar que os extremos finitos dos intervalos incluiranse se a inecuación contén os símbolo $\leq$ ou $\geq$. En cambio non se incluirán se a inecuación contén os símbolo extrictos $<$ ou $>$.

Inecuacións de segundo grao

Son inecuacións nas que o grao da expresión alxébrica é dous. Do mesmo xeito que sucedía coas de primeiro grao, aquí a súa estrutura é similar á das ecuacións de segundo grao.

Para resolver este tipo de inecuacións procédese do mesmo xeito que vimos na alternativa a resolución ás inecuacións de primeiro grao. Para que quede máis claro, tranformamos a inecuación nunha inecuación na que un dos membros sexa 0. Unha vez neste caso, resolvemos a ecuación correspondente para obter os puntos críticos, nos que cambia o signo da expresión. Unha vez que se teñen os puntos críticos mírase o signo da expresión en cada un dos intervalos xerados por eses puntos.

Exercicio resolto 3.6

Resolve a seguinte inecuación: $(x-3)^2 \leq 4$

Resolución

Antes de comezar a resolver a inecuación, tratamos de obter unha inecuación equivalente na que un dos membros é 0.

$$(x-3)^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

Unha vez que obtemos a inecuación equivalente, imos resolver a ecuación asociada a esta última inecuación. Neste caso $x^2 - 6x + 5 = 0$. As solucións de esta ecuación son $x = 1$ e $x = 5$. Obtemos por tanto dous puntos críticos que dan lugar a tres intervalos. Agora analizamos o signo en cada un deses intervalos para a expresión $x^2 - 6x + 5$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, +\infty)$
Signo da expresión $x^2 - 6x + 5$	$+$	$-$	$+$

Tal como obtivemos antes, precisamos aqueles valores que fan que a expresión sexa negativa ou valga 0. Como xa obtivemos os puntos onde é igual a 0 e obtivemos o intervalo onde é negativa, temos que a solución é **S**$=[1, 5]$

Inecuacións polinómicas

Os métodos que se siguen para resolver inecuacions de segundo grao cunha incógnita podemos aplicar tamén ás inecuacións polinómicas de grao superior a dous.

Neste caso, ao igual que se facía coas ecuacións polinómicas, debemos descompoñer previamente o polinomio en factores de grao un ou grao dous. Unha vez feito este paso, basta con igualar cada un dos factores a cero para obter os puntos críticos que nos determinan os intervalos de cambios de signo. Este método tamén sirve se o aplicamos a un polinomio de segundo grao, pois se temos as súas raíces, obtemos dous factores de grao un, no que é moi sinxelo analizar o signo que ten cada factor.

Exercicio resolto 3.7

Resolve a seguinte inecuación: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Resolución

Esta é a mesma inecuación que no exercicio resolto anterior, pero imos obter a súa solución factorizando o polinomio. Como xa obtivemos previamente as raíces do polinomio ($x = 1$ e $x = 5$) temos que $x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) \leq 0$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, +\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)(x-5)$	$+$	$-$	$+$

Estudando o signo e os extremos, do mesmo xeito que fixemos antes, obtemos que **S**$=[1, 5]$

Tal como procedemos neste exercicio resolto podemos proceder para calquera expresión polinómica na que teñamos que conseguir os factores, ou aquelas expresións que xa temos factorizadas. Tamén será útil á hora de resolver as inecuacións racionais que veremos a continuación.

Inecuacións racionais

Unha inecuación racional é aquela na que aparecen fraccións alxébricas.

Para resolver debemos operar previamente as fraccións para deixar, como nos casos anteriores, nun membro só o 0. Unha vez que chegamos a esta expresión, neste caso igualamos a 0 o numerador e o denominador para obter os puntos críticos e estudar, como fixemos ata o de agora os signos da expresión en cada un dos intervalos xerados. No caso de que o símbolo utilizado sexa un dos non estrictos ($\leq$ ou $\geq$), debemos **descartar aquel extremo que anule o denominador**.

Exercicio resolto 3.8

Resolve a seguinte inecuación: $\dfrac{x-3}{x+1} \leq 0$

Resolución

Tal como comentamos igualamos a 0 o numerador e o denominador:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Analizamos o signo en cada un dos intervalos para cada unha das expresións e na fracción completa.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{x-3}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

Neste caso precisamos que a fracción sexa negativa ou igual a cero. Tras analizar o signo vemos facilmente o intervalo no que a fracción é negativa. Porén, non é tan doado saber se temos que coller ou non os extremos dos intervalos, a pesar de ter o símbolo $\leq$. Debemos descartar aquel extremo (ou aqueles extremos) do intervalo que anulen o denominador.
Tendo en conta o anterior obtemos que a solución desta inecuación é **S**$=(-1, 3]$

3.6. Sistemas de ecuacións

Antes de entrar en profundidade cos sistemas de ecuacións debemos lembrar que:

- Unha **solución** dunha ecuación con varias incógnitas é un conxunto de valores (un para cada incógnita) que fan certa a igualdade. Por exemplo, unha solución da ecuación $2x + y = 8$ é $x = 2$ e $y = 4$, pois $2 \cdot 2 + 4 = 8$.
- As ecuacións con máis dunha incógnita adoitan ter infinitas solucións.
- Un **sistema de ecuacións** é un conxunto de ecuacións que deben verificarse simultáneamente.
- Resolver un sistema consiste en atopar todas as solucións comúns a cada unha das ecuacións que o forman.

Para resolver os sistemas existen varios procedementos, pero previamente axuda moito transformar cada unha das ecuacións en ecuacións equivalentes.

Dicimos que unha ecuación é **linear** se cada unha das incógnitas está elevada a 1 (grao un) e non están multplicadas entre si.

Estudaremos os sistemas en función do seu número de incógnitas e da linearidade ou non linearidade das súas ecuacións.

Sistemas de ecuacións lineares con dúas incógnitas

Un sistema de ecuacións lineares con dúas incógnitas é da forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'x = c' \end{cases}$$

Para resolver os sistemas desta forma podemos proceder gráficamente ou alxebricamente.

Resolución gráfica

Cada unha das ecuacións lineares con dúas incógnitas representan unha recta.

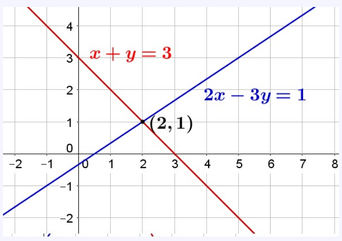
Para resolver o sistema, representamos cada unha rectas que forman o sistema e vemos en que puntos se tocan. Pode darse o caso que se corten nun só punto, que sexan a mesma recta ou que sexan paralelas, obtendo así unha, infinitas ou ningunha solución respectivamente.

Exemplo 3.16

Resolvamos alxebricamente o seguinte sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$.

Representamos nos eixos cartesianos cada unha das rectas que corresponden as solucións de cada unha das ecuacións do sistema.

O punto $(2, 1)$ é común a ambas rectas. Por tanto, $x = 2$ e $y = 1$ é a solución, neste caso única, do sistema.



Resolución alxébrica

Repasemos os tres métodos elementais que nos permiten resolver alxebricamente os sistemas de ecuacións lineares con dúas incógnitas. Son os métodos de *igualación, substitución* e *redución.*

- **Método de substitución**.

  O proceso consiste en despexar unha das incógnitas en calquera das ecuacións e substituir ese valor na outra ecuación.

  Obtemos así unha ecuación de primeiro grao cunha soa incógnita, que podemos resolver sinxelamente.

  Unha vez resolta a ecuación, substituimos o valor obtido na expresión na que aparece despexada a outra incógnita, aínda que tamén podemos facelo en calquera das ecuacións iniciais.

  Este método é útil nos casos nos que temos algunha das incógnitas con coeficiente 1, pois o seu despexe é moi sinxelo.

Exemplo 3.17

Resolvamos o seguinte sistema polo método de substitución $\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right.$.

Despexamos a x na primeira ecuación obtendo $x=3-y$.
Substituimos esa expresión na segunda ecuación e resolvemos a ecuación:

$$2\cdot(3-y)-3y=1 \Rightarrow 6-2y-3y=1 \Rightarrow 5=5y \Rightarrow y=1$$

Substituimos $y=1$ no despexe $x=3-y$ e obtemos $x=3-1=2$
Temos por tanto que a solución do sistema é, tal como vimos no método gráfico $x=2$, $y=1$.

- **Método de igualación**.

  O proceso consiste en despexar a mesma incógnita nas dúas ecuacións e igualar as expresións

  Obtemos así unha ecuación de primeiro grao cunha soa incógnita, que podemos resolver sinxelamente.

  Unha vez resolta a ecuación, substituimos o valor obtido nalgunha das expresións na que aparece despexada a outra incógnita, aínda que tamén, como sucede no método de substitución, podemos facelo en calquera das ecuacións iniciais.

Exemplo 3.18

Resolvamos o seguinte sistema polo método de igualación $\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right.$.

Despexamos a x na primeira ecuación obtendo $x=3-y$ e na segunda ecuación obtendo $x=\dfrac{1+3y}{2}$.
Igualamos ambas expresións e resolvemos a ecuación

$$3-y=\frac{1+3y}{2} \Rightarrow 2\cdot(3-y)=1+3y \Rightarrow 6-2y=1+3y \Rightarrow 5=5y \Rightarrow y=1$$

Substituimos $y=1$ nun dos despexes, neste caso no primeiro, $x=3-y$, por non ter denominadores e obtemos $x=3-1=2$
Temos por tanto que a solución do sistema é, tal como xa vimos $x=2$, $y=1$.

- **Método de redución**.

  Este método consiste en transformar algunhas das ecuacións noutras equivalentes de xeito que, ao sumalas ou restalas se elimine unha das incógnitas.

  Para resolver, observamos se algunha das incógnitas ten os coeficientes opostos nas dúas ecuacións.

  No caso contrario, multiplicamos cada ecuación polo número adecuado para que unha das incógnitas teña os coeficientes opostos nas dúas ecuacións.

  Unha vez que unha das incógnitas ten coeficientes opostos, sumamos membro a membro as dúas ecuacións e resolvemos a ecuación linear resultante.

  Para obter o valor da outra incógnita podemos substituir o valor que acabamos de conseguir nalgunha das ecuacións iniciais e resolver, ou ben, utilizar de novo o método de redución para eliminar a outra incógnita.

Exemplo 3.19

Resolvamos o seguinte sistema polo método de reducción $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$.

Como xa temos unha das incógnitas con signos opostos, basta con ver se somos capaces de que teñan o coeficiente oposto. Para iso neste caso, basta con multiplicar por 3 a primeira ecuación, pasando de $x+y=3$ a $3x+3y=9$.
Agora sumamos membro a membro ambas ecuacións:

$$\begin{array}{cccc} 3x & + & 3y & = & 9 \\ 2x & - & 3y & = & 1 \\ \hline 5x & & & = & 10 \end{array}$$

Se resolvemos a ecuación resultante $5x=10$, obtemos que $x=2$. Para obter o valor da outra incógnita basta con substituír ese valor nunha das ecuacións inicias. Efectivamente $2+y=3 \Rightarrow y=1$, obtendo por tanto que a solución é $x=2$, $y=1$.

Sistemas de ecuacións non lineares con dúas incógnitas

Dicimos que un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas é **non linear** se unha ou ambas ecuación son non lineares. En función dos termos cuadráticos que teñamos nas ecuacións será máis útil un método ou outro, pero xeralmente utilizaremos o método de substitución, deixando o de reducción para sistemas nos que teñamos termos semellantes en ambas ecuacións.

Exercicio resolto 3.9

Resolve o sistema $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x^2-y=9 \end{cases}$

Resolución

Dado que non temos os mesmos termos en ambas ecuacións, neste caso é moi útil o método de substitucion. Para iso despexamos unha das incógnitas na ecuación linear e substituimola na outra (por comodidade farémolo coa que non ten grao 2 na segunda ecuación). Obtemos así que $y=2x-1$
Se substituímos na segunda ecuación obtemos que $x^2-(2x-1)=9$, ecuación que equivale a $x^2-2x-8=0$. Se resolvemos esta ecuación obtemos que $x=-2$ ou $x=4$. Temos neste caso que ver o valor da outra incógnita para cada un dos valores de x. Por tanto temos que se $x=-2$, $y=2\cdot(-2)-1=-5$, e se $x=4$, $y=2\cdot 4-1=7$.
Por tanto as solucións deste sistema son: $x_1=-2$, $y_1=-5$ e $x_2=4$, $y_2=7$.

Sistemas de ecuacións lineares. Método de Gauss

Unha **ecuación linear con tres incógnitas** é calquera ecuación equivalente a $ax+by+cz=d$, con a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Unha solución dunha ecuación está formada por tres valores que satisfan a ecuación.

Igual que sucedía coas ecuación lineares de dúas incógnitas, unha ecuación linear con tres incógnitas ten **infinitas solucións**.

No caso das de dúas incógnitas todas as solución representaban unha recta, en cambio nun sistema de tres incógnitas, o conxunto das solución representan un **plano**.

Resolución de sistemas graduados

Un sistema **graduado** de tres ecuacións con tres incógnitas é un sistema de tres ecuación onde unha ecuación contén unha soa incógnita, outra das ecuacións pode conter dúas incógnitas (unha delas a que xa tiñamos na primeira ecuación) e a terceira ecuación pode conter as tres incógnitas.

Para resolver un sistema de ecuacións graduado resolvemos primeiro a ecuación cunha soa incógnita, substituíndo esta na segunda ecuación para obter a segunda incógnita e repetindo o proceso na terceira ecuación ata resolver todas as incógnitas.

Exemplo 3.20

Resolvamos o seguinte sistema graduado $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-5y-10z & = & -15 \\ 2y+5z & = & 4 \\ 3z & = & -6 \end{array}\right.$

A resolución deste sistema pode facerse de xeito moi sinxelo.

- Primeiro resolvemos a 3ª ecuación: $3z=-6 \Rightarrow z=-2$.
- Agora substituimos o valor obtido para z na segunda ecuación, obtendo $2y+5\cdot(-2)=4$. Resolvemos a ecuación obtida para obter o valor de y.

$$2y-10=4 \Rightarrow 2y=14 \Rightarrow y=7$$

- Repetimos o proceso na primeira ecuación cos valores obtidos ata o de agora e substuíndoos: $3x-5\cdot 7-10\cdot(-2)=-15$. Resolvemos a ecuación resultante:

$$3x-35+20=-15 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0$$

Temos por tanto que a solución é $x=0, y=7, z=-2$.

Debemos notar que, pese a que se acostuma a traballar cun sistema triangularizado (no que as incógnitas que faltan son as dunha das esquinas do sistema), tamén pode ser graduado calquera outro que cumpra as condicións da definición. Vexamos un exemplo de sistema graduado que non é triangular.

Exemplo 3.21

Resolvamos o seguinte sistema graduado $\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & - & 2z & = & -4 \\ & & 4y & & & = & 24 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \end{array}\right.$

A pesar de que a simple vista non o pareza, este sistema tamén e *graduado*, polo que procederemos dun xeito similar:

- Primeiro resolvemos a 2ª ecuación: $4y=24 \Rightarrow y=6$.
- Agora substituimos o valor obtido para y na primeira ecuación, obtendo $6-2z=-4$. Resolvemos a ecuación obtida para obter o valor de z.

$$10=2z \Rightarrow z=5$$

- Repetimos o proceso na terceira ecuación cos valores obtidos ata o de agora e substuíndoos: $x-2\cdot 6+5=-5$. Resolvemos a ecuación resultante:

$$x-12+5=-5 \Rightarrow x=2$$

Temos por tanto que a solución é $x=2, y=6, z=5$.

Método de Gauss

Como acabamos de ver, os sistemas graduados son moi sinxelos de resolver. O método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuacións lineares calquera nun sistema graduado.

Debemos remarcar que, aínda que a tendencia sexa a de transformar un sistema en un sistema triangular, ás veces resulta moito máis cómodo anular as incógnitas noutras ecuacións. Vexamos con algúns exemplos.

Exemplo 3.22

Resolvamos o seguinte sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & = & 21 \\ 3x & + & y & - & z & = & -18 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 12 \end{array}\right.$

Este sistema non é graduado, pero podemos facer transformacións para conseguir que o sexa. Como non hai ningunha incógnita que se anule doadamente en dúas ecuacións, podemos comezar po intentar eliminar o x da segunda e da terceira ecuación:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x - & 3y + & 4z & = & 21 \\ 3x + & y - & z & = & -18 \\ 2x - & y + & 3z & = & 12 \end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} (1^{\underline{a}}) \\ (2^{\underline{a}}) - 3\cdot(1^{\underline{a}}) \\ (3^{\underline{a}}) - 2\cdot(1^{\underline{a}}) \end{array}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x - & 3y + & 4z & = & 21 \\ & 10y - & 13z & = & -81 \\ & 5y - & 5z & = & -30 \end{array}\right.$$

Agora trataremos de conseguir que se anule o y dalgunha das dúas últimas ecuacións, e tamén vemos se podemos simplificar algunha das ecuacións.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -3y & +4z & = & 21 \\ & 10y & -13z & = & -81 \\ & 5y & -5z & = & -30 \end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} (1^{\underline{a}}) \\ (2^{\underline{a}}) - 2\cdot(3^{\underline{a}}) \\ (3^{\underline{a}}) : 5 \end{array}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x - & 3y + & 4z & = & 21 \\ & - & 3z & = & -21 \\ & y - & z & = & -6 \end{array}\right.$$

Acabamos de transformar un sistema calquera de 3 incógnitas nun sistema graduado, que podemos resolver moi doadamente.

Se resolvemos o sistema obtemos que $z = 7$ pola segunda ecuación, $y = 1$ tras utilizar agora a terceira ecuación e $x = -4$ ao substituír na primeira. Por tanto a solución é $x = -4, y = 1, z = 7$.

Neste exemplo fomos deténdonos en cada caso, pero no seguinte trataremos de facer todos os cálculos seguidos.

Exemplo 3.23

Resolvamos o seguinte sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & & & - & z & = & 9 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 13 \end{array}\right.$

Como nunha das ecuación xa nos falta unha incógnita, antes de nada trataremos de suprimir esa incógnita nunha das ecuacións:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +z & = & 3 \\ 2x & & -z & = & 9 \\ 3x & +y & -2z & = & 13 \end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} (1^{\underline{a}}) \\ (2^{\underline{a}}) \\ (3^{\underline{a}})\cdot 2 + (1^{\underline{a}}) \end{array}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +z & = & 3 \\ 2x & & -z & = & 9 \\ 7x & & -3z & = & 29 \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} (1^{\underline{a}}) \\ (2^{\underline{a}}) \\ (3^{\underline{a}}) - 3\cdot(2^{\underline{a}}) \end{array}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +z & = & 3 \\ 2x & & -z & = & 9 \\ x & & & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{lcl} (3^{\underline{a}}) & \longrightarrow & x = 2 \\ (2^{\underline{a}}) & \longrightarrow & z = -5 \\ (1^{\underline{a}}) & \longrightarrow & y = -3 \end{array}$$

A solución é $x = 2, y = -3, z = -5$.

Tipos de sistemas según as solucións

Se analizamos o caso de dúas ecuacións lineares, ao representar graficamente cada unha das ecuacións obtemos dúas rectas. Ata o de agora eramos quen de dicir o número de solucións en función de se se cortaban nun punto, eran paralelas ou coincidientes. Vexamos agora como podemos clasificar os sistemas segundo o número de solucións:

- Se as dúas rectas se cortan nun só punto, temos que o sistema ten unha soa solución. Dicimos que o sistema é **compatible determinado**.
- Se as dúas rectas coinciden teñen todos os puntos en común, polo que todas as solucións dunha das ecuacións tamén o son da outra. Dicimos que o sistema é **compatible indeterminado**.
- Se as rectas son paralelas non teñen punto en común algún, polo que o sistema non tén solución. Dicimos que o sistema é **incompatible**.

Podemos resumir esto co seguinte esquema:

$$\text{Sistemas}\left\{\begin{array}{l}\text{Compatibles } \textit{(Teñen solución)}\left\{\begin{array}{l}\text{Determinados } \textit{(Un conxunto finito de solucións)}\\ \text{Indeterminados } \textit{(Un conxunto infinito de solucións)}\end{array}\right.\\ \text{Incompatibles } \textit{(Non teñen solución)}\end{array}\right.$$

Esta clasificación tamén nos serve para os sistemas de ecuacións lineares con tres incógnitas. Se tras efectuar o método de Gauss non somos quen de obter un sistema graduado tal como o vimos antes podemos atoparnos coas seguintes opcións:

- Ao operar obtemos unha igualdade falsa na que nun dos membros é 0 e o outro dos membros da mesma ecuación é un número calquera distinto de 0. Se isto sucede, o sistema non ten solución polo que o sistema é **incompatible**.

Exemplo 3.24

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +3z & = & 3\\ 4x & & -2z & = & 2\\ 2x & & -z & = & 2\end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}(1^{\underline{a}})\\(2^{\underline{a}})\\(3^{\underline{a}})\cdot 2-(2^{\underline{a}})\end{array}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +3z & = & 3\\ 4x & & -2z & = & 2\\ & & 0 & = & 2\end{array}\right.$$

- Ao operar unha das ecuacións anúlase totalmente, pois obtemos a expresión $0 = 0$. Neste caso reducimos o número de ecuacións en unha. Se o número de ecuacións é inferior ao número de incógnitas o sistema ten infinitas solucións, polo que o sistema é **compatible indeterminado**.

Exemplo 3.25

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +3z & = & 3\\ 6x & & -2z & = & 2\\ 3x & & -z & = & 1\end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}(1^{\underline{a}})\\(2^{\underline{a}})\\(3^{\underline{a}})\cdot 2-(2^{\underline{a}})\end{array}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +3z & = & 3\\ 6x & & -2z & = & 2\\ & & 0 & = & 0\end{array}\right.$$

Neste caso, temos que poñer as incógnitas en función das demais.
Pola segunda ecuación obtemos que $z = 3x - 1$. Substituindo na primeira obtemos que $x + 2y + 3(3x - 1) = 3$. Polo que tamén podemos poñer y en función de x.
Neste caso $x + 2y + 9x - 3 = 3 \Rightarrow 10x + 2y = 6 \Rightarrow 5x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 5x$.

A solución por tanto é $x = x, y = 3 - 5x, z = 3x - 1$, polo que para cada valor de x temos unha terna que é solución do sistema.

3.7. Sistemas de inecuacións

Un sistema de **inecuacións** é un conxunto de inecuacións que deben verificarse simultaneamente.

Para resolver un sistema de inecuacións resolvemos cada unha das inecuacións e a solución é a intersección de todas as solucións.

Exercicio resolto 3.10

Resolve o sistema $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 4 \leq (x+2)^2 \end{array} \right.$

Resolución

Resolvemos cada unha das inecuacións por separado.

Obtemos dun doadamente a solución de $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. É unha inecuación de segundo grao, na que atopamos os puntos críticos nos que se cumpre que $x^2 - 3x + 2 = 0$ e analizamos o signo. A solución desta inecuación é **S**$=(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

Para resolver a segunda inecuación debemos operar previamente e simplificar a expresión

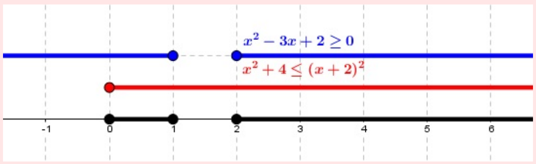
$$x^2 + 4 \leq (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 4 \leq x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 0 \leq x$$

Por tanto a solución desta inecuación é $\mathbf{S} = [0, +\infty)$.

Temos que ver agora a intersección de ambas solucións.

$$((-\infty, 1] \cup [2, +\infty)) \cap [0, +\infty) = [0, 1] \cup [2, +\infty)$$

Entón a solución do sistema é $\mathbf{S} = [0, 1] \cup [2, +\infty)$. Vémolo dun xeito máis gráfico se analizamos a representación de cada un dos intervalos:



3.8. Exercicios

Polinomios

1. Razoa se os números 1, -2 e 3 son ou poden ser raíces dos seguintes polinomios

   a) $x^4 - 3x^3 - x^2 - 6x + 2$

   b) $2x^3 - 7x^2 - 16x + 5$

2. Factoriza os seguintes polinomios:

   a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

   b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

   c) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

   d) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

   e) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

   Sol: a) $(x+2)(x-1)(x+1)$
   b) $(x+3)(x+2)(x-2)$
   c) $x^3(x-2)^2(x-5)$
   d) $x(x-4)(x-1)(x+1)(x^2+x+2)$
   e) $x(x-1)(x^2+1)$

3. a) Intenta factorizar $x^4+4x^3+8x^2+7x+4$.

   b) Faino agora sabendo que é disivible por $x^2 + x + 1$.

   Sol: $(x^2+x+1)(x^2+3x+4)$

Fraccións alxébricas

4. Efectúa:

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$$

   Sol: $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1}$

5. Efectúa estas operacións:

   a) $\dfrac{x^2-2x-3}{x-5} \cdot \dfrac{2x+2}{x-3}$

   b) $\dfrac{x^2-2x-3}{x-5} : \dfrac{2x+2}{x-3}$

   Sol: a) $\dfrac{2x^2+4x+2}{x-5}$, *b)* $\dfrac{x^2-6x+9}{2x-10}$

6. Efectúa estas operacións:

   a) $\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x^2-x}{x^2+1}$

   b) $\dfrac{3x^2-12x-6}{x^3-3x-2} + \dfrac{2}{x-2}$

   Sol: a) $\dfrac{x}{x+1}$, *b)* $\dfrac{5x+2}{x^2+2x+1}$

7. Demostra as seguintes identidades:

   a) $\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = \dfrac{1}{x}$

   b) $\dfrac{a^2-1}{a^2-3a+2} : \dfrac{a^2+2a+1}{a^2-a-2} = 1$

Ecuacións

8. Resolve estas ecuacións:

   a) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

   b) $\dfrac{x^2-2x+5}{2} - \dfrac{x^2+3x}{4} = \dfrac{x^2-4x+15}{6}$

   Sol: a) 2 e -2, *b)* 0 e 13

9. Resolve estas ecuacións bicadradas:

   a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

   b) $x^4 + 3x^2 - 4$

   c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

   d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

   Sol: a) $-2, 2, -1$ e 1, *b)* -1 e 1,
   c) Non hai solucións reais, d) -1, 1, $-2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$

10. Resolve estas ecuacións:

    a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$

    b) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$

    c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

    d) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1} = 3$

    e) $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{3}{2}$

    f) $\dfrac{x+3}{x-1} - \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{26}{35}$

Sol: a) $-5, 2$, b) $3, \frac{4}{5}$, c) $2, -\frac{2}{3}$, d) 3, e) $-4, 3$, f) $6, -\frac{8}{13}$

11. Resolve estas ecuacións:

    a) $1 - 5x = \sqrt{2x+1}$

    b) $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = x$

    c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$

    d) $\sqrt{1-x} + \sqrt{2x+2} = 0$

    e) $\sqrt{6 + \sqrt{4x-3}} = 3$

    f) $\sqrt{2 \cdot \dfrac{x+4}{x-3}} = x - 2$

Sol: a) 0, b) 1, c) 5, d) Non hai solución, e) 3, f) 5

12. Resolve as seguintes ecuacións:

    a) $3^x = \sqrt[3]{9}$

    b) $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$

    c) $5 \cdot 7^{-2x} = 35$

    d) $0{,}5^x = 16$

Sol: a) $\frac{2}{3}$, b) 1, c) $-\frac{1}{2}$, d) -4

13. Resolve as seguintes ecuacións:

    a) $2^{3x} = 0,5^{3x+2}$

    b) $3^{7-x^2} = \dfrac{1}{9}$

    c) $2^{x+1} \cdot 5^{x+1} = 0{,}01$

    d) $7^{x+2} = 5\,764\,801$

Sol: a) $\frac{1}{3}$, b) $3, -3$, c) -3, d) 6

14. Resolve as seguintes ecuacións tomando logaritmos:

    a) $\dfrac{1}{e^x} = 27$

    b) $2^x \cdot 3^x = 64$

    c) $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 100$

    d) $\dfrac{3^x}{2^{x+1}} = 1$

Sol: a) $x \approx -3{,}2958$, b) $x \approx 2{,}3211$, c) $x \approx 10{,}644$, d) $x \approx 1{,}7095$

15. Resolve as seguintes ecuacións mediante un cambio de variable:

    a) $2^x + 2^{1-x} = 3$

    b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \dfrac{5}{2}$

    c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \dfrac{17}{16}$

    d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

    e) $9^x - 3^x - 6 = 0$

Sol: a) $0, 1$ b) 0, c) -1, d) $0, 2$, e) 1

16. Resolve as seguintes ecuacións logarítmicas:

    a) $\log(x^2+1) - \log(x^2-1) = \log \dfrac{13}{12}$

    b) $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 + \ln(x-1)$

    c) $2\ln(x-3) = \ln x - \ln 4$

    d) $\log(x+3) - \log(x-6) = 1$

Sol: a) $5, -5$ b) 5, c) 4, d) 7

17. Resolve as seguintes ecuacións:

    a) $\log(x+9) = 2 + \log x$

    b) $\log\sqrt{3x+5} + \log\sqrt{x} = 1$

    c) $2(\log x)^2 - 10\log x + 8 = 0$

    d) $\log(x^2 - 7x + 110) = 2$

    e) $\log(x^2 + 7x) = 1 + \log(x+1)$

    f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

Sol: a) $\frac{1}{11}$, b) 5, c) $10, 10\,000$, d) $2, 5$, e) 5, f) $\frac{e}{2}$

Inecuacións

18. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $x^2 - 6x + 9 > 0$
b) $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$
c) $x^2 + 3x > 0$
d) $x^2 + 1 \leq 0$
e) $(x-3)^2 \leq 4$

Sol: a) $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - \{3\}$, *b)* $[-2, \frac{1}{3}]$,
c) $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$, *d)* $\emptyset$, *e)* $[1, 5]$

19. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $3(x^2 - 1) - 5(x - 2) > 0$
b) $x^2 - 7 \geq -3(x - 1)$
c) $x^2 + \dfrac{1}{4} < x - 2$
d) $2(5 - x^2) > 3x + 1$
e) $\dfrac{2x - 1}{5} > \dfrac{3x^2}{2}$

Sol: a) $\mathbb{R}$, *b)* $(-\infty, -5] \cup [2, +\infty)$,
c) $\emptyset$, *d)* $(-3, \frac{3}{2})$, *e)* $\emptyset$

20. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $x(x - 5)(x + 3) < 0$
b) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \geq 0$
c) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 < 0$
d) $x(x^2 + 3) < 0$

Sol: a) $(-\infty, -3) \cup (0, 5)$,
b) $(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [2, +\infty)$,
c) $(-1, 3)$, *d)* $(-\infty, 0)$

21. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $\dfrac{x + 2}{x - 1} \leq 0$
b) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2} > 0$
c) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} \leq 0$
d) $\dfrac{x^2}{x - 5} < 0$

Sol: a) $[-2, 1)$, *b)* $(-1, 2) \cup (4, +\infty)$,
c) $(-2, -1] \cup (2, 3]$, *d)* $(-\infty, 0) \cup (0, 5)$

Sistemas de ecuacións

22. Resolve os seguintes sistemas de ecuacións:

a) $\begin{cases} x^2 - 2y = 3 \\ x - y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 16 \\ x + y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy = 15 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Sol: a) $x = -3, y = 3$ *e* $x = 5, y = 11$,
b) $x = 1, y = 5$ *e* $x = 5, y = 1$,
c) $x = -4, y = -3$ *e* $x = \frac{8}{3}, y = \frac{1}{3}$,
d) $x = -5, y = -3$ *e* $x = 5, y = 3$

23. Resolve os seguintes sistemas de ecuacións:

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

Sol: a) $x = 10, y = 100$, *b)* $x = 2, y = 3$,
c) $x = 4, y = 3$, *d)* $x = \frac{10}{3}, y = \frac{1}{3}$

24. Resolve os seguintes sistemas de ecuacións graduados:

a) $\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 7 \\ 2x & -\ 3y & & = & 8 \\ 3x & +\ y & -\ z & = & 12 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x & +\ 4y & & = & 0 \\ & 3y & & = & -9 \\ 4x & +\ y & -\ 4z & = & 13 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +\ 2y & -\ z & = & -3 \\ x & -\ 2y & & = & 3 \\ & 5y & & = & -10 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & +3y & -2z & = & 8 \\ & 2y & & = & 8 \\ 3x & & & = & 9 \end{array}\right.$

Sol: a) $x=7, y=2, z=11$,
b) $x=4, y=-3, z=0$,
c) $x=-1, y=-2, z=-2$,
d) $x=3, y=4, z=5$

25. Resolve os seguintes sistemas de ecuacións mediante o método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x & +2y & -z & = & 0 \\ x & -2y & +z & = & 8 \\ x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rrrrr} x & -y & +z & = & 1 \\ x & +y & -z & = & -1 \\ x & +y & +z & = & 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +y & -3z & = & 8 \\ x & & -2z & = & -1 \\ & y & +z & = & 1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & +y & +3z & = & 11 \\ x & -6y & +4z & = & 31 \\ x & +y & +z & = & 6 \end{array}\right.$

Sol: a) $x=2, y=-1, z=4$ b) $x=0, y=0, z=1$,
c) $x=-9, y=5, z=-4$, d) $x=21, y=-7, z=-8$

26. Resolve os seguintes sistemas de ecuacións mediante o método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +y & +z & = & 2 \\ x & -y & +z & = & 6 \\ x & -y & -z & = & 0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & +3y & & = & 14 \\ x & -2y & +z & = & -3 \\ 2x & -y & -z & = & 9 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x & -4y & +2z & = & -3 \\ 4x & +2y & -4z & = & 4 \\ 2x & -3y & +z & = & -3 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x & +y & +2z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & 1 \\ 2x & +2y & -3z & = & 1 \end{array}\right.$

Sol: a) $x=1, y=-2, z=3$ b) $x=4, y=2, z=-3$,
c) $x=1, y=2, z=1$, d) $x=1, y=1, z=1$

27. Resolve os seguintes sistemas de ecuacións, e clasifícaos en incompatibles (S.I.), compatibles indeterminados (S.C.I.) ou compatibles determinados (S.C.D.).

a) $\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & +y & -z & = & -1 \\ x & -y & +z & = & 4 \\ 4x & -y & +z & = & 2 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & +y & -z & = & -1 \\ x & -y & +z & = & 4 \\ 4x & -y & +z & = & 7 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rrrrr} x & -y & & = & 1 \\ 2x & +6y & -5z & = & -4 \\ x & +y & -z & = & 0 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & -y & -z & = & 2 \\ 3x & -2y & -2z & = & 2 \\ 5x & -3y & -5z & = & 1 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +y & +z & = & 3 \\ -x & +2y & +z & = & 5 \\ x & +4y & +3z & = & 1 \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & -z & = & -1 \\ 3x & +y & +z & = & 1 \end{array}\right.$

Sol: a) S.I., b) S.C.I. $x=1, y=y, z=y+3$,
c)S.C.D. $x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}, z=2$,
d) S.C.D. $x=2, y=\frac{1}{2}, z=\frac{3}{2}$,
e) S.I, f) S.C.I. $x=0, y=1-z, z=z$

28. Escribe tres solucións diferentes para os sistemas compatibles indeterminados do exercicio anterior.

29. O polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ cumpre que:

$$P(1)=0; P(-2)=12; P(3)=2$$

Calcula a, b e c.

Sol: $a=1, b=-3, c=2$

30. A suma das tres cifras dun número é igual a 7. A cifra das decenas é unha unidade maior ca suma das outras dúas. Se invertemos a orde das cifras, o número aumenta en 99 unidades. Cal é ese número?

Sol: 142

31. Queremos repartir, mediante un sistema de ecuacións, 330 euros entre tres persoas de forma que a primeira reciba 20 euros máis cá segunda e a terceira a metade do que recibiron entre as outras dúas. Como o facemos?

Sol: $120, 100$ *e* 110

Sistemas de inecuacións

32. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións:

a) $\begin{cases} 4x-3<1 \\ x+6>2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3<2(x-6)+8x \\ 2x^2+5x-12\geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-9\leq 0 \\ (x+2)(x-3)>0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2-x-6\geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-3}\leq 0 \end{cases}$

Sol: a) $(-4,1)$, *b)* $(\frac{3}{2},+\infty)$, *c)* $[-3,-2)]$, *d)* $\emptyset$

33. A base dun rectángulo mide 5 cm máis cá súa altura. Se sabemos que a superficie é superior a 14 cm^2, determina os posibles valores que pode tomar a súa altura.

Sol: $h>2$ *cm*

34. Un empresario paga a un vendedor un soldo fixo de 900 € cada mes máis 0,60 € por produto vendido. Outro vendedor non ten soldo fixo, pero cobra 1,80€ por cada produto que logra vender. A partir de que número de productos vendidos cobrará máis o segundo empleado.

Sol: 750

Parte II

ANÁLISE

Unidade 4

FUNCIÓNS

4.1. Funcións e gráficas

Definición de función

Unha **función** é unha relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha delas (**variable independente**) facémoslle corresponder, como moito, un único valor da outra variable (**variable dependente**).

Para indicar que a variable (y) depende ou é función da outra (x), usamos a notación $y = f(x)$, que recibe o nome de **imaxe** de x.

Como imos estudar as funcións de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tanto a variable x como a función $f(x)$ toman valores reais, polo que estas funcións reciben o nome de **funcións reais de variable real**.

A pesar da súa complexidade a nivel teórico, algunhas das características que posúen as funcións enténdense doadamente cando se representan nunha gráfica, xa que deste xeito resultan moi intuitivas. Neste curso imos intentar profundar un pouco máis nas propiedades e características, pero estudándoas analiticamente, ou o que é o mesmo, dende a fórmula que as define, e aplicándoas a distintas situacións, entre as que tamén atopamos a representación gráfica, pero sen depender dela.

Características das funcións

- O conxunto *Dom* dos valores que pode tomar a variable independente, x, chámase **dominio de definición da función**.

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ con } y = f(x)\}$$

- O conxunto dos valores que toma a función chámase **percorrido** ou **imaxe**.

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ con } y = f(x)\}$$

- A **gráfica** dunha función f é a representación nuns eixes de coordenadas de todos os pares da forma $(x, f(x))$, sendo x un elemento do dominio de f.

$$\text{G } (f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x\text{Dom } f\}$$

Funcións inxectivas

Unha función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dise que é inxectiva se nunca toma valores repetidos, ou o que é o mesmo, se verifica o seguinte:

$$\forall a, b \in \text{Dom } f \mid a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Moitas veces resulta máis cómodo traballar con igualdades que con desigualdades, polo que é mellor utilizar a condición equivalente:

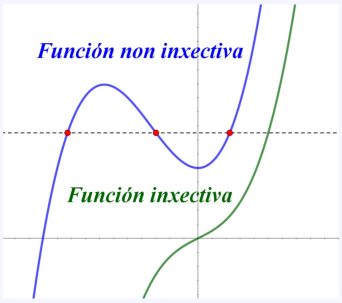
$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Para que o entendamos mellor, se $f(x)$ é unha función inxectiva, cada recta horizontal cortará a súa gráfica nun punto como moito.

Exemplo 4.1

Como comentamos na definición, para que unha función sexa inxectiva non pode ter valores repetidos. Como podemos ver na función de cor azul, hai polo menos tres veces nas que a función toma o mesmo valor, co que obtemos que esta non é inxectiva. Ademais, cúmprese que a recta horizontal corta a función en máis dun punto.

Por outra parte, a función de cor verde, non ten ningún valor repetido polo que é unha función inxectiva. Temos ademais que se estamos traballando cunha función continua, esta ou ben é estritamente crecente ou estritamente decrecente. Neste caso vemos que se trata do primeiro tipo.



4.2. Funcións elementais

Funcións polinómicas

Unha **función polinómica** é aquela que ten como expresión analítica un *polinomio*:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

Nas funcións polinómicas sempre é posible calcular a imaxe de calquera número real, polo que o seu dominio é Dom $f = \mathbb{R}$.

As funcións polinómicas máis coñecidas son as funcións afíns e as cadráticas.

Funcións afíns

Son funcións da forma $f(x) = mx + n$ onde $m, n \in \mathbb{R}$. Estas funcións teñen como dominio e como percorrido todos os números reais (coa excepción que veremos a continuación) e a súa gráfica é unha recta, de ecuación $y = mx + n$, que pasa polo punto $(0, n)$ e ten por pendente m. O valor n recibe o nome de *ordenada na orixe*. Se algúns dos valores de m ou n son iguais a 0 estamos en casos particulares das funcións afíns:

- $m = 0$

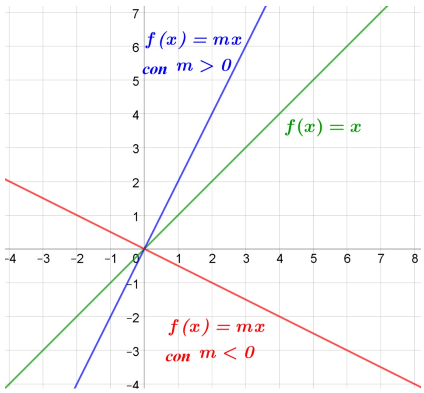
  Neste caso a función sería da forma $f(x) = n$, que é unha función **constante**, na que se transforman todos os números reais no número n, polo que o seu dominio é $\mathbb{R}$ e o seu percorrido $\{n\}$. A gráfica destas funcións é sempre unha recta *horizontal*, de ecuación $y = n$.

  Incluímos aquí tamén o caso no que tanto m coma n sexan iguais a 0.

- $n = 0$

  Neste caso a función sería da forma $f(x) = mx$, sendo m unha constante real distinta de 0. Esta función verifica que $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$, polo que reciben o nome de funcións lineares. Como dixemos antes, estas funcións teñen por dominio e percorrido todos os números reais e a súa gráfica é unha recta que pasa pola *orixe de coordenadas* e ten pendente igual a m.

  Ademais se $m = 1$ a función $f(x) = x$ recibe o nome de función identidade en $\mathbb{R}$ e a súa gráfica correspóndese coa bisectriz dos cadrantes primeiro e terceiro.



Aínda que podemos atopar a expresión da función traballando cun simple sistema, cómpre recordar a ecuación da recta que en forma punto-pendente, onde (x_0, y_0) é un punto da recta e m, a súa pendente.

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Funcións cadráticas

Son as funcións que teñen a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. A súa representación é unha parábola na que debemos determinar o *vértice* , a *orientación da apertura* e os *puntos de corte cos eixes.*

- Para calcular o vértice obtemos a súa abscisa do seguinte xeito $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e calculamos a súa ordenada substituíndo ese valor obtido na función. Así temos que o vértice é da forma $(\dfrac{-b}{2a}, f(\dfrac{-b}{2a}))$
- Para saber cara onde está aberta a parábola basta con mirar o valor de a. Se $a > 0$ a apertura da parábola está pola parte superior, tendo así que o vértice é un mínimo. En cambio, se $a < 0$, a apertura da parábola está na parte inferior, tendo así que o vértice é un máximo da función.
- Para calcular os puntos de corte cos eixes, analizaremos cada un deles por separado:
  - A parábola **sempre** vai cortar ao eixe Y no punto $(0, c)$.
  - En cambio, ver os puntos de corte co eixe X non é tan doado. Neses puntos (de existir) a ordenada é igual a 0 ($y = 0$), polo que para obtelos resolvemos a ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Como xa sabemos, unha ecuación de segundo grao pode ter dúas, unha ou ningunha solución.

    O número de solucións podemos velo previamente analizando a situación do vértice e a súa orientación. Por exemplo, se o vértice está na parte superior do eixe cartesiano e a súa apertura é cara arriba, xa sabemos que a parábola non vai cortar en ningún punto ao eixe X.

    Temos entón que a parábola pode cortar, por tanto, ao eixe X en **2**, **1** ou **0** puntos.

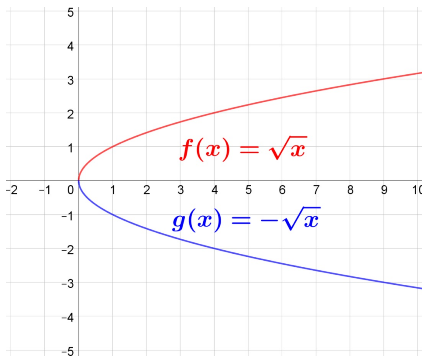
Funcións radicais

As funcións **radicais** son aquelas nas que a variable dependente se calcula facendo unha raíz da variable independente. Son da forma $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

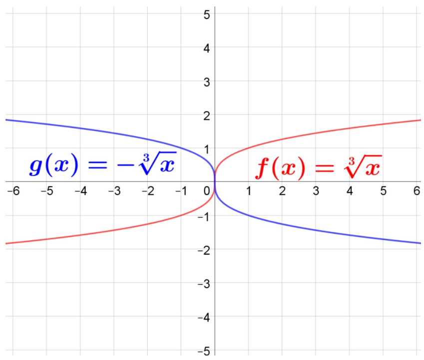
Debemos ter en conta que a raíz non sempre se pode obter, xa que non se pode facer a raíz de índice par dun número negativo. Ademais, debemos ter en conta que as raíces de índice par (en particular a cadrada) só teñen unha solución (a positiva). Non debemos confundilo coas solucións dunha ecuación de segundo grao, que esas si son dúas.

Veremos entón dous tipos de gráficas en función de seu índice.

RAÍCES DE ÍNDICE PAR



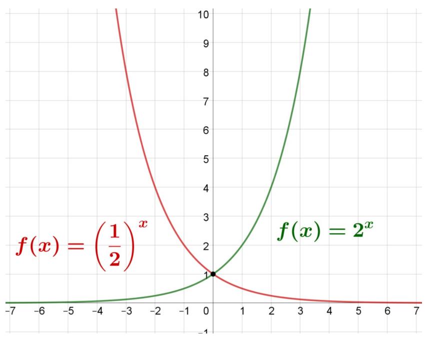
RAÍCES DE ÍNDICE IMPAR



Funcións exponenciais e logarítmicas

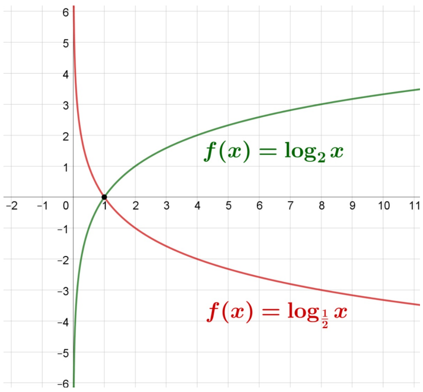
Función exponencial

As funcións **exponenciais** son da forma $f(x) = a^x$, coa condición de que $a > 0$. No caso de que sexa $a = 1$ trataríase da función constante $f(x) = 1$, que está incluída no epígrafe relacionado coas funcións afíns. Nos demais casos a gráfica dependerá de que sexa $0 < a < 1$ ou $a > 1$. Tanto unha como a outra pasarán polo punto $(0, 1)$. Ademais, se as bases de dúas funcións exponenciais son inversas, a e $\frac{1}{a}$, as súas funcións son simétricas respecto ao eixe Y, xa que cada unha delas toma para x o valor que a outra toma para $-x$. Ademais, como podes ver na gráfica, se $a > 1$, a función é estritamente crecente, e se $a < 1$, a función é estritamente decrecente.



Función logarítmica

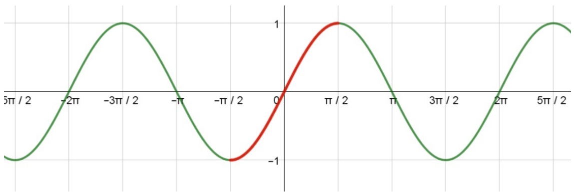
As funcións **logarítmicas** son da forma $f(x) = \log_a x$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$. Estas funcións son as inversas das exponenciais da mesma base, e, ao igual que as exponenciais, son crecentes se $a > 1$ e decrecentes se $0 < a < 1$.



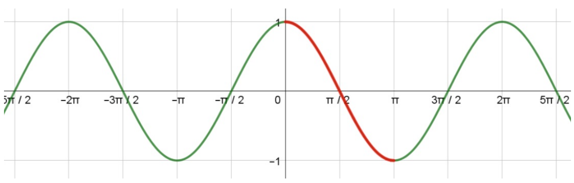
Funcións trigonométricas

Funcións trigonométricas directas

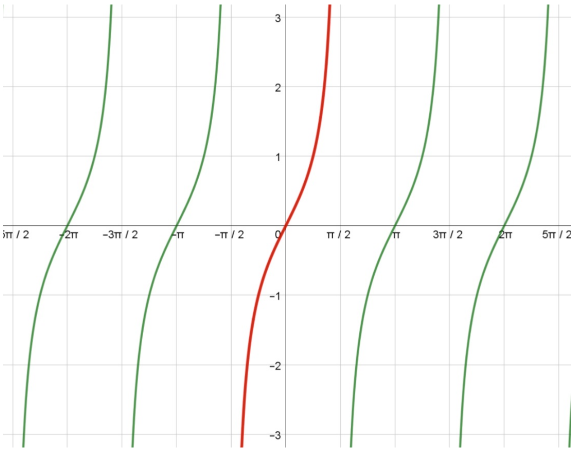
As coñecidas funcións seno, coseno e tanxente xorden das relacións métricas existentes nun triángulo rectángulo. Como xa vimos o pasado curso, as dúas primeiras están definidas para todo valor x real, mentres que a tanxente, que é equivalente ao cociente entre o seno e o coseno, non está definida nos valores de x nos que o coseno se anula. Como estas funcións son cíclicas, pois teñen que ver co ángulo, temos que son funcións periódicas de período 2π. A continuación podemos ver as gráficas destas funcións.



Gráfica da función seno



Gráfica da función coseno



Gráfica da función tanxente

Funcións definidas a anacos. Función valor absoluto

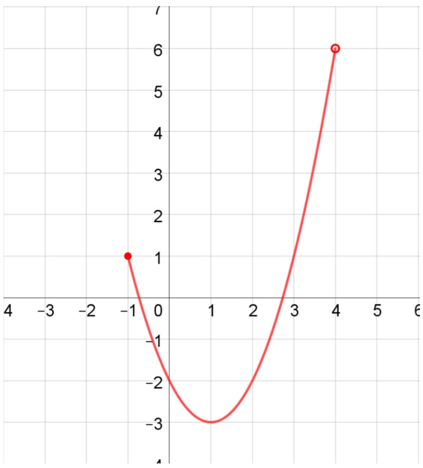
Función definida nun intervalo

Unha función pode estar definida para números reais pertencentes a un intervalo. Esto expresarémolo do seguinte xeito:

$$f(x) = x^2 - 2x - 2 \qquad \text{se } -1 \leq x < 4$$

O dominio é a intersección entre o dominio *natural* de $f(x)$ e o intervalo.

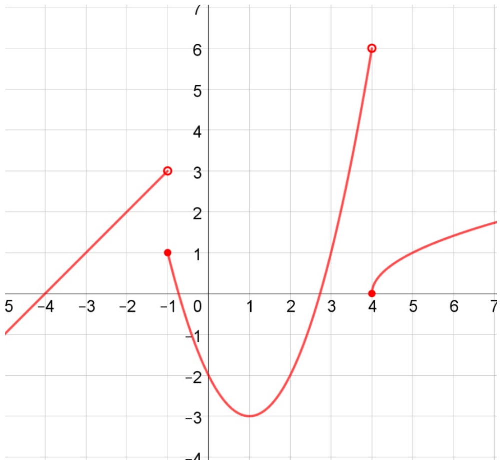
Para representar graficamente unha función definida nun intervalo I represéntanse as imaxes dos puntos do intervalo, e se o extremo do intervalo é aberto (non incluído), represéntase un punto aberto (sen pintar); se é pechado (incluído), represéntase un punto pechado (pintado).



Funcións a anacos

Unha función definida a anacos é a unión de funcións definidas en intervalos que son incompatibles entre eles (non teñen puntos en común). O dominio dunha función definida a anacos é a unión dos dominios das funcións que a compoñen e a súa representación gráfica é a representación das funcións nos seus correspondentes intervalos.

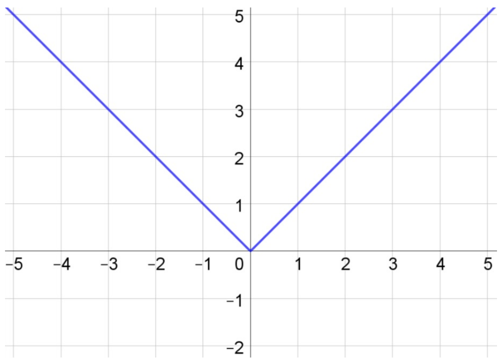
$$y = \begin{cases} x+4 & \text{se } x < -1 \\ x^2 - 2x - 2 & \text{se } -1 \leq x < 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$



Función valor absoluto

Lembremos que o valor absoluto dun número a coincide con a se é positivo ou nulo, ou co seu oposto se é negativo. Por tanto a función $y = |x|$ defínese do seguinte xeito:

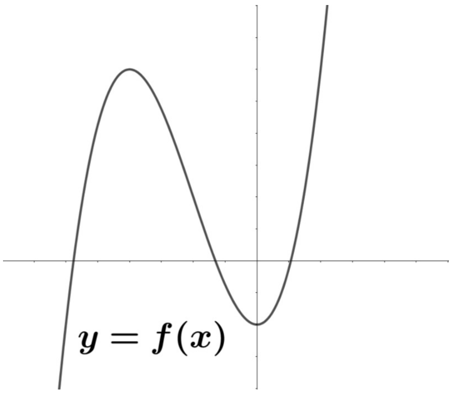
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



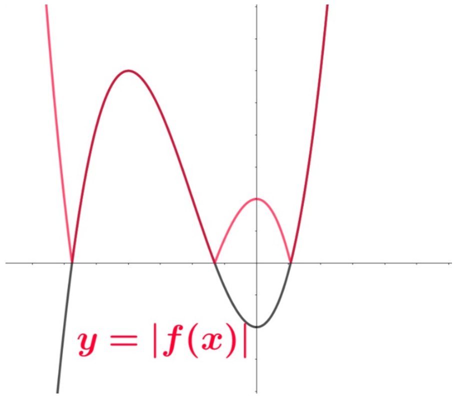
O seu dominio é $\mathbb{R}$ e o percorrido é $[0, +\infty)$.

En xeral, o **valor absoluto** dunha función defínese así:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$



$\longrightarrow$



4.3. Interpolación e extrapolación

A **interpolación** é un procedemento que nos permite coñecer, de xeito aproximado, valores intermedios que toma unha función descoñecida a partir de datos coñecidos.

Interpolación linear

A interpolación **linear** consiste en axustar os datos coñecidos a unha recta para obter os valores intermedios.

Se dunha función coñecemos os datos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) entón podemos atopar, calquera x comprendido entre x_1 e x_2 a partir dunha función afín. Dado que coñecemos dous puntos, poderemos coñecer a pendente, m da recta que pasa por eses dous puntos. Isto xusto coa ecuación punto pendente permítenos atopar rapidamente a función afín utilizando calquera dos dous puntos.

Exemplo 4.2

A partir dos puntos $(-1, 5)$ e $(4, -5)$, acha o valor correspondente a $x = 1$ por interpolación linear.

Neste caso temos que $m = \dfrac{-5-5}{4-(-1)} = -2$

Rapidamente podemos obter a función coa ecuación punto pendente. Utilizaremos neste caso o segundo punto.

$$y + 5 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -5 - 2x + 8 \Rightarrow y = -2x + 3$$

Agora que xa temos a función, podemos estimar o valor correspondente a $x = 1$ substituíndo.

$$y = -2 \cdot 1 + 3 = -1$$

Veremos a continuación outra maneira de obter o mesmo.

Exemplo 4.3

A partir dos puntos $(-1,5)$ e $(4,-5)$, acha o valor correspondente a $x = 1$ por interpolación linear.

Dado que queremos interpolar linearmente, temos que atopar a función linear da forma $y = mx+n$

Como temos dous puntos polos que pasa temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 5 = -m+n \\ -5 = 4m+n \end{cases}$$

Resolvemos o sistema e temos que $m = -2$ e $n = 3$, co que xa temos a función que imos a utilizar para a interpolación en $x = 1$

$$y = -2 \cdot 1 + 3 = -1$$

Interpolación cadrática

A interpolación **cadrática** consiste en axustar os datos coñecidos a unha función cadrática para obter os valores intermedios.

Se dunha función coécemos tres datos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) **non aliñados**, podemos atopar calquera x comprendido entre x_1 e x_3 a partir dunha función cadrática $y = ax^2 + bx + c$, impoñendo que pasa polos tres puntos e resolvendo o sistema de tres ecuacións que se forma.

Exemplo 4.4

A partir dos puntos $(1,7)$, $(2,4)$ e $(8,28)$, acha o valor correspondente a $x = 6$ por interpolación cadrática. Antes de facer nada, temos que asegurarnos que non están aliñados. Aquí vese ben doadamente, porque o tramo de $x = 1$ a $x = 4$ é decrecente e o tramo entre $x = 4$ e $x = 8$ é crecente, polo que é imposible que estean na mesma recta.

Aquí imos proceder dunha maneira máis parecida á segunda das anteriores. Como temos trs puntos polos que pasa, e a función cadrática é da forma $y = ax^2 + bx + c$ temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 7 = a+b+c \\ 4 = 4a+2b+c \\ 28 = 64a+8b+c \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos que $a = 1$, $b = -6$ e $c = 12$. Polo que a función que imos a utilizar para interpolar é $y = x^2 - 6x + 12$

Agora que xa temos a función, podemos estimar o valor correspondente a $x = 6$ substituíndo.

$$y = 6^2 - 6 \cdot 6 + 12 = 12$$

Extrapolación

No caso de que queiramos calcular un valor que estea fóra do intervalo coñecido, pero próximo a él, o procedemento que faremos recibe o nome de **extrapolación**

4.4. Operacións con funcións

Suma e resta de funcións

Dadas as funcións $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos a suma (resta) de funcións mediante:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

Esta función $f \pm g$ ten por dominio a intersección dos dominios de f e g, Dom $f \cap$ Dom g, xa que deben existir cada un dos sumandos $f(x)$ e $g(x)$ para poder sumalos.

Exemplo 4.5

Dadas as funcións $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x^2 - 4x$ calculemos $(f + g)(x)$.

Tal como definimos,

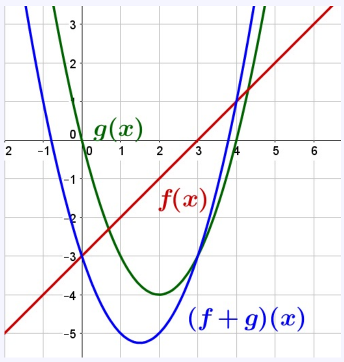
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Obtemos así que,

$$(f + g)(x) = (x - 3) + (x^2 - 4x) = x^2 - 3x - 3$$

Como ambas funcións están definidas en $\mathbb{R}$ temos que o dominio desta función tamén é $\mathbb{R}$.

Vexámolo tamén graficamente:



Multiplicación dunha función por un escalar

Podemos considerar tamén a operación produto dunha función por un escalar (número) do seguinte xeito: se $c \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot (f(x))$$

verificando que Dom $(c \cdot f) =$ Dom f.

Produto de funcións

Dadas as funcións $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos o produto de dúas funcións:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Esta función $f \cdot g$ tamén ten por dominio a intersección dos dominios de f e g, Dom $f \cap$ Dom g, xa que deben existir cada un dos factores $f(x)$ e $g(x)$ para poder multiplicalos.

Exemplo 4.6

Dadas as funcións $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x^2 - 4x$ calculemos $(f \cdot g)(x)$.

Tal como definimos,

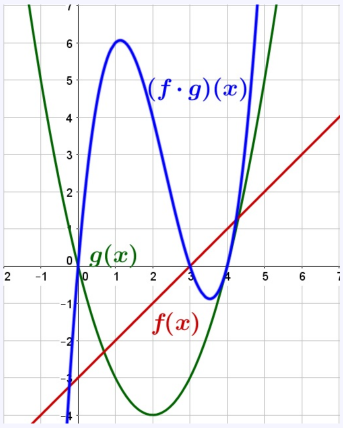
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Obtemos así que,

$$(f \cdot g)(x) = (x - 3) \cdot (x^2 - 4x) = x^3 - 7x^2 + 12x$$

Como ambas funcións están definidas en $\mathbb{R}$ temos que o dominio desta función tamén é $\mathbb{R}$.

Vexámolo tamén graficamente:



División de funcións

Do mesmo xeito que fixemos ata agora, podemos definir o cociente de funcións, pero sempre que teñamos en conta que non existe o cociente entre 0, polo que dadas as funcións $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $g(x) \neq 0$, o cociente de funcións é:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Neste caso o dominio é a intersección dos dominios de f e g exceptuando aqueles valores que fan que $g(x) = 0$, polo que este é $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$.

Exemplo 4.7

Dadas as funcións $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x^2 - 4x$ calculemos $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Tal como definimos,

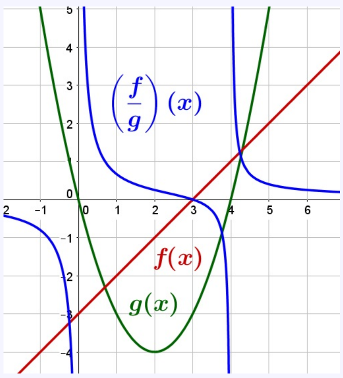
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Obtemos así que,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 4x}$$

Aínda que ambas funcións están definidas en $\mathbb{R}$, debemos ver para que valores $x^2 - 4x = 0$. O denominador anúlase para $x = 0$ e $x = 4$, polo que temos que o dominio desta función tamén é $\mathbb{R} - \{0, 4\}$.

Vexámolo tamén graficamente:

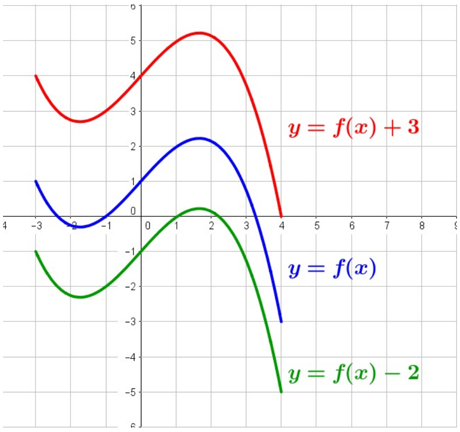


4.5. Transformacións elementais de funcións

Aquí veremos como se representan, a partir dunha función $y = f(x)$ coñecida, outras funcións relacionadas con ela:

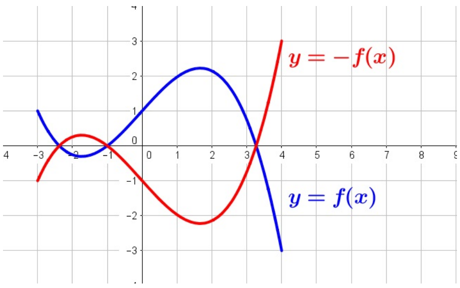
$y = f(x) + k$ a partir de $y = f(x)$

Se a é un número real, a gráfica de $y = f(x) + a$ é coma a de $y = f(x)$ desprazada a unidades cara arriba ou cara abaixo, dependendo de se a é positivo ou negativo. Por exemplo:



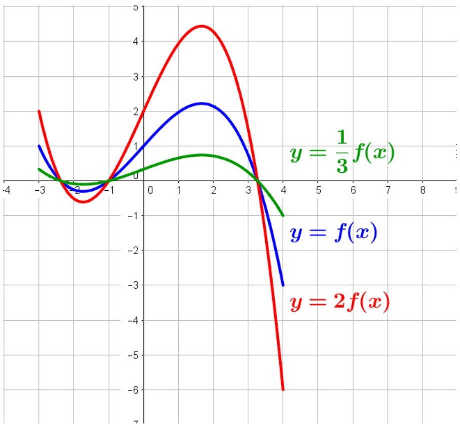
$y = -f(x)$ a partir de $y = f(x)$

A gráfica correspondente a $y = -f(x)$ é a simétrica da de $y = f(x)$ respecto do eixe X. Por exemplo:



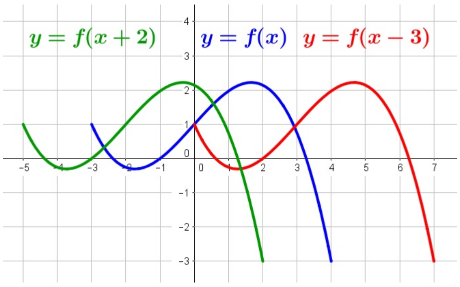
$y = kf(x)$ a partir de $y = f(x)$

A gráfica de $y = kf(x)$ obtense multiplicando por k as ordenadas da gráfica de $y = f(x)$. Se k é positivo e maior ca 1 ($k > 1$), a gráfica estírase cara arriba ou cara abaixo ("estírase"). Se $0 < k < 1$, a gráfica achégase ao eixe X, ()"achátase").Se k é negativo, obtense a gráfica de $|k|f(x)$ e, despois, determínase a súa simétrica respecto do eixe X. Vexamos un exemplo disto:



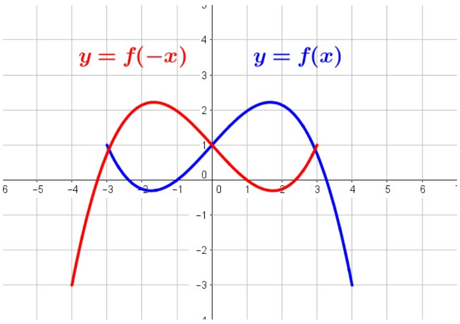
$y = f(x-a)$ a partir de $y = f(x)$

Se a é un número real, a gráfica de $y = f(x-a)$ é igual que a gráfica de $y = f(x)$ desprazada a unidades cara á dereita ou cara á esquerda, dependendo de se a é positivo ou negativo respectivamente. Por exemplo:



$y = f(-x)$ a partir de $y = f(x)$

A gráfica de $y = f(-x)$ é simétrica á de $y = f(x)$ respecto ao eixe Y.



4.6. Composición de funcións

Dadas as funcións $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos a **composición** destas funcións, e indicámola con $g \circ f$, de xeito que:

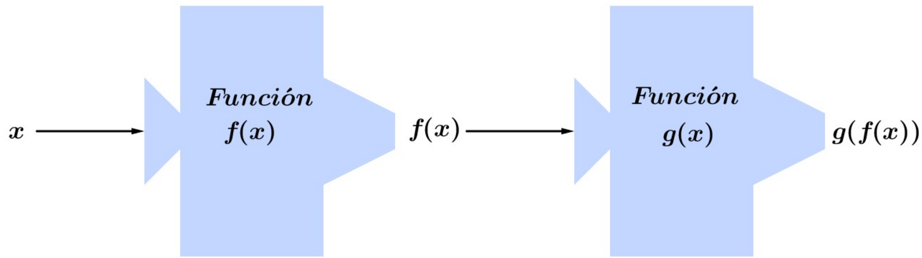
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

A expresión $g \circ f$ lese f *composta con* g. Noméase en primeiro lugar a función da dereita porque é a primeira en actuar sobre x.

Esta nova función existe para os $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \in \text{Dom } g$, ou o que é o mesmo, para todos os $x \in \mathbb{R}$ tales que $\text{Im } f \subseteq \text{Dom } g$. Por tanto o dominio da composición $g \circ f$ é:

$$\text{Dom }(g \circ f) = \text{Dom } f - \{x : f(x) \notin \text{Dom } g\}$$

Tratemos de ver como funciona a composición de funcións:



En xeral, a función $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ é distinta de $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$, polo que a composición de funcións non é conmutativa. Vexámolo nun exemplo.

Exemplo 4.8

Dadas as funcións $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$ obteñamos $g \circ f$ e $f \circ g$.

Obtemos primeiro $g \circ f$, polo que teremos que ,

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 1$$

Agora obtemos $f \circ g$, chegando así que,

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Polo que, efectivamente, non se verifica a propiedade conmutativa.

Aclarando as túas ideas

Composición de funcións

Se temos as funcións $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

Podemos substituír x por $\square$, obtendo as seguintes expresións:

$$f(\square) = \square^2 + 1 \qquad \text{e} \qquad g(\square) = \frac{1}{\square + 3}$$

Se substituímos esta vez $\square$ por $g(x)$, en $f(\square)$, teremos a expresión de $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = g(x)^2 + 1 = \left(\frac{1}{x+3}\right)^2 + 1 = \frac{x^2 + 6x + 10}{x^2 + 6x + 9}$$

Se substituímos esta vez $\square$ por $f(x)$, en $g(\square)$, teremos a expresión de $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{f(x) + 3} = \frac{1}{x^2 + 1 + 3} = \frac{1}{x^2 + 4}$$

Función inversa

Se $f(x)$ é unha función inxectiva, existe unha función inversa, que se representa por $f^{-1}(x)$. É a única función que, por un lado, verifica que $f \circ f^{-1}(x) = x$ para $x \in \text{Im } f$, e, por outra banda, $f^{-1} \circ f(x)$ para $x \in \text{Dom } f$. En resumo, $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ son a función identidade.

As gráficas de dúas funcións inversas son simétricas respecto da recta $y = x$.

Exemplo 4.9

Temos as funcións $f(x) = (x-2)^3 - 2$ e $g(x) = \sqrt[3]{x+2} + 2$. Vexamos que g é a inversa de f e viceversa. Calculemos $f \circ g$ e $g \circ f$.

Ambas funcións son inxectivas, polo que non temos problema para ver se son inversas. Calculemos primeiro $f \circ g$, para o que temos que,

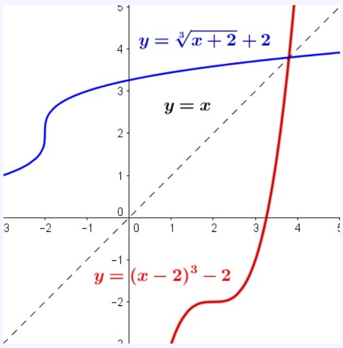
$$f[g(x)] = f(\sqrt[3]{x+2} + 2) = (\sqrt[3]{x+2} + 2 - 2)^3 - 2 = x$$

Agora fagamos $g \circ f$, obténdoo do seguinte xeito,

$$g[f(x)] = g((x-2)^3 - 2) = \sqrt[3]{(x-2)^3 - 2 + 2} + 2 = x$$

En ambos casos obtivemos a identidade, polo que temos que $g = f^{-1}$.

Ademais, se as representamos vemos que as súas gráficas son simétricas respecto á recta $y = x$.



Para calcular a función inversa funha función $f(x)$ escribímola como y e a continuación despexamos a variable x. Unha vez que temos a expresión, intercambiamos as variables escribindo de novo unha expresión de y. Esta expresión é a función inversa da función dada.

Exemplo 4.10

Calculamos a función inversa de $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

O primeiro paso é expresar a función do seguinte xeito $y = \dfrac{x}{x-2}$. Os dous pasos seguintes pódense facer na orde que se queira. Neles temos que despexar a outra variable e intercambialas. No noso caso imos realizar o intercambio de variables ao principio, obtendo así $x = \dfrac{y}{y-2}$. Temos que despexar agora a variable y.

$$x = \frac{y}{y-2} \Rightarrow x \cdot (y-2) = y \Rightarrow xy - 2x = y \Rightarrow xy - y = 2x \Rightarrow y \cdot (x-1) = 2x \Rightarrow y = \frac{2x}{x-1}$$

Chegamos así a que $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

Tal e como se comentou antes, para que unha función teña inversa ten que ser **inxectiva**, é dicir, cada valor de y ten que corresponder a un único valor de x. Se isto non sucede, debe descompoñerse en tramos en que sexa inxectiva, cada un dos cales terá a súa función inversa.

Por exemplo, como $y = x^2$ non é inxectiva, para calcular a súa inversa procedemos así:

$$y = f(x) = x^2 = \begin{cases} y = f_1(x) = x^2 & x \geq 0 \quad \rightarrow \quad f_1^{-1}(x) = \sqrt{x} \\ y = f_2(x) = x^2 & x < 0 \quad \rightarrow \quad f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x} \end{cases}$$

4.7. Exercicios

Funcións e gráficas

1. Indica o dominio de definición destas funcións:

   a) $f(x) = 3x^2 + x^3 - 5x^5$
   b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x-1}$
   c) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2x-5}$
   d) $f(x) = \sqrt{5x-3}$

   Sol: a) $\mathbb{R}$, *b)* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, *c)*$\mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$, *d)* $[\frac{3}{5}, +\infty)$

2. Indica o dominio de definición destas funcións:

   a) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+2x}$
   b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$
   c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2+x}$

   Sol: a) $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, *b)* $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, *c)*$\mathbb{R}$, *d)* $\mathbb{R} - \{0\}$

3. Indica o dominio de definición destas funcións:

   a) $f(x) = \sqrt{3-x}$
   b) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$
   c) $f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

   Sol: a) $(-\infty, 3]$, *b)* $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, *c)*$(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$, *d)* $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

4. Dun cadrado de 10 cm de lado, córtanse nas esquinas triángulos rectángulos isósceles cuxos lados iguais miden x.

   a) Escribe a área do octógono que resulta en función de x.
   b) Cal é o dominio desa función? E o seu percorrido?

   Sol: a) $A(x) = 100 - 2x^2$, *b) Dom* $A = (0, 5)$, *Im* $A = (50, 100)$

Funcións elementais

5. Representa as seguintes parábolas logo de determinar a orientación, o vértice, os puntos de corte cos eixes e máis algún punto próximo ao vértice:

   a) $y = x^2 + 4x + 3$
   b) $y = -4x^2 - 4x + 3$

Interpolación e extrapolación

6. A partir dos puntos $(-1, 4)$ e $(2, -5)$ atopa o valor correspondente a $x = 1$ pola interpolación adecuada.

   Sol: $y = -2$

7. A partir dos puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 3)$

   a) Determina a función de interpolación axeitada aos puntos $(0, 0)$ e $(1, 1)$.
   b) Se utilizamos os tres puntos, cal será a función de interpolación cadrática?
   c) Que valor toma para $x = 1{,}5$ en cada un dos casos? De que estamos falando en cada caso?
   d) Se utilizamos a recta, que valor obteremos para $x = 4$? E mediante a parábola?

   Sol: a) $y = x$, *b)* $y = \dfrac{x^2+x}{2}$, *c)* 1,5 e 1,875, *d)* 4 e 10

Operacións con funcións

8. Realiza as operacións indicadas coas seguintes funcións:

$$p(x) = -5x + 3 \qquad q(x) = 2x^2 - x + 7$$
$$r(x) = -x^3 + 6 \qquad s(x) = 3x^2 - x$$
$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \qquad g(x) = \frac{-3}{x}$$
$$h(x) = \frac{x+2}{x^2} \qquad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

   a) $(p+q)(x)$
   b) $(q+r)(x)$
   c) $(q+r-s)(x)$
   d) $(s-q)(x)$
   e) $(q-r)(x)$
   f) $(r-p)(x)$
   g) $(f+g)(x)$
   h) $(f \cdot g)(x)$
   i) $(h \cdot j)(x)$

Sol: a) $2x^2 - 6x + 10$, *b)* $-x^3 + 2x^2 - x + 13$, *c)*$-x^3 - x^2 + 13$, *d)* $x^2 - 7$, *e)* $x^3 + 2x^2 - x + 1$, *f)*$-x^3 + 5x + 3$, *g)* $\frac{2x^2 - 7x - 9}{x^2 + 3x}$, *h)* $\frac{-6x + 12}{x^2 + 3x}$, *i)* $\frac{-1}{x-2}$, *Dom* $(h \cdot j) = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

Composición de funcións. Función inversa

9. Considera as funcións $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2 - x$ e calcula as funcións compostas: $f \circ f$, $g \circ f$, $f \circ g$ e $g \circ g$.

Sol: $x^4 - 2x^2$, $3 - x^2$, $x^2 - 4x + 3$ *e* x

10. Considera as funcións $f(x) = \frac{1}{x-2}$ e $g(x) = \frac{2x}{3}$ e calcula as funcións compostas: $f \circ f$, $g \circ f$, $f \circ g$ e $g \circ g$.

Sol: $\frac{2-x}{2x-5}$, $\frac{2}{3x-6}$, $\frac{3}{2x-6}$ *e* $\frac{4x}{9}$

11. Representa $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ e comproba que son inversas.

12. Comproba que hai que descompoñer $y = x^2 - 1$ en dúas ramas para determinar as súas inversas respecto da recta $y = x$. Indica cales son.

13. Determina as funcións inversas das seguintes funcións:

   a) $f(x) = 2x + 4$
   b) $g(x) = \frac{x+3}{7}$
   c) $h(x) = \frac{2}{x-2}$
   d) $l(x) = \frac{3x}{3-x}$
   e) $m(x) = \frac{x-5}{2x+1}$
   f) $n(x) = \frac{x^3-1}{5}$

Sol: a) $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$, *b)* $g^{-1}(x) = 7x - 3$, *c)* $h(x)^{-1} = \frac{2+2x}{x}$, *d)* $l^{-1}(x) = \frac{3x}{3+x}$, *e)* $m^{-1}(x) = \frac{5+x}{1-2x}$, *f)* $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{5x+1}$

14. Nunha determinada zona marítima, o número de peixes dunha especie en función do zooplancton (en gramos) vén dado pola expresión $f(x) = x^2 - 3x$, e a cantidade de zooplancton en función do plancton vén dada pola expresión $g(x) = 3x + 5$. Escribe a función que represente o número de peixes desa especie en función do plancton.

Sol: $h(x) = 9x^2 + 21x + 10$

15. Determina a función inversa de $y = 2^{x+1}$.

Sol: $y = -1 + \log_2 x$

Para aplicar

16. Lanzamos un obxecto verticalmente cara arriba de xeito que a altura h (en metros) á que se atopa en cada momento t (en segundos) vén dada pola expresión $h(t) = -5t^2 + 40t$.

    a) En que instante se acada a altura máxima? Cal é esa altura?

    b) Representa graficamente a función $h(t)$.

    c) En que momento da súa caída o obxecto se atopa a 60 metros de altura?

    d) En que instante chega ao chan?

    e) Identifica o dominio e a imaxe de $h(t)$

Sol: a) $t = 4$ s, $h = 80$ m, c) $t = 6$ s, d) $t = 8$ s, e) Dom $h = [0, 8]$, Im $h = [0, 80]$

17. Unha cunca de café acabado de facer está a 75° C. Despois de 3 minutos nun cuarto a 21° C, a temperatura do café descendeu a 64° C. Se a temperatura, T, do café en cada instante t vén dada pola expresión $T = A\,e^{kt} + 21$, calcula A e k e representa a función.

    Canto teremos que esperar para que a temperatura do café sexa 45° C?

Sol: $A = 54$, $k \approx -0{,}076$, 11 minutos

Unidade 5

LÍMITES E CONTINUIDADE

5.1. Visión intuitiva da continuidade. Tipos de descontinuidades

A idea de función continua é a de que ”pode debuxarse sen erguer o lapis do papel”. Vexamos algúns criterios mediaenta os que podemos saber se unha función, dada pola súa expresión analítica, é ou non continua.

Descontinuidades

Comzamos observando graficamente as *razóns polas que unha curva pode non ser continua nun punto.*

1. **Ten ramas infinitas nese punto.** Xa no tema anterior vimos algunha función que presentaba unha asíntota vertical, $x = a$. Nese caso, canto máis nos achegamos ao valor da abscisa, a función diríxese ou cara arriba ou cara abaixo.

   As funcións $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ poden ter unha asíntota vertical nos valores de x nos que se anula o denominador.

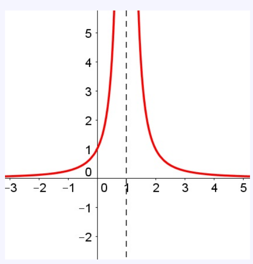
   Vexámolo mellor cun exemplo.

Exemplo 5.1

A función $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ ten unha asíntota vertical en $x = 1$ na que as súas ramas van cara arriba.

O denominador anúlase cando $x = 1$.

As ramas van cara arriba, pois tanto o numerador coma o denominador son sempre positivos, sexa cal sexa o valor de x, sempre que o collamos do dominio.



2. **Presenta un salto nese punto**

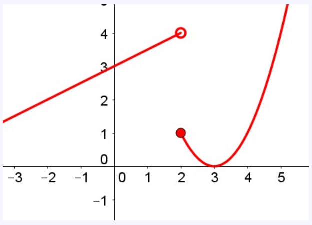
   A función neste caso dá un salto ao chegar á abscisa a. Entre as funcións elementais que nós manexamos, tal comportamento só se atopa nas funcións definidas “a anacos”.

Exemplo 5.2

A seguinte función

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 3 & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 6x + 9 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

é descontinua en $x = 2$ pois dá un salto.

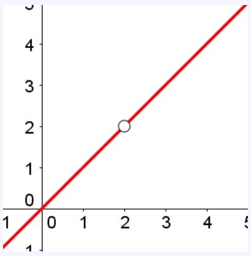


3. Fáltalle ese punto

Neste caso a función non está definida na abscisa a, pero non ten ramas infinitas nin presenta salto algún. Esta descotinuidade chámase *evitable* porque abondaría engadir ese punto para que a función fose continua.

Exemplo 5.3

A función $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$ non está definida en $x = 2$, porque o denominador anúlase nese caso. En cambio, para valores distintos de 2 podemos simplificar a expresión: $y = \dfrac{x(x-2)}{x-2} = x$, se $x \neq 2$.
É dicir, a gráfica desta función é coma a de $y = x$, salvo que lle falta o punto de abscisa 2.



4. Ten ese punto ”desprazado”

Este caso é coma o anterior, pero a función si está definida en $x = a$, aínda que o punto o ten desprazado. Tamén este tipo de descontinuididade se chama *evitable*.

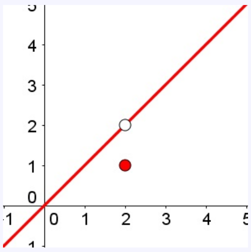
Ao igual que o tipo **2**, este tipo de comportamento só pode conseguirse mediante funcións definidas “a anacos”.

Exemplo 5.4

A seguinte función

$$y = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

presenta unha descontinuidade evitable en $x = 2$.



Continuidade

Dedúcese dun xeito claro que, unha función é **continua** nun punto se non presenta ningún tipo de descontinuidade nel.

Ao analizar os tipos de descontinuidades anteriores vemos que só os tipos **1** e **3** se definiron dun "xeito natural" (sen utilizar a definición "a anacos"). Ademais esas funcións non están definidas no punto no que son descontinuas, polo que obtemos o seguinte criterio que nos poderá axudar a identificar descontinuidades.

As funcións definidas por expresións analíticas elementais son continuas en todos os puntos nos que están definidas (só son descontinuas nos puntos onde non están definidas.)

Vexamos a utilidade deste criterio.

Exemplo 5.5

- $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ está definida en todo $\mathbb{R}$ e é continua en todos os puntos de $\mathbb{R}$.
- $g(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ está definida para todo $\mathbb{R}$ salvo en $x = 1$ polo que é continua nos mesmos puntos.
- $h(x) = \sqrt{2-x}$ está definida en $(-\infty, 2]$, polo que é continua tamén no mesmo intervalo.

5.2. Límite dunha función nun punto

O estudo da continuidade nun punto e das asíntotas verticais realízase con máis precisión se se coñece o concepto de límite. Debemos ententer o que significa que x se achegue a certo valor numérico.

- $x \to c^-$ (x **tende a** c **pola esquerda**) significa que a x se lle dan valores cada vez máis próximos a c, pero menores que c.

Por exemplo, se collemos valores da sucesión $1{,}5; 1{,}9; 1{,}95; 1{,}99; 1{,}999; \ldots$, que é crecente e se achega cada vez máis a 2, escribimos: $x \to 2^-$.

- $x \to c^+$ (x **tende a** c **pola dereita**) significa que a x se lle dan valores cada vez máis próximos a c, pero maiores que c.

Por exemplo, se a x se lle dan os valores $2{,}5; 2{,}1; 2{,}05; 2{,}01; 2{,}001; \ldots$, que é crecente e se achega cada vez máis a 2, escribimos: $x \to 2^+$.

- $x \to c$ indica que a x se lle dan valores cada vez máis próximos a c. Lese "x **tende a** c".

Por exemplo, os valores $2{,}5; 1{,}9; 2{,}05; 1{,}99; 2{,}001; \ldots$, é unha secuencia de números cada vez máis próximos a 2, escribimos: $x \to 2$.

Límites laterais

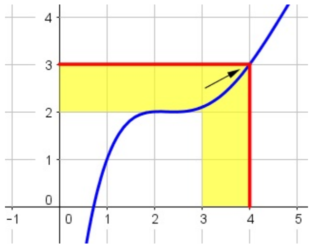
Significado de lím $f(x)$ cando $x \to c^-$

Se $x \to c^-$, daquela a x dámoslle valores variables, cada vez máis próximos a c, pero menores que c. Como consecuencia, $f(x)$ tamén toma valores variables. O comportamento de $f(x)$ cando $x \to c^-$, exprésase así:

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

Dita expresión lese *límite de $f(x)$ cando x tenda a c pola esquerda.*

Vexamos cun exemplo dunha función representada o que significa



Nesta gráfica podemos ver que cando x se achega a 4 a través de valores máis pequenos a función achégase a 3, e isto expresámolo $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$

Se queremos analizar o límite pola esquerda da función mediante a súa expresión analítica temos as seguintes posibilidades:

- Se cando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez máis grandes, superando cada valor temos que $\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$. Por exemplo, analicemos a función $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ cando $x \to 1^-$:

x	0,5	0,9	0,99	...
$f(x)$	4	100	10 000	...

  Así temos que $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

- Se cando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez máis pequenos (máis negativos), temos que $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$. Por exemplo, analicemos a función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ cando $x \to 1^-$:

x	0,5	0,9	0,99	...
$f(x)$	-2	-10	-100	...

  Así temos que $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

- Se cando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez máis próximos a un valor l, temos que $\lim_{x \to c^-} f(x) = l$. Por exemplo, analicemos a función $f(x) = x^2 + 2$ cando $x \to 1^-$:

x	0,5	0,9	0,99	...
$f(x)$	2,25	2,81	2,9801	...

  Así temos que $\lim_{x \to 1^-} (x^2 + 2) = 3$

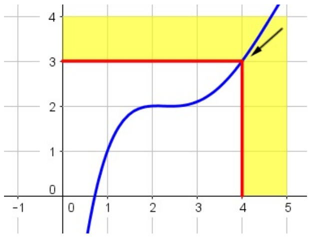
Significado de $\lim f(x)$ cando $x \to c^+$

Procedendo dun xeito análogo ao anterior, se temos $x \to c^+$, a x dámoslle valores variables, cada vez máis próximos a c, pero maiores que c. Como consecuencia, $f(x)$ tamén toma valores variables. O comportamento de $f(x)$ cando $x \to c^+$, exprésase así:

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

Dita expresión lese *límite de $f(x)$ cando x tenda a c pola dereita.*

Vexamos cun exemplo dunha función representada o que significa



Nesta gráfica podemos ver que cando x se achega a 4 a través de valores máis grandes a función achégase a 3, e isto expresámolo $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 3$

Se analizasemos dun xeto similar ao anterior temos que os límites pola dereita poden ser:

- $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = l$

Exemplo 5.6

- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} (x+3) = 4$

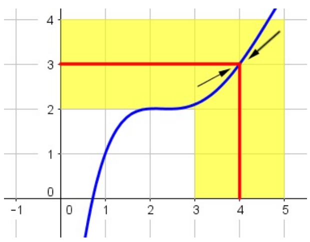
Límite inmediato

Significado de $\lim f(x)$ cando $x \to c$

Se analizamos o comportamento da función cando x se achega a c tanto pola dereita coma pola esqueda, podemos obter o $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

Para que exista dito límite, os dous **límites laterais deben coincidir**. Se os dous límites laterais non valen o mesmo, dicimos que **non existe** o $\lim\limits_{x\to c} f(x)$

Vexamos co exemplo anterior dunha función representada o que significa:



Anteriormente xa poidemos comprobar que $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3$ e que $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 3$. Como ambos valores coinciden, obtemos así que

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 3$$

Cálculo sistemático de límites de funcións polinómicas e racionais nun punto x_0

Non sempre resulta práctico construír as táboas de valores ou debuxar gráficas para calcular os límites. Podemos calcular sistematicamente os mesmo a partir da expresión analítica da función.

Podemos analizar por separado o cálculo en funcións polinómicas e en funcións racionais:

- **Función polinómica**

  Como xa comentamos, as funcións polinómicas son funcións continuas en todo o seu dominio. Por tanto, se queremos calcular o límite da mesma cando $x \to x_0$ basta con calcular o valor da función no punto e temos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

  Exemplo 5.7

  Se temos que $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e queremos calcular o seu límite cando $x \to 3$ basta con calcular $f(3)$.

  $$\lim_{x \to 3}(x^2 - 2x + 1) = 4$$

- **Función racional**

  As funcións racionais, da forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tamén son continuas no seu dominio, polo que debemos ter en conta onde se anula o denominador $(Q(x))$. Debido a isto temos que poden darse tres casos diferentes :

  - Se ao substituír o denominador é distinto de 0, $(Q(x_0) \neq 0)$, temos que $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, polo que a función é continua nese punto e por tanto basta con calcular o valor da función no punto, tendo así que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

    Exemplo 5.8

    $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

    Se substituimos x por 1 no denominador obtemos un número distinto de 0 polo que podemos calcular inmediatamente o límite.

    $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \frac{P(1)}{Q(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

  - Se ao substituír o denominador é igual a 0, $(Q(x_0) = 0)$, pero non o é o numerador, $(P(x_0) \neq 0)$ temos que o límite é infinito. Basta analizar o signo de numerador e do denominador para saber o signo do infinito. Xeralmente, deberemos analizar o que sucede en cada un dos límites laterais.

Exemplo 5.9

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x+3}{x-1}$

Se substituimos x por 1 no denominador obtemos 0, en cambio no numerador obtemos 8. O límite neste caso é infinito. Para analizar o que sucede apoiaremonos nos límites laterais para estudar o signo.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+4x+3}{x-1} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+4x+3}{x-1} = \frac{+}{+} = +\infty$$

Polo que, ao ser diferentes os límites laterais non existe o límite.

- Se ao substituir o denominador é igual a 0, $(Q(x_0) = 0)$e tamén o é o numerador, $(P(x_0) = 0)$, estariamos nun caso de **indeterminación**. Para resolver esta indeterminación temos que ter en conta que x_0 é raíz, tanto do numerador como do denominador, polo que poderemos dividir os mesmo entre $x - x_0$ e calcular o límite da expresión simplificada.

Exemplo 5.10

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

Se substituimos x por 2 obtemos 0 tanto no numerador coma no denominador polo que temos que descompoñer ambos e simplificar a expresión dividindo numerador e denominador entre $x - 2$. Para obter o cociente podemos recurrir á regra de Ruffini ou ás identidades notables, entre outros procesos de factorización que coñecemos. Unha vez simplificada a expresión facemos o límite de novo, vendo se estamos no primeiro ou no segundo caso dos vistos anteriores.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{0}{4} = 0$$

Cálculo sistemático de límites de funcións definidas a anacos nun punto x_0

Tal como vimos na visión intuitiva de continuidade debemos tamén prestar especial atención ás funcións **definidas a anacos**. Se queremos calcular o límite en calquera punto dunha función definida a anacos debemos ter en conta o seguinte.

- Se o punto x_0 non é un punto de rutura, basta con analizar o límite na parte correspondente da función.

Exemplo 5.11

Sexa a función $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$ e queremos calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Como $x = 1$ non é un punto de rutura (nin definido inicialmente, nin a consecuencia do dominio) temos que para calcular o límite cando $x \to 1$ basta con tomar a función que lle corresponde, neste caso $f_2(x) = x^2 + 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 + 1 = 2$$

- Se o punto x_0 coincide cun punto de rutura teremos en conta dúas posibilidades:
  - Se as imaxes de todos os valores de x próximos a x_0 obedecen a mesma expresión analítica, faremos exactamente igual que no caso dunha única expresión analítica.

Exemplo 5.12

Sexa a función $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ x^2+1 & x \neq 1 \end{cases}$ e queremos calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Neste caso temos que $x = 1$ é un punto de rutura, e para os valores próximos, as imaxes veñen determinadas pola mesma expresión. Neste caso, a expresión só é distinta para o valor $x = 1$. Por tanto non precisaremos calcular os límites laterais, podendo facelo xa dun xeito inmediato

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2+1) = 2$$

  - Se as imaxes dos valores próximos a x_0 pero menores se calculan mediante unha expresión analítica diferente das imaxes dos valores próximos a x_0 pero maiores, calcularemos os límites por separado.
    Se ambos límites coinciden, existirá tamén o límite da función en x_0 e coincidirá co valor dos límites laterais.
    Se non coinciden, ou algún dos límites laterais non existe, temos que tampouco existe o límite da función en x_0.

Exemplo 5.13

Sexa a función $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ x^2+1 & x > 1 \end{cases}$ e queremos calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Neste caso temos que $x = 1$ é un punto de rutura, e para os valores próximos, as imaxes veñen determinadas por expresións diferentes. Debido a isto, para tratar de conseguir o límite analizaremos os límites laterais:

$$\left.\begin{array}{lcll} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) & = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+1) & = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Neste caso vemos que os límites laterais coinciden, polo que obtemos así o límite da función no punto $x = 1$.

5.3. Continuidade de funcións

Despois de obter unha visión intuitiva do concepto de continuidade, formalizaremos a mesma relacionándoa cos límites:

Unha función $f(x)$ **é continua nun punto x_0** se se cumpren as seguintes condicións:

1. Existe $f(x_0)$
2. Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ e é finito.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Xa vimos ao principio do tema algunhas das diferentes razóns polas que unha función non é continua. Relacionaremos agora esas mesmas coa causa da súa discontinuidade. Seguiremos a mesma orde á hora de analizar.

1. **Salto infinito**. Está relacionada coas ramas infinitas nese punto. Neste caso existen os límites laterais, pero polo menos un deles é infinito. Non se cumpriría así a condición **2.**

Exemplo 5.14

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

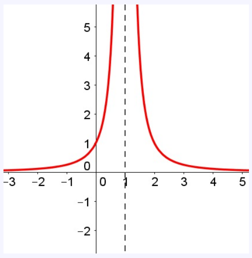
O denominador anúlase cando $x = 1$, polo que a función é continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Calculamos entón $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Ao substituír x por 1 obtemos 0 no denominador e en cambio 1 no numerador. Xa temos neste caso que o límite (no caso de existir) non é finito. Analizamos os límites laterais:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Como ambos valores coinciden temos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$



2. **Salto finito**. Este tipo de descontinuidade só pode orixinarse en funcións definidas a anacos. Neste caso existen os límites laterais e son finitos, pero os seus valores non coinciden. Non se cumpriría así a condición **2.**

Exemplo 5.15

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 3 & \text{se } x < 2 \\ \\ x^2 - 6x + 9 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

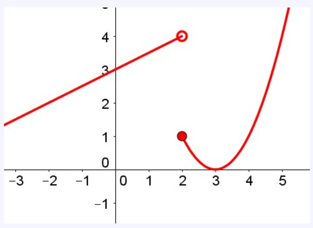
Vemos que a expresión antes e despois de $x = 2$ é distinta. Podemos afirmar inicialmente que a función é continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

Calculamos entón os límites laterais en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{x}{2} + 3\right) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 6x + 9) = 1$$

Como ambos valores non coinciden temos que $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$



3. **Evitable**. Está relacionada con dous dos tipos anteriores:

   a) No caso de que lle falte o punto, existe o límite, pero o que non existe é $f(x_0)$. Non se cumpriría a condición **1.**

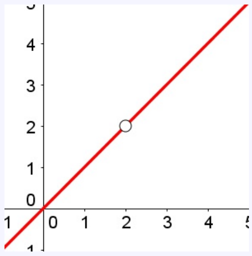
Exemplo 5.16

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

O denominador anúlase cando $x = 2$, polo que a función é continua en $\mathbb{R} - \{2\}$, xa que non existe $f(2)$

Calculamos entón $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Ao substituír x por 2 obtemos 0 no denominador e tamén no numerador. $x = 2$ é unha raíz de ambos polo que podemos descompoñer para tratar de atopar o límite. Calculemos o límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x \cdot (x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x = 2$$



   b) No caso de que teña o punto desprazado, existe o límite e é finito, e tamén $f(x_0)$, pero estes dous valores non coinciden. Non se cumpriría a condición **3.**

Exemplo 5.17

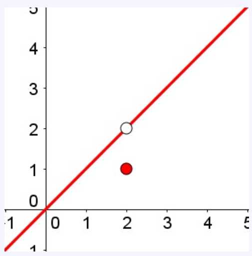
$$y = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Aquí temos que o punto no que cambia a función é $x = 2$. Podemos afirmar inicialmente que a función é continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

Calculamos entón $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Como é a mesma expresión antes e despois de $x = 2$ non cómpre calcular os límites laterais. Calculemos ese límite:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x = 2$$

Aquí si temos que existe $f(2) = 1$. Como vemos os valores son distintos.



5.4. Límite dunha función no infinito

Se queremos calcular o valor ao que se aproxima a función a medida que x toma valores cada vez máis grandes, o que queremos atopar é $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Se en cambio, o que queremos calcular é o valor ao que se aproxima a función a medida que toma valores cada vez máis pequenos (máis negativos), o que queremos é atopar $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Cálculo de límites

Para o cálculo de límites no infinito, substitúese x por $+\infty$ ou por $+\infty$, segundo se precise, realizando as seguintes operacións:

$\pm\infty + k = \pm\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$	$k \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$	$(+\infty)^n = +\infty$
$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty)$	$\left(\frac{\pm\infty}{k}\right) = \pm\infty$	$\left(\frac{k}{\pm\infty}\right) = 0$	$(-\infty)^n = \pm\infty$

Pero poden presentarse situacións indeterminadas, é dicir, expresións nas que non resulta un valor concreto e cómpre realizar operacións para obter o límite ou demostrar que ese límite non existe. Estas representanse con corchetes. Vexamos algunhas delas:

- **Indeterminacións da forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.**

  Nestes casos resólvese dividindo numerador e denominador entre a potencia de maior grao do denominador.

Exemplo 5.18

O límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3}$ presenta unha indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ que resolvemos dividindo numerador e denominador por x^2.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}} = \frac{2+0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

Aclarando as túas ideas

Dada unha función polinómica $P(x)$, se tomamos o seu termo de maior grao ax^n, entón $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$

Dada unha función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con ax^n o termo de maior grao de $P(x)$ e bx^m o de $Q(x)$, entón $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)\frac{P(x)}{Q(x)} =$ $lim_{x\to\pm\infty} P(x)\frac{ax^n}{bx^m} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)\frac{a}{b}x^{n-m}$

Por tanto, simplificando todo isto temos que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se grao } P(x) < \text{grao } Q(x) \\ \left(\frac{a}{b}\right) & \text{se grao } P(x) = \text{grao } Q(x) \\ \pm\infty & \text{se grao } P(x) > \text{grao } Q(x) \end{cases}$$

- **Indeterminacións da forma $[\infty - \infty]$ en funcións irracionais.**

  Nestes casos resólvese multiplicando e dividindo pola expresión conxugada.

Exemplo 5.19

O límite $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2})$ presenta unha indeterminación $[\infty-\infty]$ que resolvemos multiplicando e dividindo $(\sqrt{x-}+\sqrt{x+2})$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2})\cdot(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2})} =$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)-(x+2)}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}} = \frac{-5}{+\infty+\infty} = 0$$

- **Indeterminacións da forma** $[1^\infty]$.

  O número e, do que xa falamos en temas anteriores é o límite da sucesión $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Dado que neste tema estamos falando de funcións en lugar de sucesións, tamén o podemos definir así:

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}718\,281\,828...$$

  Se temos que $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$, podemos extender a situación anterior a que:

  $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{h(x)}\right)^{h(x)} = e$$

  Debido a isto, se temos unha función desa forma poderemos traballar cos límites do número e que veremos a continuación.

Límites do número e

Se houbesemos estudado previamente o comportamento da función, para $+\infty$, ou ben para $-\infty$ teríamos obtido o seguinte: $[1^\infty]$. Esta situación é outra indeterminación, polo que vexamos como resolver este tipo de indeterminacións.

Se identificamos nesta función conxunta dúas función, sendo $f(x)$ a base, con $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ e $g(x)$ o exponente, con $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, poderemos calcular o límite buscado do seguinte xeito

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

A isto chegamos dun xeito razonado, para obter unha expresión das se asemellan ás de arriba.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to\infty}[1+(f(x)-1)]^{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)}$$

Faremos agora transformacións no exponente para chegar a ter o mesmo que no denominador da fracción principal.

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{[f(x)-1]\cdot g(x)}{f(x)-1}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

Agora chamamos $h(x)=\dfrac{1}{f(x)-1}$, que ademais verifica que $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\infty$, xa que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$. Temos así que

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{[f(x)-1]\cdot g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left[\left[1+\frac{1}{h(x)}\right]^{h(x)}\right]^{[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

Agora tendo en conta que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{h(x)}\right)^{h(x)}=e$, queda por tanto que

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

Exemplo 5.20

O límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x+1}$ presenta unha indeterminación $[1^{\infty}]$ que podemos resolver aplicando a fórmula.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x+1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}-1\right)\cdot(2x+1)}$$

Calcularemos primeiro o límite do expoñente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}-1\right)\cdot(2x+1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1-(2x-2)}{2x-2}\cdot(2x+1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x-2}\cdot(2x+1) =$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot(2x+1)}{2x-2}=3$$

Entón, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x+1}=e^3$

5.5. Ramas infinitas. Asíntotas

Ás veces a gráfica dunha función e a dunha recta aproxímanse cada vez máis a medida que a variable independente se achega a un valor determinado ou crece(decrece) indefinidamente. Estas rectas chámanse **asíntotas** da función. A continuación, estudaremos as asíntotas ou ramas infinitas máis sinxelas que pode presentar unha función.

1. **Asíntotas verticais**

   A recta de ecuación $x=a$ é unha asíntota vertical da función f se algún dos límites laterais (ou os dous) cando $x\to a$ é infinito ($\pm\infty$) e non existe a función no punto. Isto significa que, a medida que x se achega ao punto a, polo menos por un dos laterais, os valores da función fanse infinitamente grandes, ou infinitamente pequenos (grandes en valor absoluto, pero negativos). Hai asíntota vertical, por tanto, cando hai unha descontinuidade de salto infinito.

Exemplo 5.21

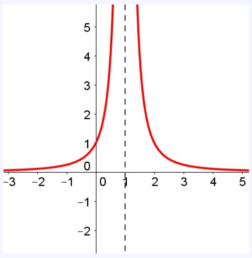
Aproveitaremos un exemplo anterior: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

O único punto que non pertence ao dominio é $x = 1$, polo que estudaremos os límites laterais nese punto.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Como un dos límites laterais é infinito (neste caso os dous) temos que en $x = 1$ hai unha asíntota vertical



2. Asíntotas horizontais

A recta de ecuación $y = k$ é unha asíntota **horizontal** da función f se algún dos límites no infinito son finitos, ou o que é o mesmo:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = k \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = k, \text{ con } \; k \in \mathbb{R}$$

Isto significa que, a medida que x se fai infinitamente máis grande, xa sexa en positivo ou en negativo, a función achégase á asíntota.

Pode haber dúas asíntotas horizontais, unha para $-\infty$ e outra para $+\infty$, que poden ser a mesma recta, pode existir asíntota só para un destes valores ou pode non existir ningunha asíntota horizontal.

Se temos en conta o que xa vimos nos límites dunha función no infinito temos que ter en conta as seguintes pautas:

- As funcións *polinómicas* non teñen límite finito no infinito, polo que por tanto non terán asíntota horizontal.
- As funcións *racionais* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ só teñen límite finito se grao de $P(x) \leq$ grao de $Q(x)$.

  No caso de que grao de $P(x) <$ grao de $Q(x)$ temos que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$, polo que a recta $y = 0$ é asíntota **horizontal**. O mesmo sucede se estudamos o límite cando $x \to -\infty$ No caso de que grao de $P(x) =$ grao de $Q(x)$ temos que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = l$, polo que a recta $y = l$ é asíntota **horizontal**. O mesmo sucede se estudamos o límite cando $x \to -\infty$
- Para as outras funcións que non son racionais tamén temos que facer os límites no infinito e ver se é finito l ou non e no caso teríamos que $y = l$ tamén é asíntota **horizontal**

Para indicar a posición da curva respecto da asíntota, estudamos o signo da diferenza $f(x) - l$ para un valor grande ($\pm\infty$) de x. Se o signo desta operación é positivo indica que $f(x) > l$ polo que a función achégase á asíntota por arriba, en cambio se o signo é negativo indica que $f(x) < l$ polo que a función achégase á asíntota por abaixo.

Exemplo 5.22

Estudemos as posibles asíntotas horizontais de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Calculamos os límites no infinito por ambos lados e obtemos o seguinte:

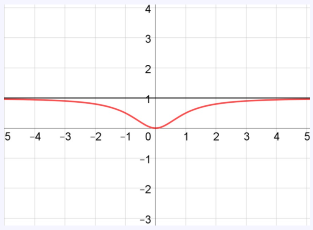
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Como é o mesmo valor para ambos límites temos que $y = 1$ é a única asíntota **horizontal**.

Para estudar a posición da función respecto á recta facemos a resta:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2}{x^2+1} - 1 = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x^2+1} = \frac{-1}{x^2+1}$$

Neste caso o signo é sempre negativo polo que a función achégase á recta por abaixo en ambos lados da función.



Exemplo 5.23

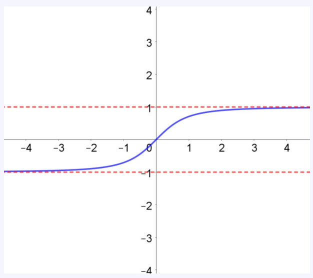
Estudemos as posibles asíntotas horizontais de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Calculamos os límites no infinito por ambos lados e obtemos o seguinte:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = 1$$

Neste caso temos dous límites diferentes nos infinitos polo que temos dúas asíntotas **horizontais**, $y = -1$ e $y = 1$



3. **Asíntotas oblicuas**

Dise que a recta $y = mx + n$ é unha asíntota **oblicua** da función f se se cumpre que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$$

Ao igual que sucede coas horizontais, pode haber dúas asíntotas oblicuas, unha para $-\infty$ e outra para $+\infty$, que poden ser a mesma recta ou existir só para un destes valores ou pode non existir ningunha asíntota oblicua.

Do mesmo xeito que fixemos coas horizontais, podemos seguir as seguintes pautas:

- As únicas funcións *polinómicas* que non se alonxan dunha recta son as que teñen grao 1, que son propiamente a mesma recta, polo que as funcións polinómicas non teñen asíntotas oblicuas.

- As funcións *racionais* só se achegan a unha recta oblicua se grao de $P(x)-$grao de $Q(x)=1$ Para ver a asíntota oblicua basta con efectuar a divisón dos polinomios e quedarnos co cociente.
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=mx+n+\frac{R(x)}{Q(x)}$$
A asíntota oblícua é a recta $y=mx+n$, xa que para valores moi grandes de x a última fracción tende a cero, por ter maior grao o denominador. Ademais, a posición da función respecto da asíntota determínase estudando o signo de $R(x)/Q(x)$ para valores grandes de x $(\pm\infty)$.

- Para as outras funcións que non son racionais podemos facer os seguinte límite, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Só existirá asíntota oblicua se dito límite é *finito e distinto de cero* e ademais
$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
Para obter a ordenada na orixe obtense co límite
$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$$
Esta maneira de obter a asíntota oblicua tamén é válida para as funcións racionais.

Inda que non nos pararemos moito no estudo da posición da función respecto da asíntota neste último caso, podemos xeralizar, o método de obtela, para que quede reflectido. Neste caso teremos que estudar o signo da diferenza entre $f(x)-(mx+n)$ para un valor grande de x, e proceder analogamente ao que facíamos nas horizontais.

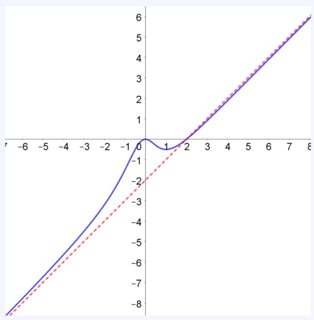
Exemplo 5.24

Estudemos as posibles asíntotas oblicuas de $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x^2+1}$

Como vemos que grao de $P(x)-$grao de $Q(x)=1$ podemos afirmar que ten asíntota oblicua.
Neste caso efectuamos a división polinomial e obtemos o seguinte:
$$\frac{x^3-2x^2}{x^2+1}=x-2+\frac{-x+2}{x^2+1}$$
Co que xa temos que $y=x-2$ é asíntota **oblicua** para os valores grandes de x $(\pm\infty)$, basta estudar agora a posición da función respecto da curva. Para eso estudaremos o signo de $\dfrac{-x+2}{x^2+1}$

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-x+2}{x^2+1}=0^+$, co que temos a función achégase a curva por arriba en $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-x+2}{x^2+1}=0^-$, co que temos a función achégase a curva por abaixo en $+\infty$.



Exemplo 5.25

Estudemos as posibles asíntotas oblicuas de $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2+1}$

Este é o mesmo exemplo de antes, pero agora farémolo polo método xenérico.

Como vemos que grao de $P(x)$ − grao de $Q(x) = 1$ podemos afirmar que ten asíntota oblicua. Calculemos m e n.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2}{x^3+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-2x^2}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2-x^3-x}{x^2+1} = -2$$

Facendo os cálculos para $x \to -\infty$ obtemos o mesmo, polo que $y = x - 2$ é a única asíntota **oblicua**.

Para estudar o achegamento da función á asíntota vemos a resta $f(x) - (mx + n)$, neste caso

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2+1} - (x-2) = \frac{x^3-2x^2}{x^2+1} - \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+1} = \frac{-x+2}{x^2+1}$$

Agora estudaremos o signo de $\dfrac{-x+2}{x^2+1}$ cando $x \to \pm\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-x+2}{x^2+1} = 0^+$, co que temos a función achégase a curva por arriba en $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-x+2}{x^2+1} = 0^-$, co que temos a función achégase a curva por abaixo en $+\infty$.

Exemplo 5.26

Estudemos as posibles asíntotas oblicuas de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$

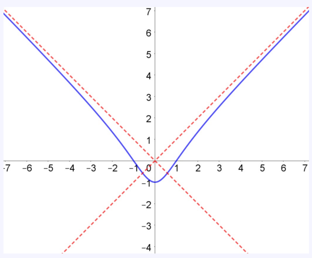
O feito da raíz fai que podamos considerar como grao do denominador 1, polo que se cumpriría que grao de $P(x)$ − grao de $Q(x) = 1$ e por tanto podemos afirmar que ten asíntota oblicua.

Como non é polinómico farémolo polo método xenérico.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x\cdot\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4}} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$



Temos así que $y = x$ é asíntota para $x \to +\infty$. Facendo os cálculos para $x \to -\infty$ obtemos $y = -x$, polo que a función ten dúas asíntotas **oblicuas**.

Neste caso non estudaremos o achegamento da función á asíntota.

4. **Ramas parabólicas**

   En moitas ocasións non hai asíntotas horizontais nin oblicuas. Esto sucede por exemplo nas funcións *polinómicas* de grao maior ou igual a 2. Ademais nas funcións *racionais* temos que hai **ramas parabólicas** se grao de $P(x)$ − grao de $Q(x) \geq 2$, e van cara arriba ou cara abaixo segundo que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sexa $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemplo 5.27

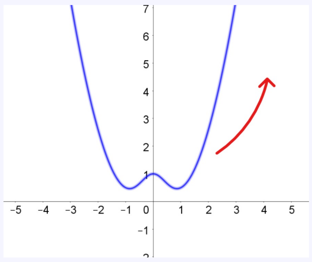
Estudemos as ramas parabólicas de $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$

Como temos que grao de $P(x)$ − grao de $Q(x) = 2$ podemos concluír que non hai asíntotas horizontais nin oblicuas, habendo neste caso **ramas parabólicas**.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + 1} = +\infty$$

Polo que temos, por ambos lados as ramas parabólicas van cara arriba.



5.6. Exercicios

Límite dunha función nun punto

1. Calcula o valor dos seguintes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x - 2}$

   b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

   c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 6}$

   d) $\lim\limits_{x \to 0{,}1} \log_{10} x$

   Sol: a) $-\dfrac{3}{2}$, *b)* 0, *c)* 2, *d)* −1

2. Calcula o valor dos seguintes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 7x + 10$

   b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x}$

   c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

   d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{2x^3 + 4x^2 - 14x + 8}$

   Sol: a) 4, *b)* $\dfrac{1}{4}$, *c)* 10, *d)* $\dfrac{1}{2}$

3. Dada a función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 10 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 2x + 4 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

   Calcula:

   a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

   b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

   c) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

   d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

   Sol: a) −10, *b)* −12, *c)* 8, *d)* $\nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

4. Calcula o valor dos seguintes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$
   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$
   c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+10x-24}{x^2+3x-10}$
   d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$

   Sol: a) $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$, b) $+\infty$, c) 2, d) 3

5. Calcula os límites das funcións seguintes nos puntos que se indican. Onde conveña, especifica o valor do límite á esquerda e á dereita do punto.

   a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ en -2, 0 e 2
   b) $f(x) = \dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ en 0, 2 e 3
   c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$ en -3 e 1
   d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3+3x^2}$ en -3 e 0

   Sol: a) $-\infty$ e $+\infty$, 0, $-\infty$ e $+\infty$ b) -3, $-\infty$, 0, c) $+\infty$ e $-\infty$, 0, d) $-\infty$ e $+\infty$, 0

Continuidade

6. Cada unha das seguintes funcións ten un ou máis puntos onde non é continua. Indica cales son eses puntos e o tipo de descontinuidade que presenta:

   a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$
   b) $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x}$
   c) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x}$
   d) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$

   Sol: a) $x=3$, ramas inf., b) $x=0$, evit., c) $x=0$, ramas inf., d) $x=2$, evit.

Límite dunha función no infinito

7. Calcula os seguintes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^4+1}{2x^5+1}$
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^4+1}{2x^3+1}$
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-6x^4+1}{2x^3+1}$
   d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^4+1}{2x^4+1}$
   e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-6x^4+1}{2x^3+1}$
   f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^4+1}{2x^3+1}$

   Sol: a) 0, b) $+\infty$, c) $-\infty$, d) 3, e) $+\infty$, f) $-\infty$

8. Sabendo que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ calcula:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$
   d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

   Sol: a) e, b) e^3, c) e^2, d) e^4

9. Calcula os seguintes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+7}{x-3} \cdot \dfrac{x+5}{4x-3}\right)$
   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1} \cdot \dfrac{x-7}{x-3}\right)$

   Sol: a) $\dfrac{1}{2}$, b) 1

10. Calcula o valor de a para que se cumpra:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+a}{x-a} - \frac{x^2-a}{x+a}\right) = 6$$

   Sol: $a=3$

Para aplicar

11. Determina o valor de a e de b para que se cumpra

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 2$$

Sol: $a = 4$, $b = -12$

12. Calcula o valor de n para que a seguinte función sexa continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1 & \text{se} \quad x \leq 4 \\ 2x + n & \text{se} \quad x > 4 \end{cases}$$

Sol: $n = -11$

13. Calcula o valor de k para que a seguinte función sexa continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 7 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Sol: $k = -14$

14. Determina para que valores de a e b é continua a función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{se} \quad x \leq 0 \\ ax + b & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x^2 + b & \text{se} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

Sol: $a = 2$, $b = 0$

15. Estuda a continuidade das seguintes funcións:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 - 5x}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 6}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$

Sol: a) $\mathbb{R} - \{-3\}$; $x = -3$ *(ramas inf.),*
b) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$; $x = 0$ *(ramas inf.),* $x = 5$ *(evit.),*
c) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$; $x = \pm 1$ *(ramas inf.),*
d) $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$; $x = -3$ *(ramas inf.),* $x = 1$ *(evit.)*

16. Estuda a continuidade das seguintes funcións.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se} \quad x < -2 \\ -3 & \text{se} \quad -2 \leq x < 5 \\ 3x + 1 & \text{se} \quad x \leq 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} & \text{se} \quad x \neq 5 \\ 6 & \text{se} \quad x = 5 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 5 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 + x}{x - 1} & \text{se} \quad x < 4 \\ -6 & \text{se} \quad x = 4 \\ \dfrac{2x - 1}{3} & \text{se} \quad x > 4 \end{cases}$

Sol: a) $\mathbb{R} - \{5\}$; $x = 5$ *(salto finito), b)* $\mathbb{R}$,
c) $\mathbb{R} - \{0\}$; $x = 0$ *(ramas inf.),*
d) $\mathbb{R} - \{1, 4\}$; $x = 1$ *(ramas inf.),* $x = 4$ *(evit.)*

Ramas infinitas. Asíntotas

17. Determina as asíntotas verticais, se é que as hai, e sitúa a curva respecto a elas:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 10}{x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 6}{x + 1}$

Sol: a) $x = -1$, *b)* $x = 2$, *c)* $x = 0$, *d) Non hai*

18. Determina as asíntotas verticais, se é que as hai, e sitúa a curva respecto a elas:

a) $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x - 2}{2x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

d) $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 + x - 6}$

Sol: a) Non hai, b) $x = 2$,$x = 3$, *c)* $x = 3$, *d)* $x = -3$

19. Determina as asíntotas horizontais ou oblicuas, se é que as hai, e sitúa a curva respecto a elas:

a) $f(x) = \dfrac{12x^5 + 2x - 1}{2x^5 + 7}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 8}{2x^3 + 4}$

c) $f(x) = \dfrac{-3x + 5}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 3x - 1}{2x + 9}$

Sol: a) Hor. $y = 6$, b) Hor. $y = 0$, c) Hor. $y = -3$, d) Non hai

20. Determina as ramas infinitas, $x \to +\infty$, destas funcións. Sitúa a curva respecto da asíntota:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{2x^2}$

Sol: a) Hor. $y = 0$, b) Obl. $y = x$, c) Obl. $y = x - 1$, d) Hor. $y = 2$

Unidade 6

DERIVADAS

6.1. Taxa de variación media dunha función

$$\text{TVM}[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación xeométrica

A **taxa de variación media** dunha función f no intervalo $[a,b]$ coincide coa **pendente** da recta **secante** á gráfica da función polos puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

6.2. Derivada dunha función nun punto

Chamamos **derivada** da función f no punto de abscisa $x = a$ ao límite, se existe:

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se existe este límite, representámolo por $f'(a)$ (ou tamén por $\frac{d}{dx}f(a)$) e dicimos que a función é **derivable** no punto a.

Podemos observar que se facemos $h = b - a$, temos que $b = a + h$, e ademais, se b tende a a, a diferenza $h = b - a$ tende a cero, polo que tamén podemos escribir o seguinte:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interpretación xeométrica

A **derivada** da función f no punto de abscisa $x = a$ é a **pendente** da recta **tanxente** á gráfica da función no punto $(a, f(a))$.

6.3. Función derivada

Ata o de agora vimos a derivada dunha función f no punto de abscisa $x = a$, obtendo como resultado en cada caso un número real.

Podemos, por tanto, considerar unha nova función, f', na que a cada punto de abscisa x asignámoslle o valor da derivada nese punto.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esta función recibe o nome de **función derivada**

Exemplo 6.1

Calcula a función derivada de $f(x) = x^2$

Segundo a definición de derivada temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

O feito de calcular a función derivada facilita moito o cálculo da función derivada de f en diferentes puntos. Así, neste caso para calcular $f'(0)$, $f'(1)$ ou $f'(2)$, basta con substituir os valores na función derivada.

Exemplo 6.2

Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ e $f'(2)$

Como xa temos polo exemplo anterior que $f'(x) = 2x$ obtemos doadamente que:

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 \qquad f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \qquad f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

Debemos observar que o dominio desta función está formado por todos os puntos x_0 do dominio de f para os que existe $f'(x_0)$, ou o que é o mesmo, os puntos nos que f é derivable.

Derivabilidade e continuidade

Cómpre ter en conta que para poder calcular a derivada dunha función f nun punto a é preciso que exista $f(a)$, pois no caso contrario non poderíamos calcular o numerador da definición de derivada.

Pero, ademais, a función deberá ser continua en a, xa que as rectas secantes non se aproximan a unha recta común e, polo tanto, non existe recta tanxente en a, nin $f'(a)$ que é a sua pendente.

Podemos establecer entón que para que unha función f sexa *derivable en* a é necesario que f sexa continua en a.

Porén, non basta coa continuidade en a, xa que pode ocorrer que f sexa continua en a e non derivable. Por exemplo a función $f(x) = |x|$ é unha función continua en $x = 0$, mais non existe $f'(0)$, xa que as rectas secantes pola dereita e pola esquerda non se aproximan a unha recta común.

Derivadas laterais

En casos coma no anterior $f(x) = |x|$

6.4. Regras de derivación

Previamente calculamos a derivada dalgunhas funcións aplicando a definición de derivada, pero, ás veces o proceso é longo e pesado. Con todo, existeN unhas sinxelas regras prácticas coas que se pode determinar, dun deixo moito máis doado, a derivada de calquera función elemental.

Todas as regras que imos ver a continuación pódense demostar, pero, polo de agora limitarémonos a dar as regRAS e a entender como se poñen en práctica.

Derivadas fundamentais

Derivada dunha función constante

Sexa $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, a súa derivada é $f'(x) = 0$, pois a pendente é cero en todos os seus puntos.

Derivada da función identidade

Sexa $f(x) = x$, a súa derivada é $f'(x) = 1$, pois a recta $y = x$ ten pendente 1 en todos os seus puntos.

Derivada dunha función potencia, x^n

Sexa $f(x) = x^n$, a súa derivada é $f'(x) = nx^{n-1}$ onde n é un número calquera.

Entendendo a raíz cadrada como unha función potencia temos que se $f(x) = \sqrt{x}$, a súa derivada é $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Derivada das funcións trigonométricas

- Sexa $f(x) = \operatorname{sen} x$, a súa derivada é $f'(x) = \cos x$.
- Sexa $f(x) = \cos x$, a súa derivada é $f'(x) = -\operatorname{sen} x$
- Sexa $f(x) = \operatorname{tg} x$, a súa derivada é $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Derivada das funcións arco

- Sexa $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, a súa derivada é $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
- Sexa $f(x) = \arccos x$, a súa derivada é $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- Sexa $f(x) = \operatorname{arctg} x$, a súa derivada é $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Derivada das funcións exponenciais

- Sexa $f(x) = e^x$, a súa derivada é $f'(x) = e^x$.
- Sexa $f(x) = a^x$, a súa derivada é $f'(x) = a^x \cdot \ln a$

Derivada das funcións logarítmicas

- Sexa $f(x) = \ln x$, a súa derivada é $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Sexa $f(x) = \log_a x$, a súa derivada é $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

Resumo (táboa das principais derivadas)

Función	**Derivada**
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

Exemplo 6.3

Calcula as seguintes funcións derivadas:

Función	**Derivada**
$f(x) = 5$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^7$	$f'(x) = 7x^6$
$f(x) = 5^x$	$f'(x) = 5^x \cdot \ln 5$
$f(x) = \log_5 x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 5}$

Derivadas e operacións

Derivada da suma de funcións, $f(x) + g(x)$

Sexa $h(x) = f(x) + g(x)$, unha función definida como suma de dúas funcións, entón a súa derivada é

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Derivada do produto dun número por unha función, $k \cdot f(x)$

Sexa $h(x) = k \cdot f(x)$, unha función definida como o produto dun número por unha función., entón a súa derivada é

$$h'(x) = k \cdot f'(x)$$

Derivada do produto de dúas funcións, $f(x) \cdot g(x)$

Sexa $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, unha función definida como o produto de dúas funcións, entón a súa derivada é

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Derivada do cociente de dúas funcións, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Sexa $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, unha función definida como o cociente de dúas funcións, entón a súa derivada é

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Resumo

Derivada da suma de funcións	**Derivada do produto dun número por unha función**
$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$	$h(x) = k \cdot f(x) \Rightarrow h'(x) = k \cdot f'(x)$
Derivada do producto de funcións	**Derivada do cociente de funcións**
$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

6.5. Regra da cadea

Para calcular derivadas, a definiciÓn non é o máis apropiado xa que require o cálculo de límites, por iso é mellor utilizar propiedades como a derivada da suma, do produto ou do cociente de funcións que teñen unha derivada coñecida. A regra da cadea permite calcular derivadas de funcións máis complicadas.

Por iso, se queremos derivar unha composición de dúas ou máis funcións debemos utilizar a regra da cadea:

Sexa $h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$, entón a súa derivada vén dada por

$$h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Para poder aplicar esta regra temos que ter que $f(x)$ é derivable no punto x_0 que estamos a estudar e $g(x)$ é derivable en $f(x_0)$

Exemplo 6.4

Calcula a derivada de $h(x) = (x^3 + 2x)^4$

Para calcular temos que identificar as funcións que forman a composición de $h(x)$. Neste caso $f(x) = x^3 + 2x$ e $g(x) = x^4$.
Por tanto a súa derivada é:

$$h'(x) = 4 \cdot (x^3 + 2x)^3 \cdot (3x^2 + 2)$$

6.6. Derivación da función logaritmo e derivación logarítmica

Se sucede que temos unha función exponencial-potencial, da forma $h(x) = f(x)^{g(x)}$, podemos derivar a función como función potencial, posteriormente como exponencial e sumar ambas derivadas.

Exemplo 6.5

Calcula a derivada de $h(x) = (\cos x)^{x^2}$

Para calcular a derivada derivamos como función potencial primeiro

$$x^2 \cdot (\cos x)^{x^2-1} \cdot (-\operatorname{sen} x)$$

A continuación derivamos como función exponencial

$$(\cos x)^{x^2} \cdot \ln(\cos x) \cdot 2x$$

Por último, sumamos ambas derivadas

$$h'(x) = x^2 \cdot (\cos x)^{x^2-1} \cdot (-\operatorname{sen} x) + (\cos x)^{x^2} \cdot \ln(\cos x) \cdot 2x$$

Simplificando a expresión obtemos o seguinte

$$h'(x) = (\cos x)^{x^2} \cdot \left(\frac{-x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x} + 2x \cdot \ln(\cos x)\right)$$

Derivada do logaritmo neperiano

Ás veces, a función exponencial-potencial é complicada. Nestes casos temos que lembrar a derivada do logaritmo neperiano xunto coa regra da cadea.

Lembremos ambas:

- Sexa $f(x) = \ln x$, a súa derivada é $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- Sexa $h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$, entón a súa derivada vén dada por $h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$

Temos entón que se $F(x) = \ln f(x)$, entón a súa derivada é $F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Derivación logarítmica

Tendo en conta o anterior, se tomamos logaritmos neperianos a ambos lados da expresión que da a función, podemos aplicar o seguinte:

- Primeiro, podemos escribir o exponente diante, multiplicando ao logaritmo, grazas as propiedades do logaritmo.
- A continuación derivamos a ambos lados.
- Despexamos a expresión da derivada.

Vexamos esto cun exemplo.

Exemplo 6.6

Imos calcular a derivada de $h(x) = (\cos x)^{x^2}$ coa axuda do logaritmo neperiano

Primeiro aplicamos o logaritmo a cada membro da igualdade

$$\ln h(x) = \ln(\cos x)^{x^2}$$

Aplicamos a propiedade do logaritmo, pasando o expoñente a multiplicar o logaritmo.

$$\ln h(x) = x^2 \cdot \ln(\cos x)$$

Derivamos a ambos lados

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = 2x \cdot \ln(\cos x) + x^2 \cdot \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Despexando $h'(x)$ e simplificando a expresión temos que

$$h'(x) = h(x) \cdot \left(2x \cdot \ln(\cos x) + \frac{-x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = (\cos x)^{x^2} \cdot \left(2x \cdot \ln(\cos x) + \frac{-x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

6.7. Aplicacións da derivada

Crecemento e decrecemento

Xa vimos en cursos anteriores o **crecemento** e **decrecemento** dunha función. Lembremos que:

- Unha función $f(x)$ é **crecente** no intervalo (a, b) cando verifica que

$$\forall x, y \in (a, b) \text{ tales que } x < y \text{ temos que } f(x) \leq f(y)$$

- Unha función $f(x)$ é **decrecente** no intervalo (a, b) cando verifica que

$$\forall x, y \in (a, b) \text{ tales que } x < y \text{ temos que } f(x) \geq f(y)$$

Se cambiamos as condicións $\leq$ e $\geq$ por $<$ e $>$, respectivamente, dise que a función é **estritamente crecente** e **estritamente decrecente**.

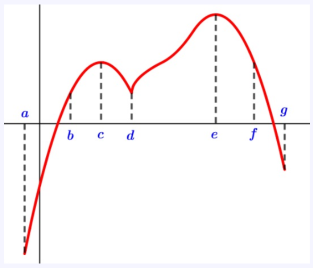
Trataremos de extender esta idea ao comportamento da función nun punto en lugar de estudala nun intervalo.

- $f(x)$ é **crecente** no punto $x = a$ se existe un entorno de a no que se cumpre que:
  - $f(a) \leq f(x)$ para todo punto x do entorno situado á dereita de a $(x > a)$.
    O que é o mesmo $f(a) \leq f(x)$ para os valores cercanos a a e que están a súa dereita.
  - $f(a) \geq f(x)$ para todo punto x do entorno situado á esquerda de a $(x < a)$.
    O que é o mesmo $f(a) \geq f(x)$ para os valores cercanos a a e que están a súa esquerda.
- $f(x)$ é **decrecente** no punto $x = a$ se existe un entorno de a no que se cumpre que:
  - $f(a)f(x)$ para todo punto x do entorno situado á dereita de a $(x > a)$.
    O que é o mesmo $f(a) \geq f(x)$ para os valores cercanos a a e que están a súa dereita.
  - $f(a) \leq f(x)$ para todo punto x do entorno situado á esquerda de a $(x < a)$.
    O que é o mesmo $f(a) \leq f(x)$ para os valores cercanos a a e que están a súa esquerda.

Vexamos isto con un exemplo máis gráfico.

Exemplo 6.7

Analicemos o crecemento e o decrecemento na seguinte gráfica



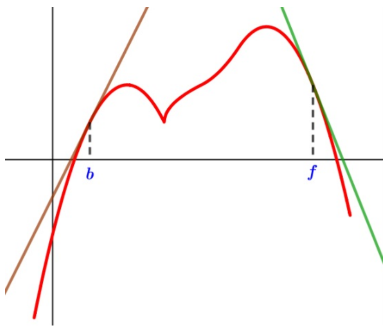
Se analizamos os intervalos temos que a función é:

- **crecente** en (a, c) e en (d, e).
- **decrecente** en (c, d) e en (e, g).

En cambio, se analizamos os puntos temos que a función é:

- **crecente** en b.
- **decrecente** en f.

Se lembramos a interpretación xeométrica da **derivada** vemos que, se unha función ten derivada unn punto, existe unha relación entre o signo da derivada (signo da pendente da recta tanxente) e o seu crecemento.



Por tanto, podemos aplicar o seguinte:

- Se $\boldsymbol{f'(a) > 0}$, entón f é **crecente** en a.
- Se $\boldsymbol{f'(a) < 0}$, entón f é **decrecente** en a.

Mínimos e máximos

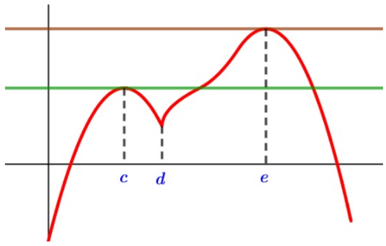
Acabamos de ver no exemplo anterior que hai puntos que nos que a función nin é crecente nin decrecente. Estes puntos teñen un nome. Así dicimos que a función presenta en c un máximo e en d un mínimo. Pero é claro que a función non toma o maior valor do seu percorrido en c, nin o menor en d, polo que diremos que en c presenta un **máximo relativo** e en d un **mínimo relativo**. Chamaremos **extremos relativos** da función ao conxunto dos máximos e mínimos relativos.

Vexamos agora unha definición formal para eles:

- $f(x)$ ten un **máximo relativo** no punto $x = a$ se para todo punto x dun entorno de a se cumpre que $f(a) \geq f(x)$. O que é o mesmo $f(a) \geq f(x)$ para os valores cercanos a a.

- $f(x)$ ten un **mínimo relativo** no punto $x = a$ se para todo punto x dun entorno de a se cumpre que $f(a) \leq f(x)$. O que é o mesmo $f(a) \leq f(x)$ para os valores cercanos a a.

Volvemos a observar a mesma función. Como xa comentamos hai un máximo relativo en c e un mínimo relativo en d. Ademais podemos afirmar que tamén hai un máximo relativo en e.



Na gráfica observamos que en c e en e a súa recta tanxente é horizontal, pero en d non hai recta tanxente. Por tanto podemos relacionar a existencia dun extremos relativo coa súa derivada, sempre que exista, do seguinte xeito:

Se f posúe un **extremo relativo** en $x = a$ e $f(x)$ é derivable en a, entón $\boldsymbol{f'(a) = 0}$.

Se temos un punto a no que $f'(a) = 0$ sabemos que pode haber un extremo relativo. Para saber que tipo de extremo relativo é debemos estudar o que sucede nun entorno do punto.

Para iso, miramos o signo da derivada en puntos cercanos. Teremos en conta o seguinte:

- Se á esquerda crece ($f'(x_0) > 0$ en $(a - \varepsilon, a)$) e á dereita decrece ($f'(x_0 < 0$ en $(a, a + \varepsilon)$) teremos un **máximo relativo**.
- Se á esquerda decrece ($f'(x_0) < 0$ en $(a - \varepsilon, a)$) e á dereita crece ($f'(x_0 > 0$ en $(a, a + \varepsilon)$) teremos un **mínimo relativo**.

Para facer un estudo dos extremos relativos consideraremos esta información e traballaremos con ela do mesmo xeito que facíamos no tema das inecuacións nas que analizabamos o signo. Vexamos isto con un exemplo.

Exemplo 6.8

Estuda os extremos relativos da función $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

Como é unha función polinómica temos que é continua e derivable en todo $\mathbb{R}$. Polo que no caso de ter un extremo relativo, a derivada no punto será $f'(x_0) = 0$.

A súa derivada é $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$. Igualamos agora a derivada a 0 para tratar de obter os seus posibles extremos relativos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 12x(x^2 + x - 2) = 0$$

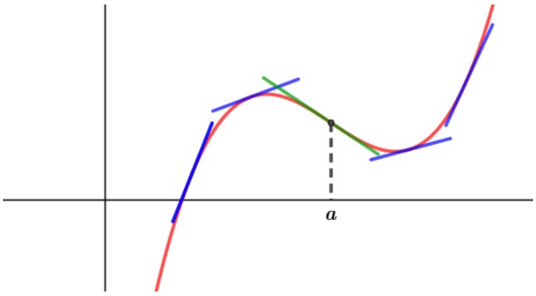
Resolvendo esta ecuación obtemos tres solucións $x = 0$, $x = -2$ e $x = 1$. Temos así tres posibles extremos relativos. Analicemos o signo da derivada dos intervalos determinados por eses puntos.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Temos así que hai un mínimo relativo en $x = -2$ e en $x = 1$ e un máximo relativo en $x = 0$.

Convexidade e concavidade

Se observamos a seguinte gráfica con detemento, vemos que ata o punto de abscisa a as rectas tanxentes aos respectivos puntos están por encima da gráfica, e despois do punto están por debaixo da gráfica.



O estudo da posición relativa dunha cura e das súas tanxentes nos distintos puntos do dominio recibo o nome de estudo da **curvatura da función nun punto**.

Do mesmo xeito que se fixo co *crecemento*, aquí tamén se pode analizar a *curvatura* nun punto ou nun intervalo. Farémola dun só xeito, concretamente nun punto.

- $f(x)$ é **cóncava cara arriba** (*cóncava* nalgúns libros de consulta) nun punto $x = a$ se a curva da gráfica está por *riba* da recta tanxente nese punto.
- $f(x)$ é **cóncava cara abaixo** (*convexa* nalgúns libros de consulta) nun punto $x = a$ se a curva da gráfica está por *abaixo* da recta tanxente nese punto.

Con estas definicións podemos dicir que a a gráfica anterior é cóncava cara abaixo ata o punto a e cóncava cara arriba a partir do punto a.

Os puntos, como o a da gráfica anterior, no que a curvatura cambia e por tanto cambia a posición relativa entre a curva e as súas tanxentes reciben o nome de **puntos de inflexión da función** (a función cambia de cóncava cara arriba a ser cóncava cara abaixo ou viceversa).

Se comparamos a curvatura coa segunda derivada $f''(x)$, sempre que exista, obtemos a seguinte relación:

- Se $\boldsymbol{f''(a) > 0}$, entón f é **cóncava cara arriba** en a.
- Se $\boldsymbol{f''(a) < 0}$, entón f é **cóncava cara abaixo** en a.
- Se $\boldsymbol{f''(a) = 0}$, non podemos asegurar nada. Pero en cambio temos que se f presenta un **punto de inflexión** en a, entón necesariamente $\boldsymbol{f''(a) = 0}$.

Cálculo de extremos relativos coa segunda derivada

A segunda derivada tamén nos permite saber se un punto de tanxente horizontal é máximo ou mínimo. Se $f'(a) = 0$, temos que a tanxente en $x = a$ é horizontal, polo que poden darse un dos seguintes casos:

- Se $\boldsymbol{f''(a) > 0}$, a curva está por riba da tanxente (cóncava cara arriba) polo que en $x = a$ temos un mínimo relativo.

- Se $\boldsymbol{f''(a) < 0}$, a curva está por debaixo da tanxente (cóncava cara abaixo) polo que en $x = a$ temos un máximo relativo.
- Se $\boldsymbol{f''(a) = 0}$, a segunda derivada non serve para decidir, polo que temos que estudar o crecemento e decrecemento a ambos lados de a.

Vemos o exemplo anterior no que estudabamos os extremos relativos, pero usando a segunda derivada.

Exemplo 6.9

Estuda os extremos relativos da función $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

Temos que a súa derivada é $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$. Como xa fixemos, igualamos a derivada a 0 para obter os seus posibles extremos relativos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 12x(x^2 + x - 2) = 0$$

Obtemos tres solucións $x = 0$, $x = -2$ e $x = 1$. Temos así tres posibles extremos relativos.
Calculamos a segunda derivada agora, $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12 \cdot (3x^2 + 2x - 2)$
Temos que ver o signo da segunda derivada para os valores anteriores:

- $f''(-2) = 12 \cdot (3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 2) = 12 \cdot 6 = 72 > 0$
  Entón en $x = -2$ hai un mínimo relativo.
- $f''(0) = 12 \cdot (3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 2) = 12 \cdot (-2) = -24 < 0$
  Entón en $x = 0$ hai un máximo relativo.
- $f''(1) = 12 \cdot (3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2) = 12 \cdot 3 = 36 > 0$
  Entón en $x = 1$ hai un mínimo relativo.

Representación de funcións

Para representar a gráfica dunha función f debemos estudar os conceptos seguintes, aplicados á función en particular que temos:

a) Dominio

Conxunto de valores de x para os que existe $f(x)$

b) Puntos de corte cos eixes

Para ver os puntos de corte co eixe OX temos que $y = 0$ e para o eixe OY temos que $x = 0$

c) Simetrías

- Se $f(-x) = f(x)$ para todo x do dominio (*función par*), entón a gráfica da función é simétrica respecto do eixe Y.
- Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x do dominio (*función impar*), entón a gráfica da función é simétrica respecto da orixe de coordenadas.

d) Periodicidade

A función é periódica se existe un número real positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo x do dominio. O período é o menor valor de p que verifica esta propiedade.

e) Continuidade

A función é discontinua en $x = a$ se non se cumple que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, que pode suceder porque sucede algunha das seguintes condicións:

- Non existe $f(a)$
- Non existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
- Existen, pero non coinciden os valores

f) Asíntotas

- Pode haber asíntota vertical, $x = a$, se algún dos límites laterais en a son $\pm\infty$.
- Pode haber asíntota horizontal, $x = k$, se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ ou se $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$, onde k é un número real.
- Pode haber asíntota oblícua, $y = mx + n$, se existen os seguintes límites, con $m \neq 0$:
  - $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $n = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$
  - $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $n = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - mx]$

g) Crecemento e decrecemento. Máximos e mínimos relativos

- Se $f'(x) > 0$ en (a, b), entón a función é crecente en (a, b)
- Se $f'(x) < 0$ en (a, b), entón a función é decrecente en (a, b)
- Se $f'(c) = 0$, entón en $x = c$ hai un máximo relativo se a función pasa de ser crecente a decrecente, e un mínimo relativo se pasa de ser decrecente a crecente.

h) Curvatura. Puntos de inflexión

- Se $f''(x) > 0$ en (a, b), entón a función é cóncava cara arriba en (a, b)
- Se $f''(x) < 0$ en (a, b), entón a función é cóncava cara abaixo en (a, b)
- Se $f''(c) = 0$, entón en $x = c$ hai un punto de inflexión se a función pasa de cóncava cara arriba a cóncava cara abaixo ou viceversa.

Veremos un par de exemplos nos que estudaremos e representaremos a función.

Exemplo 6.10

Estuda e representa graficamente a función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

a) Dominio

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Punto de corte cos eixes

- Eixe OY. Aquí $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Corta ao eixe OY en $(0, 0)$
- Eixe OX. Aquí $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 0$. Só corta ao eixe OX en $(0, 0)$

Continuación exemplo

c) **Simetrías**

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-1} = \dfrac{-x}{x^2-1} = -f(x)$

Temos entón que é unha función impar, por tanto simétrica respecto a orixe de coordenadas.

d) **Periodicidade**

A función non é periódica.

e) **Continuidade**

A función é continua en todo o seu dominio. Ou sexa, só é discontinua en $x=-1$ e $x=1$, por non existir $f(-1)$ nin $f(1)$.

f) **Asíntotas**

Como vimos no apartado *c*), a función é simétrica respecto a orixe de coordenadas. Isto quere dicir que fará o contrario para un valor positivo que para un valor negativo. Por tanto basta con estudar os valores positivos. Vexamos as posibles asíntotas:

- Asíntota vertical. Pode haber asíntota vertical, xa que hai valores nos que a función non existe. Faremos os límites laterais en $x=1$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$

  Por tanto, podemos confirmar que hai unha asíntotal vertical en $x=1$

- Asíntota horizontal ou oblicua. Se lembramos a teoría, sabemos que neste caso so pode haber asíntotal horizontal xa que

  $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$

  Neste caso entón, a asíntota horizontal é $y=0$

g) **Crecemento e decrecemento. Máximos e mínimos relativos.**

Como é unha función continua en todo o seu dominio, e non é unha función definida a trozos, temos que a función é derivable nos intervalos abertos xerados polo seu dominio. Por suceder iso, temos que no caso de haber un extremo relativo, $f'(x)$ vale 0 nese punto. Busquemos os posibles extremos relativos.

$f'(x) = \dfrac{(x^2-1)-x\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-x^2-1}{x^4-2x^2+1}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-1=0 \Rightarrow x^2=-1$

Temos que non hai entón extremos relativos, o que é o mesmo, non hai puntos de cambio de crecemento. Vexamos o que sucede nos intervalos xerados polo dominio.

$f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} < 0$ para calquera valor de x, polo que é decrecente en todo momento.

h) **Curvatura. Puntos de inflexión.**

Buscamos os posibles puntos de inflexión. Para eso precisamos a segunda derivada.

$f''(x) = \dfrac{-2x\cdot(x^4-2x^2+1)-(-x^2-1)\cdot(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+1)^2} = \dfrac{2x^5+4x^3-6x}{(x^4-2x^2+1)^2}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x^5+4x^3-6x}{(x^4-2x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^5+4x^3-6x=0 \Rightarrow 2x\cdot(x^4+2x^2-3)=0 \Rightarrow$
$x=0$, $x=-1$ e $x=1$

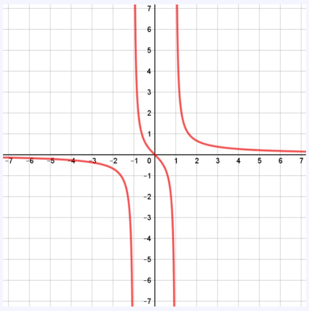
Como só $x=0$ pertence ao dominio, é o único posible punto de inflexión.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Continuación exemplo

De todas formas, gracias a simetría xa sabíamos que do 0 cara un lado fai o contrario que cara o outro. Polo que tanto dunha forma como doutra temos que en $x = 0$ hai un punto de inflexión.

i) **Representación gráfica**



Aquí podemos ver detalles que antes non analizamos, por exemplo:

- A simetría impar da función fai que $x = -1$ sexa unha asíntota vertical, e tamén $y = 0$ asíntota horizontal en $-\infty$
- Como o único punto de corte co eixe OX é $(0, 0)$, temos que a curva achégase a asíntota $y = 0$ sen cruzala, polo que se achega por arriba en $+\infty$ e por abaixo en $-\infty$

Vexamos outro exemplo.

Exemplo 6.11

Estuda e representa graficamente a función $f(x) = x^3 - 3x$

a) **Dominio**
Dom $f = \mathbb{R}$

b) **Punto de corte cos eixes**

- Eixe OY. Aquí $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Corta ao eixe OY en $(0, 0)$
- Eixe OX. Aquí $y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 3) = 0$
$\Rightarrow x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$. Corta entón ao eixe OX en $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0)$

c) **Simetrías**
$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$
Temos que esta tamén é unha función impar, o que implica que é simétrica respecto á orixe de coordenadas.

d) **Periodicidade**
A función non é periódica.

e) **Continuidade**
A función é continua en $\mathbb{R}$.

f) **Asíntotas**
Neste caso non hai asíntotas, pois as funcións polinómicas non tiñan asíntotas.

Continuación exemplo

g) Crecemento e decrecemento. Máximos e mínimos relativos.

Como é unha función continua en todo o seu dominio, e non é unha función definida a trozos, temos que é derivable nos intervalos abertos xerados polo seu dominio. Por suceder iso, temos que no caso de haber un extremo relativo, $f'(x)$ vale 0 nese punto. Busquemos os posibles extremos relativos.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Entón hai posibles extremos relativos en $x = -1$ e $x = 1$.

Hai dous posibles extremos relativos. Temos que ver se son máximos ou mínimos. Utilizaremos o criterio da segunda derivada.

$f''(x) = 6x$

- $f''(-1) = -6 < 0$. Entón en $x = -1$ hai un máximo relativo.
- $f''(1) = 6 > 0$. Entón en $x = 1$ hai un mínimo relativo.

Temos entón que a función crece en $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$ e decrece en $(-1, 1)$

h) Curvatura. Puntos de inflexión.

Para os puntos de inflexión precisamos a segunda derivada que xa atopamos antes, $f''(x) = 6x$

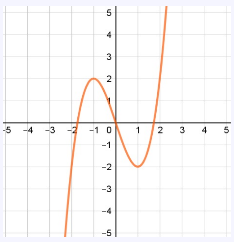
$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

Analizamos a curvatura.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$\boldsymbol{f''(x)}$	$-$	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\frown$	$\smile$

Temos así que a función é cóncava cara abaixo en $(-\infty, 0)$ e cóncava cara arriba en $(0, +\infty)$, polo que hai un punto de inflexión en $x = 0$.

i) Representación gráfica



Exercicio resolto 6.1

Estuda a función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Resolución

a) Dominio

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, xa que o denominador anúlase para $x = -1$ e para $x = 1$.

b) Punto de corte cos eixes

- Eixe OY. Aquí $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Corta ao eixe OY en $(0, 0)$.
- Eixe OX. Aquí $y = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$. Corta ao eixe OX en $(0, 0)$. Entón $(0, 0)$ é o único punto de corte con calquera eixe.

Continuación exercicio resolto

c) Simetrías

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x^3}{x^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$

Temos que esta tamén é unha función impar, o que implica que é simétrica respecto á orixe de coordenadas. Isto serviranos para estudar só o que fai nos valores positivos e visualizar que fai o contrario nos valores negativos.

d) Continuidade

É unha función racional, polo que é continua en todo o seu dominio, isto é, continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

e) Asíntotas

Vexamos se hai asíntota vertical en $x=1$, e por simetría tamén en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$

Por tanto hai asíntotas verticais en $x=1$ e $x=-1$

Vamos agora coas asíntotas horizontais ou as oblicuas. Como o grao do numerador é unha unidade maior que o do denominador temos que existe asíntota horizontal.

$\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$

Temos que $y=x$ é a asíntota oblicua.

e) Asíntotas

Vexamos se hai asíntota vertical en $x=1$, e por simetría tamén en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$

Por tanto hai asíntotas verticais en $x=1$ e $x=-1$

Vamos agora coas asíntotas horizontais ou as oblicuas. Como o grao do numerador é unha unidade maior que o do denominador temos que existe asíntota horizontal.

$\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$

Temos que $y=x$ é a asíntota oblicua.

f) Crecemento e decrecemento. Máximos e mínimos relativos.

Calculamos a derivada

$f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{x^4-2x^2+1}$

$f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{x^4-3x^2}{x^4-2x^2+1}=0\Rightarrow x^4-3x^2=0\Rightarrow x^2\cdot(x^2-3)=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\ x=0.$

Entón hai posibles extremos relativos en $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ e $x=\sqrt{3}$.

Para ver se estes puntos son máximos ou mínimos utilizaremos o criterio da segunda derivada.

$f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{x^6-3x^4+3x^2-1}=\dfrac{2x\cdot(x^2+3)}{x^6-3x^4+3x^2-1}$

Agora analizamos o signo en $x=0$ e en $x=\sqrt{3}$, xa que por simetría en $x=-\sqrt{3}$ fai o contrario.

$f''(0)=0$, polo que en $x=0$ hai un punto de inflexión. Analizarémolo polo miúdo no seguinte apartado.

$f''(\sqrt{3})=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot((\sqrt{3})^2+3)}{(\sqrt{3})^6-3(\sqrt{3})^4+3(\sqrt{3})^2-1}=\dfrac{12\sqrt{3}}{27-27+9-1}>0$, así que en $x=\sqrt{3}$ hai un mínimo relativo, e por simetría un máximo relativo en $x=-\sqrt{3}$.

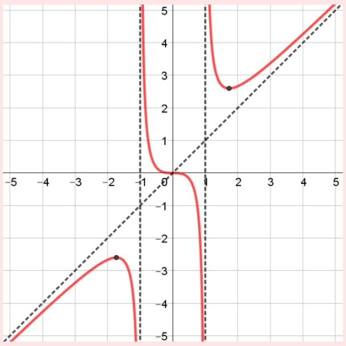
Continuación exercicio resolto

g) **Curvatura. Puntos de inflexión**

$f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x^3 + 6x}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x = 0 \Rightarrow 2x \cdot (x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$, así que en $x = 0$ hai un punto de inflexión.

Outra maneira de ver isto é a seguinte. Como é simétrica respecto á orixe de coordenadas, e o posible punto de inflexión é o propio $(0, 0)$, temos que a curvatura é contraria respecto ao centro de simetría, polo que é un punto de inflexión xa que cambia a curvatura.

i) **Representación gráfica**



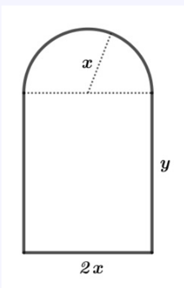
Problemas de optimización

Os problemas de optimización consisten en atopar o mínimo ou o máximo dunha función dunha variable. As técnicas aprendidas permitennos resolver unha gran cantidade deses problemas de máximos e mínimos. Para iso debemos expresar mediante unha función aquela cantidade que queremos maximizar ou minimizar. Verémolo mellor cun exemplo.

Exemplo 6.12

Unha fiestra está formada por un rectángulo e un semicírculo na parte superior. Debemos determinar as dimensións para que a área sexa máxima, sabendo que o perímetro da fiestra debe medir 10 metros.

Como en moitos dos exercicios xeométricos, será moi útil facer un debuxo.



Se chamamos x ao radio do semicírculo, entón a anchura do rectángulo será o doble que o radio, $2x$. Chamémoslle a altura do rectángulo y.

O perímetro da fiestra é:

$$2y + 2y + \pi x = 10$$

Despexamos y para ter unha sóa variable e obtemos o seguinte:

$$y = \frac{10 - 2x - \pi x}{2} = 5 - x - \frac{\pi x}{2} = 5 - \frac{(2 + \pi)x}{2}$$

Continuación exemplo

A área da fiestra é:

$$A(x) = 2x \cdot \left(5 - x - \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{\pi x^2}{2} = 10x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi x^2}{2} = 10x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$$

Como ten que ter sentido a construcción da fiestra, temos que tanto x como y deben ser maiores que 0. Entón:

- $x > 0$
- $y > 0 \Rightarrow \dfrac{10 - 2x - \pi x}{2} > 0 \Rightarrow 10 > 2x + \pi x \Rightarrow 10 > (2 + \pi)x \Rightarrow x < \dfrac{10}{2 + \pi}$

Por tanto x pode variar entre 0 e $\dfrac{10}{2+\pi}$.
Xa temos o dominio. Imos buscar agora os posibles extremos relativos da función área. Para iso calculamos a derivada e igualámola a 0:

$$A'(x) = 10 - 4x - \pi x$$
$$A'(x) = 0 \Rightarrow 10 - 4x - \pi x = 0 \Rightarrow 10 = (4 + \pi)x \Rightarrow x = \frac{10}{4 + \pi}$$

Hai un posible extremo relativo en $x = \dfrac{10}{4+\pi}$. Para averiguar que tipo de extremo relativo é, desta vez, imos utilizar o criterio da segunda derivada.

$$A''(x) = -4 - \pi$$

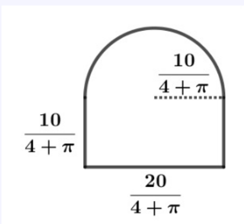
Como $A''(x) < 0$ para calquera valor, temos que a función é cóncava cara abaixo, e máis concretamente por ser $A''\left(\dfrac{10}{4+\pi}\right) < 0$, temos que en $x = \dfrac{10}{4+\pi}$ hai un máximo relativo.
Teríamos que estudar o valor de $A(0)$, $A\left(\dfrac{10}{2+\pi}\right)$ e $A\left(\dfrac{10}{4+\pi}\right)$ para ver onde se acada o máximo absoluto, pero por ser a función cóncava en todo momento, neste exemplo non nos fai falta calcular os valores, pois nos extremos serán os mínimos.

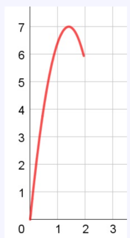
Outra maneira de razoar o mesmo sería ter en conta que a función área é unha función cadrática polo que o valor que atopamos coincide co vértice e a súa orientación é negativa.

Xa temos o valor para a base $x = \dfrac{10}{4+\pi}$, calculemos agora a altura do rectángulo:

$$y = 5 - \frac{(2+\pi)x}{2} \text{ e substituíndo } y = 5 - \frac{(2+\pi)}{2}\frac{10}{4+\pi} = \frac{10}{4+\pi}$$

Por tanto, a fiestra de área máxima terá forma rectangular, na que a súa base $\dfrac{20}{4+\pi}$ e a altura é a metade $\dfrac{10}{4+\pi}$, rematada por un semicírculo de radio $\dfrac{10}{4+\pi}$.
Vemos o resultado e a gráfica da función





6.8. Exercicios

Taxa de variación media

1. Indicar a TVM da función $f(x) = 4x - x^2$ nos intervalos $[1,2]$, $[1,3]$ e $[1,4]$.

Sol: 1, 0 e -1

2. Indicar a TVM da función $f(x) = 4x - x^2$ no intervalos con orixe no 1 e con lonxitude variable, h. É dicir, no intervalo $[1, 1+h]$. Comproba, dándolle a h os valores axeitados, que se obteñen os resultados do exercicio anterior.

Sol: $2 - h$

Derivada dunha función nun punto

3. Utilizando a definición de derivada nun punto, determina a derivada de $f(x) = 4x - x^2$ nos puntos de abscisas 1 e 4.

Sol: 2 e -4

4. Utilizando a definición de derivada nun punto, determina a derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nos puntos de abscisas 1 e 2.

Sol: -1 e $-\dfrac{1}{4}$

Función derivada

5. Utilizando a definición de función derivada, determina a mesma de $f(x) = 4x - x^2$, e comproba que, a partir dela, se poden obter os valores concretos determinados no exercicio 3.

Sol: $f'(x) = 4 - 2x$

6. Utilizando a definición de función derivada, determina a mesma de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, e comproba que, a partir dela, se poden obter os valores concretos determinados no exercicio 4.

Sol: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

7. Utilizando a definición de función derivada, determina a mesma de $f(x) = x^3 + x^2$.

Sol: $f'(x) = 3x^2 + 2x$

Regras de derivación

8. Utilizando as regras de derivación indica a función derivada das seguintes funcións:

   a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$
   b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
   c) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
   e) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$
   f) $f(x) = \operatorname{tg} x$ (Utiliza $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$)

Sol: a) $f'(x) = 6x - 6$, *b)* $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, *c)* $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{x^2}}$, *d)*$f'(x) = \dfrac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$, *e)* $f'(x) = -\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$,*f)* $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9. Utilizando as regras de derivación indica a función derivada das seguintes funcións:

   a) $f(x) = xe^x$
   b) $f(x) = x2^x$
   c) $f(x) = (x^2+1)\log_2 x$
   d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
   e) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$
   f) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

Sol: a) $f'(x) = (x+1)e^x$, *b)* $f'(x) = 2^x(1 + x\ln 2)$, *c)* $f'(x) = 2x\log_2 x + \dfrac{x^2+1}{x\ln 2}$, *d)*$f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$, *e)* $f'(x) = -\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2}$,*f)* $f'(x) = -\dfrac{\log x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2 \ln 10}$

Regra da cadea

10. Indica a función derivada da función

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 7)$$

Sol: $f'(x) = (2x - 5)\cos(x^2 - 5x + 7)$

11. Indica a función derivada da función

$$f(x) = \sqrt[3]{(5x + 3)^2}$$

Sol: $f'(x) = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x + 3}}$

Derivadas

12. Indica a función derivada da función

$$f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1) \cdot \cos(3x + 1)$$

Sol: $f'(x) = 3 + 3\operatorname{tg}^2(3x + 1) = \dfrac{3}{\cos^2(3x + 1)}$

13. Indica a función derivada da función

$$f(x) = \frac{\log x^2}{x}$$

Sol: $f'(x) = \dfrac{2}{x^2 \ln 2} - \dfrac{\log x^2}{x^2}$

14. Indica a función derivada da función

$$f(x) = \cos(3x - \pi)$$

Sol: $f'(x) = 3\operatorname{sen} 3x$

15. Indica a función derivada da función

$$f(x) = \sqrt{1 + 2x}$$

Sol: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$

16. Indica a función derivada da función

$$f(x) = xe^{2x+1}$$

Sol: $f'(x) = (2x + 1)e^{2x+1}$

17. Indica a función derivada da función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + 1)}{x}$$

Sol: $f'(x) = 2\cos(x^2 + 1) - \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + 1)}{x^2}$

Derivación logarítmica

18. Deriva estas funcións usando a derivación logarítmica:

    a) $f(x) = x^x$
    b) $f(x) = xx^2$
    c) $f(x) = x^{\ln x}$

Sol: a) $f'(x) = x^x(+\ln x)$,
b) $f'(x) = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x)$
c) $f'(x) = 2x^{\ln x} \cdot \dfrac{\ln x}{x}$.

Aplicacións. Recta tanxente

19. Indica os puntos de tanxente horizontal da seguinte función e clasifícaos:

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16$$

Sol: $(2, \frac{28}{3})$ *mínimo;* $(4, \frac{32}{3})$ *máximo*

20. Escribe a ecuación da recta tanxente á curva

$$y = \frac{x + 2}{x - 3}$$

no punto de abscisa 2.

Sol: $y = -5x + 6$

21. Escribe a ecuación da recta tanxente á curva

$$y = x^2 - 5x + 6$$

no punto de abscisa 3.

Sol: $y = x - 3$

22. Escribe a ecuación da recta tanxente á curva

$$y = \sqrt{x + 1}$$

no punto de abscisa 0.

Sol: $x - 2y + 2 = 0$

23. Escribe a ecuación da recta tanxente á grafica de cada unha das seguintes funcións nos puntos que se indican:

    a) $f(x) = x^3+2x+10$, no punto de abscisa $x = -2$.

    b) $f(x) = e^x$, no punto de abscisa $x = 0$.

    c) $f(x) = \ln x$, no punto no que a gráfica corta ao eixe de abscisas.

    Sol: a) $y = 14x + 26$, b) $y = x + 1$, c) $y = x - 1$

24. Escribe a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ no punto de abscisa 1. En qué punto a tanxente é paralela ao eixe de abscisas?

    Sol: $y = x$, $(0, 0)$

25. Existe algún punto da función $f(x) = 4x-x^2$ en que a tanxente sexa paralela á recta que pasa polos puntos $(0, 0)$ e $(3, 3)$? En caso afirmativo, indícao e tamén a ecuación da recta tanxente.

    Sol: Si, en $x = \dfrac{3}{2}$ e $y = x + \dfrac{9}{4}$

26. Determina os coeficientes a, b e c da función

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

    se sabes que pasa por $(0, 5)$ e que ten un punto de tanxente horizontal en $(2, -3)$

    Sol: $a = 2$, $b = -8$ e $c = 5$

27. Determina os coeficientes a, b e c da función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

    se sabes que pasa por $(0, 4)$ e súa recta tanxente en $(2, -2)$ é paralela a recta $y = x$.

    Sol: $a = -2$, $b = -3$ e $c = 4$

28. Indica unha función de segundo grao se sabes que pasa por $(0, 1)$ e que a pendente da recta tanxente no punto $(2, -1)$ vale 0.

    Sol: $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$

Aplicacións. Derivabilidade

29. Determina os coeficientes a, b e c da función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

    para que sexa derivable en $\mathbb{R}$ e pase por $(2, 2)$.

    Sol: $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$

30. Determina os coeficientes a, b e c da función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

    para que sexa derivable en $\mathbb{R}$ e pase por $(3, 1)$.

    Sol: $a = -1$, $b = 4$ e $c = -2$

Aplicacións. Crecemento

31. Determina os intervalos de crecemento e decrecemento da función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

    e clasifica os puntos que determinan eses intervalos.

    Sol: Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, decrece en $(0, 2)$. Máximos relativo en $(0, 0)$ e mínimo relativo en $(2, -4)$

32. Determina os intervalos de crecemento e decrecemento da función

$$f(x) = x^3 + 3x$$

    e clasifica os puntos que determinan eses intervalos.

    Sol: Crece en $\mathbb{R}$

Aplicacións. Extremos relativos

33. Calcula os máximos e os mínimos relativos e absolutos da función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ no intervalo $[-4, 2]$ e no intervalo $[0, 5]$.

Sol: a) $(-3, 0)$ *máx. rel,* $(-1, -4)$ *mín. rel. e abs.,* $(-4, -4)$ *mín. abs. e* $(2, 50)$ *máx. abs.; b)* $(5, 320)$ *máx. abs. e* $(0, 0)$ *mín. abs.*

34. Determina o valor de a para que a función $f(x) = x^3 + ax^2 - 2x + 1$ teña un punto de inflexión en $x = -1$.

Sol: $a = 3$

Aplicacións. Estudo dunha función

35. Estuda e representa a función:

$$f(x) = \sqrt{x-3}$$

36. Estuda e representa a función:

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16$$

37. Estuda e representa a función:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x}$$

Aplicacións. Optimización

38. Desexamos fabricar envases con forma de prisma recto de base cadrada de xeito que o volume sexa dun litro e a superficie empregada sexa mínima. Expresa a área en función do lado da base e calcula as dimensións do prisma.

Sol: $A(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$*, cubo de 1 dm de arista*

39. Recortando convenientemente en cada esquina dunha lámina de cartón de dimensións 80 cm x 50 cm un cadrado de lado x e dobrando contruimos unha caixa (sen tapa). Calcular a lonxitude do lado do cadrado x que se recorta en cada esquina para que o volume da caixa sexa máximo. Cal é ese volume?

Sol: 10 cm, 18 000 cm³

40. Un agricultor ten 2 000 m de valado para pechar unha finca rectangular dun campo que linda cun río recto. Se o agricultor non ten que valar a zona xunto ao río, cales son as dimensións do campo para que a área cercada sexa o maior posible?

Sol: $A(x) = 2000x - 2x^2$*, 500 m x 1 000 m e 500 000 m²*

41. Queremos delimitar unha parcela rectangular de 700 m ^{2} de superficie. O valo que usamos no lado que da á rúa custa 40 € o metro, e o valo dos outros tres lados custa 16 € o metro. Calcula as dimensións da parcela para que o coste sexa mínimo, e indica o custo.

Sol: $C(x) = \frac{56x^2 + 22400}{x}$*, 20 m x 35 m e 2 240 €*

42. O custo total (en euros) de fabricación de q unidades de certo artigo é:

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 75$$

O custo medio por unidade é: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

a) Cantas unidades se deben fabricar para que o custo medio por unidade sexa mínimo?

b) Calcula $C(q)$ e $M(q)$ para o valor de q obtido no epígrafe anterior.

Sol: a) $q = 5$*, b)* $C(5) = 175$ $M(5) = 35$

43. A función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2+9}$ indica os beneficios obtidos por unha empresa dende que comezou a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en anos).

a) Represéntaa graficamente.

b) Ao cabo de canto tempo obtén a empresa beneficio máximo? Cal é ese beneficio?

c) Perderá diñeiro a empresa nalgún momento?

Sol: b) Aos 3 anos, o beneficio é de 10 000 €, c) Non

Parte III

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Unidade 7

ESTATÍSTICA DESCRITIVA

7.1. Variables estadísiticas unidimensionais

Conceptos básicos

A **estatística** é a parte das matemáticas que se ocupa de *recoller, organizar* e *analizar* grandes cantidades de datos para estudar as características ou o comportamento dun colectivo.

Dentro da estatística distinguimos dous grandes bloques:

- **Estatística descritiva**. É a encargada de recoller, organizar os datos do estudo.
- **Estatística inferencial**. É a que traballa coas mostras e pretende, a partir delas, deducir (inferir) características de toda a poboación.

En todo estudo estatístico aparecen os seguintes conceptos básicos:

- **Poboación** é o conxunto de elementos sobre o que se realiza un estudo estatístico.
- **Individuo** é cada un dos elementos da poboación.
- **Mostra** é o subconxunto ou parte da poboación que estudamos. O seu **tamaño** é o número de individuos que a forman.
- **Variable estatística** é a propiedade ou carácterística da poboación que estamos interesados en estudar. Se esta características toma valores numéricos dicimos que é **cuantitativa**, en caso contrario dicimos que é **cualitativa**

As variables estatísticas adóitanse representar por unha letra maiúscula: X, Y, Z...

7.2. Gráficos estatísticos

7.3. Medidas de centralización

7.4. Medidas de dispersión

7.5. Medidas de posición

7.6. Análise das medidas estatísticas

As medidas de centralización e as de dispersión proporcionan maior información ando se analizan conxuntamente.

As medidas estatísticas máis utilizadas son a media aritmética, $\overline{x}$, e a desviación típica, σ, e proporcionan unha maior información cando se analizan conxuntamente.

Normalmente, se un conxunto de datos é grande, cúmprese que:

- Entre $\overline{x}-\sigma$ e $\overline{x}+\sigma$ atópase aproximadamente o 68 % dos datos.
- Entre $\overline{x}-2\sigma$ e $\overline{x}+2\sigma$ atópase aproximadamente o 95 % dos datos.
- Entre $\overline{x}-3\sigma$ e $\overline{x}+3\sigma$ atópase aproximadamente o 95 % dos datos.

Un **dato** é **atípico** se está fóra deses intervalos.

7.7. Exercicios

Parámetros estatísticos

1. Nunha clase de 30 alumnos observamos o número de suspensos que houbo na segunda avaliación e obtéñense os seguintes datos: 0, 3, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 5, 3, 3, 0, 2, 3, 4, 1, 2, 5, 3, 4, 1, 3, 4, 2, 3, 4, 3, 5, 2, 1. Calcula a media, a moda e a mediana do número de suspensos.

Sol: $\overline{x}=2{,}7$, *Mo*$=3$, *Me*$=3$

2. O número de palabras por frase nunha páxina dun libro é o que se ve na táboa. Calcula a media da lonxitude (nº de palabras) das frases de esa páxina.

Nº de palabras	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
Nº de frases	3	38	59	27	4

Sol: $\overline{x}=7{,}79$ *palabras*

3. Nunha hora chegan 20 avisóns con retraso a un aeroporto. Os minutos de retraso e o número de avións son os da táboa. Calcula a media dos minutos de retraso dos avións

Minutos	0-3,5	3,5-8,5	8,5-13,5	13,5-18
Avións	4	7	8	1

Sol: $\overline{x}=7{,}64$ *minutos*

4. Sembráronse dous hortos con 10 plantas de tomates de dous tipos distintos. Mídense os diámetros, en centímetros, dos tomastes de cada unha das plantas e obtéronse os seguintes premedios.

   - Planta 1: 2,1; 4,5; 3,8; 4,7; 5,2; 6,0; 4,9; 5,8; 4,2; 5,9.
   - Planta 2: 4,8; 4,7; 5,2; 4,7; 4,4; 4,6; 4,7: 4,9; 4,8; 4,5.

Calcula a media, o rango e a desviación típica dos tomates nos dous hortos. En cal deles o tamaño dos tomates presenta unha dispersión maior?

Sol: Planta 1: $\overline{x} = 4{,}71$ *cm, rango*=3,9 *cm,* $\sigma = 1{,}12$ *cm, CV*=0,24;

Planta 2: $\overline{x} = 4{,}73$ *cm, rango*=0,8 *cm,* $\sigma = 0{,}21$ *cm, CV*=0,04

Unidade 8

Estatística bidimensional

Unidade 9

Probabilidade

Unidade 10

Distribución binomial e normal

10.1. Distribución de probabilidad de variable continua

As distribucións de probabilidade de variable contú¡inuta defínense por medio dunha función, $y = f(x)$, que se chama **función de probabilidade** ou **función de densidade**. Esta función ten que ser $f(x) \geq 0$ para todo x.
As probabilidades veñen dadas pola área baixo da curva. Por tanto, á área encerrada baixo a totalidade da curva é 1. Isto é, tomamos como unidade á area baixo a curva completa.

Parámetros

A media, μ, e a desviación típica, σ, teñen os mesmos significados que nas distribucións estatísticas:

- Media, μ: centro de gravedade da distribución.
- Desviación típica, σ: medida de dispersión.

Cálculo de probabilidade a partir da función de densidade $y = f(x)$

Para calcular probabilidades en distribucións de probabilidade de variable continua, temos que calcular as áreas baixo a curva que representa a función de densidade $y = f(x)$. Como facelo de forma exacta cando $f(x)$ ven dada mediante a súa expresión analítica? Inda non coñecememos o instrumento matemático (o cálculo integral) que permite realizalo. Porén, hai distribucións sinxelas para as que a tarefa é posible. Por exemplo, se a distribución é uniforme $f(x) = k, aprobabilidade$P[a$\leq x \leq b]$ é a área dun rectángulo de base $b - a$ e atura k:

$$P[a \leq x \leq b] = (b - a)$$

Función de distribución

Chámase **función de distribución** dunha variable aleatoria, t, á función $F(x)$ que describe os valores que toma a probabilidade acumula ata a abscisa x: $F(x) = P[t`x]$
Se a variable aleatoria é continua, $F(x)$ describe a área cumulada ata a abscisa x. Por exemplo:

10.2. A distribución normal

Cálculo de probabilidades en distribucións normais

10.3. Distribución binomial

10.4. Aproximación da distribución binomial á normal