Trigonometría y Complejos

1) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de *a*, sabiendo que tg $a = -3/4$, $270^\circ \leq a \leq 360^\circ$. Después, decir el valor de *a* con ayuda de la calculadora. *(2 puntos)*
2) Demostrar que $\dfrac{\operatorname{tg} x \operatorname{cosec}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{cotg} x$ *(2 puntos)*
3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 10$, $b = 22$ y $c = 17$. *(2 puntos)*
4) Resolver: $4 \cos 2x - 2 \operatorname{sen} x = 1$ *(2 puntos)*
5) a) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$, calcular z^{13} *(1 punto)*
   b) Calcular las raíces cúbicas de -27 en el conjunto de los complejos *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de a, sabiendo que tg $a = -3/4$, $270^\circ \le a \le 360^\circ$. Después, decir el valor de a con ayuda de la calculadora. *(2 puntos)*

α es del cuarto cuadrante $\Rightarrow$

$$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \;\Rightarrow\; \boxed{\cos\alpha = \frac{4}{5}}.$$

Por otra parte: $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{sen}\,\alpha} = \text{tg}\,\alpha\,\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}\dfrac{4}{5} = \boxed{-\dfrac{3}{5}}.$

Por tanto: $\boxed{\text{cotg}\,\alpha = -\dfrac{4}{3},\ \sec\alpha = \dfrac{5}{4},\ \text{cosec}\,\alpha = -\dfrac{5}{3}}.$

Con la calculadora, usando que tg α = –3/4, obtenemos que:

$$\alpha = -36{,}87^\circ = -36{,}87^\circ + 360^\circ = 323{,}13^\circ = \boxed{323^\circ\ 7'\ 48{,}4''}.$$

2) Demostrar que $\dfrac{\text{tg}\,x\,\text{cosec}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \text{cotg}\,x$ *(2 puntos)*

$$\frac{\text{tg}\,x\,\text{cosec}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\dfrac{1}{\cos x\,\text{sen}\,x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\cos x\,\text{sen}\,x} = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \text{cotg}\,x$$

3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 10$, $b = 22$ y $c = 17$. *(2 puntos)*

Como conocemos los tres lados, empezamos aplicando el Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{22^2+17^2-10^2}{2\cdot 22\cdot 17} \;\Rightarrow\; \boxed{A = 25{,}87^\circ}$$

Con la calculadora, las operaciones son: $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\cos^{-1}(}$ $\boxed{(}$ 22 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 17 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 10 $\boxed{x^2}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\times}$ 22 $\boxed{\times}$ 17 $\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{A}$ $\boxed{=}$, donde la última operación es guardar el resultado en la memoria A para su uso posterior.

Para no tener problemas con los dos resultados que produce el uso del Teorema del Seno, aplicamos directamente el del Coseno para el cálculo de otro de los ángulos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \;\Rightarrow\; \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{10^2+22^2-17^2}{2\cdot 10\cdot 22} \;\Rightarrow\; \boxed{C = 47{,}89^\circ}$$

El uso de la calculadora es similar, salvo que guardamos el resultado en la memoria C.

Por último,

$$B = 180^\circ - (A + C) = \boxed{106{,}23^\circ}$$

Que, con calculadora, es así: 180 $\boxed{-}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{MEMVAR A}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MEMVAR C}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$.

4) Resolver: $4\cos 2x - 2\,\text{sen}\,x = 1$ *(2 puntos)*

$$4\cos 2x - 2\,\text{sen}\,x = 1 \;\Rightarrow\; 4(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) - 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4\cos^2 x - 4\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 4(1 - \text{sen}^2 x) - 4\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4 - 4\,\text{sen}^2 x - 4\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; -8\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x + 3 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 8\,\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x - 3 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\text{sen } x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 8(3)}}{2 \cdot 8} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-2+\sqrt{100}}{16} = 0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} x = 30^{o} + 360^{o} k \quad \text{ó} \\ x = 150^{o} + 360^{o} k \end{cases} \\ = \dfrac{-2-\sqrt{100}}{16} = -0{,}75 \Rightarrow \begin{cases} x = 228{,}59^{o} + 360^{o} k \quad \text{ó} \\ x = 311{,}41^{o} + 360^{o} k \end{cases} \end{array} \right.$$

5) a) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$, calcular z^{13} *(1 punto)*

Pasamos z a polares.

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + (-2)^2 (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$

Como arctg $\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}$ = arctg $\sqrt{3}$ = 60º, pero estamos en el tercer cuadrante, al ser negativas la parte real y la imaginaria $\Rightarrow$ $\alpha = 240^{o}$.

Luego:

$$z^{13} = (4_{240^{o}})^{13} = (4^{13})_{240^{o} \cdot 13} = (4^{13})_{3120^{o}} = \boxed{(4^{13})_{240^{o}} = 67.108.864_{240^{o}}}$$

puesto que 3360º = 360º·8 + 240º.

b) Calcular las raíces cúbicas de –27 en el conjunto de los complejos *(1 punto)*

Comenzamos escribiendo –27 en polares. Como su afijo está en la parte negativa del eje real $\Rightarrow$ $-27 = 27_{180^{o}}$. Luego nos piden todas las soluciones de $\sqrt[3]{27_{180^{o}}}$.

Pues bien, el módulo de las tres soluciones será: $\sqrt[3]{27} = 3$.

Y sus argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{180^{o} + 360^{o} \cdot 0}{3} = 60^{o} \qquad \Rightarrow \boxed{z_1 = 3_{60^{o}}}$$

$$\alpha_2 = \frac{180^{o} + 360^{o} \cdot 1}{3} = \frac{180^{o}}{3} + \frac{360^{o}}{3} \cdot 1 = 60^{o} + 120^{o} = 180^{o} \qquad \Rightarrow \boxed{z_2 = 3_{180^{o}} = -3}$$

$$\alpha_3 = \frac{180^{o} + 360^{o} \cdot 2}{3} = \frac{180^{o}}{3} + \frac{360^{o}}{3} \cdot 2 = 60^{o} + 120^{o} \cdot 2 = 300^{o} \qquad \Rightarrow \boxed{z_3 = 3_{300^{o}}}$$