

Trigonometría

Atención: Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos.

- 1) Sabiendo que $\alpha > 90^\circ$ y que $\operatorname{tg} \alpha = 1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.
- 2) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60° . Alejándose 20 m en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30° . Averiguar la altura de la elevación.
- 3) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4$ m, $b = 7$ m y $A = 30^\circ$.
- 4) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) $\operatorname{tg} 1920^\circ$; b) $\operatorname{sen} (-765^\circ)$.
- 5) Demostrar la siguiente identidad:
$$\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \operatorname{sen} \alpha$$

SOLUCIONES

- 1) Sabiendo que $\alpha > 90^\circ$ y que $\operatorname{tg} \alpha = 1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

Si $\alpha > 90^\circ$ y $\operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow \alpha$ está en el tercer cuadrante. Pues bien:

$$\begin{aligned} \text{Como } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10} \\ \Rightarrow \cos \alpha &= -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ donde el signo } - \text{ se debe a} \\ &\text{que estamos en el tercer cuadrante.} \end{aligned}$$

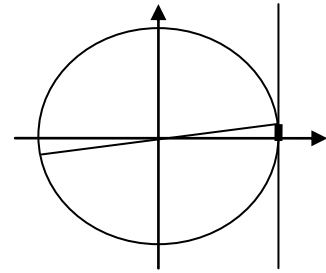
$$\text{Por otra parte, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Las otras tres razones son:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{10}}} = -\sqrt{10}$$

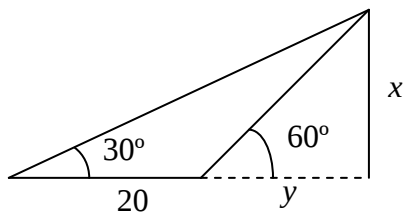
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$



Por último, como $\operatorname{tg} \alpha = 1/3$, con la calculadora obtenemos que: $\alpha = 18,43^\circ$. Trasladándolo al tercer cuadrante: $\alpha = 180^\circ + 18,43^\circ = 198,43^\circ = 198^\circ 26' 5,8''$ (Ver figura).

- 2) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60° . Alejándose 20 m en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30° . Averiguar la altura de la elevación.



En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x e y , deducimos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \operatorname{tg} 60^\circ \quad (1)$$

En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x y $20+y$, se tiene:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{20+y} \Rightarrow x = (20+y) \operatorname{tg} 30^\circ$$

Igualando:

$$\begin{aligned} y \operatorname{tg} 60^\circ &= (20+y) \operatorname{tg} 30^\circ = 20 \operatorname{tg} 30^\circ + y \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow y \operatorname{tg} 60^\circ - y \operatorname{tg} 30^\circ = 20 \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow y(\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) &= 20 \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow y = \frac{20 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 10 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1): $x = 10 \operatorname{tg} 60^\circ = 17,32 \text{ m}$

- 3) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4 \text{ m}$, $b = 7 \text{ m}$ y $A = 30^\circ$.

Como conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, usamos el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{7 \operatorname{sen} 30}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 61,04^\circ \text{ ó } B = 180^\circ - 61,04^\circ = 118,96^\circ.$$

- Si $B = 61,04^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 61,04^\circ - 30^\circ = 88,96^\circ$. Y además:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{4 \operatorname{sen} 88,96^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 8,00 \text{ m}$$

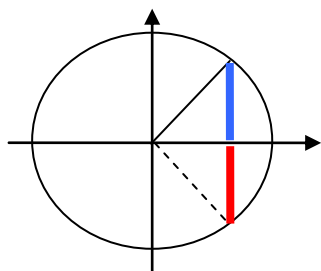
- Si $B = 118,96^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 118,96^\circ - 30^\circ = 31,04^\circ$. De modo que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{4 \operatorname{sen} 31,04^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 4,13 \text{ m}$$

4) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) $\operatorname{tg} 1920^\circ$; b) $\operatorname{sen} (-765^\circ)$.

Dividiendo 1920 entre 360 se obtiene 5 de cociente y 120 de resto. Es decir: $1920^\circ = 360^\circ \cdot 5 + 120^\circ$. Luego 1920° coincide, sobre la circunferencia, con 120° , después de dar 5 vueltas. Por tanto, $\operatorname{tg} 1920^\circ = \operatorname{tg} 120^\circ$.

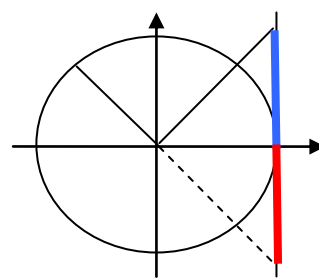
Además $\operatorname{tg} 1920^\circ = \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (180 - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$



De la misma forma, $765 = 360 \cdot 2$

$+ 45^\circ \Rightarrow -765^\circ$ coincide con -45° , después de dos vueltas en sentido negativo. Y además, por tratarse de un ángulo del

4º cuadrante: $\operatorname{sen}(-765^\circ) = \operatorname{sen}(-45^\circ) = -\operatorname{sen}(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



5) Demostrar la siguiente identidad: $\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1 + \cotg^2 \alpha} = \operatorname{sen} \alpha$

Usando que $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ y que $1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$, tenemos:

$$\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{1 + \cotg^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{sen} \alpha$$