

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 7
- Junio, Ejercicio 8
- Reserva 1, Ejercicio 7
- Reserva 1, Ejercicio 8
- Reserva 2, Ejercicio 7
- Reserva 2, Ejercicio 8
- Reserva 3, Ejercicio 7
- Reserva 3, Ejercicio 8
- Reserva 4, Ejercicio 7
- Reserva 4, Ejercicio 8
- Julio, Ejercicio 7
- Julio, Ejercicio 8
- Modelo, Ejercicio 2
- Modelo, Ejercicio 3

emestrada

- a) Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$.
- b) Halla el punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$
- MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 7**

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$. El vector director de la recta $(1,1,1)$, es el vector

normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación: $x + y + z + D = 0$
Como queremos que pase por el punto $(2, 2, 1)$.

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

Luego, el plano que nos piden es: $x + y + z - 5 = 0$.

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$x + y + z - 5 = 0 \Rightarrow 4 + t + 1 + t + t - 5 = 0 \Rightarrow 3t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Luego, el punto de corte es: $M = (4 + 0, 1 + 0, 0) = (4, 1, 0)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(2, 2, 1) + (a, b, c)}{2} = (4, 1, 0) \Rightarrow P' = (6, 0, -1)$$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por Q y es perpendicular al plano: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, sustituyendo la recta en la ecuación del plano

$$x - 2y + z + 6 = 0 \Rightarrow 1 + t + 2 + 4t - 3 + t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1$$

luego, el punto es: $M = (1 - 1, -1 + 2, -3 - 1) = (0, 1, -4)$

Si llamamos al punto simétrico $Q' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(1, -1, -3) + (a, b, c)}{2} = (0, 1, -4) \Rightarrow Q' = (-1, 3, -5)$$

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s .

b) Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0, 0); \vec{u} = (1, 0, 2)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -7 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (-7, 0, 0); \vec{v} = (-1, 1, 0)$$

Calculamos el vector $\vec{AB} = (-7, 0, 0)$ y averiguamos el rango de la matriz formada por los vectores \vec{u}, \vec{v} y \vec{AB}

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 3 \Rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) Los vectores \vec{u} y \vec{v} son vectores directores del plano, luego, el vector normal del plano es:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, 1)$$

Por lo tanto, el plano tiene de ecuación: $\pi \equiv -2x - 2y + z + D = 0$

El punto A de la recta r y el punto B de la recta s tienen que estar a la misma distancia del plano, luego:

$$\left. \begin{aligned} d(A, \pi) &= \frac{|D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \\ d(B, \pi) &= \frac{|14 + D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} = \frac{|14 + D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D| = |14 + D| \Rightarrow \begin{cases} D = 14 + D \Rightarrow \text{No tiene solución} \\ D = -14 - D \Rightarrow D = -7 \end{cases}$$

Luego, el plano que nos piden es: $\pi \equiv -2x - 2y + z - 7 = 0$

Considera los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(3,-2,1)$.

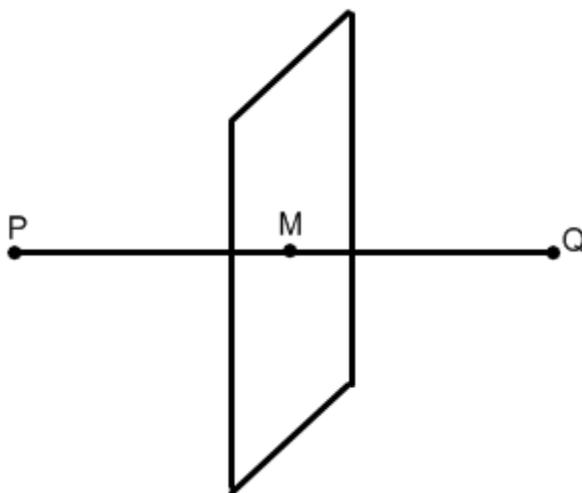
a) Calcula el plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio.

b) Calcula el plano paralelo a la recta $r \equiv 1 - x = \frac{y-2}{3} = z+1$ que pasa por P y Q .

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden es un plano perpendicular al segmento PQ y que pasa por su punto medio M .



El vector $\vec{PQ} = (2, -2, 0)$ es el vector normal del plano, luego: $2x - 2y + D = 0$

como tiene que pasar por el punto medio $M = (2, -1, 1)$, tenemos que el plano pedido es:

$$2x - 2y + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow 2x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow x - y - 3 = 0$$

b) Calculamos el vector director de la recta $r \equiv 1 - x = \frac{y-2}{3} = z+1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+3t \\ z = -1+t \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (-1, 3, 1)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto $P(1,0,1)$ y los vectores $\vec{PQ} = (2, -2, 0)$ y $\vec{u} = (-1, 3, 1)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y & -2 & 3 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 2y + 4z - 2 = 0 \Rightarrow x + y - 2z + 1 = 0$$

Considera los puntos $A(1,1,2)$; $B(1,0,1)$ y $C(1,-1,2)$

a) Determina el área del triángulo de vértices A , B y C .

b) Calcula D para que los puntos A , B , C y D sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 8

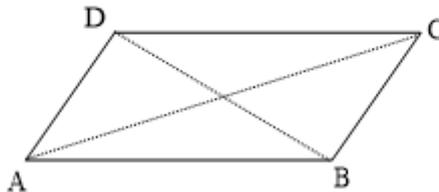
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (0, -1, -1)$; $\vec{AC} = (0, -2, 0)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (-2, 0, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 1 u^2$$

b)



El punto medio de la diagonal AC es: $M = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{2+2}{2} \right) = (1, 0, 2)$

El punto medio de la diagonal BD , también es M , luego si llamamos $D(a, b, c)$, se tiene que cumplir:

$$M = \left(\frac{1+a}{2}, \frac{0+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) = (1, 0, 2) \Rightarrow D(1, 0, 3)$$

Considera el plano $\pi \equiv x - y = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

- a) Calcula, si es posible, el plano perpendicular a π que contiene a r .
 b) Calcula, si es posible, la recta perpendicular a r , contenida en π y que pasa por el origen.
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos a implícitas la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$$

El haz de planos que contiene a la recta r es:

$$x - 2z + 3 + k(y - 3z + 6) = 0 \Rightarrow x + ky + (-2 - 3k)z + 3 + 6k = 0$$

Como queremos que sea perpendicular al plano π , sus vectores normales tienen que ser perpendiculares, luego:

$$(1, -1, 0) \cdot (1, k, -2 - 3k) = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

Sustituyendo tenemos que el plano pedido es: $x + ky + (-2 - 3k)z + 3 + 6k = 0 \Rightarrow x + y - 5z + 9 = 0$

b) La recta pasa por el punto $P = (0, 0, 0)$ y su vector director es $\vec{v} = (a, b, c)$.

Como la recta es perpendicular a r , el producto escalar de $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 2a + 3b + c = 0$.

Además, la recta está contenida en el plano $x - y = 0$, entonces el producto escalar del vector normal del plano $\vec{n} = (1, -1, 0)$ y el vector $\vec{v} = (a, b, c)$, también es cero, luego: $a - b = 0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left. \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \left(-\frac{c}{5}, -\frac{c}{5}, c \right)$$

Vemos que hay infinitos vectores. Si, por ejemplo, damos a c el valor 5, la recta será:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{5}$$

Considera los puntos $O(0,0,0)$, $A(a,-1,2)$ y $B(a,1,0)$.

a) Determina a para que el triángulo OAB tenga área 3 unidades cuadradas.

b) Calcula a para que O, A y B sean coplanarios con el punto $C(1,1,0)$

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el producto vectorial de los vectores $\vec{OA} = (a, -1, 2)$ y $\vec{OB} = (a, 1, 0)$

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -1 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 2a, 2a)$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \left| \vec{OA} \wedge \vec{OB} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4a^2 + 4a^2} = 3 \Rightarrow 4 + 8a^2 = 36 \Rightarrow 8a^2 = 32 \Rightarrow a = \pm 2$$

b) Calculamos el plano que pasa por O, A y B

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -1 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2x + 2ay + 2az = 0$$

Como tiene que pasar por el punto $C(1,1,0)$

$$-2 \cdot 1 + 2a \cdot 1 + 2a \cdot 0 = 0 \Rightarrow -2 + 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

Considera las rectas $r \equiv x = y + a = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 3a \\ x + z = 2 \end{cases}$

a) Calcula a para que las rectas se corten.

b) Para $a = -1$, halla la recta que corta perpendicularmente a r y s

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -a + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = s \\ y = \frac{-3a + s}{2} \\ z = 2 - s \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado

$$\left\{ \begin{array}{l} t = s \\ -a + t = \frac{-3a + s}{2} \\ -1 + 2t = 2 - s \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a + t = \frac{-3a + t}{2} \\ -1 + 2t = 2 - t \end{array} \right. \Rightarrow t = 1 ; a = -1$$

b) El punto de corte de las dos rectas es: (1, 2, 1)

Calculamos el vector director de la recta que es perpendicular a \vec{u} y \vec{v}

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k} = \left(-2, 3, -\frac{1}{2}\right)$$

Luego, la recta es: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-\frac{1}{2}}$

Considera los vectores $\vec{u} = (1, a, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1, a)$.

a) Calcula a para que ambos vectores formen un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes.

b) Calcula a para que el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}$ sea ortogonal a \vec{u}

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Aplicamos la fórmula del producto escalar

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{(1, a, 2) \cdot (-2, 1, a)}{\sqrt{1+a^2+4} \cdot \sqrt{1+a^2+4}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2+a+2a}{1+a^2+4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3a-2}{a^2+5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow a = 3$$

b) Calculamos el producto vectorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & a & 2 \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a^2 - 2)\vec{i} + (-a - 4)\vec{j} + (2a + 1)\vec{k} = (a^2 - 2, -a - 4, 2a + 1)$$

Calculamos el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v} = (a^2 - 2, -a - 4, 2a + 1) - (-2, 1, a) = (a^2, -a - 5, a + 1)$

Como este vector tiene que ser ortogonal a \vec{u} , su producto escalar es 0, luego

$$(a^2, -a - 5, a + 1) \cdot (1, a, 2) = 0 \Rightarrow a^2 - a^2 - 5a + 2a + 2 = 0 \Rightarrow -3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

Considera la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = 3-z$ y el punto $P(0, 2, -4)$.

a) Calcula el punto de r a menor distancia de P .

b) Halla los puntos de r cuya distancia a P sea igual a $\sqrt{50}$

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = 3-z \Rightarrow \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2+2t \\ z = 3-t \end{cases}$

Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por P .

$$2x + 2y - z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) + D = 0 \Rightarrow D = -8 \Rightarrow 2x + 2y - z - 8 = 0$$

El punto que nos piden es el punto de corte de la recta con el plano, luego:

$$2 \cdot (-1+2t) + 2 \cdot (2+2t) - 1 \cdot (3-t) - 8 = 0 \Rightarrow -2 + 4t + 4 + 4t - 3 + t - 8 = 0 \Rightarrow 9t - 9 = 0 \Rightarrow t = 1$$

El punto es: $(-1+2t, 2+2t, 3-t) = (-1+2, 2+2, 3-1) = (1, 4, 2)$

b) Luego, cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $A = (-1+2t, 2+2t, 3-t)$.

$$\begin{aligned} \overline{PA} = (1-2t, -2t, -7+t) &\Rightarrow |\overline{PA}| = \sqrt{(1-2t)^2 + (-2t)^2 + (-7+t)^2} = \sqrt{9t^2 - 18t + 50} = \sqrt{50} \Rightarrow \\ \Rightarrow 9t^2 - 18t = 0 &\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego los puntos son: $A = (-1+2t, 2+2t, 3-t) \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow A_1 = (-1, 2, 3) \\ t = 2 \Rightarrow A_2 = (3, 6, 1) \end{cases}$

Sea π_1 el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$, $B(1,1,-3)$ y $C(0,1,1)$, y sea $\pi_2 \equiv x - y + z - 1 = 0$. Determina la ecuación de la recta paralela a ambos planos que pasa por el origen.

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el plano π_1 : $A(1,0,0)$; $\overline{AB}(0,1,-3)$ y $\overline{AC}(-1,1,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 3y + z - 4 = 0$$

Si la recta es paralela a los planos su vector director es perpendicular a los vectores normales de los planos, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4, -3, -7)$$

Luego, la recta que nos piden es: $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-7}$

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

a) Estudia la posición relativa de π y r .

b) Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 7

RESOLUCIÓN

a) Podemos pasar la ecuación de la recta r a implícitas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Luego la recta está contenida en el plano

b) Calculamos los planos perpendiculares a r : $2x + y + D = 0$

Calculamos el que pasa por el punto $(2, -1, -2)$

$$2 \cdot 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$$

Calculamos el punto de corte M de la recta con el plano

$$2(1 + \lambda) + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5} \Rightarrow M = \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, 1 \right)$$

$$\text{El vector } \overrightarrow{PM} = \left(\frac{7}{5} - 2, \frac{1}{5} + 1, 1 + 2 \right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 3 \right) = (-1, 2, 5)$$

Luego, la recta que nos piden es: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{5}$

Considera los puntos $A(4,0,0)$ y $B(0,2,0)$. Calcula los puntos del plano XOZ que forman un triángulo equilátero con A y B .

MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

El punto C como está en el plano XOZ , tendrá de coordenadas $C(x,0,z)$. Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-4,2,0)$; $\vec{AC} = (x-4,0,z)$ y $\vec{BC} = (x,-2,z)$. Como es un triángulo equilátero los módulos de los tres vectores tienen que ser iguales, luego:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} \\ |\vec{AC}| = \sqrt{(x-4)^2 + 0^2 + z^2} = \sqrt{20} \\ |\vec{BC}| = \sqrt{x^2 + 2^2 + z^2} = \sqrt{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + 16 - 8x + z^2 = 20 \\ x^2 + 4 + z^2 = 20 \end{array} \Rightarrow x = \frac{3}{2}; z = \pm \frac{\sqrt{55}}{2}$$

Luego, los puntos son: $C\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$ ó $C\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$

Considera el plano π , determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

MATEMÁTICAS II. 2024. MODELO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

El plano está determinado por el punto $A(-1,0,0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$; $\overrightarrow{AC} = (3,1,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + 2z + 1 = 0$$

Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas: $(3 + 2t, 2 + t, t)$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|(3 + 2t) - 3(2 + t) + 2(t) + 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 2t - 6 - 3t + 2t + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|t - 2|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow |t - 2| = 14 \Rightarrow \begin{cases} t - 2 = 14 \Rightarrow t = 16 \\ t - 2 = -14 \Rightarrow t = -12 \end{cases}$$

Luego, los puntos son: si $t = 16 \Rightarrow P_1 = (35, 18, 16)$; $t = -12 \Rightarrow P_2 = (-21, -10, -12)$

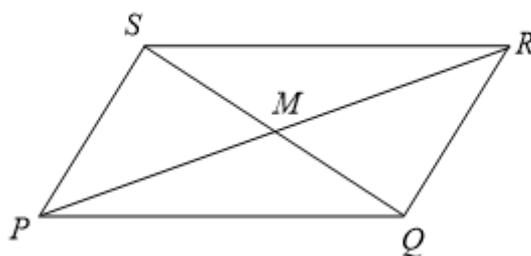
Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ y S .

a) Halla las coordenadas del punto S .

b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P , Q y R .

MATEMÁTICAS II. 2024. MODELO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos las coordenadas del centro del paralelogramo: $M = \frac{P+R}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 2\right)$.

Calculamos las coordenadas del vértice S

$$M = \frac{Q+S}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 2\right) = \frac{(-2,1,0) + (a,b,c)}{2} \Rightarrow S = (1,6,4)$$

b) Calculamos la ecuación del plano que contiene a los puntos P , Q y R

$$\left. \begin{array}{l} \vec{PQ} = (-1, -1, -3) \\ \vec{PR} = (1, 3, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ y-2 & -1 & 3 \\ z-3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 11x - 5y - 2z + 27 = 0$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\frac{x}{11} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-2}$