PROBLEMAS DE GRAVITACIÓN RESUELTOS

Un satélite gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 1500 *km* de altura. Halla el radio de la nueva órbita en la que se colocaría el satélite si se le comunicara una energía por unidad de masa de 10^6 *J/kg*.

<u>Datos</u>: $R_T = 6.400\,km;\ g_0 = 9{,}81\,N/kg$

Solución

Para una órbita circular de radio *r*, la energía mecánica se puede hallar con la expresión,

$$E_m(r) = -G\frac{M_T\,m}{2r}$$

donde $r = R_T + h$ es el radio de la órbita del satélite y *m* su masa. La energía que tenemos que comunicarle (ΔE_m) para que se coloque en una órbita de radio r' es,

$$\Delta E_m = E_m(r') - E_m(r) = -G\frac{M_T\,m}{2r'} - \left(-G\frac{M_T\,m}{2r}\right)$$

donde $E_m(r)$ y $E_m(r')$ son, respectivamente, la energía mecánica en las órbitas inicial y final. Reorganizando el segundo término de la ecuación,

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}G M_T m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \Rightarrow \frac{\Delta E_m}{m} = \frac{1}{2}G M_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de la ecuación por el radio de la Tierra al cuadrado (R_T^2) y recordando que $g_0 = G M_T m / R_T^2$, llegamos a,

$$\frac{\Delta E_m}{m} = \frac{1}{2}g_0 R_T^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \Rightarrow \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{2\Delta E_m/m}{g_0\,R_T^2}$$

donde $\Delta E_m/m$ es la energía que hay que comunicar al satélite por unidad de masa, que es un dato del problema,

$$\frac{\Delta E_m}{m} = 10^6\ J/kg$$

Despejando $1/r'$ en la última ecuación, llegamos a,

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{2\Delta E_m/m}{g_0\,R_T^2} = \frac{1}{(1{,}5+6{,}4)\cdot 10^6} - \frac{2\times 10^6}{9{,}81\cdot(6{,}4\cdot 10^6)^2} = 1{,}22\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{m}$$

por lo tanto,

$$\boldsymbol{r' = 8{,}20\times 10^6\ m = 8.200\ km} \Rightarrow h' = r' - R_T = 8.200 - 6.400 = 1.800\ km$$

donde $h' = 1.800\ km$ es la altura, respecto a la superficie terrestre, de la nueva órbita

Un trasbordador espacial lleva un satélite a una altura de 1.000 *km* y le comunica una velocidad perpendicular a la línea que une el satélite con el centro de la Tierra. Se pide:

a) El valor de la velocidad para que la órbita sea circular.

b) Velocidad mínima para que escape del campo gravitatorio terrestre.

Datos: R_T = 6.400 *km*; g_0 = 9,8 m/s^2

Solución

En una órbita circular la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en la órbita es la fuerza gravitatoria y $F_c = mv^2/r$. Entonces

$$F_g = F_c \left\{ \begin{array}{l} F_g = G\dfrac{M_T m}{r^2} \\ F_c = m\dfrac{v^2}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow G\frac{M_T \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_T}{r}$$

donde M_T es la masa de la Tierra, *m* la masa del satélite, *r* la distancia del satélite al centro de la Tierra y *v* su velocidad.

Si tenemos en cuenta que $r = R_T + h$ donde R_T es el radio terrestre y *h* la altura del transbordador, y también que $g_0 = GM_T/R_T^2 \;\Rightarrow\; GM_T = g_0 R_T^2$; sustituyendo en la ecuación anterior,

$$v^2 = g_0\frac{R_T^2}{r} \Rightarrow \boldsymbol{v} = R_T\sqrt{g_0/r} = 6{,}4\cdot 10^6\sqrt{9{,}80/7{,}4\cdot 10^6} = \mathbf{7.365}\ \boldsymbol{m/s}$$

Para que escape del campo gravitatorio su energía mecánica ha de ser, como mínimo, cero, ya que un cuerpo en reposo fuera del campo no tiene ni energía potencial ni cinética. Por lo tanto,

$$E_m = E_p + E_c = -G\frac{M_T m}{r} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0$$

despejando v_e^2 se obtiene que,

$$v_e^2 = \frac{2GM_T}{r}$$

pero como $GM_T = g_0 R_T^2$ queda finalmente que,

$$v_e^2 = \frac{2g_0 R_T^2}{r} \Rightarrow \boldsymbol{v_e} = R_T\sqrt{2g_0/r} = 6{,}4\cdot 10^6\sqrt{2\cdot 9{,}80/7{,}4\cdot 10^6} = \mathbf{1{,}04\times 10^4}\ \boldsymbol{m/s}$$

Se pretende situar un satélite artificial de 50 *kg* en una órbita circular a 500 *km* de altura sobre la superficie terrestre. Halla la energía que es preciso comunicarle.

Dato: R_T = 6.400 *km*

Solución

El teorema de la energía mecánica afirma que cuando sobre una partícula solo actúan fuerzas conservativas, su energía mecánica (E_m) permanece constante; es decir,

$$E_m = cte \Rightarrow E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow \Delta E_m = E_m(B) = E_m(A) = 0 \quad \text{donde} \quad E_m = E_c + E_p$$

Si sobre la partícula se aplica una fuerza adicional $\vec{F}$ (sin importar si es conservativa o no) que realiza un trabajo W_A^B cuando se mueve entre los puntos *A* y *B*, la energía mecánica ya no permanece constante. En este caso se cumple que,

$$W_A^B = E_m(B) - E_m(A) = \Delta E_m$$

Ahora bien, **el trabajo no es más que una forma de transferir energía**; entonces:

*Si *W* > 0, el agente que ejerce la fuerza **comunica energía a la partícula**, por lo que la energía mecánica de ésta aumenta.

*Si *W* < 0, el agente que ejerce la fuerza **recibe energía de la partícula**, por lo que la energía mecánica de ésta disminuye.

En el problema que nos ocupa tenemos que comunicar energía al satélite para ponerlo en órbita; es decir, de alguna forma, tenemos que realizar sobre él un trabajo positivo; por lo tanto, se tiene que cumplir que,

$$W_{ST}^h = \Delta E_m = E_m(h) - E_m(ST)$$

Donde $E_m(h)$ y $E_m(ST)$ representan, respectivamente, las energías mecánicas en la órbita (a una altura *h*) y en la superficie de la Tierra. Puesto que el trabajo realizado no es más que la energía comunicada al satélite (E_{com}), la ecuación anterior se convierte en,

$$E_{com} = \Delta E_m = E_m(h) - E_m(ST)$$

es decir, **se puede aplicar a este problema que la energía comunicada al satélite es igual a la variación de su energía mecánica**.

La energía mecánica del satélite en la ST es su energía potencial gravitatoria[1],

$$E_m(ST) = E_p(ST) = -GM_T m / R_T$$

Como el satélite lleva una órbita circular, su energía mecánica en la misma es,

$$E_m(h) = E_c + E_p = -GM_T m / 2(R_T + h)$$

Por lo tanto, la energía comunicada al satélite es,

$$E_{com} = E_m(h) - E_m(ST) = -G\frac{M_T m}{2(R_T + h)} - \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right) = GM_T m\left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)}\right]$$

Recordando que $g_0 = GM_T / R_T^2 \Rightarrow GM_T = g_0 R_T$ y sustituyendo en la ec, anterior,

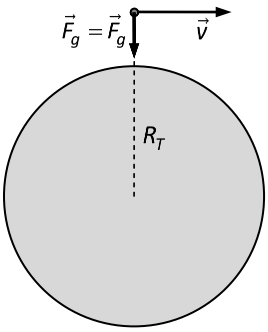
$$E_{com} = E_m(h) - E_m(ST) = mg_0 R_T^2\left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)}\right] = mg_0 R_T\left[1 - \frac{R_T}{2(R_T + h)}\right] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E_{com}} = 50\,kg \times 9{,}81\,N/kg \times 6{,}4\cdot 10^6\,m\left[1 - \frac{6{,}4\cdot 10^6\,m}{(6{,}4\cdot 10^6 + 5\cdot 10^5)\,m}\right] = \mathbf{1{,}68\times 10^9\ J}$$

[1] El satélite también tiene E. cinética (por la rotación terrestre). Ésta es despreciable comparada con la E. potencial.

Un trasbordador espacial lleva un satélite a una altura de 500 *km* sobre la superficie terrestre. A continuación le comunica una velocidad de 36.900 *km/h* perpendicular a la línea que une el satélite con el centro de la Tierra. Prueba que la órbita es elíptica.

Solución



Suponemos de entrada que la órbita es cerrada; por lo tanto solo puede ser circular o elíptica. Como se ve en la figura, al ser la velocidad perpendicular a la línea que une el satélite con el centro de la Tierra, la fuerza centrípeta es la gravitatoria; es decir,

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \;\Rightarrow\; F_g = F_c \;\Rightarrow\; G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = m a_c$$

donde *h* representa la altura del satélite, *m* su masa y a_c la aceleración centrípeta. Ahora bien, **solo cuando la trayectoria es una circunferencia (órbita circular) la aceleración centrípeta es,**

$$a_c = v^2/R = v^2/(R_T + h)$$

Si la órbita no es circular, tenemos que $a_c = v^2/\rho$, donde ρ es el radio de curvatura, que es desconocido en la mayoría de los casos.

Por lo tanto, **para que la órbita sea circular** se he de cumplir que,

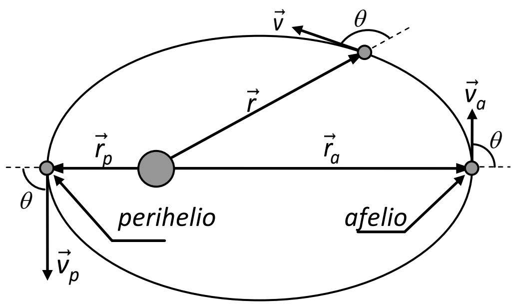
$$G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = m\frac{v^2}{R_T + h} \;\Rightarrow\; G\frac{M_T}{R_T + h} = v^2$$

Recordando que $g_0 = GM_T/R_T^2 = 9{,}81 \;\Rightarrow\; GM_T = g_0 R_T^2$ y sustituyendo en la ec. anterior,

$$v^2 = \frac{g_0 R_T^2}{R_T + h} \;\Rightarrow\; v = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}} = 6{,}4\cdot 10^6\,m\sqrt{\frac{9{,}81\,m/s^2}{(6{,}4\cdot 10^6 + 5\cdot 10^5)\,m}} = 7{,}63\cdot 10^3\,m/s$$

es la velocidad que debería llevar para que la órbita fuera circular; sin embargo, la velocidad real del satélite es,

$$v = 36.000\,km/h = 10\cdot 10^3\,m/s > 7{,}63\cdot 10^3\,m/s$$



por lo que la órbita no es circular y sólo puede ser elíptica.

Como se aprecia en la figura, solo en el afelio (punto más alejado de la Tierra) y en el perihelio (punto más cercano) la velocidad del satélite es perpendicular a la recta que lo une con el centro de la Tierra. Por lo tanto, **el punto en el que el satélite es lanzado por el trasbordador tiene que ser el afelio o el perihelio**. En este punto se cumple que,

$$v = 7{,}63\cdot 10^3\,m/s \quad y \quad r = R_T + h = 6.400 + 500 = 6.900\,km$$

El hecho de que la velocidad comunicada sea mayor que la necesaria para una órbita circular significa que **el punto en el que el satélite es lanzado es el perihelio**. Esto se puede comprobar calculando la energía mecánica del satélite, que es constante, mediante la ecuación, $$E_m = E_c + E_p = ½mv^2 - GM_T m/r$$ A continuación se inserta el resultado en la ecuación $E_m = -GM_T m/2a$, donde *a* representa la distancia media del satélite al centro de la Tierra (o sea, el semieje mayor de la elipse). El resultado obtenido es que $a > r$, lo que significa que *r* es el perihelio.

Un satélite artificial detecta un meteorito en el campo gravitatorio terrestre. En un momento dado se observa que su velocidad (en relación a la Tierra) es de 5.000 *m/s*, que su distancia a la Tierra es de 3.600 km y que la línea que une la Tierra con el objeto forma un ángulo de 60º con la velocidad de éste. Se pide:

a) Órbita que describe el meteorito.
b) Velocidad en el punto de máxima aproximación a la Tierra
c) ¿Colisionará con la Tierra?

Nota: Utiliza todos los datos que sean necesarios.

Solución

Apartado a)

La magnitud que determina la órbita que describe el meteorito es la energía mecánica. Si ésta es nula o positiva, la órbita es abierta; en caso contrario, la órbita es cerrada,

$$E_m = E_p + E_c = -G\frac{M_T m}{r} + ½mv^2 = m\left(G\frac{M_T}{r} + ½v^2\right)$$

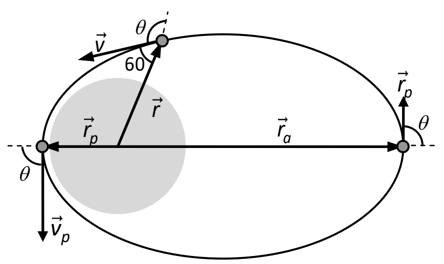
donde $r = R_T + h = 6,4\cdot10^6 + 3,6\cdot10^6 = 10^7\ m$ es la distancia del meteorito al centro de la Tierra cuando es detectado y $v = 5\cdot10^3\ m/s$ su velocidad en ese instante. Recordando que $g_0 = GM_T/R_T^2 = 9,81 \Rightarrow GM_T = g_0R_T^2$ y sustituyendo en la ecuación anterior,

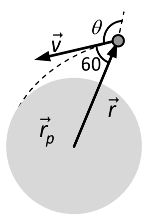
$$E_m = m\left(-G\frac{M_T}{r} + ½v^2\right) = m\left(-g_0\frac{R_T^2}{r} + ½v^2\right) = m\left[-9,81\frac{(6,4\cdot10^6)^2}{10^7} + ½(5\cdot10^3)^2\right] = -2,77\cdot10^7 m\ J$$

por lo que la energía por unidad de masa (E_m/m) es,

$$\frac{\boldsymbol{E_m}}{\boldsymbol{m}} = -g_0\frac{R_T^2}{r} + ½v^2 = \mathbf{-2,77\times10^7}\ \boldsymbol{J} \quad (1)$$

que es negativa (puesto que la masa del satélite *m* es siempre positiva); por lo tanto, la órbita es cerrada. Además tiene que ser elíptica porque en una órbita circular la línea que une el satélite con el centro de la Tierra y la velocidad de éste siempre forman un ángulo de 90º.





Ahora tenemos dos posibilidades:

1. Que el punto de máxima aproximación se encuentre a una distancia del centro de la Tierra mayor que el radio de ésta (figura izquierda). Entonces es satélite no colisionará
2. Que el punto de máxima aproximación se encuentre a una distancia del centro de la Tierra menor que el radio de ésta (figura derecha). En este caso no se puede completar la órbita elíptica porque se interpone la Tierra en el camino del satélite y el satélite colisionará.

Apartado c)

No podemos resolver el apartado (b) hasta que no sepamos si el satélite colisiona o no con la Tierra. Par averiguarlo tenemos que usar las dos leyes de conservación asociadas a la fuerza gravitatoria: conservación de la energía mecánica y conservación del momento angular.

Sabemos que, por ser la fuerza gravitatoria central, el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra permanece constante; entonces (ver figura izquierda),

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} \Rightarrow L = rmv\sin\theta = cte \Rightarrow L/m = rv\sin\theta$$

donde $\theta = 180 - 60 = 120$ (en realidad es igual poner 60 que 120 pues $\sin 60 = \sin 120$). Por lo tanto, tenemos que el momento angular por unidad de masa (*L*/*m*) es,

$$L/m = 10^7 \times 5 \cdot 10^3 \times \sin 120 = 4{,}33 \cdot 10^{10}\ kg \cdot m^2/s$$

Observa la figura de la izquierda, en el perihelio (punto más próximo) y en el afelio (punto más alejado) se cumple que $\theta = 90º$. Por lo tanto, en esos dos puntos,

$$L = r\,mv \sin 90 = r\,mv \Rightarrow L/m = r\,v \quad (2) \quad \text{pues} \quad \sin 90 = 1$$

donde $r = r_p$ y $v = v_p$ o bien $r = r_a$ y $v = v_a$.

Hemos obtenido en el apartado (a) que la energía del satélite por unidad de masa es $E_m/m = -2{,}77 \cdot 10^7\ J$ y sabemos que se tiene que mantener constante porque la fuerza gravitatoria es conservativa. Aplicando las ecuaciones (1) y (2) al perihelio y al afelio obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_m}{m} &= -g_0 \frac{R_T^2}{r} + ½v^2 \\ L/m = r\,v &\Rightarrow v = \frac{L/m}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{E_m}{m} = -g_0 \frac{R_T^2}{r} + ½\left(\frac{L/m}{r}\right)^2 \quad (3)$$

Al resolver la ecuación (3) obtendrás dos valores de *r*: el del perihelio (r_p) y el del afelio (r_a). Veras que $r_p < R_T$, lo que significa que el satélite colisionará con el planeta; es decir, la situación real es la que se representa en la figura de la derecha. No se puede completar la órbita elíptica porque la Tierra se interpone en su camino.

Apartado b)

Como el satélite colisiona, el punto de máxima aproximación a la Tierra es cero; es decir la distancia mínima del satélite a centro del planeta es igual al radio de éste. Entones tenemos que calcular la velocidad del satélite cuando se produce la colisión.

Puesto que la energía mecánica es constante,

$$E_m(r) = E_m(ST)$$

donde $E_m(r)$ y $E_m(ST)$ representan, respectivamente, la energía mecánica del satélite en el punto en el que se detectó y la que tiene en la superficie de la Tierra; así que,

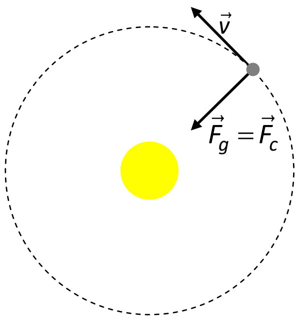
$$E_m(r) = -G\frac{M_T m}{R_T} + ½mv_{st}^2 = m\left(-G\frac{M_T}{R_T} \times \frac{R_T}{R_T} + ½v_{st}^2\right) = m\left(½v_{st}^2 - g_0 R_T\right) \Rightarrow$$

$$½v_{st}^2 = E_m(r)/m + g_0 R_T \Rightarrow v_{st}\sqrt{2\left(E_m(r)/m + g_0 R_T\right)} = \mathbf{8{,}38 \times 10^3\ m/s}$$

Calcular la masa del Sol y el valor de la gravedad en su superficie.

<u>Datos</u>: Masa Tierra, M_T = $6\cdot10^{24}$ *kg*; Radio Sol, R_S = $7\cdot10^{8}$ *m*; radio órbita terrestre alrededor del Sol, r = $1{,}5\cdot10^{11}$ *m*.

Solución



Al ser una trayectoria circular, la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza gravitatoria; así que,

$$F_g = F_c \;\Rightarrow\; G\frac{M_S \cancel{M_T}}{r^2} = \cancel{M_T}\frac{v^2}{r} \;\Rightarrow\; G\frac{M_S}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

En una órbita circular la fuerza gravitatoria es siempre perpendicular al movimiento, como se ve en la figura, por lo que la magnitud de la velocidad (v) permanece constante (es decir, se trata de un movimiento circular uniforme). Entonces,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad (2)$$

donde T representa el tiempo que le lleva a la Tierra completar una vuelta; es decir, el periodo, que como sabes es de 365 días. Combinando las ecuaciones (1) y (2),

$$G\frac{M_S}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad (3)$$

Ahora bien, la intensidad del campo gravitatorio solar en un cualquier punto de la órbita de la Tierra es,

$$g_S = GM_s / r^2$$

donde r es el radio de la órbita, que coincide con el primer miembro de la ec. (3); o sea,

$$g_S = G\frac{M_S}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 1{,}5\cdot10^{11}\,m}{(365\times24\times60\times60)^2\,s} = 5{,}95\cdot10^{-3}\,N/kg \quad (4)$$

que expresa que si colocamos una masa de 1 *kg* en un punto de la órbita terrestre, el Sol ejerce sobre ella una fuerza de $5{,}95\cdot10^{-3}$ *N*.

La intensidad del campo gravitatorio solar en un punto de la superficie del Sol es,

$$g_{0S} = GM_s / R_S^2 \quad (5)$$

donde R_S es el radio del Sol. Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (5) y (4),

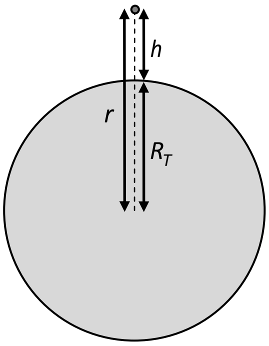
$$\frac{g_{0S}}{g_S} = \frac{\cancel{GM_S}/R_S^2}{\cancel{GM_S}/r^2} \;\Rightarrow\; g_{0S} = g_s\left(\frac{r}{R_S}\right)^2 = 5{,}95\cdot10^{-3}\left(\frac{1{,}5\cdot10^{11}}{7\cdot10^{8}}\right)^2 = \mathbf{273\ N/kg}$$

Para calcular la Masa del Sol es necesario utilizar el valor numérico de la constante de Gravitación Universal, que es G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ en unidades del S.I. Ahora la podemos despejar de la ecuación (5),

$$M_S = \frac{g_{0S}R_S^2}{G} = \frac{273\times(7\cdot10^8)^2}{6{,}67\cdot10^{-11}} = \mathbf{2{,}01\times10^{30}\ kg}$$

Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4000 *m/s*. Calcula la altura máxima que alcanzará.
<u>Dato</u>: R_T = 6400 *km*

Solución



Este problema es un caso típico de conservación de la energía mecánica. En efecto, después de comunicarle al cuerpo la velocidad indicada, la única fuerza que actúa es la gravitatoria, que frena el movimiento de ascenso. Puesto que esta fuerza es conservativa, la energía mecánica del cuerpo ha de permanecer constante; es decir, su energía mecánica en la superficie terrestre (*ST*) ha de ser igual a la que tiene cuando alcanza la altura *h*; matemáticamente,

$$E_m(ST)=E_m(h) \Rightarrow E_c(ST)+E_p(ST)=E_c(h)+E_p(h)$$

Ahora bien, $E_c(h)=0$ porque el cuerpo se detiene en el instante en el que alcanza la altura máxima; entonces,

$$E_c(ST)+E_p(ST)=E_p(h) \Rightarrow \tfrac{1}{2}mv^2-G\frac{M_Tm}{R_T}=-G\frac{M_Tm}{r}$$

donde M_T es la masa de la Tierra, *m* la masa del cuerpo, *v* la velocidad que se imprime al objeto, R_T el radio de la Tierra y *r* la distancia del cuerpo al centro de la Tierra cuando alcanza la altura *h*. Operando en la ecuación anterior tenemos que,

$$\tfrac{1}{2}mv^2=G\frac{M_Tm}{R_T}-G\frac{M_Tm}{r} \Rightarrow \tfrac{1}{2}\cancel{m}v^2=GM_T\cancel{m}\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{r}\right)$$

Recordando que $g_0=GM_T/R_T^2 \Rightarrow GM_T=g_0R_T^2$ e insertando este resultado en la ecuación anterior llegamos a,

$$\tfrac{1}{2}v^2=g_0R_T^2\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \frac{v^2}{2g_0R_T^2}=\frac{1}{R_T}-\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{1}{R_T}-\frac{v^2}{2g_0R_T^2}$$

Así que despejando *r* (distancia del objeto al centro de la Tierra) tenemos que,

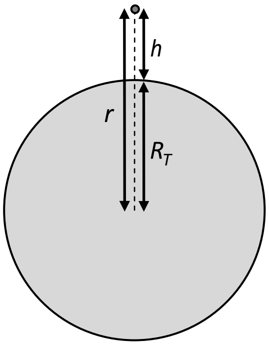
$$r=\frac{1}{1/R_T-v^2/2g_0R_T^2}=\frac{1}{1/6{,}4\cdot10^6-4000^2/2\times9{,}81\times\left(6{,}4\cdot10^6\right)^2}=7{,}33\cdot10^6\,m$$

De la figura se deduce que *h* (altura que alcanza el cuerpo) es,

$$h=r-R_T=7{,}33\cdot10^6-6{,}4\cdot10^6=9{,}35\cdot10^5\,m=\mathbf{935\ km}$$

Se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra un cuerpo de 1.000 *k*g con una velocidad de 8.000 *m/*s.
¿Qué altura alcanza si se toma como radio de la Tierra 6400 *km*.
¿Qué velocidad perpendicular a la línea que une el satélite con la Tierra hay que comunicarle para que describa una órbita circular a la altura alcanzada?

Solución



Este problema es un caso típico de conservación de la energía mecánica. En efecto, después de comunicarle al cuerpo la velocidad indicada, la única fuerza que actúa es la gravitatoria, que frena el movimiento de ascenso. Puesto que esta fuerza es conservativa, la energía mecánica del cuerpo ha de permanecer constante; es decir, su energía mecánica en la superficie terrestre (*ST*) ha de ser igual a la que tiene cuando alcanza la altura *h*; matemáticamente,

$$E_m(ST) = E_m(h) \Rightarrow E_c(ST) + E_p(ST) = E_c(h) + E_p(h)$$

Ahora bien, $E_c(h) = 0$ porque el cuerpo se detiene en el instante en el que alcanza la altura máxima; entonces,

$$E_c(ST) + E_p(ST) = E_p(h) \Rightarrow ½mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{r}$$

donde M_T es la masa de la Tierra, *m* la masa del cuerpo, *v* la velocidad que se imprime al objeto, R_T el radio de la Tierra y *r* la distancia del cuerpo al centro de la Tierra cuando alcanza la altura *h*. Operando en la ecuación anterior tenemos que,

$$½mv^2 = G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_T m}{r} \Rightarrow ½\cancel{m}v^2 = GM_T\cancel{m}\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)$$

Recordando que $g_0 = GM_T/R_T^2 \Rightarrow GM_T = g_0 R_T^2$ e insertando este resultado en la ecuación anterior llegamos a,

$$½v^2 = g_0 R_T^2\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right) \Rightarrow \frac{v^2}{2g_0 R_T^2} = \frac{1}{R_T} - \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R_T} - \frac{v^2}{2g_0 R_T^2}$$

Así que despejando *r* (distancia del objeto al centro de la Tierra) tenemos que,

$$r = \frac{1}{1/R_T - v^2/2g_0 R_T^2} = \frac{1}{1/6,4\cdot 10^6 - 4000^2/2\times 9,81\times\left(6,4\cdot 10^6\right)^2} = 1,31\cdot 10^7\ m$$

De la figura se deduce que *h* (altura que alcanza el cuerpo) es,

$$h = r - R_T = 7,33\cdot 10^6 - 6,4\cdot 10^6 = 9,35\cdot 10^5\ m = \mathbf{6650}\ \boldsymbol{km}$$

Para calcular la velocidad, ten en cuenta que la única forma de que órbita sea circular es que la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en la órbita sea la fuerza gravitatoria, es decir,

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M_S \cancel{M_T}}{r^2} = \cancel{M_T}\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{M_S}{r^{\cancel{2}}} = \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Multiplicando y dividiendo el primer miembro por el radio de la Tierra al cuadrado,

$$\left.\begin{array}{l} G\dfrac{M_S}{r}\dfrac{R_T^2}{R_T^2} = v^2 \\ g_0 = GM_T/R_T^2 \end{array}\right\} \Rightarrow g_0\frac{R_T^2}{r} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{g_0\frac{R_T^2}{r}} = \sqrt{9,81\times\frac{\left(6,4\cdot 10^6\right)^2}{1,31\cdot 10^7}} = \mathbf{5,54\times 10^3}\ \boldsymbol{m/s}$$

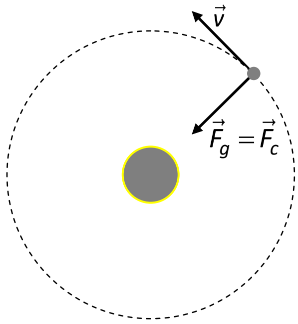
Un satélite se dice que es *sincrónico* o *geoestacionario* cuando tiene el mismo periodo de revolución que el periodo de rotación de la Tierra. El satélite se encontrará "estacionario" sobre el mismo lugar de la Tierra. ¿A qué altura se hallará?
Datos: R_T = 6370 *km*

Solución

Como el periodo del satélite es el mismo que el de la Tierra, tardará 24 *horas* en completar su órbita; es decir, $T = 24\,h$.

El hecho de ser geoestacionario implica que lleva una órbita circular. En una órbita circular la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en la órbita es la fuerza gravitatoria, o sea,

$$F_c = F_g \;\Rightarrow\; \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{M_T \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \;\Rightarrow\; v^2 = G\frac{M_T}{r} \qquad (1)$$



donde r es el radio de la órbita del satélite y v su velocidad.

Al ser el movimiento circular, también es uniforme porque no actúa ninguna fuerza tangencial sobre el satélite que modifique la magnitud de la velocidad, como se ve en la figura. Observa que F_g tiene la dirección del radio de la órbita, así que su componente en la dirección de la velocidad es cero.

En un movimiento circular uniforme la distancia Δs recorrida por el satélite en un intervalo de tiempo Δt es,

$$\Delta s = v\,\Delta t \;\Rightarrow\; v = \Delta s / \Delta t$$

Puesto que en el tiempo de un periodo (T) la distancia que recorrida es $\Delta s = 2\pi r$ (una vuelta completa), tenemos que,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$$

Introduciendo el valor de v dado por esta ecuación en la ecuación (1), queda que,

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\frac{M_T}{r} \;\Rightarrow\; \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r} \;\Rightarrow\; \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = GM_T$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de la ecuación anterior por R_T^2 y recordando que $g_0 = GM_T / R_T^2$, tenemos que,

$$\frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = GM_T\,\frac{R_T^2}{R_T^2} \;\Rightarrow\; \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = g_0\,R_T^2 \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{g_0\,R_T^2\,T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}81\times\left(6{,}4\cdot 10^6\right)^2\times\left(24\times 3600\right)^2}{4\times\pi^2}} = 4{,}24\cdot 10^7\ m$$

Observa que $6{,}4\cdot 10^6$ es el radio de la Tierra en metros y que se multiplica 24 por 3600 para expresar T en segundos.

Hemos obtenido el radio de la órbita del satélite. Para hallar su altura respecto a la superficie terrestre (h) ten en cuenta que,

$$r = R_T + h \;\Rightarrow\; h = r - R_T = 4{,}24\cdot 10^7 - 6{,}4\cdot 10^6 = 3{,}6\cdot 10^7\ m = 3{,}6\cdot 10^4\ km = \mathbf{36000\ \mathit{km}}$$

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD (UPNA)

Sabiendo que la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de 1 *kg* de masa situado en su superficie vale 9,81 *N*, y suponiendo que su forma es una esfera de 6.370 *km* de radio, calcula su densidad media. (J01)

<u>Dato</u>: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$

Solución

La densidad media (d), que es la masa promedio por unidad de volumen, se halla dividiendo la masa de la Tierra (M_T) entre su volumen (V_T), que es el de una esfera; es decir,

$$\left.\begin{array}{l} d = M_T / V_T \\ V_T = \dfrac{4}{3}\pi R_T^3 \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3} \quad (1)$$

que no podemos calcular directamente porque no conocemos la masa de la Tierra.

La fuerza con la que la Tierra atrae a una masa de 1 *kg* en su superficie es, por definición, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre (g_0). Por lo tanto,

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9,81 N/kg \Rightarrow M_T = \frac{g_0 R_T^2}{G} \quad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) llegamos a,

$$d = \frac{3\left(g_0 R_T^2 / G\right)}{4\pi R_T^3} = \frac{3R_T^2}{4\pi G R_T^3} = \frac{3g_0}{4GR_T} = \frac{3 \times 9,81}{4 \times \pi \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,37 \cdot 10^6} = \mathbf{5,51 \times 10^3\, kg/m^3}$$

Observa que las unidades son kg/m^3 porque todas las magnitudes se han expresado en unidades del Sistema Internacional.

Sea un satélite de una tonelada de masa que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular. En los puntos de dicha órbita el valor de la intensidad del campo gravitatorio es la cuarta parte que en la superficie de la Tierra. Calcula: (J02)

a) El radio de la órbita.

b) El periodo de revolución del satélite (resultado en horas).

c) La energía que habría que comunicarle para que desde esa órbita escape del campo de atracción terrestre.

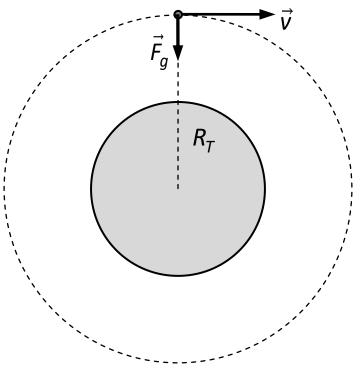
Datos: g_0 = 9,81 m/s^2; R_T = 6.370 km

Solución

Apartado a): Como en la órbita de radio r el valor de g es ¼ del de la superficie, tenemos que,

$$g=\frac{g_0}{4} \Rightarrow G\frac{M_T}{r^2}=\frac{1}{4}G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow r^2=4R_T^2 \Rightarrow \boldsymbol{r}=2R_T=\mathbf{1{,}27\times 10^4\ km}$$

Apartado b): Al ser una trayectoria circular, la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza gravitatoria y, además, $F_c=mv^2/r$; así que,



$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{r^2}=m\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{M_T}{r}=v^2 \quad (1)$$

En una órbita circular la fuerza gravitatoria es siempre perpendicular al movimiento, como se ve en la figura, por lo que la magnitud de la velocidad permanece constante (es decir, se trata de un movimiento circular uniforme). Entonces,

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v^2=\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad (2)$$

donde T representa el tiempo que le lleva al satélite completar una vuelta; es decir, el periodo. Combinando las ecuaciones (1) y (2),

$$\left.\begin{array}{r} G\dfrac{M_T}{r}=\dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} \\ r=2R_T \end{array}\right\} \Rightarrow G\frac{M_T}{2R_T}=\frac{16\pi^2 R_T^2}{T^2}$$

pero teniendo en cuenta que $g_0=GM_T/R_T^2=9{,}81 \Rightarrow GM_T=g_0R_T^2$ y sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\frac{g_0\cancel{R_T}}{2}=\frac{16\pi^2 R_T^{\cancel{2}}}{T^2} \Rightarrow \boldsymbol{T}=4\pi\sqrt{\frac{2R_T}{g_0}}=4\pi\sqrt{\frac{2\times 6{,}37\cdot 10^6\,m}{9{,}81\,m/s^2}}=1{,}43\cdot 10^4\ s=\mathbf{3{,}98}\ \boldsymbol{h}$$

Apartado c): Si un cuerpo está fuera del campo gravitatorio creado por otro cuerpo y además está en reposo respecto a él, su energía mecánica es cero. Por lo tanto, **la energía mínima** que tenemos que comunicar al satélite (E_{com}) para que escape del campo es la que sumada a la que tiene en la órbita (que es negativa) da cero; entonces se cumple que,

$$\left.\begin{array}{l} E_{com}+E_m(\acute{o}rbita)=0 \\ E_m(\acute{o}rb)=-G\dfrac{M_T m}{2r} \end{array}\right\} \Rightarrow E_{com}=+G\frac{M_T m}{4R_T}\left(\times\frac{R_T}{R_T}\right)=\frac{mg_0R_T}{4}=\frac{1000\times 9{,}81\times 6{,}37\cdot 10^6}{4}=\mathbf{1{,}56\times 10^{10}\ J}$$

que no es más que la energía que tiene (la que lo liga a la Tierra) cambiada de signo.

Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra en una órbita circular a 1.500 *km* de altura sobre la superficie terrestre. Calcula:

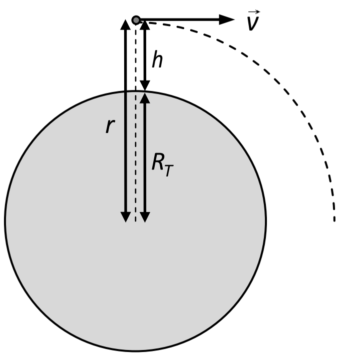
a) El valor de *g* en los puntos de la órbita.

b) La velocidad del satélite.

c) Su periodo de rotación.

Datos: g_0 = 9,81 m/s^2; R_T = 6.370 *km*.

Solución



Apartado a): Observa que el radio de la órbita es,

$$r = R_T + h = 6370 + 1500 = 7870\ km = 7,87\cdot 10^6\ m$$

Por otro lado, los valores de *g* en la órbita y en la superficie de la Tierra son,

$$\left.\begin{array}{l} g = G M_T / r^2 \\ g_0 = G M_T / R_T^2 \end{array}\right\} \Rightarrow g = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{r^2}\frac{R_T^2}{R_T^2} = g_0\left(\frac{R_T}{r}\right)^2 = 9,81\left(\frac{6,37\cdot 10^6}{7,87\cdot 10^6}\right)^2 = \mathbf{6,43}\ m/s^2$$

Apartado b): Al ser una trayectoria circular, la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza gravitatoria y, además, $F_c = mv^2/r$; así que,

$$F_c = F_g \Rightarrow m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_T}{r} \quad (1)$$

Como no conocemos *G* ni M_T, tenemos que expresar el producto GM_T en función de g_0,

$$v^2 = G\frac{M_T}{r} = G\frac{M_T}{r}\frac{R_T^2}{R_T^2} = g_0\frac{R_T^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{g_0\frac{R_T^2}{r}} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{r}} = 6,37\cdot 10^6\sqrt{\frac{9,81}{7,87\cdot 10^6}} = \mathbf{7,11\cdot 10^3}\ m/s$$

Apartado c: En una órbita circular la fuerza gravitatoria es siempre perpendicular a la velocidad, por lo que la magnitud de la velocidad permanece constante (es decir, se trata de un movimiento circular uniforme). Entonces,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad (2)$$

donde *T* representa el tiempo que le lleva al satélite completar una vuelta; es decir, el periodo. Combinando las ecuaciones (1) y (2),

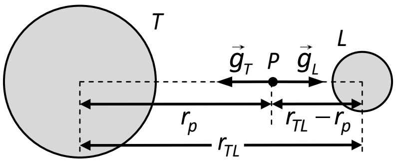
$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r}\frac{R_T^2}{R_T^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = g_0\frac{R_T^2}{r}$$

y despejando *T* se obtiene,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{g_0 R_T^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{g_0 R_T^2}} = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}} = \frac{2\pi}{6,37\cdot 10^6}\sqrt{\frac{\left(7,87\cdot 10^6\right)^3}{9,81}} = 6,95\cdot 10^3\ s = \mathbf{1,93}\ h$$

El radio de la Luna es 0,27 veces el terrestre, y la gravedad de su superficie es la sexta parte de la que hay en la superficie de la Tierra. Sabiendo que la distancia Luna-Tierra es 60 veces el radio terrestre, determina la posición de un punto *P* situado en la recta que une la Tierra con la Luna, en el que la gravedad debida a la acción conjunta de estos dos cuerpos es nula.
<u>Datos</u>: R_T = 6370 *km*

Solución



Como la Tierra y la Luna ejercen fuerzas de la misma dirección y de sentidos opuestos en el punto *P* de la figura, para que la intensidad del campo gravitatorio en *P* sea nula se ha de cumplir que,

$$g_T = g_L$$

donde g_T y g_L son, respectivamente, las magnitudes de las intensidades de los campos gravitatorios terrestre y lunar. Así pues, si las masas de la Tierra y la Luna son M_T y M_L, tenemos,

$$\left.\begin{array}{r} g_T = GM_T/r_p^2 \\ g_L = GM_L/(r_{TL}-r_p)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{G}\frac{M_T}{r_p^2} = \cancel{G}\frac{M_L}{(r_{TL}-r_p)^2} \Rightarrow \frac{M_T}{r_p^2} = \frac{M_L}{(r_{TL}-r_p)^2} \quad (1)$$

Como $R_L = 0{,}27R_T$ y $g_{0L} = g_{0T}/6$, donde R_L, R_T, g_{0L} y g_{0T} son, respectivamente, el radio lunar y el terrestre y la gravedad en las superficies de la Luna y de la Tierra, podemos expresar la masa de la Luna en función de la de la Tierra,

$$\left.\begin{array}{r} g_L = GM_L/R_L^2 \\ R_L = 0{,}27R_T \end{array}\right\} \Rightarrow g_L = G\frac{M_L}{(0{,}27R_T)^2}$$

$$g_{0L} = g_{oT}/6 \Rightarrow \cancel{G}\frac{M_L}{(0{,}27\cancel{R_T})^2} = \frac{1}{6}\cancel{G}\frac{M_T}{\cancel{R_T^2}} \Rightarrow M_L = \frac{0{,}27^2}{6}M_T = 1{,}22\cdot 10^{-2}M_T$$

Insertando este resultado en la ecuación (1) y teniendo en cuenta que $r_{TL} = 60R_T$, queda que,

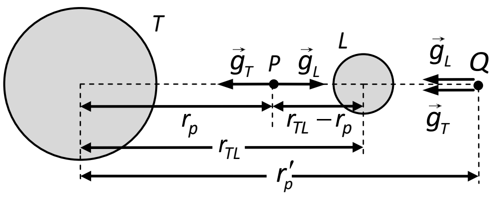
$$\frac{\cancel{M_T}}{r_p^2} = \frac{1{,}22\cdot 10^{-2}\cancel{M_T}}{(60R_T - r_p)^2} \Rightarrow 60^2R_T^2 + r_p^2 - 120R_Tr_p = 1{,}22\cdot 10^{-2}r_p^2 \Rightarrow 0{,}988r_p^2 - 120R_Tr_p + 60^2R_T^2 = 0$$

que es una ecuación de 2º grado en r_p que sabemos resolver,

$$r_p = \frac{120R_T \pm \sqrt{(120R_T)^2 - 4\times 0{,}988\times 60^2R_T^2}}{2\times 0{,}988} = \frac{7{,}64\cdot 10^5 \pm \sqrt{5{,}84\cdot 10^{11} - 5{,}77\cdot 10^{11}}}{1{,}98} = \begin{cases} 4{,}29\cdot 10^5 \ km \\ \mathbf{3{,}44\times 10^5} \ km \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas, la buena es la segunda. Observa que la primera da un punto que no está entre la Tierra y la Luna, sino a la derecha de ésta en el dibujo; en efecto,

$$r_{Tl} = 60R_T = 60\times 6370 = 3{,}822\cdot 10^5 \ km < r_p' = 4{,}29\cdot 10^5 \ km$$



La segunda solución también tiene un significado físico claro. En efecto, al resolver la ecuación de 2º grado estamos obteniendo los puntos en los que la **magnitud** de los campos gravitatorios terrestre y lunar son iguales. Y esto ocurre en los puntos *P* y *Q* (ver figura); solo que el punto *Q* no es el buscado porque en él $g_T = g_L$, pero los campos no se anulan ya que tienen el mismo sentido.

La Vía Láctea es una galaxia de tipo espiral, en la que las estrellas están distribuidas a lo largo de varios brazos espirales, todos ellos aproximadamente en el mismo plano. Las estrellas giran respecto al centro de la galaxia, en donde se cree que puede existir un agujero negro. El Sistema Solar se encuentra a 26000 *años-luz* de dicho centro y su periodo de rotación es de 200 millones de años. Calcula:

a) La aceleración (módulo, dirección y sentido) a la que está sometido el Sol en ese movimiento.

b) La masa del agujero negro suponiendo que éste es puntual y que se puede despreciar la atracción gravitatoria del resto de las estrellas.

c) Compara el resultado con la masa del Sol.

1 *añoluz* = $9{,}46\cdot 10^{15}$ *m*; M_{sol} = $1{,}98\cdot 10^{30}$ *kg*; *G* = $6{,}67\cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²; 1 *año* = 365,3 *d*

Solución

Apartado b): Considerando al sistema Solar como una partícula, la fuerza centrípeta que lo mantiene girando (en una órbita circular) alrededor del agujero negro es la fuerza gravitatoria,

$$\left.\begin{array}{l} F_g = F_c \;\Rightarrow\; G\dfrac{Mm}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r} \\ v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{2\pi r}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow\; G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{\left(2\pi r/T\right)^2}{\cancel{r}} \;\Rightarrow\; G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

donde M es la masa del agujero negro; m la masa del Sistema Solar; r el radio de la órbita del Sistema Solar (cuyo centro es el agujero negro) y T el periodo de rotación. Despejando M,

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \times \left(26000\times 9{,}46\cdot 10^{15}\right)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\times\left(200\cdot 10^6\times 365{,}3\times 24\times 3600\right)^2} = \frac{4\pi^2\times 1{,}49\cdot 10^{61}}{2{,}66\cdot 10^{21}} = 2{,}21\cdot 10^{41}\ kg$$

Apartado c) La relación de la masa del agujero negro con la del Sol es,

$$\frac{M}{M_{sol}} = \frac{2{,}21\cdot 10^{41}}{1{,}98\cdot 10^{30}} = 1{,}12\cdot 10^{11}$$

Nota: La razón de que los resultados no coincidan con los reales se debe a que estamos despreciando la masa del resto de las estrellas de la galaxia. Puesto que el Sol está muy alejado del centro de la misma, el resto de las estrellas de la Galaxia hacen que el periodo de rotación sea menor que el que tendría si solo estuviera el agujero negro.

Un satélite meteorológico de masa $m = 680\ kg$ describe una órbita circular a una altura $h = 750\ km$ sobre la superficie terrestre.

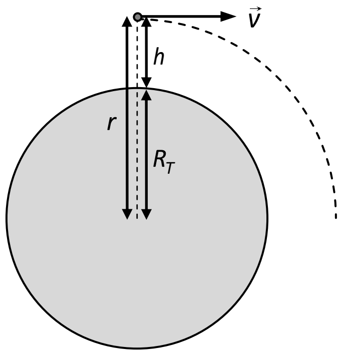
a) Calcula el número de veces que recorrerá la órbita al día.

b) Calcula las energías cinética y total que tendrá el satélite en la órbita.

c) ¿Cuál es el peso del satélite en la órbita?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$; $R_T = 6370\ km$; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$

Solución



Observa que el radio de la órbita es,

$$r = R_T + h = 6370 + 750 = 7120\ km = 7{,}12 \cdot 10^6\ m$$

Apartado a): Para hallar las veces que recorre la órbita al día necesitamos conocer el periodo del satélite.

Al ser una trayectoria circular, la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza gravitatoria y, además, $F_c = mv^2/r$; así que,

$$F_c = F_g \;\Rightarrow\; m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2} \;\Rightarrow\; v^2 = G\frac{M_T}{r} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{G\frac{M_T}{r}} \quad (1)$$

En una órbita circular la fuerza gravitatoria es siempre perpendicular a la velocidad, por lo que la magnitud de la velocidad permanece constante (es decir, se trata de un movimiento circular uniforme). Entonces,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi r}{v} \quad (2)$$

donde T representa el tiempo que le lleva al satélite completar una vuelta; es decir, el periodo. Combinando las ecuaciones (1) y (2),

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{G M_T/r}} = 2\pi\frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{G M_T/r}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^2}{G M_T/r}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(7{,}12 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 5{,}97 \cdot 10^{24}}} = 5{,}98 \cdot 10^3\ s = 1{,}66\ h$$

$$\text{Nº} = 24/T = 24/1{,}66 = \mathbf{14,4\ \text{veces recorre la órbita al día}}$$

Apartado b): La energía total en una órbita circular se puede obtener con la ecuación,

$$E_m = -G\frac{M_T m}{2r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \times 680}{2 \times 7{,}12 \cdot 10^6} = \mathbf{-1{,}90 \times 10^{10}\ J}$$

La forma más fácil de obtener la energía cinética es,

$$E_m = E_c + E_p \;\Rightarrow\; E_c = E_m - E_p = -G\frac{M_T m}{2r} - \left(-G\frac{M_T m}{r}\right) = -G\frac{M_T m}{2r} + G\frac{M_T m}{r} = G\frac{M_T m}{2r} = \mathbf{1{,}90 \times 10^{10}\ J}$$

es decir, el valor de la E_c es igual al valor absoluto de la energía total,

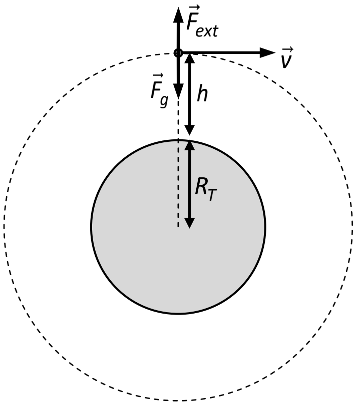
Apartado c): el peso del satélite en la órbita es simplemente la fuerza gravitatoria con la que la Tierra lo atrae; entonces,

$$\left.\begin{array}{l} P = mg \\ g = G M_T/r^2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; P = G\frac{M_T m}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \times 680}{(7{,}12 \cdot 10^6)^2} = \mathbf{5{,}34 \times 10^3\ N}$$

Se pone en órbita un satélite artificial de 600 *kg* a una altura de 1200 *km* sobre la superficie de la Tierra. El lanzamiento se realiza desde el nivel del mar.
¿Qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita?
Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$; $R_T = 6370\ km$

Solución

Aunque el problema no lo dice expresamente, se sobreentiende que hay que hallar la energía adicional **mínima** que hay que comunicar al satélite.



Como el trabajo no es más que una forma de transferir energía, tenemos que realizar un trabajo sobre el satélite para comunicarle energía aplicando una fuerza externa sobre él. Por otro lado, sabemos que la energía mecánica mínima que ha de tener un cuerpo para salir de un campo gravitatorio es cero. Entonces,

$$E_m + E_{com} = 0$$

donde E_m representa la energía mecánica del satélite en la órbita y E_{com} la energía que le comunica la fuerza externa. Como,

$$E_m = E_c + E_p = ½mv^2 - G\frac{M_T m}{r} = -G\frac{M_T m}{2r} \quad \text{y} \quad r = R_T + h$$

queda al combinar las ecuaciones,

$$-G\frac{M_T m}{2r} + E_{com} = 0 \ \Rightarrow \ E_{com} = +G\frac{M_T m}{2r} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \times 600}{2 \times (6{,}37 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5)} = \mathbf{1{,}71 \times 10^{10}}\ \boldsymbol{J}$$