

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1
- Junio, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 2, Ejercicio 1
- Reserva 2, Ejercicio 2
- Reserva 3, Ejercicio 1
- Reserva 3, Ejercicio 2
- Reserva 4, Ejercicio 1
- Reserva 4, Ejercicio 2
- Julio, Ejercicio 1
- Julio, Ejercicio 2
- Modelo, Ejercicio 1

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.

a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B .

b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A .

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y B

$$\frac{x-1}{e-1} = \frac{y-0}{1} \Rightarrow y = \frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}$$

La pendiente es: $\frac{1}{e-1}$ y tiene que ser igual a $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{Luego, } \frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow x = e-1$$

Por lo tanto, el punto es $(e-1, \ln(e-1))$

b) La pendiente de la recta tangente en $A(1, 0)$ es: $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$. Luego, la pendiente de la recta normal es: -1

$$\text{La recta normal es: } y - 0 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

Considera la función continua f definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos(x) - a \cdot \operatorname{sen}(x)}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ b \cdot \cos(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Calcula a y b

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Como la función es continua, estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$- f(0) = b - 1$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot \cos x - a \cdot \operatorname{sen}(x)}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - x \cdot \operatorname{sen}(x) - a \cdot \cos(x)}{3x^2} = \frac{1-a}{0}$$

Como el límite debe existir, ya que es continua, el numerador debe valer cero para poder aplicar la regla de L'Hôpital, luego $1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$.

Aplicamos la regla de L'Hôpital para calcular el valor del límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen}(x)}{x^3} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - x \cdot \operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{3x^2} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) - x \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(x) - x \cdot \cos(x)}{6x} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\cos(x) - \cos(x) + x \cdot \operatorname{sen}(x)}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^+} (b \cdot \cos(x) - 1) = b - 1$$

$$\text{Como es continua} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow -\frac{1}{3} = b - 1 \Rightarrow b = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Luego, } a = 1; b = \frac{2}{3}$$

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}$, para $x \neq \pm 1$. Sabiendo que su gráfica tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(0,1)$ y es paralela a la recta $y = 2x$, calcula la asíntota oblicua y los valores de a y b .

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

La asíntota oblicua tiene de ecuación $y = mx + n$. Como es paralela a $y = 2x$, entonces $m = 2$. Como pasa por el punto $(0,1) \Rightarrow 1 = 0 + n \Rightarrow n = 1$, luego la asíntota oblicua es: $y = 2x + 1$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^3 - x} = \frac{a}{1} = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{bx^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} \right) = \frac{b}{1} = 1 \Rightarrow b = 1$$

Luego: $a = 2$; $b = 1$

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi)$, donde arctg denota la función arcotangente.

a) Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de f . Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x)}$.

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x + \pi)}{1 + (x + \pi)^2} = 0 \Rightarrow x = -\pi$$

	$(-\infty, -\pi)$	$(-\pi, +\infty)$
Signo f''	+	-
Función	Cx	Cn

La función es cóncava en $(-\pi, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, -\pi)$

Puntos de inflexión en $(-\pi, 0)$

b) Calculamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'HOPITAL} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1 + (x + \pi)^2}}{\cos(x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

- a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
b) Estudia y halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x^2 - (x^2 + 1)}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -1$$

	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	–	+
Función	D	C

La función es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$

- b) Tiene un mínimo relativo en $(1, \ln 2)$ que además es mínimo absoluto. No tiene máximo absoluto.

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\ln(1+x) - x) + b(e^x - 1) + 1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} = 5$

Donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\ln(1+x) - x) + b(e^x - 1) + 1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{0}{0} \text{ Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\ln(1+x) - x) + b(e^x - 1) + 1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) + b \cdot e^x + \sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{b}{0}$$

Como el límite es finito, entonces, $b = 0$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

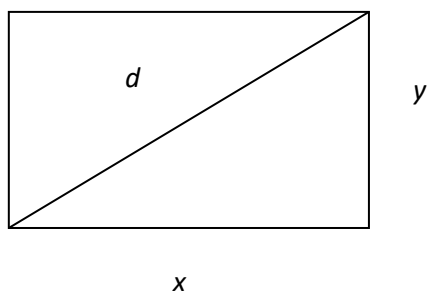
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) + \sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{0}{0} \text{ Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) + \sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right) + \cos(x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)} = \frac{-a+1}{2} = 5 \Rightarrow a = -9$$

Luego, los valores son: $a = -9$; $b = 0$

De entre todos los rectángulos de área 25 cm^2 , determina las dimensiones de aquel en el que el producto de las longitudes de sus dos diagonales sea el menor posible.
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo: $d^2_{\min} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$

b) Relación entre las variables: $x \cdot y = 25 \Rightarrow y = \frac{25}{x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$d^2_{\min} = x^2 + \frac{625}{x^2} = \frac{x^4 + 625}{x^2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero:

$$d^2'_{\min} = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4 + 625)}{x^4} = \frac{2x^4 - 1250}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{625} = 5$$

e) Comprobamos que es un mínimo

$$d^2''_{\min} = \frac{8x^3 \cdot x^3 - 3x^2(2x^4 - 1250)}{x^6} = \frac{2x^4 + 3750}{x^4} \Rightarrow d^2''(x=5) = \frac{1250 + 3750}{625} = 8 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, es un cuadrado de lado $x = 5 \text{ cm}$; $y = 5 \text{ cm}$

Considera la función definida por $f(x) = \frac{ax^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3}$, para $x^2 + bx - 3 \neq 0$.

a) Calcula a y b para que $y = x - 2$ sea una asíntota oblicua de la gráfica de f .

b) Estudia y halla las asíntotas verticales de la gráfica de f cuando $a = 0$ y $b = 2$

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) La asíntota oblicua tiene de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + x - 1}{x^3 + bx^2 - 3x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3ax^2 + 1}{3x^2 + 2bx - 3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6ax}{6x + 2b} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6a}{6} = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3} - x \right) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax^3 + x - 1 - x^3 - bx^2 + 3x}{x^2 + bx - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-bx^2 + 4x - 1}{x^2 + bx - 3} \right) = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2bx + 4}{2x + b} \right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2b}{2} \right) = -2 \Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

b) Calculamos las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$

Igualamos el denominador a 0.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2x+2} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{-4}{0^+} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

Luego, $x = -3$ es una asíntota vertical

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + e^x(x^2 + 1) = e^x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

Luego, la función es creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$y'' = e^x(x^2 + 2x + 1) + (2x + 2) \cdot e^x = e^x(x^2 + 4x + 3) = 0 \Rightarrow x = -1; x = -3$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
Signo $f''(x)$	+	—	+
Función	Cx	Cn	Cx

Luego, la función es convexa en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ y cóncava en $(-3, -1)$

Puntos de inflexión en $(-3, 10e^{-3})$ y $(-1, 2e^{-1})$.

Sea la función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} + b \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ donde

$\ln$ denota la función logaritmo neperiano

a) Determina a y b .

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} a e^{-x} + b \ln(1-x) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln(1+x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 0$$

Calculamos $f'(x) = \begin{cases} \frac{-b}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 + \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Como es derivable se cumple que: $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow -b = 2 \Rightarrow b = -2$

Luego, $a = 0$; $b = -2$

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1 + \frac{1}{1+0} = 2$$

Luego la recta tangente en $x = 0$ es $y - 0 = 2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 2x$

La ecuación de la recta normal en $x = 0$ es:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2} (x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2} x$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x)$

Halla a , b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$

MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $f'(x) \Rightarrow f'(x) = -b \operatorname{sen}(x) + c \cos(x)$

A continuación, aplicamos las condiciones del problema.

$$\text{Tangente en } x = \frac{\pi}{2} \text{ es } y = 1 \Rightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -b \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + c \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow a + b \cos\frac{\pi}{2} + c \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow a + c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Pasa por } (0, -1) \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow a + b \cos 0 + c \operatorname{sen} 0 = -1 \Rightarrow a + b = -1$$

Resolviendo las tres ecuaciones, tenemos que: $a = -1$; $b = 0$; $c = 2$

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II 2024 JULIO EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y' = e^{-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}; x = 1$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$(1, \infty)$
Signo y'	-	+	-
Función	D	C	D

Decreciente $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$. Creciente $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

b) Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{e^{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y = 0$.

Luego, el mínimo absoluto coincide con el mínimo relativo y el máximo absoluto coincide con el máximo relativo

$$\text{mínimo relativo} = \text{mínimo absoluto} = \left(-\frac{1}{2}, -e^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$\text{máximo relativo} = \text{máximo absoluto} = \left(1, \frac{1}{2e}\right)$$

Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

MATEMÁTICAS II. 2024. MODELO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

Los números son x e y .

a) Función que queremos que sea máximo: $P_{\max} = y \cdot \sqrt{x}$

b) Relación entre las variables: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

c) Sustituimos en la función: $P_{\max} = (1 - x) \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x} - \sqrt{x^3}$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3x^2}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1-3x=0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

e) Comprobamos el valor que corresponde a un máximo.

$$P'' = \frac{-3 \cdot 2\sqrt{x} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1-3x)}{4x} = \frac{-6\sqrt{x} - \frac{1-3x}{\sqrt{x}}}{4x}$$

$$P''\left(x = \frac{1}{3}\right) = \frac{-6\sqrt{\frac{1}{3}} - 0}{4 \cdot \frac{1}{3}} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, los números son: $x = \frac{1}{3}$; $y = 1 - x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$