PROBLEMAS DE INTERACCIÓN ELÉCTRICA RESUELTOS

Dos partículas de –1 μC y +1 μC se encuentran, respectivamente, en los puntos (0,0) y (6,0) de un sistema de coordenadas. Calcula:

a) La intensidad del campo en el punto *P* (3,4). Halla su valor numérico, dibuja el vector y exprésalo en sus componentes.

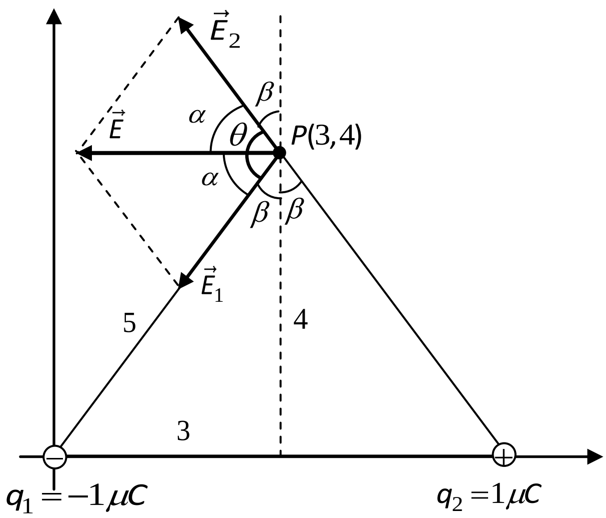
b) El potencial en el punto *P* (3,4).

c) El trabajo que realiza el campo creado por la carga de –1 μC cuando la carga de +1 μC se traslada del punto *Q* (6,0) hasta otro fuera del campo. Interpreta el signo del resultado.

Datos: $k = 9\cdot 10^9\ N\cdot m^2/C^2$. Las coordenadas están en metros.

Solución

Apartado a)



La figura muestra las intensidades de los campos creados por q_1 y q_2 en *P* y la intensidad del campo total, que es la suma vectorial de los anteriores.

Se ve que los ángulos formados por los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ con la horizontal son iguales (α). Por otro lado, de la figura se deduce que,

$$\theta = 2\alpha = 2(90-\beta)$$

donde, $\tan\beta = 3/4 \Rightarrow \beta = 36{,}9º$

por lo que, $\theta = 2(90-\beta) = 2(90-36{,}9º) = 106º$

Calculamos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ y luego, con la fórmula del coseno, *E*.

Recuerda que la magnitud de la intensidad de un campo creado por una carga puntual *q* en un punto situado a una distancia *r* es,

$$E = k|q|/r^2$$

Fíjate en que $E_1 = E_2$ porque $|q_1| = |q_2|$ y $r_1 = r_2$. Por lo tanto,

$$E_1 = E_2 = k\frac{|q_1|}{r_1^2} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\times\frac{10^{-6}C}{(5m)^2} = 360\ \frac{N}{C}$$

$$E = \sqrt{E_1^2+E_2^2+2E_1E_2\cos\theta} = \sqrt{2E_1^2+2E_1^2\cos\theta} = E_1\sqrt{2(1+\cos\theta)} = 360\times\sqrt{2(1+\cos 106)} = \mathbf{432\ \frac{N}{C}}$$

Expresemos ahora el campo en sus componentes,

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = \mathbf{-432\vec{i}\ N/C}$$

ya que de la simetría de la figura se deduce que,

$$E_x = -432 N/C \quad \text{y} \quad E_y = 0$$

Apartado b) Recuerda que el potencial de un campo creado por una carga puntual *q* en un punto situado a una distancia r viene dado por,

$$V = kq/r$$

donde la carga viene con su signo, pues el potencial es una magnitud escalar que puede ser positiva ($q > 0$) o negativa ($q < 0$). Por lo tanto,

$$V_1 = k\frac{q_1}{r_1} = 9\cdot 10^9 \frac{N\cdot m^2}{C^2}\times\frac{-10^{-6}\,C}{5m} = -1800V$$

$$V_2 = k\frac{q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9 \frac{N\cdot m^2}{C^2}\times\frac{+10^{-6}\,C}{5m} = +1800V$$

Entonces tenemos que el potencial total, que es la suma algebraica de V_1 y V_2, es

$$\boldsymbol{V} = V_1 + V_2 = -1800 + 1800 = \mathbf{0\,V}$$

Apartado c) Fíjate que la carga q_2 está en el campo creado por q_1. Si q_2 se traslada desde el punto Q (6,0) hasta otro fuera del campo, el campo creado por q_1 realizará un determinado trabajo sobre q_2. De acuerdo con la teoría,

$$W_Q^\infty = E_p(Q) - E_p(\infty) = q_2 V_Q - q_2 V_\infty = q_2(V_Q - V_\infty)$$

pero $V_\infty = 0$ (punto de referencia) y,

$$V_Q = k\frac{q_1}{r} = 9\cdot 10^9 \frac{N\cdot m^2}{C^2}\times\frac{-10^{-6}\,C}{6m} = -1500V$$

Por lo que, $\boldsymbol{W_Q^\infty} = E_p(Q) - E_p(\infty) = q_2(V_Q - V_\infty) = q_2 V_Q = 10^{-6}\,C\times(-1500V) = \mathbf{-1{,}5\cdot 10^{-3}}\,\boldsymbol{J}$

El signo menos significa que hay que aplicar una fuerza externa para sacar a la partícula del campo. Esto es así porque la fuerza que el campo ejerce sobre la carga es de atracción.

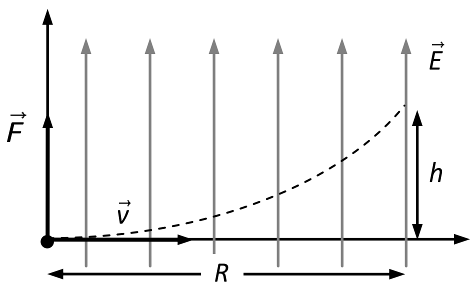
Una carga de 2 μC y 10 *mg*, que se mueve horizontalmente con una velocidad de 100 *m/s*, entra en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme vertical dirigido hacia arriba de 1000 *N/C* de intensidad. ¿Qué distancia horizontal ha de recorrer la carga para que se desvíe una distancia de 10 cm de su trayectoria inicial?

Solución

La fuerza eléctrica y el peso de la carga son,

$$F_e = qE = 2\cdot 10^{-6}\,C\cdot 1000\,N/C = 2\cdot 10^{-3}\,N$$
$$P = mg = 10\cdot 10^{-6}\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2 = 9{,}81\cdot 10^{-5}\,N$$

lo que pone de manifiesto que el peso es **despreciable** frente a la fuerza eléctrica.



El campo ejerce sobre la carga una fuerza vertical dada por,

$$F = qE$$

Por otro lado, $F = ma$; por lo que se deduce que la aceleración vertical de la carga es,

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{2\cdot 10^{-6}\,C\cdot 1000\,N/C}{10\cdot 10^{-6}\,kg} = 200\ m/s^2$$

El movimiento de la carga es la composición de dos:

- Uno horizontal uniforme, de velocidad v = 100 *m/s*
- Otro vertical uniformemente acelerado, de velocidad inicial v_0 = 0.

Por lo tanto, aplicando las ecuaciones de los movimientos, tenemos,

$$\left.\begin{array}{l} R = vt \Rightarrow t = R/v \\ h = ½at^2 \end{array}\right\} h = ½a\frac{R^2}{v^2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2h}{a}}\cdot v$$

donde R es el alcance, h la desviación vertical y t el tiempo. Como se desvía verticalmente una distancia de 10 *cm*, h = 10 *cm* = 0,1 *m*. Por lo tanto,

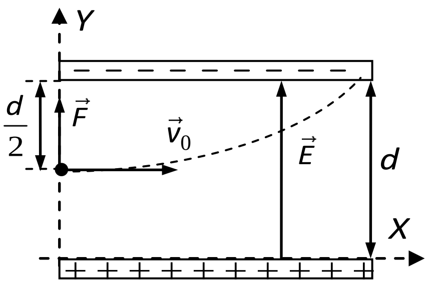
$$\boldsymbol{R} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}1m}{200\ m/s^2}}\cdot 100\ m/s = \mathbf{3{,}16\ m}$$

El condensador de la figura tiene una diferencia de potencial entre sus placas ΔV = 2.10^5 V y la separación entre ellas es d = 10 cm.

a) Halla el campo eléctrico en su interior y dibuja el vector que lo representa.

b) Si en un punto equidistante de las dos placas (ver figura) se lanza una carga positiva de 2 μC y 10 mg con una velocidad de 10^3 m/s, ¿qué distancia horizontal recorre antes de colisionar con una de las placas?

Solución



En la figura se ha dibujado la trayectoria de la partícula, la fuerza que actúa sobre ella y la intensidad del campo eléctrico (ambos constantes y de la misma dirección y sentido).

El campo eléctrico es,

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{2\cdot 10^5 V}{0{,}1m} = \mathbf{2\times 10^6\ V/m}\ (ó\ N/C)$$

Para determinar la distancia que recorre la carga, es necesario conocer la aceleración que le comunica la fuerza eléctrica.

$$\left.\begin{array}{l} F = qE = q\dfrac{\Delta V}{d} \\ F = ma \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{q\Delta V}{md} = \frac{2\cdot 10^{-6} C\cdot 2\cdot 10^5 V}{10^{-5} kg\cdot 0{,}1m} = 4\cdot 10^5\ m/s^2$$

El movimiento de la carga (que es curvilíneo) es la composición de un movimiento uniforme en el eje OX con velocidad v_0 y otro uniformemente acelerado (con la aceleración anterior) en el eje OY sin velocidad inicial y con posición inicial $y_0 = d/2$. Sus ecuaciones son,

$$\begin{cases} OX\ \ x = v_0 t\ \ (1) \\ OY\ \ y = ½d + ½at^2\ \ (2) \end{cases}$$

Cuando la carga colisiona con la placa negativa (ver figura), el tiempo transcurrido es t_v mientras que $y = d$. Por lo tanto, de la ecuación (2) tenemos,

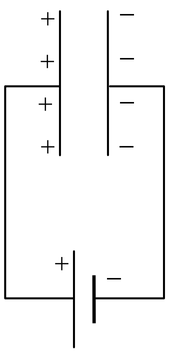
$$d = ½d + ½at_v^2 \Rightarrow t_v = \sqrt{d/a} = \sqrt{0{,}1/4\cdot 10^5} = 5\cdot 10^{-4}\ s$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1)

$$\mathbf{x} = v_0 t_v = 10^3\cdot 5.10^{-4} = 5\cdot 10^{-1}\ m = \mathbf{50\ cm}$$

Se conecta una batería de 12 voltios a un condensador plano. Si la separación de las armaduras es de 0,5 *cm*, calcula el campo eléctrico en su interior.

Solución



Al conectar el generador a las placas (o armaduras) del condensador, se produce la carga de éste. La armadura conectada a polo positivo se carga positivamente y la otra lo hace negativamente, como muestra la figura. Como se explica a continuación, el proceso de carga finaliza cuando la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador es exactamente la misma que la que hay entre los polos del generador.

Efectivamente, de acuerdo con la ley de Ohm, la corriente eléctrica que fluye por el cable que conecta el polo positivo del generador con la armadura izquierda del condensador cesa cuando la diferencia de potencial en los extremos del cable es cero, lo que ocurre cuando el potencial de armadura y el del polo positivo del generador se igualan (por eso la armadura izquierda se carga positivamente). Un razonamiento análogo explica que la armadura derecha se carga negativamente al mismo potencial que el polo negativo del generador.

Ya que las armaduras positiva y negativa del condensador tienen, respectivamente, los mismos potenciales que los polos positivo y negativo del generador, se deduce que la diferencia de potencial entre ellas ha de ser la misma que la del generador. Observa que, en definitiva, el proceso de carga consiste en un desplazamiento de cargas negativas (a través del generador) desde la armadura izquierda del condensador hasta la derecha.

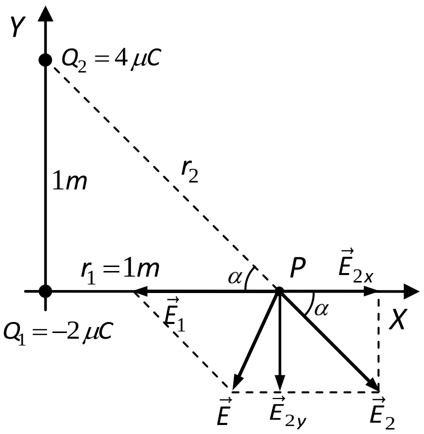
Una vez conocida la diferencia de potencial entre las armaduras es fácil calcular el campo eléctrico (constante) en el interior del condensador,

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{12V}{0{,}5 \cdot 10^{-2}\, m} = \mathbf{2400}\ \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{m}}\ \text{ó}\ \frac{N}{C}$$

Se tienen dos cargas puntuales fijas localizadas como indica la figura. Determina:

a) **El potencial y el campo en el punto *P*.**
b) **El trabajo que se requiere para trasladar una tercera carga q_3 = 5 μC desde el infinito hasta el punto indicado.**
c) **La energía potencial total del sistema formado por las tres cargas.**

Solución



El potencial en el punto *P*, al ser una magnitud escalar, es la suma algebraica de los potenciales creados por Q_1 y Q_2; es decir,

$$V = V_1 + V_2 = k\frac{Q_1}{r_1} + k\frac{Q_2}{r_2} = k\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right)$$

donde $r_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,m$. Por lo tanto,

$$V = V_1 + V_2 = 9\cdot 10^9\left(\frac{-2\cdot 10^{-6}}{1} + \frac{4\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 9\cdot 10^9\left(\frac{-4\cdot 10^{-6}}{2} + \frac{\sqrt{2}\times 4\cdot 10^{-6}}{2}\right) = 9\cdot 10^9\left(\frac{4(\sqrt{2}-1)\cdot 10^{-6}}{2}\right) = \mathbf{7{,}46\cdot 10^3\,V}$$

El cálculo de la intensidad del campo es más complejo porque es una magnitud vectorial. El campo en *P* es la suma vectorial de los campos creados por ambas cargas. Aquí no resulta práctico aplicar el teorema del coseno; es más fácil obtener directamente las componentes de los campos de cada carga y luego sumarlas. Empezamos con Q_1,

$$E_1 = k\frac{|Q_1|}{r_1^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-6}}{1^2} = 1{,}80\cdot 10^4\,\frac{N}{C}$$

Observa que E_1 representa la magnitud de la intensidad del campo en *P* (que siempre es positiva); por esa razón hay que tomar el valor absoluto de la carga. Puesto el campo tiene la dirección de *OX* y sentido opuesto, la ecuación vectorial que expresa su valor en componentes es (ver figura), $\vec{E}_1 = -1{,}80\cdot 10^4\,\vec{i}\ N/C$

o sea, $\vec{E}_1$ no tiene componente en el eje *OY* y su componente en *OX* es igual a su magnitud, pero con signo negativo. Veamos la magnitud del campo creado por Q_2,

$$E_2 = k\frac{|Q_2|}{r_2^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{4\cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{4\cdot 10^{-6}}{2} = 1{,}80\cdot 10^4\,\frac{N}{C}$$

que coincide con el de Q_1. Para expresar el campo en sus componentes tenemos que determinar el ángulo α. De la figura se desprende que α = 45º y que la componente en *OY* es negativa; por lo tanto,

$$\vec{E}_2 = E_{2x}\vec{i} + E_{2y}\vec{j} = E_2\cos 45\,\vec{i} - E_2\sin 45\,\vec{j} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times 1{,}8\cdot 10^4\,\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times 1{,}8\cdot 10^4\,\vec{j} = 1{,}27\cdot 10^4\,\vec{i} - 1{,}27\cdot 10^4\,\vec{j}\ N/C$$

En este problema lo más razonable es expresar el campo total en sus componentes; entonces,

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(E_{1x}\vec{i} + E_{1y}\vec{j}\right) + \left(E_{2x}\vec{i} + E_{2y}\vec{j}\right) = \left(E_{1x} + E_{2x}\right)\vec{i} + \left(E_{2y}\right)\vec{j} =$$

$$= \left(-1{,}8\cdot 10^4 + 1{,}27\cdot 10^4\right)\vec{i} - 1{,}27\cdot 10^4\,\vec{j} = \mathbf{-0{,}527\cdot 10^4\,\vec{i} - 1{,}27\cdot 10^4\,\vec{j}}\ \boldsymbol{N/C}$$

Por último (aunque no se pide en el problema) la magnitud del campo es,

$$\boldsymbol{E} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(-0{,}527\cdot 10^4\right)^2 + \left(-1{,}27\cdot 10^4\right)^2} = \mathbf{1{,}38\cdot 10^4}\ \boldsymbol{N/C}$$

Para una carga q que se mueve entre dos puntos a y b de un campo se cumple que,

$$\left.\begin{aligned} W_a^b &= E_p(a) - E_p(b) \\ E_p &= qV \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_a^b = qV_a - qV_b = q\left(V_a - V_b\right)$$

donde W es el trabajo realizado por el campo y V potencial. Así que el trabajo que hace el campo sobre q_3 cuando ésta se mueve desde el infinito al punto P es,

$$W_\infty^p(campo) = q_3\left(V_\infty - V_p\right) = 5\cdot 10^{-6}\,C \times \left(0 - 7{,}46\cdot 10^3\right)V = -0{,}0373\ J$$

donde el signo menos indica que q_3 no se desplaza espontáneamente desde el ∞ hasta P; es decir, que la fuerza eléctrica del campo se opone a ese desplazamiento. La fuerza externa mínima necesaria para trasladar a q_3 desde el ∞ hasta P es igual y opuesta a la que ejerce el campo y el trabajo que realiza es el mismo, pero de signo opuesto; o sea,

$$\mathbf{W_\infty^p(externa)} = -W_\infty^p(campo) = -\left(-0{,}0373\,\text{J}\right) = \mathbf{0{,}0373\ J}$$

que es lo que nos pide el problema (trabajo realizado por la fuerza externa).

Para calcular la energía potencial del sistema formado por las tres partículas, recordemos que la energía potencial no se puede asociar a una sola partícula, sino a todo el sistema. Puesto que la energía potencial de un sistema formado por dos partículas es $E_p = kqq'/r$, la de nuestro sistema (formado por 3) será,

$$E_p = E_p(Q_1,Q_2) + E_p(Q_1,q_3) + E_p(Q_2,q_3) = k\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + k\frac{Q_1q_3}{r_{13}} + k\frac{Q_2q_3}{r_{22}} \Rightarrow$$

$$E_p = k\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2q_3}{r_{22}}\right) = 9\cdot 10^9\left(\frac{-2\cdot 10^{-6}\times 4\cdot 10^{-6}}{1} + \frac{-2\cdot 10^{-6}\times 5\cdot 10^{-6}}{1} + \frac{4\cdot 10^{-6}\times 5\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}}\right)$$

y operando queda,

$$\mathbf{E_p} = 9\cdot 10^9\left(-8\cdot 10^{-12} - 10\cdot 10^{-12} + 14{,}1\cdot 10^{-12}\right) = \mathbf{-3{,}51\times 10^{-2}\ J}$$

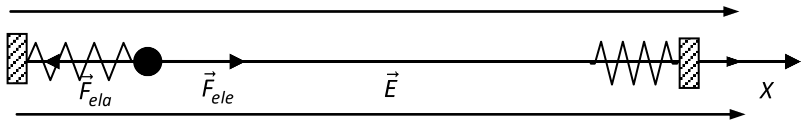
En una región del espacio existe un campo eléctrico uniforme de 200 *V/m*. Una carga eléctrica de 10 *μC* y 1 *mg* está sujeta al extremo de un muelle de constante elástica 0,5 *N/m*, tal como indica la figura. Se pide:

a) La longitud que se alarga el muelle.

b) Si la carga se libera del muelle y después de recorrer 1 *m* choca con un segundo muelle idéntico al primero, ¿cuánto se comprime por efecto de la colisión.

Solución

Como el campo es horizontal, fijamos un sistema de coordenadas tal que la dirección del campo coincida con la del eje *OX***.** De este modo (como ya sabemos) las ecuaciones vectoriales (definidas en el eje *OX*) las podemos expresar en su forma escalar (el signo indica el sentido). Despreciamos el peso de la carga.



La carga está en reposo porque las fuerzas eléctrica y elástica, que tienen la misma dirección y sentidos opuestos, se anulan; esto es,

$$F_{ele}+F_{ela}=0$$

ahora bien, $\quad F_{ele}=qE \;\text{ y }\; F_{ela}=-k\Delta x$

donde Δx representa el alargamiento del muelle y el signo menos se debe a que la fuerza tiene sentido opuesto al alargamiento. Así que,

$$qE+\left(-k\Delta x\right)=0\Rightarrow \mathbf{\Delta x}=\frac{qE}{k}=\frac{10\cdot 10^{-6}\,\cancel{C}\times 200\,\cancel{N}/\cancel{C}}{0,5\,\cancel{N}/m}=\mathbf{4,00\times 10^{-3}\,m=0,400\,cm}$$

Al liberarse el muelle, la fuerza elástica desaparece y la fuerza eléctrica impulsa a la carga hacia la derecha. Finalmente colisiona con el segundo muelle, que se comprime y termina por detener su movimiento. Ya que las únicas fuerzas que actúan (elástica y eléctrica) son conservativas, la energía mecánica de la carga se mantiene constante. Es decir, la energía mecánica al liberarse del 1[er] muelle, $E_m(i)$, y la que tiene cuando es detenida por la acción del 2º, $E_m(f)$, son iguales. Entonces,

$$E_m(i)=E_m(f)\Rightarrow E_c(i)+E_p(i)=E_c(f)+E_p(f)$$

pero las energías cinéticas $E_c(i)=E_c(f)=0,$ puesto que la carga se halla en reposo cuando se libera del primer muelle y al ser detenida por el segundo; o sea,

$$\left.\begin{array}{r} E_p(i)=E_p(f)\Rightarrow E_{p,ele}(i)=E_{p,ele}(f)+E_{p,ela}(f) \\ E_{p,ele}=qV \text{ y } E_{p,ela}=½k\Delta x'^2 \end{array}\right\}\Rightarrow qV_i=qV_f+½k\Delta x'^2\Rightarrow q\left(V_i-V_f\right)=½k\Delta x'^2$$

Fíjate en que necesitamos conocer $V_i - V_f$ para hallar la compresión del muelle ($\Delta x'^2$). Como el campo es constante, se cumple que $E = (V_i - V_f)/d$, donde d es la distancia que hay entre los puntos i y f (hay que escribir $V_i - V_f$ por que $V_i > V_f$).

Como la carga recorre 1 *m* antes de chocar con el muelle y éste se comprime una cantidad $\Delta x'$, se deduce que $d = 1 + \Delta x'$. Por lo tanto,

$$\left.\begin{array}{r} q\left(V_i-V_f\right)=½k\Delta x'^2 \\ E=(V_i-V_f)/(1+\Delta x') \end{array}\right\}\Rightarrow qE\left(1+\Delta x'\right)=½k\Delta x'^2\Rightarrow ½k\Delta x'^2-qE\Delta x'-qE=0$$

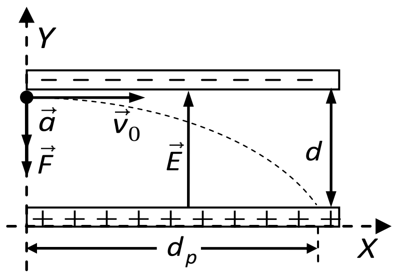
Sustituyendo los parámetros por sus valores numéricos,

$$¼\,\Delta x'^2 - 2\cdot 10^{-3}\Delta x' - 2\cdot 10^{-3} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{\Delta x' = 0{,}0935\ m = 9{,}35\ cm}$$

Observa que no se ha utilizado el dato de la masa de la partícula. A mayor masa más velocidad, pero la energía comunicada es la misma; es decir, la energía de la carga al llegar al 2º muelle sería la misma (no depende de la masa), por lo éste se comprimiría lo mismo.

* * * * * * * * * * * * *

Se dispara un electrón horizontalmente, con una velocidad de 2.10^6 *m/s*, entre las placas de un condensador plano separadas una distancia *d*, tal como indica la figura. Calcula la distancia a la que el electrón choca con la placa positiva y el tiempo que tarda en suceder.
<u>Datos</u>: $E = 2{,}50\cdot 10^2$ *N/C*; $d = 1{,}33$ *cm*; $q_e = -1{,}6\cdot 10^{-19}$ *C*; $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ *kg*



Sabemos que en dentro del condensador el campo eléctrico es constante y que está dirigido de la placa positiva a la negativa, como se ve en la figura. Por otro lado, de la ecuación $F = qE$ deducimos que, puesto que la carga del electrón es negativa, la fuerza eléctrica tiene sentido opuesto al campo; es decir, es vertical y dirigida hacia abajo (ver figura). Observa que la ecuación está en su forma escalar porque la fuerza y el campo tienen la dirección del eje *OY*.

Combinando la ecuación con la segunda ley de Newton obtenemos la aceleración del electrón en el eje *OY*,

$$\left.\begin{aligned} F &= q_e E \\ F &= m_e a \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_e a = q_e E \Rightarrow a = \frac{q_e E}{m_e} = \frac{-1{,}6\cdot 10^{-19}\times 2{,}5\cdot 10^2}{9{,}11\cdot 10^{-31}} = -4{,}39\cdot 10^{13}\,\frac{m}{s^2}$$

donde el signo negativo indica que la aceleración está dirigida hacia abajo.

De la figura se deduce que el electrón lleva un movimiento uniforme en el eje *OX* con velocidad v_0 y un movimiento uniformemente acelerado en el eje *OY* con velocidad inicial cero y aceleración $a = -4{,}39\cdot 10^{13}$ m/s^2.

La ecuación del *MRUA* en el eje *OY* es,

$$\Delta y = v_{oy}t + ½at^2 = ½at^2 \text{ (pues } v_{0y} = 0)$$

Si designamos por t_p al tiempo que le lleva al electrón alcanzar la placa positiva, en la figura se ve que cuando $t = t_p$,

$$\Delta y = y - y_o = 0 - d = -d$$

por lo tanto,

$$-d = ½at_p^2 \Rightarrow t_p = \sqrt{-2d/a} = \sqrt{-2\times 1{,}33\cdot 10^{-2}/-4{,}39\cdot 10^{13}} = 2{,}46\cdot 10^{-8}\ s$$

La ecuación del movimiento uniforme del electrón en el eje *OX* es,

$$\Delta x = v_0 t$$

donde, como se ve en la figura, $\Delta x = d_p$ cuando $t = t_p$. Así que la distancia horizontal que recorre el electrón hasta colisionar con la placa positiva es,

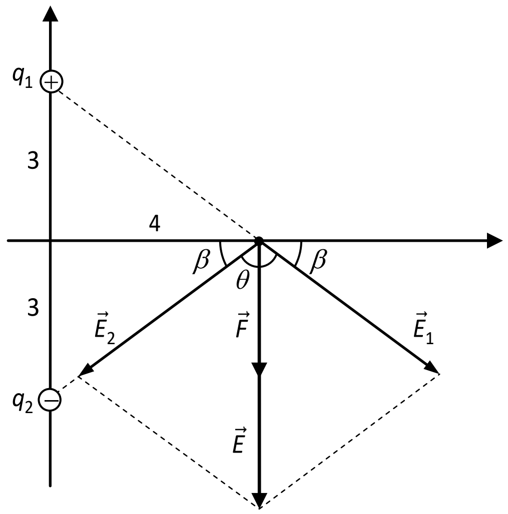
$$\boldsymbol{d_p} = v_0 t_p = 2\cdot 10^6\times 2{,}46\cdot 10^{-8} = \mathbf{0{,}0492\ m = 4{,}92\ cm}$$

Dos cargas de 6 y –6 μC (que suponemos fijas) están situadas a 6 *cm* de distancia la una de la otra. Si suponemos que ambas se encuentran en el eje *OY* y a igual distancia del origen de coordenadas, calcula:

a) Magnitud, dirección y sentido del campo eléctrico en un punto del eje *OX* para el que *x = 4 cm*.

b) Fuerza que ejercen las cargas sobre otra de 2 *mC* situada en ese punto.

Solución



Apartado a)

La figura muestra las intensidades de los campos creados por las cargas q_1 y q_2 y el campo total, que es la suma vectorial de los anteriores. Recuerda que la intensidad de un campo eléctrico en un punto es la fuerza (de atracción o de repulsión) que ejerce sobre la unidad de carga positiva colocada en el punto.

Nota que el sentido de $\vec{E}_1$ (creado por q_1) se debe a que la fuerza que q_1 ejerce sobre la unidad de carga positiva es de repulsión (cargas del mismo signo se repelen); mientras que el signo de $\vec{E}_2$ (creado por q_2) es el indicado porque q_2 ejerce una fuerza de atracción sobre la unidad de carga positiva (cargas de distinto signo se atraen).

Teniendo en cuenta que la magnitud del campo creado por una carga puntual es $E = k|q|/r^2$, se deduce que $E_1 = E_2$ porque $|q_1| = |q_2|$ y, como se ve en la figura,

$$r_1 = r_2 = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5\ cm$$

Entonces, $$E_1 = E_2 = k\frac{|q_1|}{r_1^2} = 9\cdot 10^9 \times \frac{6\cdot 10^{-6}}{(5\cdot 10^{-2})^2} = 2{,}16\cdot 10^7\ \frac{N}{C}$$

Aplicando el teorema del coseno calculamos la magnitud del campo creado por las dos cargas, pero antes tenemos que hallar el ángulo θ. En la figura se ve que,

$$\tan\beta = 3/4 \Rightarrow \beta = 36{,}9º \quad \text{y} \quad \theta = 180 - 2\beta = 180 - 2\times 36{,}9 = 106º$$

Por lo tanto la magnitud del campo total es,

$$\mathbf{E} = \sqrt{E_1^2+E_2^2+2E_1E_2\cos\theta} = \sqrt{2E_1^2+2E_1^2\cos\theta} = E_1\sqrt{2(1+\cos\theta)} = 2{,}16\cdot 10^7 \times \sqrt{2(1+\cos 106)} = \mathbf{2{,}59\times 10^7\ \frac{N}{C}}$$

En la figura se aprecia que $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son simétricos respecto a la vertical (tienen la misma magnitud y el ángulo que forman con la horizontal es el mismo); por lo tanto $\vec{E}$ tiene la dirección del eje *OY* y además su sentido es opuesto al del eje. Así pues,

$$\vec{\mathbf{E}} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = E_y\vec{j} = -E\vec{j} = \mathbf{-2{,}59\times 10^7\,\vec{j}\ N/C} \quad \text{pues } E_x = 0$$

Apartado b)

Para obtener la fuerza que el campo ejerce sobre una carga *q* = 2 *mC*, recuerda que $\vec{F} = q\vec{E}$. Así pues,

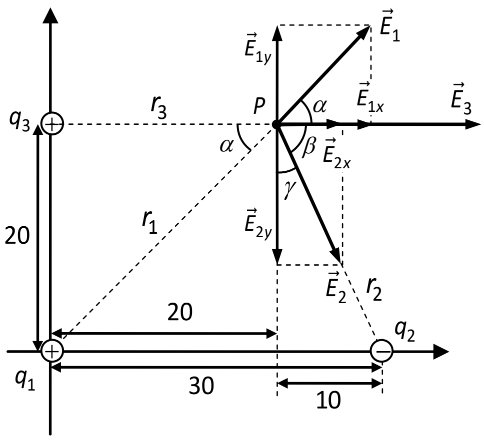
$$\vec{F} = q\vec{E} = 2\ mC \times \left(-2{,}59\cdot 10^7\vec{j}\ \right)N/C = 2\cdot 10^{-3}\ \cancel{C} \times \left(-2{,}59\cdot 10^7\vec{j}\ \right)N/\cancel{C} = \mathbf{-5{,}18\times 10^4\,\vec{j}\ N}$$

que, como el campo, tiene la dirección del eje *OY* y sentido opuesto, como se ve en la figura. La intensidad de la fuerza es pues,

$$\mathbf{F = 5{,}18\times 10^4\ N}$$

Tres cargas eléctricas de 2, -2 y 3 μC se hallan localizadas en los puntos (0,0), (30,0) y (0,20) de respectivamente. Halla el campo resultante en el punto *P* (20,20). Las coordenadas están expresadas en *cm*.

Solución



La falta de simetría de los vectores que representan a los campos eléctricos no aconseja utilizar el teorema del coseno. Es más fácil obtener directamente las componentes de los campos de cada partícula y luego sumarlas.

Empezamos por q_1. La dirección y el sentido de $\vec{E}_1$ son los indicados en el dibujo porque q_1 es positiva y, por lo tanto, la fuerza que ejerce sobre la unidad de carga positiva en el punto *P* es de repulsión. Entonces la magnitud del campo es,

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{r_1^2} = 9\cdot 10^9 \times \frac{2\cdot 10^{-6}}{\left(0{,}2^2 + 0{,}2^2\right)} = 2{,}25\cdot 10^5 \ \frac{N}{C}$$

y sus componente en los ejes *OX* y *OY* (ver figura) son,

$$E_{1x} = E_1 \cos\alpha = 2{,}25\cdot 10^3 \times \cos 45 = 1{,}59\cdot 10^5 \ N/C$$

$$E_{1y} = E_1 \sin\alpha = 2{,}25\cdot 10^3 \times \sin 45 = 1{,}59\cdot 10^3 \ N/C$$

donde (ver figura), $\tan\alpha = \dfrac{20}{20} = 1 \ \Rightarrow \ \alpha = 45º$

Veamos el campo de q_2. La dirección y el sentido de $\vec{E}_2$ son los indicados en la figura porque, al ser q_2 negativa, la fuerza que ejerce en *P* sobre la unidad de carga positiva es de atracción. La magnitud del campo es,

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{r_2^2} = 9\cdot 10^9 \times \frac{2\cdot 10^{-6}}{\left(0{,}2^2 + 0{,}1^2\right)} = 3{,}60\cdot 10^5 \ \frac{N}{C}$$

y sus componente en los ejes *OX* y *OY* (ver figura) son,

$$E_{2x} = E_2 \cos\beta = 3{,}60\cdot 10^3 \times \cos 63{,}4 = 1{,}61\cdot 10^5 \ N/C$$

$$E_{2y} = -E_2 \sin\beta = -3{,}60\cdot 10^3 \times \sin 63{,}4 = -3{,}22\cdot 10^5 \ N/C$$

donde (ver figura), $\tan\gamma = \dfrac{10}{20} = 0{,}5 \ \Rightarrow \ \gamma = 26{,}6º$

como (ver figura), $\beta + \gamma = 90º \ \Rightarrow \ \beta = 90 - \gamma = 90 - 26{,}6 = 63{,}4º$

Finalmente el campo de q_3. La dirección y el sentido de $\vec{E}_3$ son los indicados en la figura porque, al ser q_3 positiva, la fuerza que ejerce en *P* sobre la unidad de carga positiva es de repulsión. La magnitud del campo es,

$$E_3 = k\frac{|q_2|}{r_3^2} = 9\cdot 10^9 \times \frac{3\cdot 10^{-6}}{0{,}2^2} = 6{,}75\cdot 10^5 \ \frac{N}{C}$$

y sus componentes son,

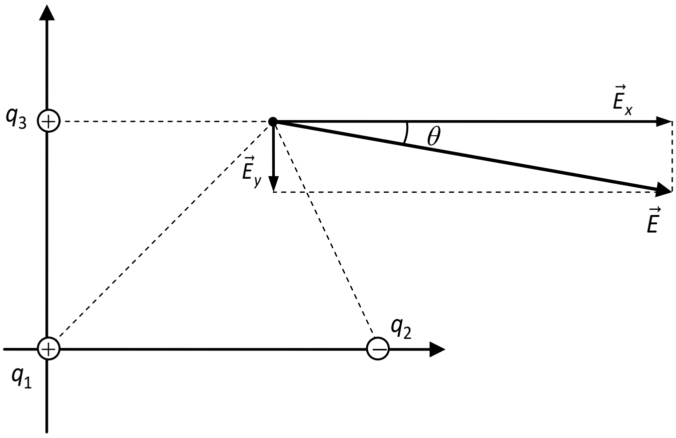
$$E_{3x} = E_3 = 6{,}75\cdot 10^5 \ N/C \quad \text{y} \quad E_{3y} = 0$$

El campo total es la suma vectorial de los campos individuales,

$$\mathbf{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \left(E_{1x} + E_{2x} + E_{3x}\right)\vec{i} + \left(E_{1y} + E_{2y} + E_{3y}\right)\vec{j}$$
$$= (1,59 + 1,61 + 6,75)\cdot 10^5\,\vec{i} + (1,59 - 3,22 + 0)\cdot 10^5\,\vec{j} = \mathbf{9,95\cdot 10^5\,\vec{i} - 1,63\cdot 10^5\,\vec{j}}$$

ecuación que expresa el campo en sus componentes; esto es,

$$E_x = 9,95\cdot 10^5\ N/C \quad \text{y} \quad E_y = -1,63\cdot 10^5\ N/C$$



En la figura se ha dibujado el vector que representa al campo creado por las tres cargas y sus componentes.

Para hallar la magnitud del campo aplicamos el teorema de Pitágoras,

$$\mathbf{E} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(9,95\cdot 10^5\right)^2 + \left(-1,63\cdot 10^5\right)^2} = \mathbf{1,01\cdot 10^6\ \frac{N}{C}}$$

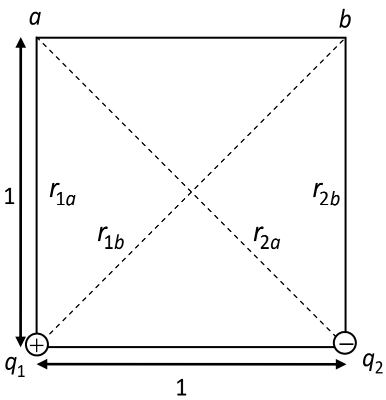
La dirección y el sentido del campo queda determinado por el ángulo θ (ver figura),

$$\tan\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-1.63\cdot 10^5}{9,95\cdot 10^5} = -0,164 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\theta = -9,30^o}$$

****

Calcula el potencial electrostático en los dos vértices contiguos de un cuadrado de 1 *m* de lado, si en los vértices opuestos se alojan dos cargas eléctricas de 3 μC, pero de signos opuestos. Determina el incremento de energía cinética que experimenta un electrón que se desplaza de un vértice a otro.

Solución



Recuerda que el potencial es una magnitud escalar; por lo tanto, el potencial en los vértices *a* y *b* del cuadrado (ver figura) es la suma algebraica de los potenciales creados por las cargas individuales en cada punto.

Los potenciales creados por q_1 = 3 μC en los vértices *a* (V_{1a}) y *b* (V_{1b}) son,

$$V_{1a} = k\frac{q_1}{r_{1a}} = 9\cdot 10^9 \times \frac{3\cdot 10^{-6}}{1} = 2,70\cdot 10^4\ V$$

$$V_{1b} = k\frac{q_1}{r_{1b}} = 9\cdot 10^9 \times \frac{3\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 1,91\cdot 10^4\ V$$

donde (ver figura), $\quad r_{1b} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ m$

Los potenciales creados por q_2 = –3 μC en los vértices *a* (V_{2a}) y *b* (V_{2b}) son,

$$V_{2a} = k\frac{q_1}{r_{2a}} = 9\cdot 10^9 \times \frac{-3\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = -1,91\cdot 10^4\ V$$

$$V_{2b} = k\frac{q_1}{r_{2b}} = 9\cdot 10^9 \times \frac{-3\cdot 10^{-6}}{1} = -2,70\cdot 10^4\ V$$

donde (ver figura), $\quad r_{2a} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ m$

Los potenciales de las dos cargas en los puntos *a* (V_a) y *b* (V_b) son,

$$\mathbf{V_a} = V_{1a} + V_{2a} = 2,70\cdot 10^4 - 1,91\cdot 10^4 = \mathbf{7,91\times 10^3\ V}$$

$$\mathbf{V_b} = V_{1b} + V_{2b} = 1,91 \cdot 10^4 - 2,70 \cdot 10^4 = \mathbf{-7,91{\times}10^3\ V}$$

Si obligamos a un electrón, de carga $q_e = -1,60{\cdot}10^{-19}\ C$, a desplazarse de un vértice a otro mediante un tubo hueco que los comunique, lo primero que tenemos que determinar es en qué vértice hemos de colocar al electrón para que, impulsado por el campo eléctrico, se mueva **espontáneamente** desde ese vértice hasta el otro.

En teoría vimos que una carga negativa dentro de un campo eléctrico se mueve espontáneamente en el sentido de los potenciales **crecientes**. En nuestro caso tenemos que $V_a > V_b$, por lo tanto el potencial del campo crece al movernos de *b* a *a*; así pues, tenemos que colocar al electrón en el vértice *b* para que se desplace espontáneamente al *a*.

Despreciando la fuerza gravitatoria, la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza eléctrica. Puesto que esta fuerza es conservativa, la energía mecánica del electrón ha de permanecer constante; o sea,

$$E_m = cte \;\Rightarrow\; E_m(b) = E_m(a) \;\Rightarrow\; E_c(b) + E_p(b) = E_c(a) + E_p(a)$$

pero $E_c(b) = 0$ porque se supone que el electrón se colocó en reposo en el punto *b*. Por otro lado sabemos que $E_p = qV$; por lo tanto,

$$q_eV_b = E_c(a) + q_eV_b \;\Rightarrow\; \mathbf{E_c(a)} = q_e\left(V_b - V_a\right) = -1,6\cdot 10^{-19} \times \left[-7,91\cdot 10^3 - \left(-7,91\cdot 10^3\right)\right] = \mathbf{2,53{\times}10^{-15}\ J}$$

Nota 1: En este problema no puede usarse la ecuación $E = V_a - V_b/d$ porque el campo creado por las cargas no es constante. No olvides que esa ecuación solo es válida para campos constantes.

Nota 2: Lo que pide el problema en realidad no es la energía cinética en el vértice *a*, sino el incremento de energía cinética. El resultado obtenido es correcto, solo que si hubiéramos colocado al electrón en el vértice *b* con una energía cinética inicial desconocida tendríamos,

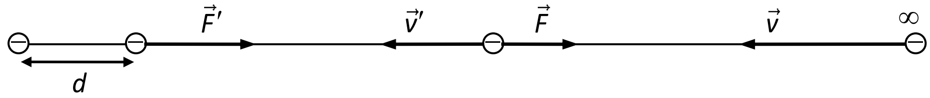
$$E_c(b) + q_eV_b = E_c(a) + q_eV_b \;\Rightarrow\; \Delta E_c = E_c(a) - E_c(b) = q_e\left(V_b - V_a\right)$$

que da exactamente el mismo resultado.

¿Cuánta energía se necesita para situar a dos electrones a una distancia de 2,5.10^{-10} *m*? Se supone que los electrones inicialmente estaban en reposo infinitamente separados.

Solución

En la figura suponemos que el electrón de la izquierda está fijo en su posición. Una manera de lograr que el electrón de la derecha se aproxime al de la izquierda es imprimirle una velocidad, tal como se ve en la figura; es decir comunicándole energía cinética.



Una vez comunicada la energía cinética, la única fuerza que actúa sobre el electrón (despreciando el peso) es la fuerza eléctrica. Puesto que la fuerza eléctrica es conservativa, la energía mecánica del electrón ha de permanecer constante; es decir,

$$E_m = cte \;\Rightarrow\; E_m(\infty) = E_m(d) \;\Rightarrow\; E_c(\infty) + E_p(\infty) = E_c(d) + E_p(d)$$

pero $E_p(\infty) = 0$ porque el infinito es el cero de la energía potencial por convenio y $E_c(d) = 0$ porque si $E_c(d)$ fuese mayor que cero, el electrón se seguiría moviéndose y se acercaría al otro electrón a una distancia menor que *d*. Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} E_c(\infty) &= E_p(d) \\ E_p(d) &= kq_e q_e/d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{E_c(\infty)} = k\frac{q_e^2}{d} = 9\cdot 10^9 \times \frac{\left(-1,6\cdot 10^{-19}\right)^2}{2,5\cdot 10^{-10}} = \mathbf{9,22\times 10^{-19}\ J}$$

Otra forma de abordar el problema es la siguiente:

Supongamos que el electrón de la derecha se mueve muy despacio, acercándose al de la izquierda, hasta que entra en el campo eléctrico creado por éste. A partir de ese instante, si queremos que los electrones se sigan acercando, hace falta una fuerza externa que venza la repulsión eléctrica que se ejercen entre ellos. Esta fuerza externa realiza un trabajo, de modo que la energía mecánica ya no permanece constante y, por nuestros conocimientos de Mecánica, sabemos que se cumple que,

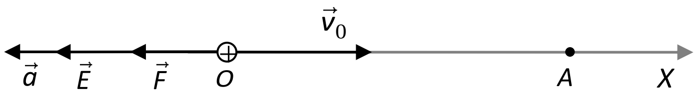
$$W = \Delta E_m = E_m(d) - E_m(\infty)$$

donde *W* es el trabajo realizado por la fuerza externa. Como el trabajo no es más que una forma de transmitir energía, *W* representa también la energía comunicada al electrón.

Una partícula de 6 μC de carga y 1 *g* de masa que lleva una velocidad de 300 *m/s* entra en una región en la que existe un campo eléctrico constante de la misma dirección que la de la velocidad de la partícula, pero de sentido contrario. Si la intensidad del campo es 10^5 *N/C*, determina la distancia que recorre antes de ser detenida.

Solución

Hagamos que la partícula se mueva en el eje *OX* de un sistema de coordenadas y que esté en el origen cuando su velocidad es de 300 *m/s*, como se ve en la figura.



Podemos resolver el problema de dos formas.

a) Dinámica y Cinemática

Como $\vec{E}$ y $\vec{F}$ tienen la dirección de *OX*, podemos expresar las correspondientes ecuaciones en su forma escalar,

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}=m\vec{a} &\rightarrow F=ma \\ \vec{F}=q\vec{E} &\rightarrow F=qE \end{aligned}\right\} \Rightarrow ma=qE \Rightarrow a=\frac{qE}{m}=\frac{6\cdot 10^{-6}\times(-105)}{10^{-3}}=-6\cdot 10^{2}\ \frac{m}{s^2}$$

> **¡Importante!** Observa que *F*, *a* y *E* no representan, respectivamente, los módulos; sino que representan a $\vec{F}$, $\vec{a}$ y $\vec{E}$. Los valores absolutos dan los módulos y el signo el sentido; por eso *E* es negativo (tiene sentido opuesto al eje *OX*), lo mismo que *a*.
> Como $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tienen sentidos opuestos, el movimiento es rectilíneo uniformemente decelerado.

Aplicando las ecuaciones del MRUV, donde $x_0=0,$ tenemos que,

$$\left.\begin{aligned} x=x_0+v_0t+½at^2 \\ v=v_0+at \end{aligned}\right\} \Rightarrow v^2-v_0^2=2a\Delta x=2a(x-x_0)=2ax$$

Cuando la carga llega al punto *A* $\Rightarrow v=v_A=0$ y $x=d$ por lo tanto,

$$-v_o^2=2ad \Rightarrow d=-\frac{v_0^2}{2a}=-\frac{300^2}{2\times(-6\cdot 10^2)}=\mathbf{75\ m}$$

b) Conservación de la energía mecánica

Puesto que el campo eléctrico es conservativo $\Rightarrow E_m=cte,$ así que,

$$E_m(O)=E_m(A) \Rightarrow E_c(O)+E_p(O)=E_c(A)+E_p(A)$$

donde $E_c(A)=0$ porque la carga se detiene en el punto *A*. Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} ½mv_0^2=E_p(A)-E_p(O) \\ E_p=qV \end{aligned}\right\} \Rightarrow ½mv_0^2=q(V_A-V_O)$$

Nota que $V_A-V_O>0$ porque $\vec{E}$ está orientado en el sentido de los potenciales decrecientes. Así,

$$E=\frac{V_0-V_A}{d}=-\frac{V_A-V_0}{d} \Rightarrow V_A-V_0=-E\,d>0 \ \text{(porque } E<0\text{)}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones,

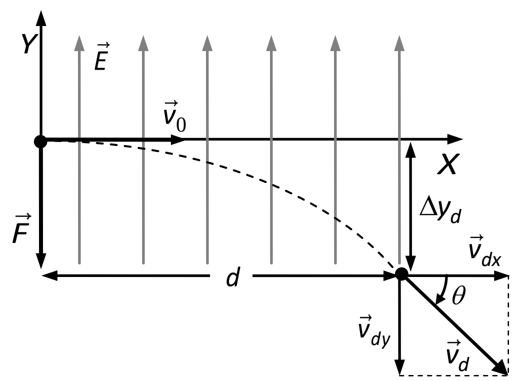
$$\left.\begin{aligned} ½mv_0^2=q(V_A-V_O) \\ V_A-V_0=-E\,d \end{aligned}\right\} \Rightarrow ½mv_0^2=-qEd \Rightarrow d=-\frac{mv_0^2}{2qE}=-\frac{10^{-3}\times 300^2}{2\times 6\cdot 10^{-6}\times(-10^{-5})}=\mathbf{75\ m}$$

Un electrón penetra en un campo eléctrico vertical dirigido hacia arriba de 1000 *N/C*. Si el electrón se mueve horizontalmente con una velocidad de 5·10^6 *m/s* cuando entra en el campo, halla:

a) El desvío vertical que sufre después de recorrer una distancia horizontal de 10 *cm*.

b) La velocidad que lleva en ese instante.

Solución



Coloquemos al electrón en el origen de coordenadas de *OXY*.

Como $\vec{E}$ y $\vec{F}$ tiene la dirección de *OY*, podemos expresar las correspondientes ecuaciones en su forma escalar,

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}=m\vec{a}\ \rightarrow\ F=ma\\ \vec{F}=q_e\vec{E}\ \rightarrow\ F=q_eE\end{array}\right\}\Rightarrow\ ma=q_eE$$

donde $q_e=-1{,}6\cdot10^{-19}\ C$ es la carga del electrón; por lo tanto,

$$a=\frac{q_eE}{m}=\frac{-1{,}6\cdot10^{-19}\times10^3}{9{,}11\cdot10^{-31}}=-1{,}76\cdot10^{14}\ \frac{m}{s^2}$$

¡Importante! Observa que *F*, *a* y *E* no representan, respectivamente, los módulos; sino que representan a $\vec{F}$, $\vec{a}$ y $\vec{E}$. Los valores absolutos dan los módulos y el signo el sentido; por eso, al ser la carga del electrón negativa, *F* también es negativa (tiene sentido opuesto al eje *OY*), lo mismo que *a*.

Se trata de un movimiento compuesto por dos: un *MRU* de velocidad v_0 en el eje *OX* y otro *MRUV* en el eje *OY* con velocidad inicial cero y aceleración negativa (en el sentido opuesto a *OY*). Como ya hemos estudiado, la composición de estos movimiento da lugar a un movimiento parabólico cuya trayectoria es la de la figura.

$$\text{Eje } OX\rightarrow MRU\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}x=x_0+v_xt\\ x_0=0;\ v_x=v_0\end{array}\right\}\Rightarrow\ x=v_0t$$

Cuando (ver figura) $x=d\ \Rightarrow\ t=t_d$,

$$d=v_0t_d\ \Rightarrow\ t_d=d/v_0=0{,}1/5\cdot10^6=2\cdot10^{-8}\ s$$

$$\text{Eje } OY\rightarrow MRUV\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}y=y_0+v_{0y}t+½at^2\\ v_{0y}=0;\ y_0=0;\ \Delta y=y-y_0=y\end{array}\right\}\Rightarrow\ \Delta y=½at^2$$

Cuando (ver figura) $t=t_d\ \Rightarrow\Delta y=\Delta y_d;\ v_y=v_{dy}$,

$$\Delta y_d=½at_d^2=½\times(-1{,}76\cdot10^{14})\times2\cdot10^{-8}=-3{,}51\cdot10^{-2}\ m=\mathbf{-3{,}51\ cm}$$

Para hallar la velocidad en el eje *OY* en el instante t_d (v_{dy}) aplicamos,

$$\left.\begin{array}{r}v_y=v_{0y}+at\\ v_{0y}=0\end{array}\right\}\ v_y=at\ \Rightarrow\ v_{dy}=at_d=-1{,}76\cdot10^{14}\times2\cdot10^{-8}=-3{,}51\cdot10^6\ m/s$$

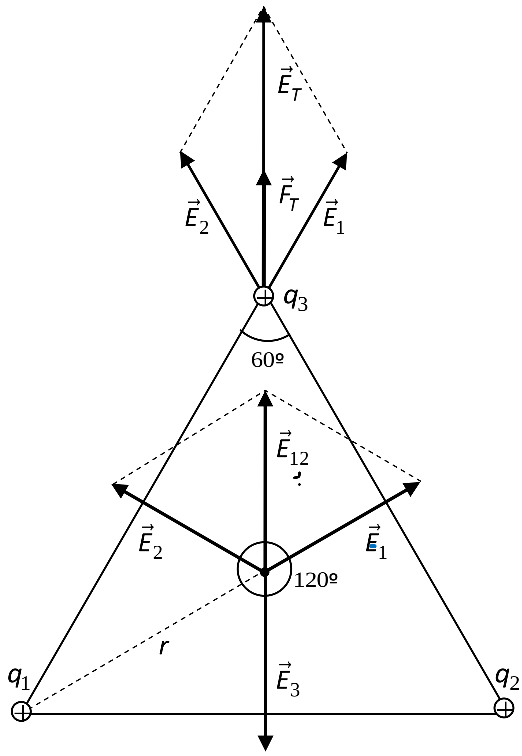
Como en el eje *OX* tenemos un *MRU* $\Rightarrow v_{dx}=v_x=v_0$. Para hallar $\vec{v}_d$ (ver figura) tenemos que obtener su magnitud (módulo) y su dirección, que queda determinada por el ángulo que forma con *OX*,

$$\left.\begin{array}{l}v_{dy}=\sqrt{v_0^2+v_{dy}^2}=\sqrt{\left(5\times10^6\right)^2+\left(-3{,}51\times10^6\right)^2}=\mathbf{6{,}11\times10^6\ m/s}\\ \tan\theta=v_{dy}/v_0=-3{,}51/5=-0702\ \Rightarrow\ \theta=\arctan(-0{,}702)=\mathbf{-35{,}1º}\end{array}\right\}$$

En cada uno de los vértices de un triángulo equilátero de lado 10 *cm* se halla una carga de 2.10^{-7} *C*. Calcula:

a) La fuerza sobre cada carga debido a la presencia de las otras dos.

b) El campo eléctrico en el centro del triángulo.



Solución

Apartado a): como no hacen referencia a ningún sistema de referencia es suficiente con hallar la intensidad de la fuerza (módulo) y dibujar el vector que la representa.

Como $\vec{F} = q\vec{E}$, necesitamos hallar el campo eléctrico en el punto en el que está q_3, que es la suma vectorial de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ (ver figura), así pues,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad \text{(suma vectorial)}$$

Podemos usar el tª de coseno para obtener la magnitud (módulo) de $\vec{E}$. Observa que $r_{13} = r_{12} = r = L = 10cm = 0{,}1m$ y que $q_1 = q_2 = q$; por lo tanto se cumple que,

$$E_1 = E_2 = E = k_0 \frac{|q|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-7}}{0{,}1^2} = 1{,}80 \cdot 10^5 \; N/C$$

y de acuerdo con el tª del coseno,

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos 60} = \sqrt{2E^2 + 2E^2 \cos 60} = E\sqrt{2(1+\cos 60)} \Rightarrow$$

$$E_T = 1{,}80 \cdot 10^5 \sqrt{2(1+1/2)} = \sqrt{3} \times 1{,}80 \cdot 19^5 = \mathbf{3{,}12 \times 10^5 \; N/C}$$

De la simetría de la figura se deduce que $\vec{E}_T$ es vertical y dirigido hacia arriba, lo mismo que $\vec{F}$ porque q_3 es positiva,

$$\vec{F}_T = q_3\vec{E}_T \;\Rightarrow\; F_T = |q_3| E_T = 2 \cdot 10^{-7} \times 3{,}12 \cdot 10^5 = \mathbf{6{,}24 \times 10^{-2} \; N}$$

Apartado b): Al igual que en el apartado a), como no hacen referencia a ningún sistema de coordenadas, podemos hallar la magnitud del campo (módulo) y dibujar el vector. El campo en el centro del triángulo (ver figura) es,

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}_{12} + \vec{E}_3$$

Como $r_1 = r_2 = r_3 = r$ y $q_1 = q_2 = q_3 = q$, tenemos que $E_1 = E_2 = E_3 = E = k_0 |q| / r^2$. Usamos el tª del coseno para hallar el módulo de E_{12} (ver figura),

$$E_{12} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos 120} = \sqrt{2E^2 + 2E^2 \cos 120} = E\sqrt{2(1+\cos 120)} = E\sqrt{2(1-1/2)} = E\sqrt{2 \times 1/2} = E$$

De la simetría de la figura se deduce que $\vec{E}_{12}$ es vertical y dirigido hacia arriba. Observa que $E_{12} = E_3$ (módulos) y como tienen la misma dirección y sentidos opuestos tenemos que,

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}_{12} + \vec{E}_3 = 0$$

PROBLEMAS SELECTIVIDAD (UPNA)

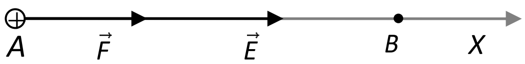
Una partícula α inicialmente en reposo se acelera por un campo eléctrico uniforme de 2·10^4 *N/C* hasta alcanzar una velocidad de 5.000 *m/s*. Halla: (S02)

a) La diferencia de potencial entre los puntos extremos del recorrido.

b) El espacio recorrido por la partícula.

<u>Datos</u>: Partícula, q = 3,2·10^{-19} *C*; m = 6,5·10^{-27} *kg*

Solución



La diferencia de potencial entre A y B ($V_A - V_B$) se puede obtener por dos caminos diferentes. Lo haremos primero aplicando la conservación de la energía y luego, cuando hayamos resuelto el apartado (b), de otra forma.

Ya que el campo eléctrico es conservativo, la energía mecánica de la partícula α ha de permanecer constante durante el recorrido (la fuerza gravitatoria es despreciable frente a la eléctrica); por lo tanto,

$$E_m = cte \Rightarrow E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B)$$

pero $E_c(A) = 0$ (partícula en reposo) y $E_c(B) = ½mv^2$; entonces,

$$E_p(A) - E_p(B) = ½mv^2 \Rightarrow q(V_A - V_B) = ½mv^2$$

ya que en todo campo eléctrico, $E_p = qV$. Por lo tanto,

$$V_A - V_B = \frac{½mv^2}{q} = \frac{mv^2}{2q} = \frac{6{,}5\cdot10^{-27}\,kg\cdot(5000\,m/s)^2}{2\cdot3{,}2\cdot10^{-19}\,C} = \mathbf{0{,}254\ V}$$

Para obtener el espacio recorrido tengamos en cuenta que el campo es constante, por lo que la fuerza también lo es; lo que significa que la carga, que parte del reposo, lleva un movimiento **rectilíneo uniformemente acelerado**. Hallamos primero la aceleración,

$$\left.\begin{array}{l} F = qE \\ F = ma \end{array}\right\} \Rightarrow ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} = \frac{3{,}2\cdot10^{-19}\,C\cdot2\cdot10^4\,N/C}{6{,}5\cdot10^{-27}\,kg} = 9{,}87\cdot10^{11}\ m/s^2$$

En todo MRUA se cumple que,

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

Donde v es la velocidad final, v_0 la velocidad inicial (que es cero) y Δx el desplazamiento realizado que, en nuestro caso, coincide con la distancia recorrida. Por lo tanto,

$$d = \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{5000^2}{2\cdot9{,}87\cdot10^{11}} = \mathbf{1{,}27\times10^{-5}\ m}$$

Una vez obtenida la distancia recorrida, también podemos calcular la diferencia de potencial a partir de ella. En efecto, recordando que en los campos constantes se cumple que,

$$E = (V_A - V_B)/d$$

donde d es la distancia que hay entre las superficies equipotenciales que pasan por los puntos A y B, que en nuestro problema coincide con el espacio recorrido. Por lo tanto, podemos calcular la diferencia de potencial de la ecuación anterior,

$$V_A - V_B = E\cdot d = 2\cdot10^4\,N/C\cdot1{,}27\cdot10^{-5}\,m = \mathbf{0{,}254\ V}$$

Dos cargas eléctricas puntuales idénticas, de valor q = –8 μC se encuentran situadas en dos vértices de un triángulo equilátero de 15 *cm* de lado. Se pide: (J03)

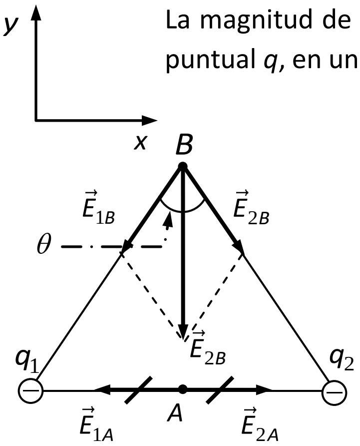
a) El campo en el punto equidistante a las dos cargas (punto *A*).

b) El campo en el vértice que no tiene carga (punto *B*).

c) Halla el trabajo que realiza la fuerza eléctrica cuando una carga q'= –1 μC se desplaza de *A* a *B*.

Solución

La magnitud de la intensidad del campo y el potencial de un campo eléctrico, creado por una carga puntual q, en un punto a una distancia r de la carga son,



$$E = k\frac{|q|}{r^2} \;\; y \;\; V = k\frac{q}{r}$$

El campo eléctrico en el punto A es,

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{1A} + \vec{E}_{2A} = \mathbf{0}$$

ya que, al ser q_1 **=** q_2 y estar situado el punto A equidistante de ambas cargas y en la recta que las une, $\vec{E}_{1A}$ y $\vec{E}_{2A}$ son iguales y opuestos, por lo que se anulan y el campo resultante es nulo.

El campo en el punto B es,

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{1B} + \vec{E}_{2B}$$

De la figura se desprende, al ser q_1 **=** q_2 y estar situado el punto B equidistante de ambas cargas, que $\vec{E}_{1B}$ y $\vec{E}_{2B}$ tienen la misma magnitud y que son simétricos respecto de la línea vertical que pasa por B**.** Por lo tanto,

$$E_{1B} = E_{2B} = k\frac{|q_1|}{l^2} = 9\cdot10^9\,\frac{N\cdot m^2}{C^2}\,\frac{8\cdot10^{-6}\,C}{\left(15\cdot10^{-2}\,m\right)^2} = 3{,}20\cdot10^6\,N/C$$

donde $l = r$ es el lado del triángulo equilátero.

Para calcular la magnitud del campo en el punto B (esto es, E_B) utilizamos la fórmula del coseno,

$$E_B = \sqrt{E_{1B}^2 + E_{2B}^2 + 2E_{1B}E_{2B}\cos\theta} = \sqrt{2E_{1B}^2 + 2E_{1B}^2\cos\theta} = \sqrt{2E_{1B}^2(1+\cos\theta)} =$$
$$= E_{1B}\sqrt{2(1+\cos\theta)} = E_{1B}\sqrt{2(1+\cos 60º)} = 3{,}20\cdot10^6\sqrt{3} = 5{,}54\cdot10^6\,N/C$$

Expresado en forma vectorial sería, $\quad \mathbf{\vec{E}_B = -5{,}54\times10^6\;\vec{j}\;N/C}$

porque el campo tiene la dirección de OY y sentido opuesto.

Para hallar el trabajo **realizado por el campo** cuando una carga ***q'*** se desplaza de A a B, recuerda que,

$$W_A^B = E_p(A) - E_p(B) = q'(V_A - V_B)$$

ya que sabemos que $E_p = q'V$, donde q' es la carga situada dentro del campo. Por lo tanto, hemos de hallar el potencial en los puntos A y B**,**

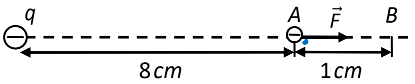
$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = k\frac{q_1}{l/2} + k\frac{q_2}{l/2} = k\frac{2q_1}{l/2} = 4k\frac{q_1}{l} = 4\times9\cdot10^9\,\frac{(-8\cdot10^{-6})}{15\cdot10^{-2}} = -1{,}92\cdot10^6\,V$$

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = k\frac{q_1}{l} + k\frac{q_2}{l} = k\frac{2q_1}{l} = 2k\frac{q_1}{l} = 2\times9\cdot10^9\,\frac{(-8\cdot10^{-6})}{15\cdot10^{-2}} = -9{,}60\cdot10^5\,V$$

$$W_A^B = q'(V_A - V_B) = -10^{-6}\,C\cdot\left(-1{,}92\cdot10^6 + 9{,}6\cdot10^5\right)V = \mathbf{+0{,}960\ J}$$

Sea una partícula puntual fija en el espacio que posee una carga eléctrica de –0,2 μC. A 8 *cm* de distancia de dicha partícula se abandona partiendo del reposo un electrón. Calcula la velocidad que adquirirá el electrón después de haber recorrido 1 *cm*. (J03)

Datos: $K_c = 9.10^9\ N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}$; $q_{el} = -1{,}60{\cdot}10^{-19}\ C$; $m_{el} = 9{,}11{\cdot}10^{-31}\ kg$



Fíjate en que la fuerza de repulsión que ejerce la carga q sobre el electrón viene dada por la ley de Coulomb,

$$\vec{F} = k\frac{q\,q_e}{r^2}\vec{u}_r$$

que no es constante (depende de r). Por lo tanto la aceleración tampoco es constante, lo que significa que el movimiento del electrón no es uniformemente variado y que no podemos utilizar las ecuaciones de este movimiento para hallar la velocidad.

La forma de abordar el problema es a través de la conservación de la energía. En efecto, despreciando la fuerza gravitatoria, la única fuerza que actúa es la eléctrica, que es conservativa, por lo que se conserva la energía mecánica del electrón. Teniendo en cuenta que la energía cinética inicial es cero se tiene que,

$$E_m(A) = E_m(B) \ \Rightarrow\ E_p(A) = E_c(B) + E_p(B)$$

Ahora bien, la energía potencial del electrón en el campo eléctrico creado por la carga q (que suponemos puntual) es,

$$E_p = k\,q\,q_e/r$$

donde las cargas van con su signo. Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación anterior queda,

$$k\frac{q\,q_e}{r_A} = \frac{1}{2}m_e v^2 + k\frac{q\,q_e}{r_B} \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}m_e v^2 = k\,q\,q_e\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \ \Rightarrow\ v = \sqrt{\frac{2k\,q\,q_e}{m_e}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

donde (ver figura) $r_A = 8\cdot 10^{-2}\ m$ y $r_B = 9\cdot 10^{-2}\ m$. Así que la velocidad que adquiere el electrón en el punto B es,

$$v = \sqrt{\frac{2\times 9\cdot 10^9 \times (-0{,}2\cdot 10^{-6}) \times (-1{,}6\times 10^{-19})}{9{,}11\cdot 10^{-31}}\left(\frac{1}{8\cdot 10^{-2}} - \frac{1}{9\cdot 10^{-2}}\right)} = \mathbf{2{,}96\times 10^7\ m/s}$$

Sea una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -200\vec{j}$ *V/m*. Un protón penetra en esa región con una velocidad $\vec{v} = (3000\vec{i} + 3000\vec{j})$ *m/s*. (J05)

a) Dibuja la trayectoria que seguirá el protón.

b) Halla el tiempo que transcurre desde que penetra en esa región hasta que deja de subir.

Solución

Se trata de un movimiento parabólico, sólo que en este caso el papel de la gravedad lo juega el campo eléctrico. Para conocer la forma de la parábola hay que determinar la dirección y el sentido de la aceleración que actúa sobre el protón.

Al expresar $\vec{E}$ en sus componentes, tenemos que,

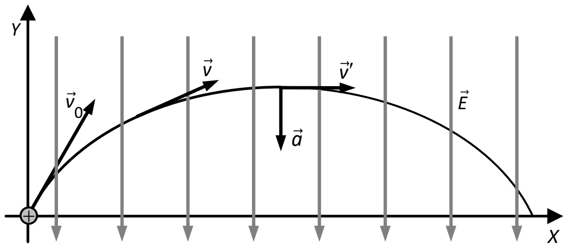
$$\left.\begin{array}{r}\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}\\ \vec{E} = -200\vec{j}\end{array}\right\} \Rightarrow E_x = 0 \ y \ E_y = -200\ N/C$$

es decir, el campo tiene la dirección del eje *OY* y sentido opuesto (vertical y hacia abajo). Por otro lado, sabemos que,

$$\left.\begin{array}{l}F_y = qE_y\\ F_y = ma_y\end{array}\right\} \Rightarrow qE_y = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{qE_y}{m} = \frac{1,6\cdot 10^{-19}\,C \times (-200\,N/C)}{1,67\cdot 10^{-27}\,kg} = -1,92\cdot 10^{10}\ m/s^2$$

que indica que la aceleración tiene la misma orientación que el campo (esto es así porque la carga del protón es positiva). En consecuencia, la forma de la parábola es la misma que la de un movimiento parabólico provocado por la acción de la gravedad.

En la figura se ha dibujado la trayectoria, las líneas de fuerza del campo, el vector aceleración y el vector velocidad en dos instantes diferentes. El vector $\vec{a}$ es constante porque lo es el campo eléctrico. Por conveniencia se ha hecho coincidir el origen del sistema de coordenadas con la posición del protón cuando su velocidad es la dada en el enunciado. Si, además, comenzamos a contar el tiempo en ese instante, tenemos que la velocidad que nos da el enunciado es la inicial. Al expresarla en sus componentes,



$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}\\ \vec{v}_0 = 3000\vec{i} + 3000\vec{j}\end{array}\right\} \Rightarrow v_{0x} = 3000 \ y \ v_{0y} = 3000\ m/s$$

El movimiento del protón es la combinación de un MRU en el eje *OX* y otro MRUV en el eje *OY***.** Aplicando las ecuaciones de los movimientos,

Eje *OX* (MRU) $\rightarrow$ $x = x_0 + v_x t$

Eje *OY* (MRUV) $\rightarrow$ $y = y_0 + v_{0y}t + ½at^2;\ v_y = v_{0y} + at;\ v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a\Delta y$

La componente de la velocidad en el eje *OY* hace que el protón suba (a la vez que se mueve en el eje *OX*); mientras que el campo eléctrico crea una aceleración en sentido opuesto que lo frena, hasta que, después de alcanzar una altura máxima, desciende. Ya que cuando se alcanza la máxima altura $v_y = 0$, tenemos que,

$$0 = v_{0y} + at_{ma} \Rightarrow t_{ma} = -\frac{v_{0y}}{a} = -\frac{3000\,m/s}{-1,92\cdot 10^{10}\,m/s^2} = \mathbf{1,57\cdot 10^{-7}\ s}$$

donde t_{ma} representa el tiempo que le lleva al protón dejar de subir.

La altura máxima (h_{ma}) se puede obtener de la ecuación del MRUV haciendo $t = t_{ma}$ y teniendo en cuenta que $y_0 = 0$ (pues en $t = 0$ el protón está en el origen de coordenadas),

$$\boldsymbol{h_{ma}} = v_{0y}t_{ma} + ½at_{ma}^2 = 3000 \times 1{,}57\cdot10^{-7} + ½\times(-1{,}92\cdot10^{10})\times(1{,}57\cdot10^{-7})^2 = \mathbf{2{,}35\times10^{-4}\ m}$$

****

En una región del espacio existe un campo eléctrico uniforme vertical, de manera que la diferencia de potencial entre dos puntos situados uno encima del otro y distantes 2 *cm* es de 100 *V*. (J06)

a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre un electrón situado en él?

b) Si el electrón se abandona en reposo en el punto de menor potencial, ¿con qué velocidad llegará al otro punto?

c) Representar gráficamente el vector campo eléctrico, la fuerza ejercida sobre el electrón, el punto de menor potencial y el de mayor potencial.

Datos: $q_e = 1{,}60\cdot10^{-19}\ C$; $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}\ kg$

Solución

Como el campo es vertical, fijamos un sistema de coordenadas tal que la dirección del campo coincida con la del eje *OY*. De este modo las ecuaciones vectoriales (definidas en el eje *OY*) las podemos expresar en su forma escalar (el signo indica el sentido).

Al igual que en otros problemas, no tendremos en cuenta el peso del electrón (es absolutamente despreciable frente a la fuerza eléctrica).

El enunciado no dice cuál es el sentido del campo; así que lo fijamos nosotros como nos apetezca (por ejemplo, hacia arriba, como se ve en la figura).

Para obtener la fuerza que actúa sobre el electrón necesitamos hallar en primer lugar la intensidad del campo eléctrico. Puesto que el campo es constante, podemos aplicar que,

$$E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{100V}{2\cdot10^{-2}\,m} = 5000\ \frac{V}{m}\ ó\ \frac{N}{C}$$

Recuerda que el campo apunta en el sentido de los potenciales decrecientes; por lo tanto, de acuerdo con la figura, $V_a - V_b > 0$. Por ello aparece $V_a - V_b$ en la fórmula anterior y no al revés.

La fuerza que actúa sobre el electrón es,

$$F_e = q_eE = 1{,}6\cdot10^{-19}\ \cancel{C}\times5000\ N/\cancel{C} = \mathbf{8{,}00\times10^{-16}\ N}$$

El punto de menor potencial es el superior (b). Se abandona al electrón en el punto b en reposo y la fuerza eléctrica lo lleva hasta a. La opción más simple para determinar la velocidad con que llega a ese punto es aplicar la conservación de la energía mecánica,

$$E_m(b) = E_m(a) \Rightarrow E_c(b) + E_p(b) = E_c(a) + E_p(a)$$

pero $E_c(b) = 0$ (pues la carga se coloca en reposo), $E_c(a) = ½mv^2$ y $V = qE_p$; así,

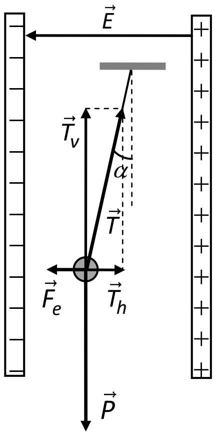
$$q_eV_b = ½mv^2 + q_eV_a \Rightarrow ½mv^2 = q_e(V_b - V_a)$$

y despejando *v*, $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{2q_e(V_b - V_a)}{m}} = \sqrt{\frac{2\times(-1{,}6\cdot10^{-19})\times(-100)}{9{,}11\cdot10^{-31}}} = \mathbf{5{,}93\times10^{6}\ \frac{m}{s}}$

Nota: Como $V_a - V_b = 100 \Rightarrow -100 = V_b - V_a$, que es lo que aparece en la fórmula.

Se colocan en posición vertical dos placas metálicas paralelas, separadas 10 *cm* y se las carga a 2.10^4 *V*. Entre las placas se dispone un péndulo eléctrico constituido por una esferita metálica de 2 *mm* de diámetro y 7,8 *g/cm*^{3} de densidad que se ha cargado a 2000 *V*, suspendida de un hilo de masa despreciable. Determina la posición de equilibrio del péndulo.

Solución



Observa que el potencial de la esfera es positivo (2000 *V*), lo que significa que está cargada positivamente. Entonces, como $\vec{F}_e = q\vec{E}$, la fuerza eléctrica que el condensador ejerce sobre ella tiene el mismo sentido que $\vec{E}$; es decir es horizontal y dirigida hacia la izquierda, como se ve en la figura. Dicho de otra forma, la esfera es atraída por la placa negativa del condensador y repelida por la positiva, lo que hace que el hilo del péndulo se desplace hacia la izquierda.

De acuerdo con el esquema de fuerzas de la figura, el péndulo alcanzará la posición de equilibrio cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea cero; es decir,

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_h = F_e \Rightarrow T\sin\alpha = F_e \\ T_v = P \Rightarrow T\cos\alpha = mg \end{cases}$$

donde T_h y T_v son, respectivamente, las magnitudes de las componentes horizontal y vertical de la tensión del hilo. Dividiendo miembro a miembro las dos últimas ecuaciones,

$$\tan\alpha = \frac{F_e}{mg} = \frac{qE}{mg}$$

donde q es la carga de la esfera del péndulo, que tenemos que hallar para obtener α.

La esfera conductora se comporta como una partícula de la misma carga situada en su centro. Así pues, el potencial en un punto de su superficie, situado a una distancia R del centro, es,

$$V = k\frac{q}{R} \Rightarrow q = \frac{V \cdot R}{k} = \frac{2000 \times 1 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9} = \frac{2}{9} \cdot 10^{-9}\, C$$

La masa de la esfera la podemos hallar a partir de su densidad,

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m}{(4/3)\pi R^3} \Rightarrow m = \frac{4}{3}d\pi R^3 = \frac{4}{3} \times 7{,}8\frac{g}{cm^3} \times \pi \times (0{,}1cm)^3 = 3{,}27 \cdot 10^{-2}\, g = 3{,}27 \cdot 10^{-5}\, kg$$

El campo eléctrico se obtiene con la ecuación,

$$E = \frac{V_+ - V_-}{d} = \frac{2 \cdot 10^4\, V}{0{,}1m} = 2 \cdot 10^5\, \frac{V}{m}\left(\frac{N}{C}\right)$$

Ahora ya podemos hallar el ángulo,

$$\tan\alpha = \frac{qE}{mg} = \frac{(2/9) \cdot 10^{-9} \times 2 \cdot 10^5}{3{,}27 \cdot 10^{-5} \times 9{,}81} = 0{,}139 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 7{,}89^{\circ}}$$

En una región del espacio existe un campo eléctrico dado por, $\vec{E} = -1 \cdot 10^3 \vec{i}$ *N/C*. Un protón penetra en dicha región con una velocidad $\vec{v} = 1 \cdot 10^5 \vec{i}$ *m/s*. Calcular: (J08)

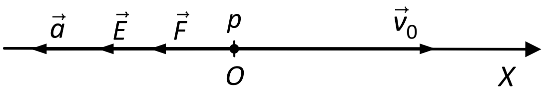
a) Su posición 1 μs después de haber penetrado en la región.

b) Su velocidad en ese instante de tiempo.

Datos: q_p = 1,60·10-19 C; m_p = 1,67·10^{-27} *kg*

Solución

El dato $\vec{E} = -10^3 \vec{i}\ N/C$ significa que el campo tiene la dirección del eje *OX*, sentido opuesto y que su



magnitud es de 10^3 *N/C*. El dato $\vec{v}_0 = 10^5 \vec{i}\ m/s$ significa que el protón se mueve en el sentido positivo del eje *OX* con una velocidad inicial de magnitud 10^5 *m/s* (ver figura).

Como el campo es constante y $\vec{F} = q\vec{E}$, la fuerza también es constante; lo mismo que la aceleración. Además, como se ve en la figura, la velocidad inicial y la aceleración tienen la misma dirección y sentidos opuestos. De nuestros conocimientos de Mecánica sabemos que una partícula con aceleración constante y una velocidad inicial de la misma dirección y sentido opuesto lleva un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado.

Ya que conocemos las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado, la forma más fácil de resolver el problema no es por energías (que también se podría hacer), sino hallando la aceleración del protón y aplicando las ecuaciones del movimiento.

El problema no nos dice dónde está el protón inicialmente, así que lo colocamos en el punto más sencillo, que es el origen de coordenadas. De este modo la posición del protón coincide con el desplazamiento del mismo.

Puesto que las magnitudes $\vec{E}$, $\vec{F}$ y $\vec{a}$ tienen la dirección del eje *OX*, podemos expresar las ecuaciones $\vec{F} = q\vec{E}$ y $\vec{F} = m\vec{a}$ en su forma escalar, donde $E = -10^3\ N/C$ porque el sentido del campo es opuesto al del eje *OX*. Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} F = q_p E \\ F = m_p a \end{array}\right\} \Rightarrow q_p E = m_p a \Rightarrow a = \frac{q_p E}{m_p} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times \left(-10^3\right)}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = -9{,}58 \cdot 10^{10}\ \frac{m}{s^2}$$

Nota que la aceleración es negativa mientras que la velocidad inicial es positiva. Significa que inicialmente el movimiento es decelerado.

Para hallar la posición en el instante *t* = 1 *μs* = 10^{-6} *s* aplicamos la ecuación del movimiento,

$$\mathbf{\Delta x} = x - x_0 = v_0 t + ½ a t^2 = 10^5 \times 10^{-6} + ½\left(-9{,}58 \cdot 10^{10}\right) \times \left(10^{-6}\right)^2 = 0{,}1 - 0{,}0479 = 5{,}21 \cdot 10^{-2}\ m = \mathbf{5{,}21\ cm}$$

Obtenemos la velocidad aplicando su correspondiente ecuación,

$$\boldsymbol{v} = v_0 + at = 10^5 - 9{,}58 \cdot 10^{10} \times 10^{-6} = \mathbf{4{,}19 \times 10^3\ m}$$

Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas eléctricas de valor 1 *nC* de signos contrarios y separadas 6 *cm*. (S08)

a) Dibuja las líneas de fuerza del campo eléctrico de la distribución.

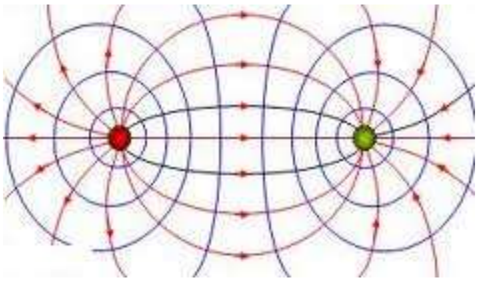
b) Calcula el valor del campo eléctrico en un punto situado a 2 *cm* de la carga positiva y en otro situado a 2 *cm* de la negativa.

c) Calcula el valor del potencial eléctrico en esos puntos.

d) Si se abandona un electrón en reposo en el punto de menor potencial, calcula la velocidad que alcanzará cuando pase por el punto de mayor potencial.

<u>Datos</u>: $q_e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ *C*; $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ *kg*

Solución



Apartado a)

La figura muestra un dipolo eléctrico con sus líneas de fuerza y sus superficies equipotenciales. La carga de la izquierda es la positiva y la de la derecha la negativa. Recuerda que las líneas de fuerza son tangentes en cada punto a la fuerza que el dipolo ejerce en ese punto sobre la unida de carga positiva y que están orientadas en el sentido de la fuerza. Las superficies equipotenciales son, en cada punto, perpendiculares a la línea de fuerza que pasa por ese punto.

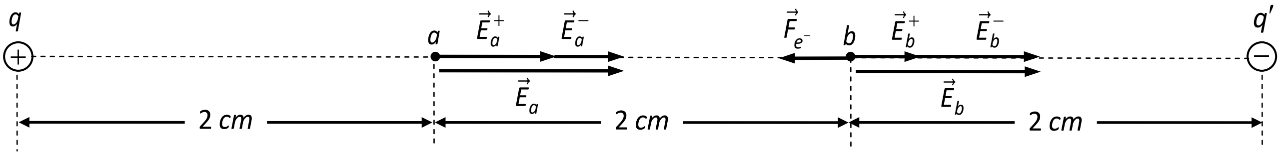
Apartado b)

Empezamos por el campo de q. La dirección y el sentido de $\vec{E}_a^+$ y $\vec{E}_b^+$ son los indicados en la figura porque, al ser q positiva, la fuerza que ejerce en los puntos a y b sobre la unidad de carga positiva es de repulsión. Las magnitudes de los campos son,

$$E_a^+ = k\frac{|q|}{r_a^2} = 9\cdot10^9 \times \frac{10^{-9}}{\left(2\cdot10^{-2}\right)^2} = 2{,}25\cdot10^4\ \frac{N}{C}$$

$$E_b^+ = k\frac{|q|}{r_b^2} = 9\cdot10^9 \times \frac{10^{-9}}{\left(4\cdot10^{-2}\right)^2} = 5{,}62\cdot10^3\ \frac{N}{C}$$

Recuerda que 1 *nC* = 10^{-9} *C*.



Veamos ahora el campo de q'. La dirección y el sentido de $\vec{E}_a^-$ y $\vec{E}_b^-$ son los indicados en la figura porque, al ser q' negativa, la fuerza que ejerce en los puntos a y b sobre la unidad de carga positiva es de atracción. Las magnitudes de los campos son,

$$E_a^- = k\frac{|q'|}{r_a'^2} = 9\cdot10^9 \times \frac{10^{-9}}{\left(4\cdot10^{-2}\right)^2} = 5{,}62\cdot10^3\ \frac{N}{C}$$

$$E_b^- = k\frac{|q'|}{r_b'^2} = 9\cdot10^9 \times \frac{10^{-9}}{\left(2\cdot10^{-2}\right)^2} = 2{,}25\cdot10^4\ \frac{N}{C}$$

La intensidad del campo creado por las dos cargas en el punto *a* es la suma vectorial de $\vec{E}_a^+$ y $\vec{E}_a^-$. Como tienen la misma dirección y el mismo sentido (ver figura), el campo resultante tiene la misma orientación que ellos y su magnitud es,

$$\mathbf{E_a} = E_a^+ + E_a^- = 2{,}25\cdot 10^4 + 0{,}562\cdot 10^4 = \mathbf{2{,}81\times 10^4\ N/C}$$

Análogamente la intensidad del campo creado en el punto *b* es la suma vectorial de $\vec{E}_b^+$ y $\vec{E}_b^-$, que tienen la misma dirección y el mismo sentido (ver figura). Así el campo resultante, de igual dirección y sentido, tiene de magnitud,

$$\mathbf{E_b} = E_b^+ + E_b^- = 0{,}562\cdot 10^4 + 2{,}25\cdot 10^4 = \mathbf{2{,}81\times 10^4\ N/C}$$

Apartado c)

Los potenciales del campo creado por *q* en los puntos *a* y *b* son,

$$V_a^+ = k\frac{q}{r_a} = 9\cdot 10^9 \times \frac{10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}} = 450\,V \quad \text{y} \quad V_b^+ = k\frac{q}{r_b} = 9\cdot 10^9 \times \frac{10^{-9}}{4\cdot 10^{-2}} = 225\,V$$

Los potenciales del campo creado por *q′* en los puntos *a* y *b* son,

$$V_a^- = k\frac{q'}{r'_a} = 9\cdot 10^9 \times \frac{-10^{-9}}{4\cdot 10^{-2}} = -225\,V \quad \text{y} \quad V_b^- = k\frac{q'}{r'_b} = 9\cdot 10^9 \times \frac{10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}} = -450\,V$$

Como es una magnitud escalar, los potenciales del campo creado por las dos cargas en los puntos *a* y *b* son la suma algebraica de los potenciales individuales; es decir,

$$\mathbf{V_a} = V_a^+ + V_a^- = 450 - 225 = \mathbf{225\ V} \quad \text{y} \quad \mathbf{V_b} = V_b^+ + V_b^- = 225 - 450 = \mathbf{-225}\ \boldsymbol{V}$$

Apartado c)

Es muy importante darse cuenta de que no se puede obtener la velocidad calculando la aceleración del electrón y aplicando después las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Puesto que el campo eléctrico tiene en todo momento la dirección de la línea que une las dos cargas, el movimiento es rectilíneo. Sin embargo, no es uniformemente acelerado porque el campo eléctrico no es constante y, por lo tanto, la fuerza y la aceleración tampoco, como se requiere en un movimiento uniformemente acelerado.

Al electrón lo colocamos en el punto de menor potencial, que es el *b*. Como $\vec{F} = q_e\vec{E}$ y q_e es negativa, la fuerza tiene sentido opuesto al campo (ver figura), lo que significa que el electrón se moverá hacia el punto *a*.

Para obtener la velocidad aplicamos la conservación de la energía mecánica. En efecto, como la única fuerza que actúa sobre el electrón es la eléctrica y ésta es conservativa, la energía mecánica ha de permanecer constante durante el movimiento. Entonces,

$$E_m = cte \;\Rightarrow\; E_m(b) = E_m(a) \;\Rightarrow\; E_c(b) + E_p(b) = E_c(a) + E_p(a)$$

donde $E_c(b) = 0$ porque se ha colocado al electrón en reposo en el punto *b*. Por otro lado sabemos que $E_p = qV$; por lo tanto,

$$q_eV_b = ½mv^2 + q_eV_a \;\Rightarrow\; ½mv^2 = q_e\left(V_b - V_a\right) \;\Rightarrow$$

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{2q_e\left(V_b - V_a\right)}{m}} = \sqrt{\frac{2\times\left(-1{,}6\cdot 10^{-19}\right)\times\left(-225-225\right)}{9{,}11\cdot 10^{-31}}} = \mathbf{1{,}26\times 10^6\ \frac{m}{s}}$$

Dos cargas eléctricas q_1 y q_2 de –4 μC se encuentran situadas en los puntos (–3,0) y (3,0) donde las coordenadas están dadas en metros. Situamos una carga q = 2 μC de masa 1 *g* en el punto *A* (0,6) con una velocidad $\vec{v}_A = 2\vec{j}$ *m/s.* Obtener: (J13)

a) La fuerza que experimenta la carga en el instante inicial.

b) El potencial en el punto *A*.

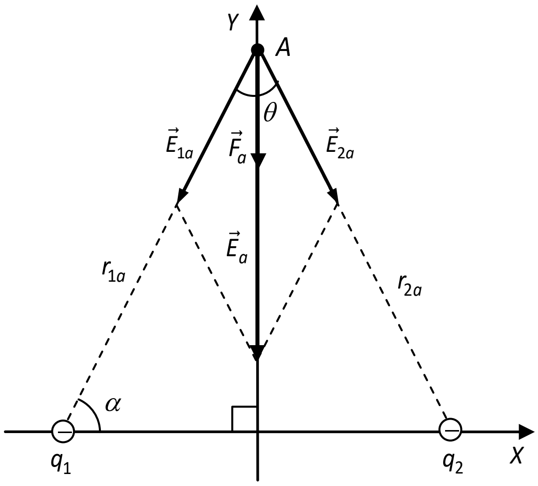
c) La diferencia de potencial (V_A – V_B) entre el punto *A* y el punto *B* en el que la carga *q* tiene velocidad nula.

d) La distancia del punto *B* a la carga q_1.

<u>Dato</u>: $K = 9{\cdot}10^9\ N{\cdot}m^2/C^2$

Solución

Apartado a) La figura muestra la posición de las cargas y los vectores que representan las intensidades de los campos eléctricos creados por cada carga y el total en el punto *a*.



Como la carga q_1 está en el punto (0, –3) y *A* en el (0, 6) tenemos,

$$E_{1a} = k\frac{|q_1|}{r_A^2} = 9\cdot10^9\,\frac{4\cdot10^{-6}}{3^2+6^2} = 800\ N/C$$

De la simetría del problema, ya que $r_{1A} = r_{2a}$ y $|q_1| = |q_2|$, se deduce,

$$E_{2A} = E_{1A} = 800\ N/C$$

Para hallar la magnitud del campo total usamos la fórmula del coseno. Observa en la figura que,

$$\tan\alpha = \frac{6}{3} = 2\ \Rightarrow\ \alpha = 63{,}4º\ \text{y}\ \alpha + \theta/2 = 90º\ \Rightarrow\ \theta = 53{,}1º$$

$$E_A = \sqrt{E_{1A}^2 + E_{2A}^2 + 2E_{1A}E_{2A}\cos\theta} = \sqrt{2E_{1A}^2 + 2E_{1A}^2\cos\theta} = E_{1A}\sqrt{2(1+\cos\theta)} = 800\sqrt{2(1+\cos 53{,}1)} = 1{,}43\cdot10^3\ N/C$$

Observa en la figura que la simetría del problema se deduce que $\vec{E}_A$ tiene la dirección de *OY* y sentido opuesto; por lo tanto,

$$\vec{E} = -1{,}43\cdot10^3\,\vec{j}\ N/C$$

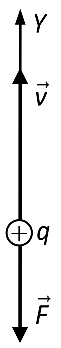
Para obtener la fuerza que ejerce el campo sobre una carga $q = 2\cdot10^{-6}\ C$ aplicamos,

$$\vec{F}_A = q\vec{E}_A = 2\cdot10^{-6}\times\left(-1{,}43\cdot10^3\,\vec{j}\right) = \mathbf{-2{,}86\times10^3\ N/C}$$

Como $q > 0$ la fuerza y el campo tienen el mismo sentido, como se ve en la figura.

Apartado b) El potencial en el punto *A* se obtiene como el campo, sumando los potenciales creados por ambas cargas en ese punto. Ten en cuenta que es un escalar, por lo tanto se trata de una suma algebraica en la que las carga van con su signo. Entonces,

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = k\frac{q_1}{r_{1A}} + k\frac{q_2}{r_{2A}} = 2k\frac{q_1}{r_{1A}} = 2\times9\cdot10^9\,\frac{\left(-4\cdot10^{-6}\right)}{\sqrt{3^2+6^2}} = \mathbf{-1{,}07\times10^4\ V}$$



Apartado c) Observa en la figura que la fuerza tiene la dirección de la velocidad ($\vec{v} = 2\vec{j}$) pero sentido opuesto; por lo tanto está frenado a *q*. Es fácil calcular $V_A - V_B$ donde *B* es el punto en el que *q* tiene velocidad nula (es decir, es detenida por la acción del campo). En efecto, al ser la fuerza eléctrica conservativa, podemos aplicar la conservación de la energía,

$$E_m = cte \Rightarrow E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B)$$

donde $E_p = qV$ y $E_c(B) = 0$ porque $v_B = 0$. Así pues,

$$½mv_A^2 + qV_A = qV_B \Rightarrow ½mv_A^2 = -q\left(V_A - V_B\right) \Rightarrow V_A - V_B = -\frac{mv_A^2}{2q} = -\frac{10^{-3} \times 2^2}{2 \times 2 \cdot 10^{-6}} = \textbf{-1000 V}$$

Apartado c) Para hallar la distancia del punto *B* a q_1 (r_{1B}) es necesario calcular primero el potencial en el punto *B*,

$$V_A - V_B = -1000 \Rightarrow V_B = V_A + 1000 = -1.07 \cdot 10^4 + 0{,}1 \cdot 10^4 = -0{,}973 \cdot 10^4 = -9{,}73 \cdot 10^3\ V$$

El potencial en el punto *B* es la suma de los potenciales creados por las dos cargas,

$$V_B = V_{1B} + V_{2B}$$

pero, como se deduce de la última figura de la página anterior, la carga *q* se mueve a lo largo del eje *OY* porque la velocidad de *q* y la fuerza tienen la dirección de ese eje. Eso significa que, cualquiera que sea el punto *B*, tiene que estar en el eje *OY*; es decir que la distancia de *B* a q_1 y a q_2 tiene que ser la misma,

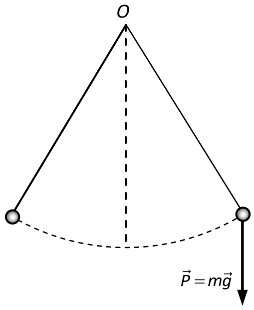
$$r_{1B} = r_{2B} \text{ y } q_1 = q_2 \Rightarrow V_{1B} = V_{2B}$$

Entonces,

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = 2V_{1B} = 2k\frac{q_1}{r_{1B}} \Rightarrow r_{1B} = \frac{2kq_1}{V_B} = \frac{2 \times 9 \cdot 10^9 \times \left(-4 \cdot 10^{-6}\right)}{-9{,}73 \cdot 10^3} = \textbf{7,40 m}$$

Sea un péndulo electrostático, situado en un laboratorio en la superficie de la Tierra, formado por una pequeña esfera atada al extremo de un hilo aislante muy delgado de 20 *cm* de longitud, estando el otro extremo atado a un punto fijo. La esfera tiene 1 *g* de masa, es portadora de 3 *n*C de carga eléctrica de signo positivo y se encuentra sometida a la acción del campo gravitatorio terrestre y también a un campo eléctrico uniforme de módulo 3,3·106 *N/C* de dirección vertical y sentido hacia abajo. Calcula el periodo de oscilación del péndulo en estas condiciones.

Solución



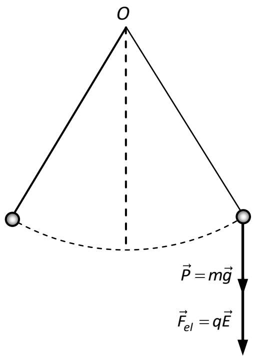
Recuerda que cuando un péndulo sometido a la fuerza vertical del peso realiza pequeñas oscilaciones, se cumple que,

$$T=2\pi\sqrt{l/g}$$

donde *T* es el periodo, *l* la longitud del hilo y *g* la aceleración que proporciona la fuerza vertical que le hace oscilar, en este caso el peso.

Si la fuerza vertical que hace oscilar al péndulo no es el peso sino otra distinta $\vec{F}=m\vec{a}$, el periodo del péndulo será,

$$T=2\pi\sqrt{l/a}$$



En nuestro caso la fuerza aplicada a la lenteja es la resultante del peso y de la fuerza eléctrica (que tienen la misma dirección y sentido); es decir,

$$\vec{F}=\vec{P}+\vec{F}_{el} \;\Rightarrow\; F=P+F$$

Por otro lado, como $F=ma$; $P=mg$ y $F_{el}=ma_{el}$, tenemos que,

$$ma=mg+ma_{el}=m\left(g+a\right) \;\Rightarrow\; a=g+a_{el}$$

así que el periodo de la oscilación del péndulo es,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a_{el}}}$$

Puesto que,

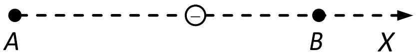
$$\left.\begin{array}{l} F_{el}=qE \\ F_{el}=ma_{el} \end{array}\right\} \Rightarrow qE=ma_{el} \;\Rightarrow\; a_{el}=\frac{qE}{m}=\frac{3\cdot10^{-9}\times3,3\cdot10^{6}}{1\cdot10^{-3}}=9,90\ m/s^{2}$$

queda finalmente,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{0,2}{9,81+9,9}}=2\pi\sqrt{\frac{0,2}{19,7}}=\mathbf{0,633\ s}$$

Entre dos puntos *A* y *B* se establece una diferencia de potencial $V_A - V_B = -200\,V$. Colocamos una partícula de masa $m = 1\,g$ y carga $q = -2\mu\,C$ en reposo en uno de los puntos y llega al otro punto. ¿En qué punto la colocamos? ¿Con qué velocidad llega al otro punto?

Solución



Supongamos, por sencillez de cálculo, el campo tiene la dirección del eje *OX*, como se ve en la figura.

Apartado a)

1. **Mediante el vector gradiente** (la más rigurosa y complicada). Determinamos primero el sentido del campo:

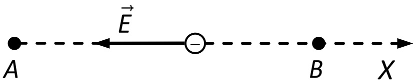
   Sabemos que $\vec{E} = -\overrightarrow{grav}\,V$, que expresado en sus componentes cartesianas es,

   $$E_x = -dV/dx,\ E_y = -dV/dy,\ E_z = -dV/dz$$

   En nuestro caso, como el campo tiene la dirección del eje *OX*, tenemos que $E_y = E_z = 0$, por lo que queda que,

   $$\left.\begin{array}{l} E = E_x \\ E_x = -dV/dx \end{array}\right\} E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow dV = -E\,dx \quad (1)$$

   donde *dV* representa la variación del potencial cuando ejecutamos un desplazamiento infinitesimal *dx* en el sentido positivo de *OX*. Observa en la figura que al movernos en el sentido positivo del eje, el potencial aumenta pues $V_A - V_B = -200\,V$, lo que significa que,

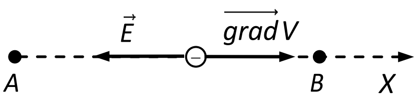
   

   $$V_B > V_A \Rightarrow \Delta V = V_B - V_A = 200 > 0 \Rightarrow dV > 0.$$

   Así pues, en la ecuación (1) tenemos que $dx > 0$ y $dV > 0 \Rightarrow E < 0$, por lo que el campo apunta en el sentido negativo del eje *OX* (ver figura).

2. **Mediante el vector gradiente** (de manera más sencilla). Determinamos primero el sentido del campo:

   Sabemos que $\overrightarrow{grav}\,V$ apunta en el sentido en que el potencial crece. Como $\vec{E} = -\overrightarrow{grav}\,V$, concluimos que $\vec{E}$ tiene la dirección de $\overrightarrow{grav}\,V$ pero sentido opuesto; es decir, apunta en el sentido en el que el potencia decrece. Como $V_B > V_A$, el potencial crece al desplazarnos de *A* a *B*, por lo que el campo y el potencial tienen los sentidos indicados en la figura.

3. **Simplemente recordando la teoría**. Determinamos primero el sentido del campo:

   Sabemos por teoría que la intensidad del campo apunta siempre en el sentido de los potenciales decrecientes. Como el potencial crece al desplazarnos de *A* a *B*, el campo tiene que apuntar en sentido opuesto; es decir, hacia el punto *A*, como se aprecia en las figuras.

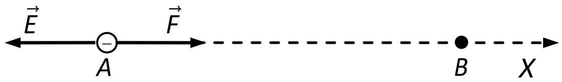
****

Una vez que hemos determinado el sentido del campo:

Sabemos que si a una partícula en reposo en un punto le aplicamos una fuerza, se mueve en la dirección y en el sentido de la fuerza aplicada. En nuestro caso como,

$$\left.\begin{array}{r} \vec{F} = q\vec{E} \\ q < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F} \text{ y } \vec{E} \text{ tienen sentidos opuestos}$$

es decir, la fuerza apunta al punto *B*, como indica la figura, por lo que la carga se moverá espontáneamente hacia el punto *B*. Por lo tanto, tenemos que colocar a la carga en el punto *A*.



4. Aplicando la ecuación $W = -\Delta E_p$.

Si tenemos una partícula en reposo el eje *OX* y le aplicamos una fuerza que tenga la dirección de *OX*, la partícula se mueve en la dirección y en el sentido de la fuerza aplicada; es decir, *F* y Δx (o *dx*) tienen el mismo signo; como,

$$dW = F\,dx \;\Rightarrow\; dW > 0$$

es decir, la partícula se mueve espontáneamente en el sentido en el que el trabajo realizado por la fuerza es positivo. La fuerza que actúa es la eléctrica, que es conservativa, por lo tanto,

$$W = -\Delta E_p = -\left[E_p(final) - E_p(inic)\right] = E_p(inic) - E_p(final) > 0$$

lo que significa que la partícula se mueve espontáneamente en el sentido en el que E_p disminuye ya que en este caso $W > 0$; es decir, tenemos que colocarla en el punto en el que la energía potencial es mayor. Como,

$$\left.\begin{array}{r} V_A - V_B = -200\ V \;\Rightarrow\; V_B = V_A + 200 \;\Rightarrow\; V_B > V_A \\ E_p = qV \text{ y } q < 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; E_p(B) < E_p(A)$$

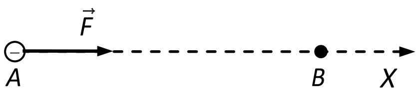
es decir, que la energía potencial mayor es la del punto *A*, por lo que tenemos que colocar a la partícula en el punto *A*.

Apartado b). Para hallar la velocidad con la que partícula llega al punto *A* **no podemos usar las ecuaciones del movimiento uniformemente variado** porque no sabemos si el campo es o no es constante. Aplicaremos la conservación de la energía mecánica.

Como la fuerza eléctrica es conservativa, la energía mecánica se conserva,

$$E_m(A) = E_m(B) \;\Rightarrow\; E_p(A) + E_c(A) = E_p(B) + E_c(B) \;\Rightarrow\; qV_A + \cancel{½mv_A^2} = qV_B + ½mv_B^2$$

$$v_B^2 = \frac{2q(V_A - V_B)}{m} \;\Rightarrow\; v_A = \sqrt{\frac{2q(V_A - V_B)}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(-2\cdot 10^{-6}\right)(-200)}{10^{-3}}} = 0{,}894\ m/s$$



Observa que el argumento de la raíz cuadrada es positivo, lo que significa que el punto se ha elegido correctamente. En caso contrario el argumento de la raíz sería negativo.

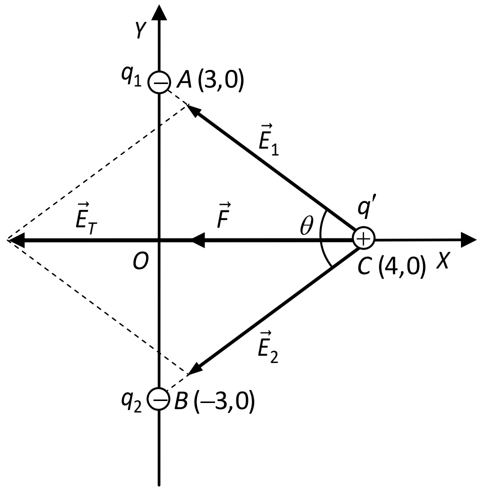
Dos cargas puntuales de –4 μC están fijas en los puntos A (0, 3) y B (0, –3). Una tercera partícula de masa *m* = 1 *g* y carga *q'* = 2 μC, se coloca en el punto C (4, 0) sin velocidad inicial. (J17)

a) ¿Cuál es el campo en el punto *C* y la fuerza que actúa sobre *q'*?

b) ¿Qué velocidad tendrá cuando ha recorrido 1 *m*? Dibuja la posición de la partícula.

Datos: $k = 9\cdot 10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$. Las coordenadas de los puntos están en metros**.**

Solución



Apartado a): Observa que q_1 y q_2 están en el eje *OY* simétricamente situadas respecto al origen *O* y que q' está en el eje *OX*. Además,

$$q_1 = q_2 = q \quad \text{y} \quad \overline{CA} = \overline{CB} = r$$

por lo que $E_1 = E_2 = E$ y están colocados simétricamente respecto al eje *OX*, como se ve en la figura. Esto significa que el campo total $\vec{E}_T$ en el punto *A* tiene la dirección del eje *OX* y sentido opuesto.

Como ya sabemos la dirección del campo, la opción más sencilla para calcularlo es aplicar el teorema del coseno. De la figura se desprende que,

$$\tan(\theta/2) = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \frac{\theta}{2} = 36{,}9º \;\Rightarrow\; \theta = 73{,}7º$$

y por otro lado tenemos que,

$$E = E_1 = E_2 = k\frac{|q|}{r^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{4\cdot 10^{-6}}{3^2+4^2} = 1{,}44\cdot 10^3\ N/C$$

Aplicando el teorema del coseno,

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\theta} = \sqrt{2E^2 + 2E^2\cos\theta} = E\sqrt{2(1+\cos\theta)} = 1{,}44\cdot 10^3\sqrt{2(1+\cos 73{,}7)} = 2{,}30\cdot 10^3\ N/C$$

por lo que la expresión vectorial del campo es,

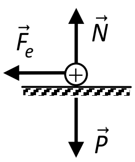
$$\mathbf{\vec{E}_T = -2{,}30\times 10^3\,\vec{i}\ N/C}$$

y la fuerza que actúa sobre q' es,

$$\vec{F} = q'\vec{E}_T = 2\cdot 10^{-6}\times\left(-2{,}30\cdot 10^3\,\vec{i}\right) = \mathbf{-4{,}61\times 10^{-3}\,\vec{i}\ N}$$

Apartado b): Observa que el peso de la partícula es,

$$P = mg = 10^{-3}\ kg\times 9{,}81\ m/s^2 = 9{,}81\cdot 10^{-3}\ N$$



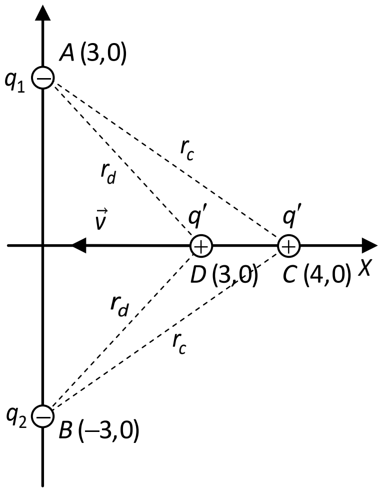
que es mayor que la fuerza eléctrica, por lo que no lo podemos despreciar. Sin embargo, el problema está pensado para despreciar el peso (si no se hace así, se complicaría demasiado). Vamos a suponer (aunque el problema no lo dice, aunque debería) que *q'* se mueve sobre una superficie horizontal, de modo que el peso se anula con la fuerza normal (ver figura).

Como *q'* está inicialmente en reposo y la fuerza eléctrica actúa en la dirección del eje *OX* pero en sentido opuesto, se mueve en el sentido negativo del eje. Así pues, cuando haya recorrido 1 *m* estará en el punto *D* (3, 0), como indica la figura de la página siguiente.

Para hallar la velocidad en el punto *D* tenemos que aplicar la conservación de la energía, por lo que tenemos que obtener las energías potenciales de *q'* en los puntos *C* y *D*,

$$E_p(C) = E_{p,1}(C) + E_{p,2}(C) = k\frac{q_1q'}{r_c} + k\frac{q_2q'}{r_c} = 2k\frac{qq'}{r_c} = 2\times 9\cdot 10^9\,\frac{\left(-4\cdot 10^{-6}\times 2\cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{3^2+4^2}} = -2{,}88\cdot 10^{-2}\ V$$

$$E_p(D)=E_{p,1}(D)+E_{p,2}(D)=k\frac{q_1q'}{r_d}+k\frac{q_2q'}{r_d}=2k\frac{qq'}{r_d}=2\times 9\cdot 10^9\,\frac{\left(-4\cdot 10^{-6}\times 2\cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{3^2+3^2}}=-3,39\cdot 10^{-2}\ V$$



Al ser la fuerza eléctrica conservativa, la energía mecánica se conserva,

$$E_m(C)=E_m(D)\ \Rightarrow\ \cancel{E_c(C)}+E_p(C)=E_c(D)+E_p(D)\ \Rightarrow$$

$$E_p(C)=½mv^2+E_p(D)\ \Rightarrow\ v^2=\frac{2\left[E_p(C)-E_p(D)\right]}{m}\ \Rightarrow$$

$$v=\sqrt{\frac{2\left[E_p(C)-E_p(d)\right]}{m}}=\sqrt{\frac{2\left[\left(-2,88\cdot 10^{-2}\right)-\left(-3,39\cdot 10^{-2}\right)\right]}{10^{-3}}}=\mathbf{3,21\ m/s}$$

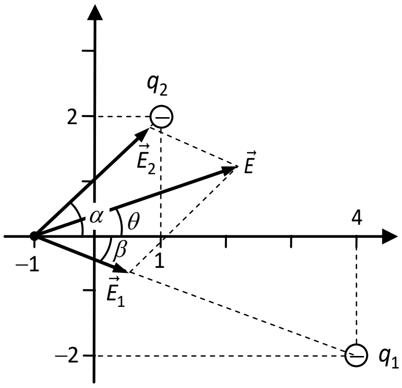
Una carga puntual $q_1 = -5{\cdot}10^{-6}$ *C* está localizada en un punto de coordenadas *x* = 4 *m* e *y* = –2 *m*. Una segunda carga puntual q_2 idéntica a la primera está localizada en *x* = 1 *m* e *y* = 2 *m*.

a) Halla el campo eléctrico en el punto $x=-1$ *m*, $y=0$.

b) Dibuja esquemáticamente las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales en el plano *XY*.

Dato: Constante de Coulomb, $k=9\cdot 10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$

Solución



Apartado a) En la figura se han dibujado los vectores que representan a los campos creados por ambas partículas y el total. Como se cumple el principio de superposición,

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$$

Ya que los campos no son simétricos y hacen referencia a un sistema de coordenadas es conveniente resolver por componentes,

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\left(E_{1x}\vec{i}+E_{1y}\vec{j}\right)+\left(E_{2x}\vec{i}+E_{2y}\vec{j}\right)=\left(E_{1x}+E_{2x}\right)\vec{i}+\left(E_{1y}+E_{2y}\right)\vec{j}\quad (1)$$

Para hallar las componentes de los campos creados por q_1 y q_2 necesitamos conocer primero las magnitudes de ambos campos. De la figura se deduce que los cuadrados de las distancias de q_1 y q_2 al punto (–1, 0) son respectivamente,

$$r_1^2=5^2+2^2=29\ m^2 \text{ y } r_2^2=2^2+2^2=8\ m^2$$

por lo que E_1 y E_2 son,

$$E_1=k\frac{|q_1|}{r_1^2}=9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-6}}{29}=1{,}55\cdot 10^3\ \frac{N}{C} \text{ y } E_2=k\frac{|q_1|}{r_1^2}=9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-6}}{8}=5{,}62\cdot 10^3\ \frac{N}{C}$$

Por otro lado, de la figura se desprende que $\tan\alpha=2/2=1 \Rightarrow \alpha=45º$ y $\tan\beta=2/5 \Rightarrow \beta=21{,}8º$, así que las componentes de E_1 y E_2 son,

$$E_{1x}=E_1\cos\beta=1{,}55\cdot 10^3\times\cos 21{,}8=1{,}44\cdot 10^3 \text{ y } E_{1y}=-E_1\sin\beta=1{,}55\cdot 10^3\times\sin 21{,}8=-0{,}576\cdot 10^3$$

$$E_{2x}=E_2\cos\alpha=5{,}62\cdot 10^3\times\cos 45=3{,}97\cdot 10^3 \text{ y } E_{2y}=E_2\sin\alpha=5{,}62\cdot 10^3\times\sin 45=3{,}97\cdot 10^3$$

Finalmente, aplicando la ecuación (1),

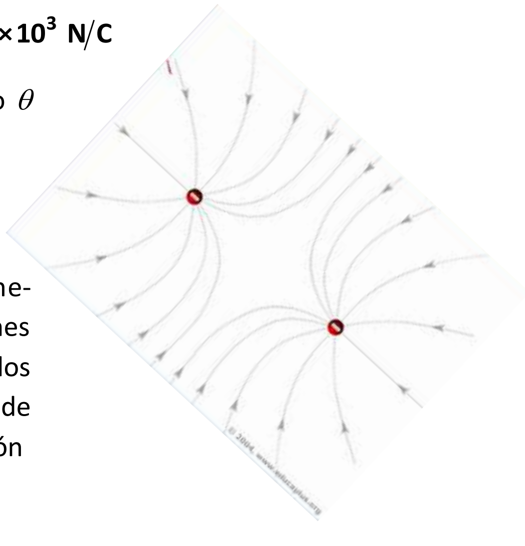
$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=\left(E_{1x}+E_{2x}\right)\vec{i}+\left(E_{1y}+E_{2y}\right)\vec{j}=\mathbf{5{,}42\times 10^3\,\vec{i}+3{,}40\times 10^3\,\vec{j}\ N/C}$$

La magnitud del campo $\vec{E}$ viene dada por,

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\sqrt{\left(5{,}42\cdot 10^3\right)^2+\left(3{,}40\cdot 10^3\right)^2}=\mathbf{6{,}40\times 10^3\ N/C}$$

y su orientación respecto al eje *OX* queda determinada por el ángulo θ (ver figura),

$$\tan\theta=\frac{E_y}{E_x}=\frac{3{,}40\cdot 10^3}{5{,}42\cdot 10^4}=0{,}627 \Rightarrow \theta=\mathbf{32{,}1º}$$



Apartado b): Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales es mejor memorizarlas. En la página 9 del tema de interacción eléctrica tienes dibujadas las correspondientes a dos cargas positivas iguales; las de dos cargas negativas son las mismas, salvo que la orientación de las líneas de fuerza es el opuesto. Dada la disposición de las cargas, la representación gráfica sería la de la figura.

Dos cargas eléctricas q_1 = 2·10^{-6} *C* y q_2 = –3·10^{-6} *C* puntuales se encuentran en el vacío y están separadas una distancia de 50 *cm*. Calcula:

a) La posición del punto P situado en la recta que pasa por ambas cargas donde el potencial eléctrico es nulo.

b) El vector intensidad de campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) en el punto P.

Dato: $k_0 = 9\cdot 10^9$ N.m^2/C^{-2}

Solución

Apartado a): como $|q_1|<|q_2| \Rightarrow$ el punto *P* tiene que estar más cerca de q_1 que de q_2.

Observa en la figura que $r_2 = d - r_1$. Puesto que el potencial del campo creado por una carga puntual es $V = k_0\, q/r$ (ojo! *q* va con su signo) es una magnitud escalar y $V_P = 0$, se tiene que,

$$V_P = V_{1P} + V_{2P} = k_0 \frac{q_1}{r_1} + k_0 \frac{q_2}{r_2} = k_0\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right) = k_0\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{d-r_1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{d-r_1}$$

así que operando y despejando llegamos a,

$$\frac{q_1}{r_1} = -\frac{q_2}{d-r_1} \Rightarrow q_1(d-r_1) = -q_2 r_1 \Rightarrow q_1 d - q_1 r_1 = -q_2 r_1 \Rightarrow (q_1 - q_2) r_1 = q_1 d \Rightarrow$$

$$r_1 = \frac{q_1 d}{q_1 - q_2} = \frac{2\cdot 10^{-6}\times 50}{[2-(-3)]\cdot 10^{-6}} = \mathbf{20\ cm} \Rightarrow r_2 = d - r_1 = 50 - 20 = 30\ cm$$

Apartado b): la magnitud del campo creado por una carga puntual es $E = k_0 |q|/r^2$, así que,

$$E_1 = k_0 \frac{|q_1|}{r_1^2} \text{ y } E_2 = k_0 \frac{|q_2|}{r_2^2}$$

Como $q_1 > 0$ y $q_2 < 0$ y están en la misma recta (ver figura), $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma orientación; así que el campo total, cuyo vector representativo es el dibujado en la figura, tiene una magnitud que es la suma de E_1 y E_2,

$$E_T = E_1 + E_2 = k_0 \frac{|q_1|}{r_1^2} + k_0 \frac{|q_2|}{r_2^2} = k_0\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}+\frac{|q_2|}{r_2^2}\right) = 9\cdot 10^9\left(\frac{2}{0{,}2^2}+\frac{3}{0{,}3^2}\right)\times 10^{-6} = \mathbf{7{,}5\times 10^5\ N/C}$$

Nota: como no hacen referencia a ningún sistema de coordenadas, no es necesario expresar el campo en forma de componentes. Es suficiente con hallar su magnitud y dibujar el vector que lo representa.

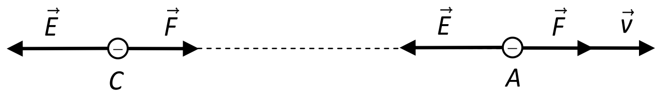
Las placas aceleradoras de un tubo de rayos catódicos de un aparto de TV están sometidas a una diferencia de potencial de 16000 *V*. Un electrón parte del reposo del cátodo. Calcula la velocidad con la que llega al ánodo.

<u>Datos</u>: q_e = 1,60·10^{-19} C; m_e = 9,11·10^{-31} *kg*

Solución

El problema da a entender que sabemos que el cátodo es el punto con potencial negativo y el ánodo el positivo. Sin embargo no es necesario saberlo, lo podemos deducir.

En efecto, supongamos que el electrón se encuentra en reposo en el punto *C* (cátodo) de la figura. Para que acelere y llegue al punto *A* (ánodo) es necesario que actúe sobre él una fuerza dirigida hacia la derecha (ver figura). Ahora bien, como,



$$\left.\begin{array}{r}\vec{F}=q_e\vec{E}\\ q_e<0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{el campo eléctrico } \vec{E} \text{ tiene sentido opuesto a } \vec{F} \text{ (ver figura)}$$

Recuerda que en teoría se ha visto que el campo eléctrico apunta siempre en el sentido de los potenciales decrecientes; por lo tanto, como $\vec{E}$ apunta hacia *C* (cátodo), tiene que cumplirse que,

$$V_C<V_A \;\Rightarrow\; V_C-V_A=-16000V$$

es decir, *C* es el polo negativo y *A* el positivo.

Como nos dan la diferencia de potencial, lo más fácil para resolver el problema es aplicar la conservación de la energía. Como el campo eléctrico es conservativo y suponemos que el gravitatorio es despreciable, tenemos que,

$$E_m=cte \Rightarrow E_m(A)=E_m(B) \Rightarrow \cancel{E_c(C)}+E_p(C)=E_c(A)+E_p(A)$$

recordando que $E_c=½mv^2$ y $E_p=q_eV$ llegamos a,

$$q_eV_C=\frac{1}{2}m_ev^2+q_eV_A \;\Rightarrow\; v^2=\frac{2q_e\left(V_C-V_A\right)}{m_e} \;\Rightarrow\; v=\sqrt{\frac{2q_e\left(V_C-V_A\right)}{m_e}}=\sqrt{\frac{2\times(-1{,}6\cdot10^{-19})\times(-16000)}{9{,}11\cdot10^{-31}}}=\mathbf{7{,}50\times10^{7}}\;\mathbf{\frac{m}{s}}$$

****

Dos cargas eléctricas puntuales idénticas, de valores q_1 = q_3 = 3 *μC* se encuentran situadas en dos vértices opuestos de un cuadrado de 20 *cm* de lado y otra q_3 = –3 *μC* está en otro de los vértices. Calcula el campo eléctrico y el potencial debidos a estas tres cargas en:

a) El centro del cuadrado (punto *A*).

b) El vértice que no tiene carga (punto *B*).

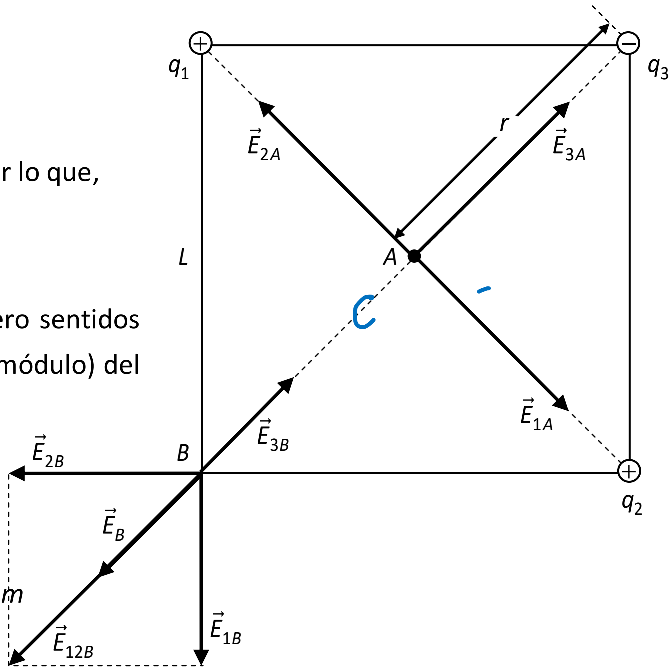
c) Halla el trabajo que realiza la fuerza eléctrica cuando una carga $q'=1\,\mu C$ se desplaza de *A* a *B*.

<u>Dato</u>: k_0 = 9·10^{9} *N·m²·C^{-2}*

Solución

Como no hacen referencia a ningún sistema de coordenadas, no es necesario utilizar componentes para hallar el campo. Basta con obtener su magnitud (módulo) y dibujar el correspondiente vector.

<u>Apartado a)</u>: recuerda que la intensidad del campo eléctrico en un punto es la fuerza que el cuerpo que crea lo crea ejerce sobre la unidad de carga positiva colocada en ese punto. De acuerdo con esto, los vectores dibujados en el punto *A* de la figura representan a las intensidades de los campos eléctricos creados por las cargas q_1, q_2 y q_3 en ese punto.



Observa que $r_{1A} = r_{2A} = r_{3A} = r$ y que $|q_1| = |q_2| = |q_3| = |q|$, por lo que,

$$E_{1A} = E_{2A} = E_{3A} = E = k_0 \frac{|q|}{r^2}$$

Como $E_{1A} = E_{2A}$ (módulos) y tienen la misma dirección pero sentidos opuestos (ver figura), se anulan; por lo tanto la magnitud (módulo) del campo en el punto *A* es,

$$E_A = E_{3A} = E = k_0 \frac{|q|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0{,}414^2} = \mathbf{1{,}35 \times 10^6 \ N/C}$$

donde *r* (ver figura) es

$$L^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \ \Rightarrow r^2 = L^2/2 \ \Rightarrow \ r = L/\sqrt{2} = 0{,}2/\sqrt{2} = 0{,}141 \ m$$

Como el potencial es una magnitud escalar, se tiene que,

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} + V_{3A} = k_0 \frac{q_1}{r_{1A}} + k_0 \frac{q_2}{r_{2A}} + k_0 \frac{q_3}{r_{3A}} = \frac{k_0}{r}(q_1 + q_2 + q_3) = \frac{9 \cdot 10^9}{0{,}141}(3 + 3 - 3)10^{-6} = \mathbf{1{,}91 \times 10^5 \ V}$$

Apartado b): Nota que, al ser q_1 y q_2 positivas, los campos creados por ellas en el punto *B* son los representados en la figura. Como $|q_1| = |q_2| = |q_3| = |q|$ y en la figura se ve que $r_{1B} = r_{2B} = r_B = L = 0{,}2m$, tenemos que,

$$E_{1B} = E_{2B} = E = k_0 \frac{|q|}{r_B^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0{,}2^2} = 6{,}75 \cdot 10^5 \ N/C$$

y como $\vec{E}_{1B}$ y $\vec{E}_{2B}$ son perpendiculares, se cumple que la magnitud del campo resultante (E_{12B}) es,

$$E_{12B} = \sqrt{E_{1B}^2 + E_{2B}^2} = \sqrt{2E^2} = \sqrt{2}E = \sqrt{2} \times 6{,}75 \cdot 10^5 = 9{,}55 \cdot 10^5 \ N/C$$

Por otro lado, la magnitud del campo creado por q_3 (E_{3B}) es,

$$E_{3B} = k_0 \frac{|q_3|}{r_{3B}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0{,}283^2} = 3{,}38 \cdot 10^5 \ N/C$$

donde , como se ve en la figura, $r_{3B} = 2r = 2L/\sqrt{2} = 2 \times 0{,}2/\sqrt{2} = 0{,}283 \ m$

De la simetría de la figura se deduce que, al ser $E_{1B} = E_{2B}$, $\vec{E}_{12B}$ y $\vec{E}_{3B}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido; por lo tanto,

$$E_B = E_{12B} - E_{3B} = 9{,}55 \cdot 10^5 - 3{,}38 \cdot 10^5 = \mathbf{6{,}17 \times 10^6 \ N/C}$$

Para hallar el potencial en el punto *B* procedemos como en el apartado a),

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} + V_{3B} = k_0 \frac{q_1}{r_{1B}} + k_0 \frac{q_2}{r_{2B}} + k_0 \frac{q_3}{r_{3B}} = k_0 \left(\frac{q_1}{r_{1B}} + \frac{q_2}{r_{2B}} + \frac{q_3}{r_{3B}} \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \left[\frac{3}{0{,}2} + \frac{3}{0{,}2} + \frac{(-3)}{0{,}283} \right] \times 10^{-6} = \mathbf{1{,}75 \times 10^5 \ V}$$

Apartado c): El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula cuando se desplaza de un punto *A* a otro *B*, viene expresado por,

$$\left. \begin{aligned} W_A^B &= -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) \\ E_p &= q'V \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_A^B = q'(V_A - V_B) = 10^{-6} \times (1{,}91 - 1{,}75) \cdot 10^5 = \mathbf{1{,}60 \times 10^{-2} \ J}$$

Una partícula que se encuentra fija en la posición $x_1 = 0$ tiene una carga eléctrica $q_1 = -7\ \mu C$ y otra que se encuentra, también fija, en $x_2 = 5\,cm$ tiene una carga eléctrica $q_2 = 2\ \mu C$. Calcula en los puntos $x_3 = 6\ cm$ y $x_4 = 9\ cm$:

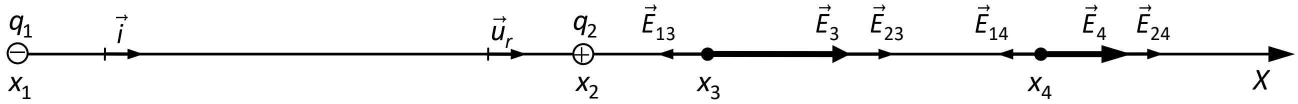
a) El campo eléctrico.

b) El potencial eléctrico.

<u>Dato</u>: $k_0 = 9{\cdot}10^9\ N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}$

Solución

Este problema sí hace referencia a un sistema de coordenadas, por lo que vamos a resolver utilizando componentes. El enunciado del problema ya nos dice que las cargas están en el eje *OX*



<u>Apartado a)</u>: la ecuación vectorial del campo eléctrico creado por una carga puntual es,

$$\vec{E} = k_0 \frac{q}{r^2}\vec{u}_r \ \ y \ \ \vec{u}_r = \vec{i} \ \Rightarrow \vec{E} = k_0 \frac{q}{r^2}\vec{i} \ \ (1)$$

donde $\vec{u}_r$ es un vector unitario que tiene la dirección de la recta que une *q* con el punto en el que queremos hallar el campo y su sentido es el que va de *q* al punto y, como se ve en la figura, $\vec{u}_r = \vec{i}$.

Al expresar el campo en sus componentes,

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \cancel{\vec{E}_y} = E_x\vec{i} + \cancel{E_y}\vec{j} = E_x\vec{i} \ \ (2)$$

ya que, como se ve en la figura, la componente de todos los campos en el eje *OY* es cero. Al comparar las ecuaciones (1) y (2) se ve que,

$$E_x = k_0 \frac{q}{r^2} \ \ \text{(donde la } q \text{ va con su signo)}$$

En la ecuación *q* va con su signo (las componentes de un vector pueden ser positivas o negativas).

Para hallar la intensidad del campo en el punto $x_3 = 6\,cm\ (\vec{E}_3)$, tenemos, recordando que el campo eléctrico cumple el principio de superposición, que,

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_{13} + \vec{E}_{23} = \left(E_{13x} + E_{23x}\right)\vec{i} = k_0\left(\frac{q_1}{x_3^2} + \frac{q_2}{(x_3 - x_2)^2}\right)\vec{i} = 9\cdot 10^9\left(\frac{-7\cdot 10^{-6}}{0{,}06^2} + \frac{2\cdot 10^{-6}}{0{,}01^2}\right)\vec{i} = \mathbf{1{,}62\times 10^8\ \vec{i}\ N/C}$$

pues en la figura se ve que $r_{13} = x_3 = 6cm = 0{,}06m$ y $r_{23} = x_3 - x_2 = 6 - 5 = 1cm = 0{,}01m$. El signo positivo indica que el sentido $\vec{E}_3$ es el del *OX* positivo.

Procediendo del mismo modo obtenemos la intensidad del campo en el punto x_4,

$$\vec{E}_4 = \vec{E}_{14} + \vec{E}_{24} = \left(E_{14x} + E_{24x}\right)\vec{i} = k_0\left(\frac{q_1}{x_4^2} + \frac{q_2}{(x_4 - x_2)^2}\right)\vec{i} = 9\cdot 10^9\left(\frac{-7\cdot 10^{-6}}{0{,}09^2} + \frac{2\cdot 10^{-6}}{0{,}04^2}\right)\vec{i} = \mathbf{3{,}47\times 10^6\ \vec{i}\ N/C}$$

pues en la figura se ve que $r_{14} = x_4 = 9cm = 0{,}09m$ y $r_{24} = x_4 - x_2 = 9 - 5 = 4cm = 0{,}04m$. Observa que el sentido de $\vec{E}_4$ es el mismo que el de $\vec{E}_3$.

<u>Apartado b)</u>: aplicando el principio de superposición,

$$V_3 = V_{13} + V_{23} = k_0\, q_1/x_3 + k_0\, q_2/(x_3 - x_2) = 9\cdot 10^9\left[-7\cdot 10^{-6}/0{,}06 + 2\cdot 10^{-6}/0{,}01\right] = \mathbf{7{,}50\times 10^5\ V}$$

$$V_4 = V_{14} + V_{24} = k_0\, q_1/x_4 + k_0\, q_2/(x_4 - x_2) = 9\cdot 10^9\left[-7\cdot 10^{-6}/0{,}09 + 2\cdot 10^{-6}/0{,}04\right] = \mathbf{-2{,}50\times 10^5\ V}$$