PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

PROBLEMAS CON NÚMEROS

Ejercicio 1

> *Hallar dos números cuya suma sea igual a* 100 *y su producto sea máximo.*

Solución.

Sean x y $100 - x$ los números buscados.

$$P(x) = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2$$
$$P'(x) = 100 - 2x = 0 \implies x = 50$$
$$P''(x) = -2 \implies P''(50) = -2 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } x = 50$$

Luego los números pedidos serán 50 y $100 - 50 = 50$.

Ejercicio 2

> *Un número y el cuadrado de otro suman* 48. *¿Cómo deben elegirse dichos números para que su producto sea máximo?*

Solución.

Llamamos x e y a los números pedidos. La función a maximizar es el producto, mientras que la ecuación de ligadura será la suma de los dos números.

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = xy \\ x + y^2 = 48 \implies x = 48 - y^2 \end{array}\right\} \implies P(y) = \left(48 - y^2\right) \cdot y = 48y - y^3$$

$$P'(y) = 48 - 3y^2 = 0 \implies y^2 = 16 \implies \begin{cases} y = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$P''(y) = -6y \implies \begin{cases} P''(4) = -24 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } y = 4 \\ P''(-4) = 24 > 0 \xRightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } y = -4 \end{cases}$$

Por lo tanto los dos números pedidos son $x = 48 - 4^2 = 32$ e $y = 4$

Ejercicio 3

> *Encontrar dos números cuya suma sea* 120 *y tales que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo*

Solución.

Sean x y $120 - x$ los números buscados.

$$P(x) = (120 - x) \cdot x^2 = 120x^2 - x^3$$

$$P'(x) = 240x - 3x^2 = 3x \cdot (80 - x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 80 \end{cases}$$

$$P''(x) = 240 - 6x \implies \begin{cases} P''(0) = 240 > 0 \xRightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } x = 0 \\ P''(80) = -240 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } x = 80 \end{cases}$$

Luego los números pedidos serán 80 y $120 - 80 = 40$.

Ejercicio 4

> *Descomponer el número 100 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más tres veces el cuadrado del segundo sea mínimo.*

Solución.

Sean x y $100 - x$ los números buscados.

$$\begin{aligned} &P(x) = 2 \cdot (100 - x)^2 + 3x^2 = 20000 + 2x^2 - 400x + 3x^2 = 5x^2 - 400x + 20000 \\ &P'(x) = 10x - 400 = 0 \implies x = 40 \\ &P''(x) = 10 \implies P''(40) = 10 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } x = 40 \end{aligned}$$

Luego los números pedidos serán 40 y $100 - 40 = 60$.

Ejercicio 5

> *Descomponer el número 4 en dos sumandos de manera que la suma del cuadrado del primero y el cubo del segundo sea mínima. Razonar la respuesta.*

Solución.

Sean x y $4 - x$ los números buscados.

$$\begin{aligned} &P(x) = (4 - x)^2 + x^3 = x^3 + x^2 - 8x + 16 \\ &P'(x) = 3x^2 + 2x - 8 = 0 \implies x = \frac{12 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} \implies \begin{cases} x = 4/3 \\ x = -2 \end{cases} \\ &P''(x) = 6x + 2 \implies \begin{cases} P''(-2) = -10 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = -2 \\ P''(4/3) = 10 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } x = 4/3 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego los números pedidos serán $4/3$ y $4 - 4/3 = 8/3$.

Ejercicio 6

> *Descomponer el número 36 en dos sumandos positivos de modo que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.*

Solución.

Sean x y $36 - x$ los números buscados.

$$\begin{aligned} &P(x) = (36 - x) \cdot x^2 = 36x^2 - x^3 \\ &P'(x) = 72x - 3x^2 = 3x \cdot (24 - x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 24 \end{cases} \\ &P''(x) = 72 - 6x \implies \begin{cases} P''(0) = 72 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } x = 0 \\ P''(24) = -72 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = 24 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego los números pedidos serán 24 y $36 - 24 = 12$.

Ejercicio 7

> *Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima. Razona la respuesta*

Solución.

Sea x el número buscado.

$$D(x) = x - x^2$$
$$D'(x) = 1 - 2x = 0 \implies x = 1/2$$
$$D''(x) = -2 \implies D''(1/2) = -2 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } x = 1/2$$

Luego el número pedido es $1/2$.

Ejercicio 8

> *El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Se divide el rubí en dos partes. Se pide en qué proporción deben de estar para que el valor de las dos partes sea máximo y cuál es la pérdida de valor.*

Solución.

Supongamos que el peso del rubí es p. Si lo dividimos en dos partes y una de ellas tiene un peso de x, la otra pesará $p - x$.

Como el valor es proporcional al cuadrado del peso cada uno de ellos valdrá:

$$\text{Parte}_1 \xRightarrow{\text{Peso}=x} V_1(x) = kx^2$$
$$\text{Parte}_2 \xRightarrow{\text{Peso}=p-x} V_2(x) = k \cdot (p - x)^2$$
$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = kx^2 + k \cdot (p - x)^2 = 2kx^2 - 2kpx + kp^2$$
$$V'(x) = 4kx - 2kp = 0 \implies x = \frac{2kp}{4k} = \frac{p}{2}$$
$$V''(x) = 4k \implies V''(p/2) = 4k > 0 \xRightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } x = \frac{p}{2}$$

No tenemos que perder de vista que una función puede alcanzar el máximo en los extremos del intervalo, en este caso $x = 0$ y $x = p$, que corresponden a la situación en la que no dividimos el rubí.

Si estudiamos el crecimiento de la función $V(x)$ vemos que:

	$(0, p/2)$	$(p/2, p)$
Signo $V'(x)$	-	+
$V(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Vemos que la función alcanza el máximo en los extremos, es decir, que el rubí vale más si no se divide. De hecho si hallamos el valor del rubí al dividirlo por la mitad:

$$V(p/2) = 2k \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2kp \cdot \left(\frac{p}{2}\right) + kp^2 = \frac{1}{2}kp^2$$

Lo que quiere decir que el rubí pierde la mitad de su valor.

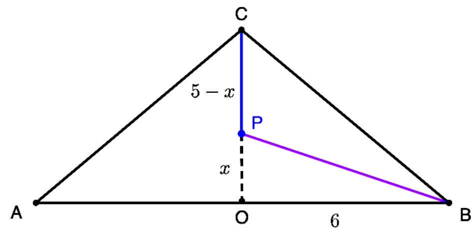
PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Ejercicio 9

Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m. Encuentra un punto sobre la altura tal que la suma de distancias a los tres vértices sea mínima.

Solución.

Llamamos x a la distancia del punto a la base, con lo que la suma de distancias a los tres vértices serán:



$$\begin{aligned} d(x) &= d(P,A) + d(P,B) + d(P,C) \\ &= 2 \cdot d(P,B) + d(P,C) = 2 \cdot \sqrt{x^2+6^2} + (5-x) \\ &= 2\sqrt{x^2+36} + 5 - x \end{aligned}$$

$$d'(x) = \cancel{2} \cdot \frac{2x}{\cancel{2} \cdot \sqrt{x^2+36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}} = 0 \implies 2x = \sqrt{x^2+36}$$
$$\implies 4x^2 = x^2 + 36 \implies 3x^2 = 36 \implies \begin{cases} \cancel{x = -2\sqrt{3}} \\ x = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función $d(x)$

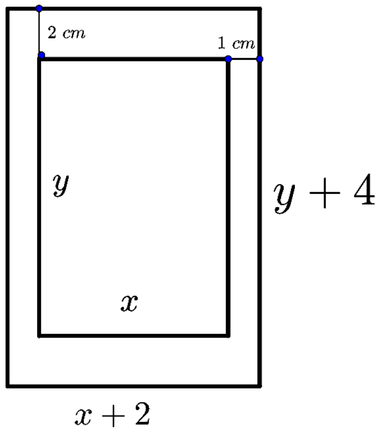
	$\left(0, 2\sqrt{3}\right)$	$\left(2\sqrt{3}, 5\right)$
Signo $d'(x)$	-	+
$d(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Por lo tanto la suma de distancias a los vértices es mínima para $x = 2\sqrt{3}$ m.

Ejercicio 10

Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm . Calclar las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo

Solución.



Llamamos x e y a las dimensiones del texto, mientras que serán $x+2$ e $y+4$ las dimensiones de la hoja (lo hemos planteado así para que sea más fácil despejar y) La superficie del texto y la del papel serán:

$$\left.\begin{array}{l} S_{texto}(x,y) = xy = 18 \implies y = \dfrac{18}{x} \\ S_{papel}(x,y) = (x+2)\cdot(y+4) \end{array}\right\}$$

$$\implies S(x) = (x+2)\cdot\left(\frac{18}{x}+4\right) = \frac{4x^2+26x+36}{x}$$

$$S'_{papel}(x) = \frac{4x^2-36}{x^2} = 0 \implies 4x^2-36=0 \implies \begin{cases} \cancel{x=-3} \\ x=3 \end{cases}$$

$$S''_{papel}(x) = \frac{72}{x^3} \implies S''_{papel}(3) = \frac{8}{9} > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } x=3$$

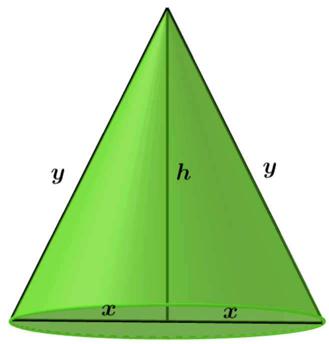
Por lo tanto las dimensiones del papel deberán ser $x+2=5$ cm e $y+4=\dfrac{18}{3}+4=10$ cm

Ejercicio 11

> *Un triángulo isósceles de perímetro* 10 *m gira alrededor de la altura correspondiente a su lado desigual, engendrando un cono. Halla sus lados para que el cono tenga volumen máximo.*

Solución.

Llamamos $2x$ a la base del triángulo e y a los otros dos lados. El volumen del cono y el perímetro del triángulo serán:



$$\left.\begin{array}{l} V(x,h) = \dfrac{1}{3}\cdot S_{base}\cdot h = \dfrac{\pi}{3}x^2 h \\ \left.\begin{array}{l} P(x,y) = 2x + 2y = 10 \implies y = 5 - x \\ x^2 + h^2 = y^2 \implies h = \sqrt{y^2 - x^2} \end{array}\right\} \implies h = \sqrt{(5-x)^2 - x^2} = \sqrt{5\cdot(5-2x)} \end{array}\right\}$$

$$\implies V(x) = \frac{\pi}{3}x^2\cdot\sqrt{5\cdot(5-2x)} = \frac{\pi\sqrt{5}}{3}\cdot x^2\cdot\sqrt{5-2x} = \frac{\pi\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{5x^4 - 2x^5}$$

$$V'(x) = \frac{\pi\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{20x^3 - 10x^4}{2\sqrt{5x^4-2x^5}} = \frac{\pi\sqrt{5}}{6}\cdot\frac{10x^3\cdot(2-x)}{\sqrt{5x^4-2x^5}} = 0 \implies x = \{0, 2\}$$

Para determinar si los puntos singulares son máximos o mínimos haremos el signo de $V'(x)$, que parece más sencillo que hallar $V''(x)$. La variable x está acotada entre $(0,5)$, que corresponden a un segmento vertical o uno horizontal.

	$(0,2)$	$(2,5)$
Signo $V'(x)$	$+$	-
$V(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

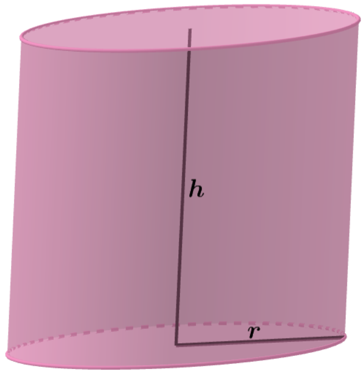
Por lo tanto $V(x)$ tiene un *máximo* en $x = 2$. En ese caso las dimensiones del triángulo serán: $2x = 4 \quad \& \quad y = 5 - 2 = 3$, mientras que el volumen del cono será: $V(2) = \dfrac{4\pi\sqrt{5}}{3}\ u^3$

Ejercicio 12

> *Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto de área total* 150 cm^2 *y volumen máximo. Determinar su generatriz y su radio.*

Solución.

Sean r el radio del cono y h su altura.
El área total del cilindro y su volumen serán:



$$\left.\begin{array}{l} A_{total} = \underbrace{2\pi r^2}_{A_{bases}} + \underbrace{2\pi r h}_{A_{lateral}} = 150 \implies h = \dfrac{75 - \pi r^2}{\pi r} \\ \\ V(r,h) = A_{base} \cdot h = \pi r^2 h \end{array}\right\}$$

$$\implies V(r) = \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cdot \frac{75 - \pi r^2}{\cancel{\pi r}} = 75r - \pi r^3$$

$$V'(r) = 75 - 3\pi r^2 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{r = -5/\sqrt{\pi}} \\ r = 5/\sqrt{\pi} \end{cases}$$

$$V''(r) = -6\pi r \implies V''(5/\sqrt{\pi}) = -30\sqrt{\pi} < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } r = 5/\sqrt{\pi}$$

Por lo tanto el volumen máximo se obtiene con una lata de dimensiones: $r = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}}$ y $h = \dfrac{75 - \pi \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{\pi \cdot \frac{5}{\sqrt{\pi}}} = \dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$

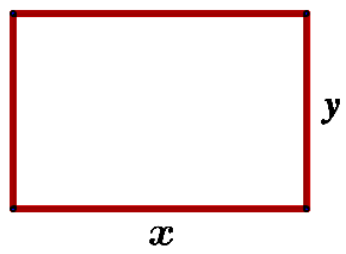
El resultado de este ejercicio se puede generalizar ya que, con carácter general, para un área total dada el volumen del cilindro se hace máximo cuando el diámetro de la base circular coincide con su algura ($h = 2r$). Y viceversa, para un volumen dado la superficie total se hace mínima si $h = 2r$.
Se trata del problema clásico de la optimización del bote cilíndrico de conserva para que la repercusión de la lata en el precio del producto, sea mínima.

Ejercicio 13

En un concurso nos ha correspondido un campo rectangular. Sus dimensiones debemos fijarlas nosotros con la condición de que su perímetro sea de 400 m. ¿Qué dimensiones debe tener el campo para obtener el máximo de superficie?

Solución.

Sean x e y las dimensiones del campo.
Su área y su perímetro serán:



$$\left.\begin{array}{l} S(x,y) = xy \\ P = 2x + 2y = 400 \implies y = 200 - x \end{array}\right\} \implies S(x) = x \cdot (200 - x) = 200x - x^2$$

$$S'(x) = 200 - 2x = 0 \implies x = 100$$

$$S''(x) = -2 \implies S''(100) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } x = 100$$

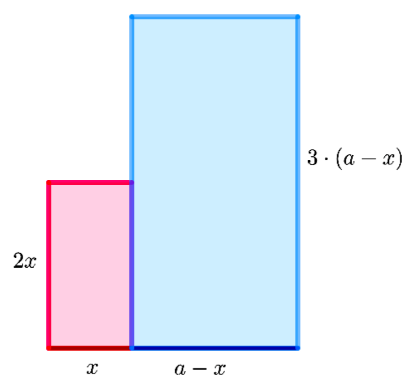
Por lo tanto la superficie máxima se produce con una dimensiones $x = 100\ m$ e $y = 200 - 100 = 100\ m$, y asciende a $S(100) = 100 \cdot 100 = 10000\ m^2$

Ejercicio 14

Sea un segmento de longitud a que se divide en dos partes, que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos su altura es el doble de la base y en el otro su altura es el triple de su base. Determinar el punto de división de modo que la suma de sus áreas sea mínima.

Solución.

Partimos el segmento a en dos porciones: x y $a - x$.
La función a minimizar es la suma de áreas:



$$S(x) = \underbrace{x \cdot 2x}_{S_1} + \underbrace{(a - x) \cdot 3 \cdot (a - x)}_{S_2}$$
$$= 2x^2 + 3a^2 - 6ax + 3x^2 = 5x^2 - 6ax + 3a^2$$

$$S'(x) = 10x - 6a = 0 \implies x = \frac{3a}{5}$$

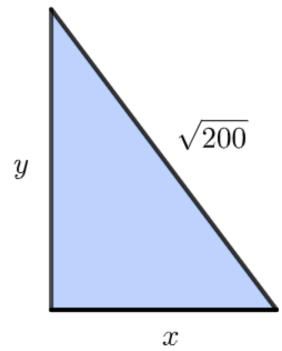
$$S''(x) = 10 \implies S(3a/5) = 10 > 0 \overset{(\cup)}{\Longrightarrow} \text{Mínimo en } x = \frac{3a}{5}$$

Por lo tanto el área de los rectángulos será mínima si dividimos el segmento en dos porciones de longitudes $x = \dfrac{3a}{5}$ & $a - x = a - \dfrac{3a}{5} = \dfrac{2a}{5}$

Ejercicio 15

> *Aprovechando como hipotenusa una vlla de $\sqrt{200}$ m de longitud, se desea acotar una superficie triangular de área máxima. Qué medidas deberán tener los otros dos lados (catetos)?*

Solución.



Sean x e y los catetos del triángulo. La función a optimizar es el área del mismo La función a minimizar es la suma de áreas:

$$\left.\begin{aligned} &S(x,y) = xy \\ &x^2 + y^2 = 200 \implies y = \sqrt{200 - x^2} \end{aligned}\right\}$$

$$\implies S(x) = x \cdot \sqrt{200 - x^2} = \sqrt{200x^2 - x^4}$$

$$S'(x) = \frac{400x - 4x^3}{2\sqrt{200x^2 - x^4}} = 0 \implies 400x - 4x^3 = 4x \cdot \left(100 - x^2\right) = 0 \implies x = \{\cancel{-10}, 0, 10\}$$

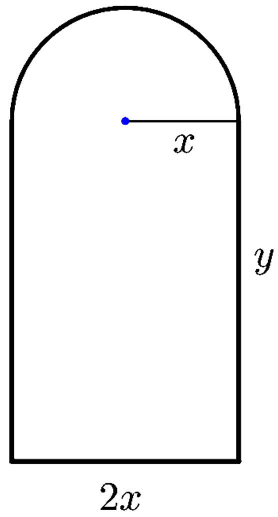
	$(0, 10)$	$\left(10, \sqrt{200}\right)$
Signo $S'(x)$	+	-
$S(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Luego la superficie máxima se obtiene con $x = 10$ m e $y = \sqrt{200 - 10^2} = 10$ m.

Ejercicio 16

> *Una ventana* normanda *consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10 m.*

Solución.



Llamamos $2x$ e y a las dimensiones de la ventana tal y como se muestra en la figura.

$$\left.\begin{array}{l} S(x,y) = \underbrace{2xy}_{S_{rectang}} + \underbrace{\dfrac{\pi x^2}{2}}_{S_{semicirc}} \\ P(x,y) = \underbrace{2x+2y}_{P_{rectang.}} + \underbrace{\pi x}_{P_{Semic.}} = 10 \implies y = 5 - x \cdot \dfrac{2+\pi}{2} \end{array}\right\}$$

$$\implies S(x) = 2x \cdot \left(5 - x \cdot \frac{2+\pi}{2}\right) + \frac{\pi x^2}{2} = 10x - x^2 \cdot \frac{4+\pi}{2}$$

$$S'(x) = 10 - (4+\pi) \cdot x = 0 \implies x = \frac{10}{4+\pi}$$

$$S''(x) = -(4+\pi) \implies S''\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = -(4+\pi) < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = \frac{10}{4+\pi}$$

Por tanto la ventana tendrá una superficie máxima para unas dimensiones:

$$x = \frac{10}{4+\pi} \quad \& \quad y = 5 - \frac{10}{4+\pi} \cdot \frac{2+\pi}{2} = \frac{10}{4+\pi}$$

———— ∘ ————

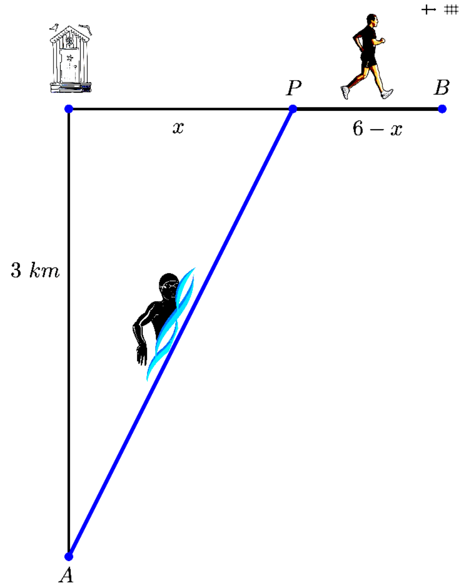
Ejercicio 17

Un nadador, A, se encuentra a 3 km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 km de la caseta.
Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.

Solución.

Llamamos x a la distancia de la caseta al punto P de la playa al que debe llegar nadando.
Para alcanzar el punto B tendrá que recorrer:

$\overline{AP} = \sqrt{x^2+9}$ a $3\ km/h$ & $\overline{PB} = 6-x$ a $5\ km/h$



El tiempo empleado en hacer el recorrido será:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$$

$$t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 3\sqrt{x^2+9}}{15\sqrt{x^2+9}} = 0$$

$$\Longrightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+9} \Longrightarrow 25x^2 = 9\cdot\left(x^2+9\right)$$

$$\Longrightarrow 16x^2 = 81 \Longrightarrow \begin{cases} \cancel{x = -9/4} \\ x = 9/4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $t'(x)$

	$(0, 9/4)$	$(9/4, 6)$
Signo $t'(x)$	-	+
$t(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El nadador debe dirigirse a nado a un punto que diste $\frac{9}{4} = 2{,}25\ km$ de la caseta.

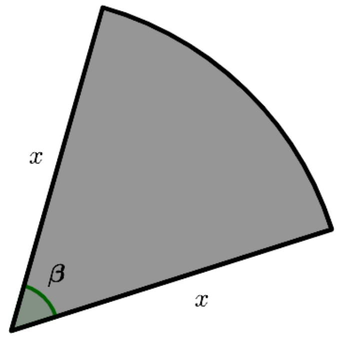
El tiempo que tardará en llegar a B es: $t(2{,}25) = \frac{\sqrt{2{,}25^2+9}}{3} + \frac{6-2{,}25}{5} = 2\ h$

Ejercicio 18

> *Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 m de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la mayor superficie posible?*

Solución.

Sea x el radio del parterre y β su ángulo.



$$\left.\begin{array}{l} S(x,y) = \cancel{\pi}x^2 \cdot \dfrac{\beta}{2\cancel{\pi}} = \dfrac{\beta x^2}{2} \\ P(x,y) = 2x + 2\cancel{\pi}x \cdot \dfrac{\beta}{2\cancel{\pi}} = 10 \implies \beta = \dfrac{10-2x}{x} \end{array}\right\}$$

$$\implies S(x) = \frac{10-2x}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{2} = 5x - x^2$$

$$S'(x) = 5 - 2x = 0 \implies x = \frac{5}{2}$$

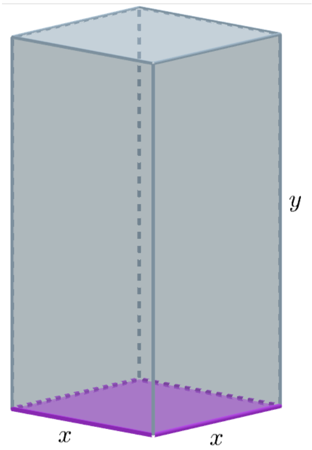
$$S''(x) = -2 \implies S''(5/2) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = \frac{5}{2}$$

Por tanto la mayor superficie se obtiene con un radio de $x = \dfrac{5}{2}$ y una amplitud de $\beta = \dfrac{10 - 2\cdot\frac{5}{2}}{5/2} = 2$ radianes.

Ejercicio 19

Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma rectangular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material pero para la base debemos emplear un material un 50 % más caro.
Hallar las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

Solución.



Llamamos x al lado de la base e y a la altura del prisma. Asimismo denominaremos p al precio por cm^2 de la tapa y de la superficies laterales y 1,5p al de la base.

$$\left.\begin{array}{l} C(x,y) = p\cdot(4xy + x^2) + 1{,}5px^2 \\ V_{prisma}(x,y) = x^2y = 80 \implies y = \dfrac{80}{x^2} \end{array}\right\}$$

$$\implies C(x) = p\cdot\left(4\cancel{x}\cdot\frac{80}{x^{\cancel{2}}} + x^2\right) + 1{,}5px^2 = 2{,}5px^2 + \frac{320p}{x}$$

$$C'(x) = 5px - \frac{320p}{x^2} = 0 \implies 5px^3 = 320p \implies x = 4$$

$$C''(x) = 5p + \frac{640p}{x^3} \implies C''(4) = 15p > 0 \xRightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } x = 4$$

Por tanto el menor coste se produce con unas dimensiones $x = 4$ cm e $y = \dfrac{80}{16} = 5$ cm.

Ejercicio 20

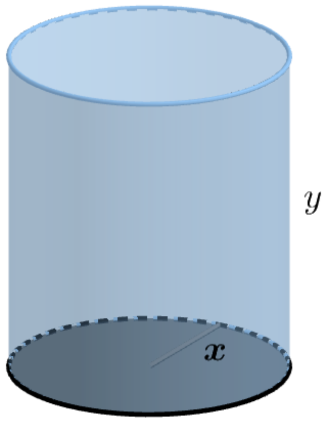
Se desea construir un depósito cilíndrico de 10 m^3 abierto por arriba. Sabiendo que el material de la base es cinco veces más caro que el de las paredes, hallar las dimensiones que limitan el coste de material.

Solución.

Llamamos x al radio de la base e y a la altura del cilindro según muestra la figura. Asimismo llamamos p al coste del m^2 de las paredes y $5p$ el de la base

$$\left.\begin{array}{l} C(x,y) = p\cdot 2\pi xy + 5p\cdot \pi x^2 \\ V_{cilindro}(x,y) = \pi x^2 y = 10 \implies y = \dfrac{10}{\pi x^2} \end{array}\right\}$$

$$\implies C(x) = p\cdot 2\cancel{\pi x}\cdot \frac{10}{\cancel{\pi x^2}} + 5p\cdot \pi x^2 = 5p\pi x^2 + \frac{20p}{x}$$



$$C'(x) = 10p\pi x - \frac{20p}{x^2} = 0 \implies 10p\cdot \pi x^3 = 20p \implies x = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$

$$C''(x) = 10p\pi + \frac{40p}{x^3} \implies C''\left(\sqrt[3]{2/\pi}\right) = 30p\pi > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } x = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$

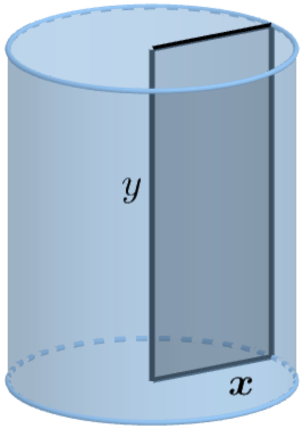
Por tanto el menor coste se produce con unas dimensiones:

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\ m \quad \& \quad y = \frac{10}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}} = 5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\ m.$$

Ejercicio 21

> *Hallar la base x y la altura y de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm, que al dar una vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.*

Solución.



Sean x e y las dimensiones de la cartulina de la figura.

$$\left.\begin{array}{l} V_{cilindro}(x,y) = \pi x^2 y \\ P_{cartulina} = 2x + 2y = 60 \implies y = 30 - x \end{array}\right\}$$
$$\implies V(x) = \pi x^2 \cdot (30 - x) = 30\pi x^2 - \pi x^3$$

$$V'(x) = 60\pi x - 3\pi x^2 = 3\pi x \cdot (20 - x) = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = 0} \\ x = 20 \end{cases}$$

$$V''(x) = 60\pi - 6\pi x \implies V''(20) = -60\pi < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = 20$$

Por tanto el cilindro tendrá volumen máximo para $x = 20 \quad \& \quad y = 30 - 20 = 10$

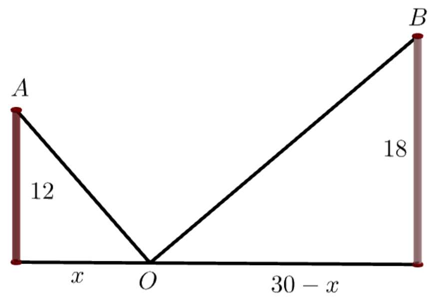
Ejercicio 22

> *Dos postes de 12 y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los dos extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud del cable sea mínima?*

Solución.

Hallamos la distancia del cable como suma de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{12^2 + x^2} + \sqrt{(30-x)^2 + 18^2} \\ &= \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{x^2 - 60x + 1224} \end{aligned}$$



$$d'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{144+x^2}} + \frac{\cancel{2}x - \cancel{60}^{30}}{\cancel{2}\sqrt{x^2-60x+1224}}[2mm] = \frac{x}{\sqrt{144+x^2}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1224}} = 0$$

$$\Longrightarrow\ x \cdot \sqrt{x^2 - 60x + 1224} = (30-x) \cdot \sqrt{144+x^2}$$

$$\Longrightarrow\ x^2 \cdot \left(x^2 - 60x + 1224\right) = (30-x)^2 \cdot \left(144 + x^2\right)$$

$$\Longrightarrow\ \cancel{x^4} - \cancel{60x^3} + 1224x^2 = \cancel{x^4} - \cancel{60x^3} + 1044x^2 - 8640x + 129600$$

$$\Longrightarrow\ 180x^2 + 8640x - 129600 \ \Longrightarrow\ x^2 + 48x - 720 \ \Longrightarrow\ \begin{cases} \cancel{x = -60} \\ x = 12 \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función distancia $d(x)$.

	$(0,12)$	$(12,30)$
Signo $d'(t)$	-	$+$
$d(t)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

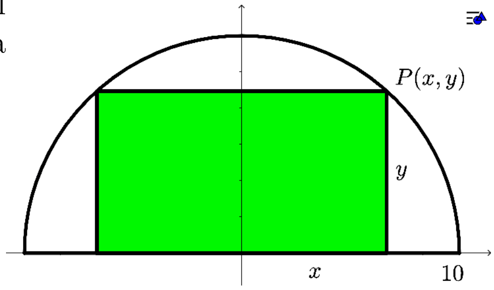
Por lo tanto la longitud mínima del cable se obtiene situando el anclaje del suelo a $x = 12\ m$ del poste pequeño y medirá: $\sqrt{12^2 + 12^2} + \sqrt{18^2 + 18^2} = 30\sqrt{2}\ m$.

Ejercicio 23

> *En un jardín con forma de semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.*

Solución.

Tomando como origen de coordenadas el centro del semicírculo, tenemos que $P(x,y)$ es un punto de la circunferencia $C \equiv x^2+y^2=10^2$



$$\left.\begin{array}{l} S_{parterre}(x,y)=2xy \\ P\in C \implies x^2+y^2=100 \implies y=\sqrt{100-x^2} \end{array}\right\}$$

$$\implies S(x)=2x\cdot\sqrt{100-x^2}=2\sqrt{100x^2-x^4}$$

$$S'(x)=\cancel{2}\cdot\frac{200x-4x^3}{\cancel{2}\sqrt{100x^2-x^4}}=\frac{4x\cdot(50-x^2)}{\sqrt{100x^2-x^4}}=0 \implies \begin{cases} \cancel{x=0} \\ \cancel{x=-5\sqrt{2}} \\ x=5\sqrt{2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $S'(x)$

	$\left(0,5\sqrt{2}\right)$	$\left(5\sqrt{2},10\right)$
Signo $S'(x)$	+	-
$S(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Por lo tanto la superficie del parterre será máxima para unas dimensiones de:

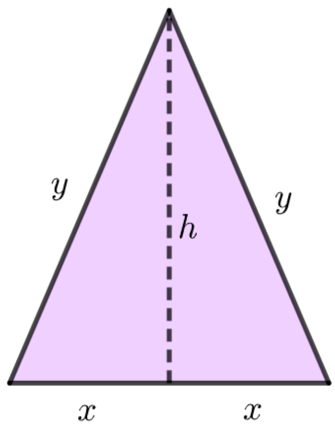
$$x=5\sqrt{2} \quad \& \quad y=\sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2}=5\sqrt{2}$$

Ejercicio 24

> *Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?*

Solución.
Solución.

Llamamos $2x$ a la base del triángulo e y a los lados iguales



$$\left.\begin{array}{l} S(x,h) = \dfrac{B \cdot h}{2} = \dfrac{\cancel{2}xh}{\cancel{2}} = xh \\ P(x,y) = 2x + 2y = 30 \implies x + y = 15 \implies y = 15 - x \\ y^2 = x^2 + h^2 \implies h = \sqrt{y^2 - x^2} \end{array}\right\}$$

$$\implies S(x) = x \cdot \sqrt{(15-x)^2 - x^2} = \sqrt{225x^2 - 30x^3}$$

$$S'(x) = \frac{450x - 90x^2}{2\sqrt{225x^2 - 30x^3}} = 0 \implies 450x - 90x^2 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = 0} \\ x = 5 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $S'(x)$

	$(0,5)$	$(5,15)$
Signo $S'(x)$	$+$	-
$S(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Por lo tanto la superficie del triángulo será máxima para unas dimensiones de sus lados: $x = 5 \quad \& \quad y = 15 - 5 = 10$

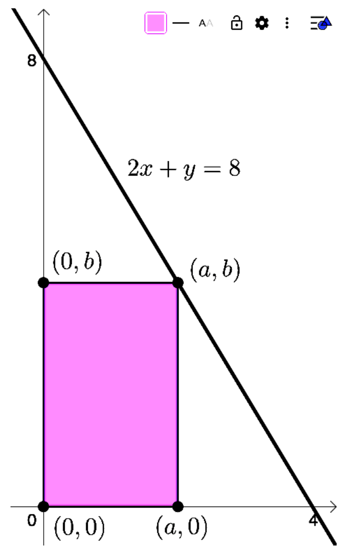
Ejercicio 25

Dentro del triángulo limitado por los ejes OX y OY y la recta $2x + y = 8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(a, 0)$, $(0, 0)$, (a, b) y $(0, b)$.

Determina el punto (a, b) al que corresponde el rectángulo de área máxima.

Solución.

Representamos la recta $2x + y = 8$ y los puntos del cuadrilátero (entendemos a y b positivos para poder verificarse el enunciado).
No tenemos que perder de vista que si un punto pertenece a una recta, como lo hace el (a, b) entonces ha de satisfacer su ecuación.



$$\left.\begin{array}{l} S_{rectang.}(a, b) = ab \\ (a, b) \in r \implies 2a + b = 8 \implies b = 8 - 2a \end{array}\right\}$$
$$\implies S(a) = a \cdot (8 - 2a) = 8a - 2a^2$$

$$S'(a) = 8 - 4a \implies a = 2$$
$$S''(a) = -4 \implies S''(2) = -4 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } a = 2$$

Por lo tanto la superficie máxima del cuadrilátero se produce para $a = 2$ y $b = 8 - 2a = 4$

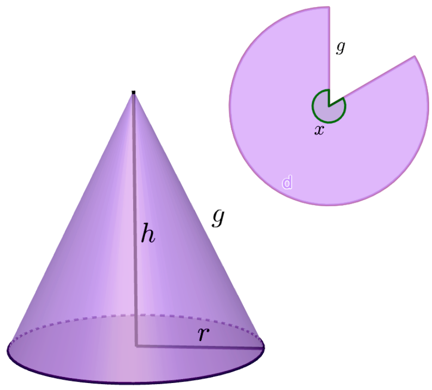
Ejercicio 26

Si de un disco metálico de radio g quitamos un sector circular podemos construir un vaso cónico.

Determinar el sector circular que debemos quitar para que el volumen del vaso sea máximo.

Solución.

Llamamos x al ángulo del sector circular de chapa con el que vamos a construir el cono, y g a su radio. Podríamos tender a llamar x al sector que retiramos del disco de chapa pero esto haría más engorrosa la resolución.
Hallamos el volumen del cono y establecemos las ecuaciones de ligadura.



$$\left.\begin{array}{l} V(r,h)=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{r^2=g^2-h^2} V(h)=\dfrac{\pi}{3}\cdot h\cdot (g^2-h^2)) \\ \left.\begin{array}{l} g^2=h^2+r^2 \implies h=\sqrt{g^2-r^2} \\ \cancel{2\pi} r=\cancel{2\pi} g\cdot\dfrac{x}{2\pi} \implies r=\dfrac{xg}{2\pi} \end{array}\right\} \implies h=\sqrt{g^2-\left(\dfrac{gx}{2\pi}^2\right)}=\dfrac{g}{2\pi}\cdot\sqrt{4\pi^2-x^2} \end{array}\right\}$$

$$\implies V(x)=\frac{\cancel{\pi}}{3}\cdot\frac{g}{2\cancel{\pi}}\cdot\sqrt{4\pi^2-x^2}\cdot\left[g^2-\frac{g^2}{4\pi^2}\cdot\left(4\pi^2-x^2\right)\right]$$

$$=\frac{g}{6}\cdot\sqrt{4\pi^2-x^2}\cdot\left(\cancel{g^2}-\cancel{g^2}+\frac{g^2x^2}{4\pi^2}\right)=\frac{g}{6}\cdot\sqrt{4\pi^2-x^2}\cdot\frac{g^2x^2}{4\pi^2}$$

$$=\frac{g^3}{24\pi^2}\cdot x^2\cdot\sqrt{4\pi^2-x^2}$$

$$V'(x)=\frac{g^3}{24\pi^2}\cdot\left(2x\cdot\sqrt{4\pi^2-x^2}+x^2\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{4\pi^2-x^2}}\right)=\frac{g^3}{24\pi^2}\cdot\frac{8\pi^2x-3x^3}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}$$

$$=\frac{g^3}{24\pi^2}\cdot\frac{x\cdot(8\pi^2-3x^2)}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}=0\implies\begin{cases}\cancel{x=0}\\ x=2\pi\sqrt{2/3}\end{cases}$$

Hallamos el signo de $V'(x)$

	$\left(0,2\pi\sqrt{2/3}\right)$	$\left(2\pi\sqrt{2/3},2\pi\right)$
Signo $V'(x)$	+	-
$V(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Por lo tanto el volumen máximo del cono se produce con una amplitud del sector circular de $x=2\pi\sqrt{2/3}$ *rad*.

Nota: Hay que frelexionar en este tipo de problemas que no hemos de obsesionarnos en conoseguir la función (volumen) con una determinada variable (en este caso x). Podríamos haberlo hecho con mucha más sencillez si ponemos el volumen en función de h, huscamos el máximo en función de esta variable y luego despejamos x con las otras relaciones que tenemos.

$$\left.\begin{array}{l} V_{cono}(r,h) = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \\ g^2 = h^2 + r^2 \implies r^2 = g^2 - h^2 \end{array}\right\} \implies V(h) = \frac{\pi}{3}\cdot(g^2-h^2)\cdot h = \frac{\pi}{3}\cdot(g^2h - h^3)$$

$$\cancel{2\pi} r = \cancel{2\pi} g \cdot \frac{x}{2\pi} \implies x = 2\pi\cdot\frac{r}{g}$$

$$\begin{aligned} V'(h) &= \frac{\pi}{3}\cdot\left(g^2 - 3h^2\right) = 0 \implies h = \frac{g}{\sqrt{3}} \\ V''(h) &= -2\pi h \implies V''(g/\sqrt{3}) = -\frac{2\pi g}{\sqrt{3}} < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } h = \frac{g}{\sqrt{3}} \\ r^2 &= g^2 - h^2 = g^2 - \frac{g^2}{3} = \frac{2g^2}{3} \implies r = g\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x &= 2\pi\cdot\frac{r}{g} = 2\pi\cdot\frac{\cancel{g}\sqrt{2/3}}{\cancel{g}} \implies x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

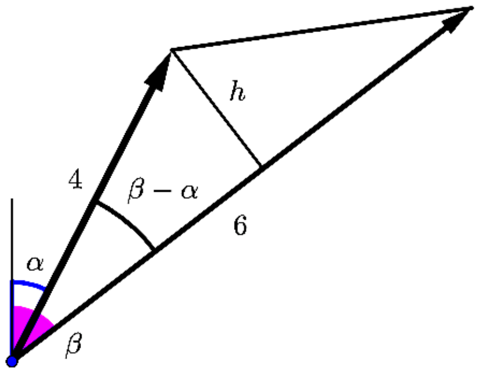
Luego la amplitud del sector circular que maximiza el volumen del cono es $x = 2\pi\sqrt{2/3}\,rad$.

Ejercicio 27

Las manecillas de un reloj miden 4 y 6 cm y, uniendo sus extremos, se forma un triángulo.
Determina el instante entre las 12 h y las 12 : 30, en el que el área del triángulo es máxima. ¿Qué ángulo recorre la aguja horaria en t minutos?

Solución.

Efectivamente la clave de este ejercicio está en pensar qué ángulo recorre cada una de las dos agujas en t minutos. Llamamos por tanto α al ángulo recorrido por la aguja de las horas y β el recorrido por la aguja de los minutos.



$$\left.\begin{array}{r} 60 \longrightarrow \dfrac{2\pi}{12} \\ t \longrightarrow \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = \frac{2\pi t}{60 \cdot 12} = \frac{\pi t}{360}$$

$$\left.\begin{array}{r} 60 \longrightarrow 2\pi \\ t \longrightarrow \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = \frac{2\pi t}{60} = \frac{\pi t}{30}$$

Debemos ahora referenciar la superficie del triángulo a éstos ángulos:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} S_{\triangle}(h) = \dfrac{B \cdot h}{2} = \dfrac{6h}{2} \\ h = 4 \cdot \operatorname{sen}(\beta - \alpha) \end{array}\right\} \Longrightarrow S_{\triangle}(\alpha, \beta) = \dfrac{6 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\cancel{2}} = 12 \cdot \operatorname{sen}(\beta - \alpha) \\ \left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi t}{360} \\ \beta = \dfrac{\pi t}{30} \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta - \alpha = \dfrac{\pi t}{30} - \dfrac{\pi t}{360} = \dfrac{11\pi t}{360} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow S(t) = 12 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi t}{360}\right)$$

$$S'(t) = \cancel{12} \cdot \cos\left(\frac{11\pi t}{\cancel{360}^{30}}\right) \cdot \frac{11\pi}{360} = \frac{11\pi}{30} \cdot \cos\left(\frac{11\pi t}{360}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{11\pi t}{360} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \frac{180}{11}$$

$$S''(t) = -\frac{121\pi}{10800} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi t}{360}\right)$$

$$\Longrightarrow S''\left(\frac{180}{11}\right) = -\frac{121\pi}{10800} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\cancel{11}\pi}{\cancel{360}^{2}} \cdot \frac{\cancel{180}}{\cancel{11}}\right) = -\frac{121\pi}{10800} < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } t = \frac{180}{11}$$

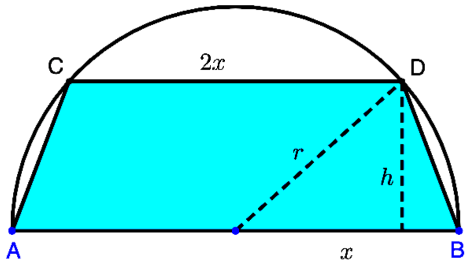
Por lo tanto el área máxima del triángulo se produce para $t = \dfrac{180}{11}$ minutos, es decir, a las 12 : 16 : 21.

Ejercicio 28

En una semicircunferencia de diámetro $AB = 2r$ se traza una cuerda CD paralela a AB. ¿Cuál debe ser la longitud de esa cuerda para que el área del trapecio $ABCD$ sea máxima?
Si llamamos E al punto medio del arco CD y dibujamos el pentágono $ACEDB$. Calcula la longitud de la cuerda CD para que el área del pentágono sea máxima.

Solución.

Llamamos r al radio de la circunferencia y $2x$ a la cuerda, tal y como se muestra en la figura. Nos apoyamos para la resolución en el triángulo que foman los catetos x y h y la hipotenusa r.



$$\left.\begin{array}{l} S(x,h) = \dfrac{B+b}{2}\cdot h = \dfrac{2r+2x}{2}\cdot h = (r+x)\cdot h \\ r^2 = x^2 + h^2 \implies h = \sqrt{r^2-x^2} \end{array}\right\} \implies S(x) = (r+x)\cdot\sqrt{r^2-x^2}$$

$$S'(x) = \sqrt{r^2-x^2} + (r+x)\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r^2-x^2-rx-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{-2x^2-rx+r^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0$$

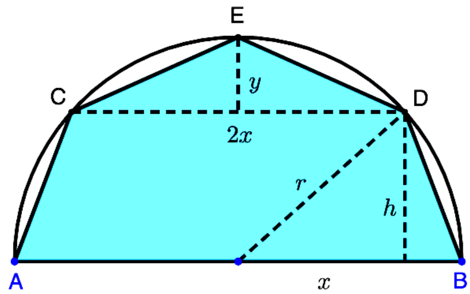
$$\implies x = \frac{r\pm\sqrt{r^2+8r^2}}{-4} = \frac{r\pm 3r}{-4} = \begin{cases} \cancel{x=-r} \\ x = \dfrac{r}{2} \end{cases}$$

Hallamos el signo de $S'(x)$

	$(0, r/2)$	$(r/2, r)$
Signo $S'(x)$	$+$	-
$S(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Por lo tanto la superficie del trapecio tiene un máximo para $x = r/2$, luego la longitud de la cuerda pedida es $2x = r$.

Calcularemos la superficie del pentágono como la suma de la superficie del trapecio inferior (que la obtendremos del apartado anterior) y el triángulo superior de altura y.



$$\left.\begin{array}{l} S(x,y) = \underbrace{(r+x)\cdot\sqrt{r^2-x^2}}_{S_{trapecio}} + \underbrace{\dfrac{\cancel{2}x\cdot y}{\cancel{2}}}_{S_{triangulo}} = (r+x)\cdot\sqrt{r^2-x^2}+xy \\ r^2 = x^2+h^2 \implies h=\sqrt{r^2-x^2} \\ y = r-h \end{array}\right\}$$

$$\implies S(x) = (r+x)\cdot\sqrt{r^2-x^2} + x\cdot\left(r-\sqrt{r^2-x^2}\right) = r\cdot\left(x+\sqrt{r^2-x^2}\right)$$

$$S'(x) = r\cdot\left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}}+1\right) = r\cdot\frac{\sqrt{r^2-x^2}-x}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0 \implies x=\sqrt{r^2-x^2}$$

$$\implies x^2 = r^2-x^2 \implies 2x^2=r^2 \implies x=\frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Estudiamos la monotonía de $S(x)$

	$(0, r\sqrt{2}/2)$	$(r\sqrt{2}/2, r)$
Signo $S'(x)$	$+$	-
$S(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

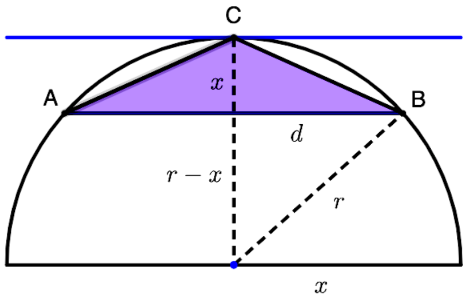
Por lo tanto el pentágono tendrá superficie máxima para $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$, esto es, para una longitud de cuerda de $2x=\sqrt{2}r$.

Ejercicio 29

En una circunferencia de radio r se traza la tangente en un punto cualquiera C una cuerda AB paralela a dicha tangente, obteniendo así, un triángulo ABC. Calcular la distancia del punto C a la cuerda para que el área del citado triángulo sea máxima.

Solución.

Llamamos x a la distancia del punto C a la cuerda AB y $2d$ a la medida de ésta.



$$\left.\begin{array}{l} S_{\triangle}(x,d) = \dfrac{B\cdot h}{2} = \dfrac{\cancel{2}d\cdot x}{\cancel{2}} = dx \\ r^2 = d^2 + (r-x)^2 \implies d = \sqrt{2rx - x^2} \end{array}\right\}$$

$$\implies S(x) = x\cdot\sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{2rx^3 - x^4}$$

$$S'(x) = \frac{6rx^2 - 4x^3}{2\cdot\sqrt{2rx^3 - x^4}} = \frac{x^2\cdot(3r-2x)}{\sqrt{2rx^3 - x^4}} = 0 \implies x^2\cdot(3r-2x) = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = 0} \\ x = \dfrac{3r}{2} \end{cases}$$

Hallamos el signo de $S'(x)$

	$(0, {}^{3r}/_{2})$	$({}^{3r}/_{2}, r)$
Signo $S'(x)$	$+$	-
$S(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

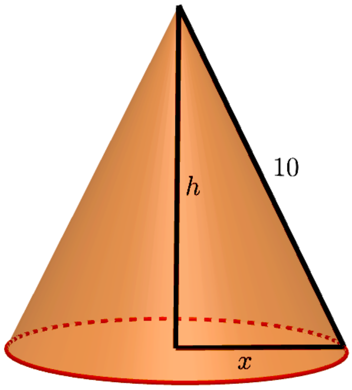
Por lo tanto la superficie del trapecio tiene un máximo para $x = {}^{3r}/_{2}$.

Ejercicio 30

> *Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm, y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?*

Solución.

Sean x el radio de la base del cono y h su altura. El volumen del cono será:



$$\left.\begin{array}{l} V(x,h) = \dfrac{1}{3}\pi x^2 h \\ x^2 + h^2 = 10^2 \implies h = \sqrt{100 - x^2} \end{array}\right\}$$

$$\implies V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \sqrt{100 - x^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{100x^2 - x^4}$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{200x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{100x^2 - x^4}} = \frac{\pi x \cdot (100 - 2x^2)}{3 \cdot \sqrt{100x^2 - x^4}} = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = 0} \\ \cancel{x = -5\sqrt{2}} \\ x = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función $V(x)$

	$\left(0, 5\sqrt{2}\right)$	$\left(5\sqrt{2}, 10\right)$
Signo $V'(x)$	+	-
$V(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

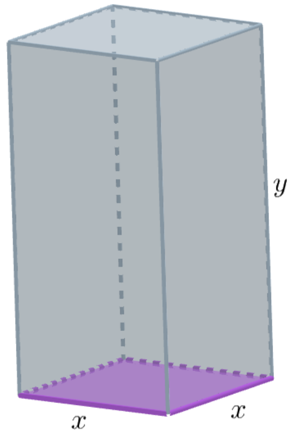
Por lo tanto el volumen máximo del cono se obtiene para un radio de $x = 5\sqrt{2}$ *cm*.

Ejercicio 31

Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3. Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima.

Solución.

Llamamos x al lado de la base e y a la altura del prisma.



$$\left.\begin{array}{l} S(x,y) = \underbrace{2x^2}_{S_{bases}} + \underbrace{4xy}_{S_{lateral}} \\ x^2y = 8 \implies y = \dfrac{8}{x^2} \end{array}\right\} \implies S(x) = 2x^2 + 4\cancel{x} \cdot \frac{8}{x^{\cancel{2}}} = \frac{2x^3+32}{x}$$

$$S'(x) = \frac{6x^2 \cdot x - (2x^3+32)}{x^2} = \frac{4x^3-32}{x^2} = 0 \implies x = 2$$

$$S''(x) = \frac{12x^2 \cdot x^2 - (4x^3-32) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4x^3+64}{x^3}$$

$$\implies S''(2) = 12 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } x = 2$$

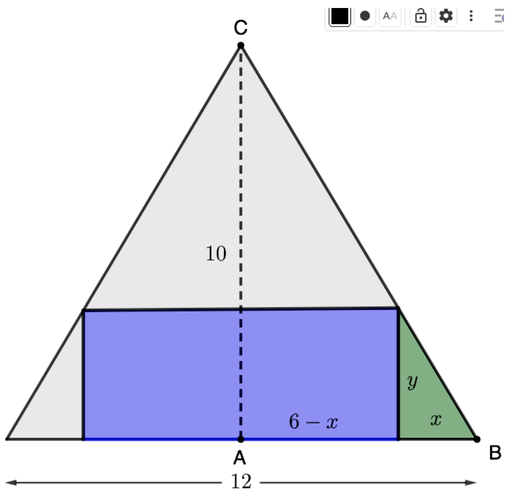
Por lo tanto la superficie de la caja será mínima para unas dimensiones de:
$x = 2\ dm \quad \& \quad y = \dfrac{8}{2^2} = 2\ dm.$

Ejercicio 32

> *En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:*
> *Halla las dimensiones del rectángulo que tenga área máxima.*

Solución.

Llamamos x e y a los catetos del triángulo verde de la figura, de manera que las dimensiones del rectángulo pedido serían $12 - 2x$ e y.
La ecuación de ligadura la sacamos de la semejanza del triángulo ABC y del triángulo verde.



$$\left.\begin{array}{l} A(x,y) = (12-2x)\cdot y = 12y - 2xy \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{12}{10} \implies y = \dfrac{5x}{6} \end{array}\right\}$$

$$\implies A(x) = 12\cdot\frac{5x}{6} - 2x\cdot\frac{5x}{6} = 10x - \frac{5x^2}{3}$$

$$A'(x) = 10 - \frac{10x}{3} = 0 \implies x = 3$$

$$A''(x) = -\frac{10}{3} \implies A''(3) = -\frac{10}{3} < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = 3$$

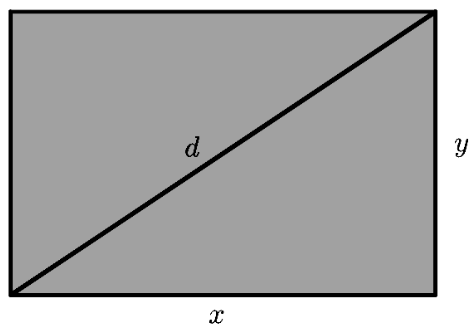
Por lo tanto el área del rectángulo es máxima para unas dimensiones de $12 - 2x = 6$ e $y = \dfrac{5x}{6} = \dfrac{5}{2}$.

Ejercicio 33

De todos los rectángulos de área 100 dm^2 halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.

Solución.

Llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo y d a su diagonal, tal y como muestra la figura adjunta.



$$\left.\begin{array}{l} d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ xy = 100 \implies y = \dfrac{100}{x} \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{100}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^4+10000}}{x}$$

$$d'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\cdot\sqrt{x^4+10000}}\cdot x - \sqrt{x^4+10000}}{x^2} = \frac{x^4-10000}{x^2\cdot\sqrt{x^4+10000}} \implies \begin{cases} \cancel{x=-10} \\ x = 10 \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función $d(x)$

	(0,10)	$(10, +\infty)$
Signo $d'(x)$	-	+
$d(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

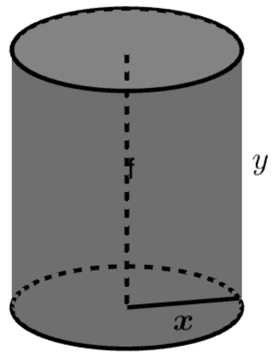
Por lo tanto la longitud de la diagonal es mínima para unas dimensiones del rectángulo de: $x = 10\ dm$ & $y = \dfrac{100}{10} = 10\ dm$

Ejercicio 34

Calcula la generatriz y el radio que debe tener un bote cilíndrico de leche condensada, cuya área total (incluyendo las dos tapas) es de 150 cm^2 para que su volumen sea máximo.

Solución.

Llamamos x al radio del cilindro e y a su altura (generatriz).



$$\left.\begin{array}{l} V(x,y) = \pi x^2 y \\ S(x,y) = \underbrace{2\pi x^2}_{S_{bases}} + \underbrace{2\pi xy}_{S_{lateral}} = 150 \implies y = \dfrac{150 - 2\pi x^2}{2\pi x} \end{array}\right\}$$

$$\implies V(x) = \cancel{\pi} x^{\cancel{2}} \cdot \frac{150 - 2\pi x^2}{2\cancel{\pi x}} = 75x - \pi x^3$$

$$V'(x) = 75 - 3\pi x^2 = 0 \implies x^2 = \frac{25}{\pi} \implies \begin{cases} \cancel{x = -\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}} \\ x = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

$$V''(x) = -6\pi x \implies V''(5/\sqrt{\pi}) = -30\sqrt{\pi} \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = 5/\sqrt{\pi}$$

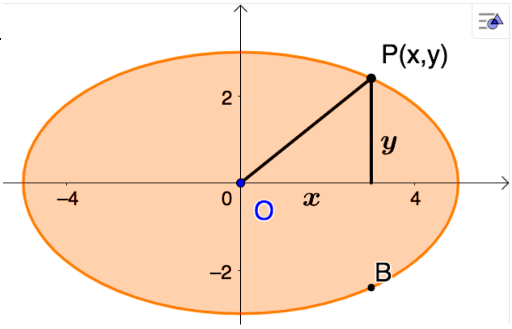
Por lo tanto el volumen será máximo para unos valores del radio de $x = 5/\sqrt{\pi}\ cm$ y de generatriz de $y = \dfrac{150 - 2\pi x^2}{2\pi x} = 10/\sqrt{\pi}\ cm$.

Ejercicio 35

El punto $P(x, y)$ recorre la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
Deduce las posiciones del punto P para que su distancia al punto $(0,0)$ es máxima, y también aquellas para las que su distancia es mínima

Solución.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico de la elipse de semiejes $a = 5$ y $b = 3$. Si la distancia al origen es máxima el cuadrado de la misma también lo será. Por tanto llamamos $d(x)$ al cuadrado de la distancia $d(OP)$.



$$\left.\begin{aligned} & d(x,y) = x^2 + y^2 \\ & \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \implies y^2 = \frac{225 - 9x^2}{25} \end{aligned}\right\}$$

$$\implies d(x) = x^2 + \frac{225 - 9x^2}{25} = \frac{16x^2 + 225}{25}$$

$$d'(x) = \frac{32x}{25} = 0 \implies x = 0$$

Hallamos la monotonía de la función $d(x)$ sin olvidar que los extremos relativos de la misma también pueden producirse en los extremos del dominio.

	$(-5, 0)$	$(0, 5)$
Signo $d'(x)$	-	+
$d(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

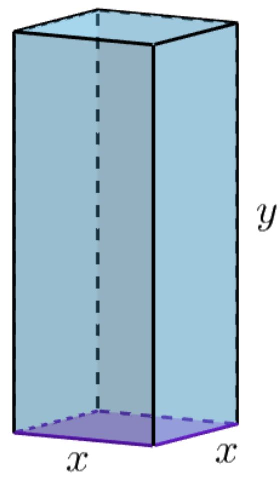
Por lo tanto la distancia mínima se produce para $x = 0 \implies y = \pm\sqrt{\dfrac{225 - 9x^2}{25}} = \pm 3$, que corresponden a los puntos $(0, 3)$ y $(0. - 3)$. Para hallar los máximos tenemos que comprobar los puntos $x = -5$ y $x = 5$, cuya coordenada $y = \pm\sqrt{\dfrac{225 - 9x^2}{25}} = 0$ y que en ambos casos resulta $\sqrt{d(-5)} = \sqrt{d(5)} = 5$, lo que significa que la distancia máxima se produce en los puntos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

Ejercicio 36

Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50 % más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible

Solución.

Llamamos x al lado de la base cuadrada e y a la altura del prisma. El coste de la tapa y la superficie lateral es de c $euros/cm^2$, mientras que el de la base será de $1{,}5c$ $euros/cm^2$.



$$\left.\begin{array}{l} C(x,y) = \underbrace{1{,}5cx^2}_{Base} + \underbrace{cx^2}_{Tapa} + \underbrace{4cxy}_{Sup\ lateral} \\ V = x^2y = 80 \implies y = \dfrac{80}{x^2} \end{array}\right\}$$

$$\implies C(x) = 2{,}5cx^2 + 4c\cancel{x} \cdot \frac{80}{x^{\cancel{2}}} = \frac{2{,}5cx^3 + 320c}{x}$$

$$C'(x) = \frac{5cx^3 - 320c}{x^2} = 0 \implies 5cx^3 - 320c = 0 \implies x = 4$$

$$C''(x) = \frac{15cx^4 - 10cx^4 + 640cx}{x^4} = \frac{5cx^{\cancel{4}3} + 640c\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{5cx^3 + 640c}{x^3}$$

$$\implies C''(4) = 15c > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } x = 4$$

Por lo tanto el coste del envase será mínimo para unas dimensiones del mismo de $x = 4$ cm e $y = \dfrac{80}{4^2} = 5$ cm

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Ejercicio 37

El coste de fabricación de una serie de hornos microondas viene dado por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30000$, donde x representa el número de hornos fabricados. Supongamos que cada horno se vende por 490 euros.

a) Determínese la función de beneficios de venta de los hornos.

b) ¿Cuántos microondas deben fabricarse y venderse para que los beneficios sean máximos?¿Cuál es el importe de esos beneficios máximos?

Solución.

a) Obtenemos los beneficios como la diferencia entre los ingresos y los costes, teniendo en cuenta que los ingresos son el producto del precio del microondas por el número de microondas vendidos (x):

$$B(x) = I(x) - C(x) = 490x - \left(x^2 + 40x + 30000\right) = -x^2 + 450x - 30000$$

b) $B'(x) = -2x + 450 = 0 \implies x = 225$

$B''(x) = -2 \implies B''(225) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo en $x = 225$

Por lo tanto el máximo beneficio se obtiene vendiendo 225 hornos y asciende a $B(225) = -225^2 + 450 \cdot 225 - 30000 = 20625$ euros

---

Ejercicio 38

Dada la función $f : [1, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tiene la máxima pendiente.

Solución.

Llamamos $m(x)$ a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en un punto cualquiera de la misma.

$$m(x) = f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$m'(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3} = 0 \implies 2 - x = 0 \implies x = 2$$

$$m''(x) = -\frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} = \frac{2x-6}{x^4} \implies m''(2) = -\frac{1}{8} < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{ Máximo en } x = 2$$

Por lo tanto la pendiente máxima de las rectas tangentes se produce en $x = 2$ y la ecuación de la citada recta será:

- $x_0 = 2 \implies y_0 = f(2) = \dfrac{1}{2} + \ln 2$
- $m_r = m(2) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - \left(\dfrac{1}{2} + \ln 2\right) = \dfrac{1}{4} \cdot (x - 2) \implies r \equiv y = \dfrac{1}{4}x + \ln 2$

Ejercicio 39

> *Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$ en cientos de euros viene dada por la cantidad que se invierta, x, en cientos de euros por la siguiente expresión $R(x) = -0{,}01x^2 + 5x + 25$*
>
> *a) Deducir razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan*
>
> *b) ¿Qué rentabilidad obtendría?*

Solución.

a) Hallamos la máxima rentabilidad:

$$
\begin{aligned}
R(x) &= -0{,}01x^2 + 5x + 25 \\
R'(x) &= -0{,}02x + 5 = 0 \implies x = 250 \\
R''(x) &= -0{,}02 \implies R''(250) = -0{,}02 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } x = 250
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la máxima rentabilidad se obtiene invirtiendo 25000 euros.

b) Y la rentabilidad obtenida sería $R(250) = 650$, es decir 65000 euros

---

Ejercicio 40

> *Un fabricante vende su producto a S euros por tonelada. La demanda mensual x, en toneladas, viene dada por $x = 8000 - 4S$. El coste en euros de producción de x toneladas es $C(x) = 2{,}5x^2 + 50000$ y los gastos generados son de 300 euros por tonelada.*
> *Calcular el valor de S para el cual el beneficio será máximo.*

Solución.

El beneficio obtenido por el fabricante será igual a los ingresos menos los gastos:

$$I(S,x) = Sx \xRightarrow{x=8000-4S} I(S) = S \cdot (8000 - 4S) = 8000S - 4S^2$$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= C(x) + 300x \xRightarrow{C(x)=2{,}5x^2+50000} G(x) = 2{,}5x^2 + 300x + 50000 \xRightarrow{x=8000-4S} \\
G(S) &= 2{,}5 \cdot (8000 - 4S)^2 + 300 \cdot (8000 - 4S) + 50000 \\
&= 40S^2 - 161200S + 162450000 \\
B(S) &= I(S) - G(S) = 8000S - 4S^2 - \left(40S^2 - 161200S + 180295000\right) \\
&= -44S^2 + 169200 + 180295000 \\
B'(S) &= -88S + 169200 = 0 \implies S = 1922{,}73 \\
B''(S) &= -88 \implies B''(1922{,}71) = -88 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } S = 1922{,}73 \; euros/Tm
\end{aligned}
$$

Ejercicio 41

El coste de la producción de x unidades diarias de un determinado producto es $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ y el precio de venta de una de ellas es $\left(50 - \frac{x}{4}\right)$ euros.
Hallar el número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo

Solución.

Hallamos el beneficio como la diferencia entre ingresos y costes, siendo los ingresos el producto de la cantidad vendida x por el precio de cada unidad.

$$B(x) = I(x) - C(x) = x \cdot \left(50 - \frac{x}{4}\right) - \left(x^2 + 35x + 25\right) = -\frac{5}{4}x^2 + 15x - 25$$
$$B'(x) = -\frac{5}{2}x + 15 = 0 \implies x = 6$$
$$B''(x) = -\frac{5}{2} \implies B''(6) = -\frac{5}{2} < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } x = 6$$

Por lo tanto el beneficio máximo se produce para una venta de 6 unidades.

———————— ○ ————————

Ejercicio 42

El valor, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t viene dado por $f(t) = 9 - (t-2)^2,\ 0 \leq t \leq 4{,}5$. Deduce en qué valor de t alcanzó su máximo valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.

Solución.

$$f(t) = 9 - (t-2)^2$$
$$f'(t) = -2(t-2) = -2t + 4 = 0 \implies t = 2$$
$$f''(t) = -2 \implies f''(2) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } t = 2$$

Estudiamos la monotonía de la función $f(t)$

	$(0, 2)$	$(2, 4{,}5)$
Signo $f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Por lo tanto el valor de la empresa tiene un máximo en $t = 2$ y vale $f(2) = 9$ millones de euros. Para calcular el mínimo tenemos que estudiar los extremos del intervalo:

$$f(0) = 5 \quad \& \quad f(4{,}5) = 2{,}75$$

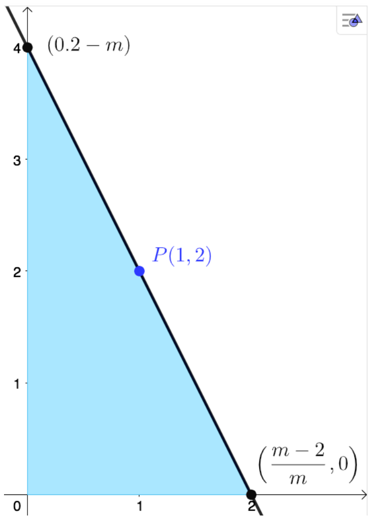
, luego el valor mínimo de la empresa se produce para $t = 4{,}5$ y asciende a 2,75 millones de euros

———————— ○ ————————

Ejercicio 43

De todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$*, encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.*

Solución.



La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,2)$ y tiene pendiente m es:

$$y-2=m\cdot(x-1) \implies y=mx-m+2$$

Los puntos de corte de la recta con los ejes coordenados son: $(0,2-m)$ & $(\frac{m-2}{m},0)$. El área del triángulo será:

$$A(m)=\frac{1}{2}\cdot(2-m)\cdot\frac{m-2}{m}=\frac{-m^2+4m-4}{2m}$$

$$A'(m)=\frac{4-m^2}{2m^2} \implies \begin{cases} m=-2 \\ \cancel{m=2} \text{ Si } m>0 \Rightarrow \triangle \notin 1^{er} \text{ cuadr.} \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función área $A(m)$.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $A'(x)$	-	+	-
$A(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Por lo tanto el área del triángulo es mínima para $m=-2$, y vale $A(-2)=4\ u^2$

Ejercicio 44

Un artículo ha estado 8 años en el mercado. Si su precio $P(t)$ en cientos de euros, estaba relacionado con el tiempo t, en años, que éste llevaba en el mercado por la función:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{5t}{2} + 25 & 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $P(t)$.

b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo en el mercado?

Solución.

Hallamos la derivada de la función para estudiar su monotonía:

$$P'(t) = \begin{cases} 8t & 0 < t < 2 \\ \dfrac{5}{2} & 2 < t < 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8t = 0 \Longrightarrow t = 0 \\ \dfrac{5}{2} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ P.S.} \end{cases}$$

Lo primero es darse cuanta de que la función $P(t)$ no es derivable en $x = 2$ ya que $P'(2^-) = 16 \neq P'(2^+) = \dfrac{5}{2}$, aunque esto no es relevante en el problema.

Estudiamos el signo de $P'(t)$

	$(0, 2)$	$(2, 8)$
Signo $P'(t)$	$+$	$+$
$P(t)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$

Lo que quiere decir que la función $P(t)$ alcanzará el máximo en su extremo, esto es, en $x = 8$ años, indicando que el artículo tendrá un precio máximo de $P(8) = \dfrac{5 \cdot 8}{2} + 25 = 45$, es decir, 4500 euros.

Ejercicio 45

Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ *en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.*

Solución.

Llamamos $m(x)$ a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función:

$$m(x) = f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$m'(x) = \frac{-2\cdot(1+x^2)^{\cancel{2}} + 2x\cdot 2\cdot \cancel{(1+x^2)}\cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}3}} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 0 \implies x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$m''(x) = \frac{12x\cdot(1+x^2)^{\cancel{3}} - (6x^2-2)\cdot 3\cdot \cancel{(1+x^2)^2}\cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{6}4}} = \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4} = \frac{-24x\cdot(x^2-1)}{(1+x^2)^4}$$

$$\implies \begin{cases} m''(-\sqrt{3}/3) < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = -\sqrt{3}/3 \\ m''(\sqrt{3}/3) > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } x = \sqrt{3}/3 \end{cases}$$

Por lo tanto la pendiente máxima de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ se produce en $x = -\sqrt{3}/3 \implies y = f(-\sqrt{3}/3) = 3/4$

—————— ○ ——————

Ejercicio 46

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio de altura h metros con dependencia funcional al cabo de t segundos, que viene dada por la fórmula $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$. Se pide:

a) Hallar la altura del edificio

b) ¿En qué instante la pelota alcanza su altura máxima?

Solución.

a) La altura del edificio será la que tiene la pelota antes de ser lanzada, es decir, en $t = 0$ segundos, por tanto $h(0) = 80\ m$

b) Hallamos el máximo de $h(t)$

$$h(t) = 80 + 64t - 16t^2$$
$$h'(t) = 64 - 32t = 0 \implies t = 2$$
$$h''(t) = -32 \implies h''(2) = -32 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } t = 2$$

Por lo tanto la altura máxima alcanzada por la pelota será de

$$h(2) = 80 + 64\cdot 2 - 16\cdot 2^4 = 144\ m$$

—————— ○ ——————

Ejercicio 47

Cuando un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 245 m/s, su distancia d (en metros) del punto de partida en un instante t segundos, tomados a partir del instante de salida, viene determinado por $d(t) = 245t - 4{,}9t^2$.

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo alcanza el proyectil su altura máxima?

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo llega al suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

d) ¿Cuál es la velocidad del proyectil cuando alcanza la altura máxima?

e) ¿Cuál es la velocidad del proyectil al llegar al suelo?

Solución.

a) Veamos cuándo alcanza la altura máxima.

$$\begin{aligned} d(t) &= 245t - 4{,}9t^2 \\ d'(t) &= 245 - 9{,}8t = 0 \implies t = 25 \\ d''(t) &= -9{,}8 \implies h''(25) = -9{,}8 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } t = 25\ s \end{aligned}$$

Por lo que alcanzará la altura máxima al cabo de 25 segundos de su lanzamiento.

b) El proyectil llegará al suelo cuando su altura sea $d(t) = 0$

$$d(t) = 0 \implies 245t - 4{,}9t^2 = t \cdot (245 - 4{,}9t) \implies \begin{cases} \cancel{t = 0\ s} \\ t = 50\ s \end{cases}$$

Por lo que tardará 50 segundos en llegar al suelo.

c) La velocidad es la derivada de la distancia recorrida

$$\begin{aligned} v(t) &= d'(t) = 245 - 9{,}8t \\ v(25) &= 245 - 9{,}8 \cdot 25 = 0\ m/s \end{aligned}$$

Lógicamente la velocidad es nula porque en el punto más alto el proyectil deja de subir y, antes de comenzar a descender, se encuentra parado.

d) La velocidad al llegar al suelo es $v(50) = 245 - 9{,}8 \cdot 50 = -245\ m/s$, lo que indica que la velocidad es de descenso.

Ejercicio 48

Un coche de competición se desplaza a una velocidad que, entre las 0 y las 2 horas viene dada por la expresión: $v(x) = (x-2)\cdot e^{x-1}+1$, donde x es el tiempo en horas y $v(x)$ es la velocidad en cientos de kilómetros/hora. Hallar en qué momento del intervalo $(0,2)$ circuló a la velocidad máxima y calcular dicha velocidad. ¿En qué periodos ganó velocidad y en cuales redujo? ¿se detuvo alguna vez?

Solución.

$$v(x) = (x-2)\cdot e^{x-1}+1$$

$$v'(x) = e^{x-1} + (x-2)\cdot e^{x-1} = (x-1)\cdot e^{x-1} = 0 \implies \begin{cases} x-1=0 \implies x=1 \\ e^{x-1}=0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$$

$$v''(x) = e^{x-1} + (x-1)\cdot e^{x-1} = x\cdot e^{x-1} \implies v''(1) = 1 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } x=1$$

Si estudiamos la monotonía de la función $v(x)$

	$(0,1)$	$(1,2)$
Signo $v'(x)$	-	+
$v(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Por lo que la velocidad máxima la alcanza en uno de los extremos:

$$v(0) = (0-2)\cdot e^{0-1}+1 = \frac{-2}{e}+1 = \frac{e-2}{e} \simeq 0{,}264 \Rightarrow 26{,}4\ km/h$$
$$v(2) = (2-2)\cdot e^{2-1}+1 = 1 \Rightarrow 100\ km/h$$

Así que la velocidad máxima la lleva el vehículo en el momento $x=2$ y vale 100 km/h. Estuvo ganando velocidad en el periodo $(1,2)$ y reduciéndola en el $(0,1)$. Su velocidad mínima fue $v(1) = (1-2)\cdot e^{1} = -e$

Ejercicio 49

> *La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función $v(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$, donde t es el tiempo (en horas) transcurrido desde que comenzó el estudio ($t = 0$).*
> *Indicar los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas y los intervalos en que ésta crece y decrece.*

Solución.

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 40 + 15t - 9t^2 + t^3 \\
v'(t) &= 15 - 18t + 3t^2 = 0 \implies t = \{1, 5\} \\
v''(t) &= -18 + 6t \implies \begin{cases} v''(1) = -12 < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } t = 1 \\ v''(5) = 12 > 0 \overset{(\cup)}{\Longrightarrow} \text{Mínimo en } t = 5 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Estudiamos el signo de $v'(t)$

	$(0,1)$	$(1,5)$	$(5,6)$
Signo $v'(t)$	$+$	-	$+$
$v(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Comprobamos los extremos del intervalo y los extremos relativos:

$v(0) = 40$ $\quad$ $v(1) = 47$ $\quad$ $v(5) = 15$ $\quad$ $v(6) = 22$

Por lo tanto la virulencia mínima se produce en $t = 5$ horas y vale 15, mientras que la máxima se produce en $t = 1$ y vale 47.
La virulencia es creciente en $(0, 1) \cup (5, 6)$ y decreciente en $(1, 5)$.

Ejercicio 50

La cantidad de agua recogida en 2002 (en miles de litros en cierto pantano, como función del instante de tiempo (en meses), viene dada a través de la expresión:

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2+1}, \text{ cuando } 0 \le t \le 12.$$

a) ¿En qué período de tiempo aumentó la cantidad de agua recogida?

b) ¿En qué instante se obtuvo la cantidad máxima de agua?

c) ¿Cuál fue esa cantidad máxima?

Solución.

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2+1} = \frac{10}{t^2-12t+37}$$
$$f'(t) = \frac{-10\cdot(2t-12)}{(t^2-12t+37)^2} = 0 \implies 2t-12=0 \implies t=6$$

Hallamos el signo de $f'(t)$

	$(0,6)$	$(6,12)$
Signo $f'(x)$	$+$	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

a) La cantidad de agua recogida aumento entre los meses 0 y 6

b) La cantidad máxima de agua se obtuvo en el mes 6.

c) La cantidad máxima de agua obtenida fue de $f(6) = 10$, es decir, 10000 litros.

Ejercicio 51

La producción de cierta hortaliza en un invernadero $Q(x)$ (en kilogramos) depende de la temperatura x (en °C) según la expresión $Q(x) = (x+1)^2 \cdot (32-x)$.

a) Calcular razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

Solución.

a) Hallamos la temperatura necesaria para tener la máxima producción

$$Q(x) = (x+1)^2 \cdot (32-x)$$

$$Q'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot (32-x) - (x+1)^2 = -3x^2 + 60x + 63 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = -1} \\ x = 21 \end{cases}$$

$$Q''(x) = -6x + 60 \implies Q''(21) = -66 < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } x = 21$$

Luego la temperatura óptima para obtener la mayor producción es $x = 21°C$

b) La producción para ese temperatura del invernadero será:

$$Q(21) = (21+1)^2 \cdot (32-21) = 5324\ kg$$

Ejercicio 52

El propietario de un inmueble tiene alquilados cuarenta pisos a 300 euros al mes cada uno. Por cada 10 euros de aumento en el precio del alquiler pierde a un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficios produce al propietario?

Solución.

Supongamos que el propietario aumenta x euros al mes el alquiler de cada inmueble. De esta forma:

- Precio del alquiler: $300 + x$ euros.
- Número de pisos alquilados: $40 - \dfrac{x}{10}$, siendo $0 \leq x \leq 400$ (ya que si aumentamos el precio en 400 euros perderemos todos los clientes)
- Beneficio: $B(x) = \left(40 - \dfrac{x}{10}\right) \cdot (300 + x) = 12000 + 10x - \dfrac{x^2}{10}$

$$B'(x) = 10 - \frac{x}{5} = 0 \implies x = 50$$

$$B''(x) = -\frac{1}{5} \implies B''(50) = -\frac{1}{5} < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } x = 50$$

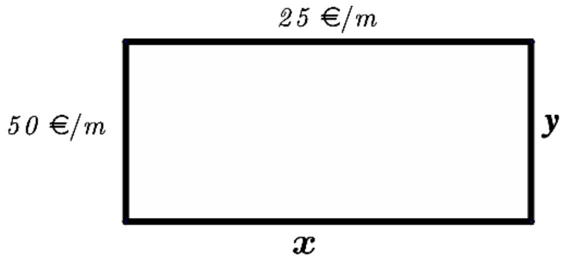
Por lo tanto el beneficio será máximo si el precio del alquiler es de $300 + 50 = 350$ euros.

Ejercicio 53 (3 *puntos*)

> *El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2.*
> *Calcúlese sus dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.*

Solución.

Dado el marco de la figura hallamos la *función a maximizar* (el coste del mismo en este caso) y la *ecuación de ligadura* que relacione las incógnitas x e y (la superficie del marco en nuestro caso)



$$\left.\begin{array}{l} C(x,y) = 2\cdot 25x + 2\cdot 50y = 50x + 100y \\ S = xy = 2 \implies y = \dfrac{2}{x} \end{array}\right\} \implies C(x) = 50x + 100\cdot\frac{2}{x} = 50x + \frac{200}{x}$$

$$C'(x) = 50 - \frac{200}{x^2} = 0 \implies 50 = \frac{200}{x^2} \implies x^2 = 4 \implies \begin{cases} \cancel{x = -2} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$C''(x) = \frac{400}{x^3} \implies C''(2) = 50 > 0 \xrightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } x = 2$$

Por lo tanto el *coste mínimo* del marco se consigue con una dimensiones de $x = 2$ e $y = \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{2} = 1$, y asciende a $C(2,1) = 50\cdot 2 + 100\cdot 1 = 200$ euros.

$\boxed{\text{PROBLEMAS DE EVAU}}$

Ejercicio 54 (3 *puntos*)

Dada la función:

$$f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$$

se pide:

a) *(0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.*

b) *(0.5 puntos) Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.*

c) *(0.75 puntos) El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.*

d) *(1 punto) El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

a) $f(x) = 4x - x^2 = x \cdot (4 - x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y *creciente* en $(0, 4)$.

b) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(0, 0)$ y un *máximo relativo* en $(4, {}^{32}/_{3})$

c) $m(x) = f'(x) = 4x - x^2$
$m'(x) = 4 - 2x = 0 \implies x = 2$
$m''(x) = -2 \implies m''(2) < 0 \stackrel{(\cap)}{\implies}$ Pendiente Máxima en $(2, m(2)) = (2, 4)$

d) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$y = 0 \implies 2x^2 - \frac{x^3}{3} = x^2 \cdot \left(2 - \frac{x}{3}\right) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$V = \int_0^6 \pi \cdot f^2(x)\, dx = \pi \int_0^6 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)^2 dx = \pi \int_0^6 \left(4x^4 - \frac{4x^5}{3} + \frac{x^6}{9}\right) dx$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^5}{5} - \frac{4x^6}{18} + \frac{x^7}{63}\right)\Bigg]_0^6 = \frac{10368\pi}{35}\ u^3$$

Ejercicio 55 (2 *puntos*)

Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 *euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es* 2 *euros, venderían* 5000 *papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán* 500 *papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?*
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean x el precio de la papeleta y $f(x)$ la recaudación de la rifa. Hemos de encontrar el beneficio máximo teniendo en cuenta:

- El coste del portátil que se rifará es de 600 euros.
- Si $x = 2$ se venderían 5000 papeletas.
- Por cada incremento de 1 euro en el precio se venden 500 papeletas menos. Luego se reducirá el número de papeletas vendidas en $500 \cdot (x - 2)$.

Por tanto el número de papeletas vendidas será $5000 - 500 \cdot (x - 2) = 6000 - 500x$
Y la recaudación $f(x)$ será el número de papeletas vendidas por el precio de cada papeleta:

$$f(x) = (6000 - 500x) \cdot x = -500x^2 + 6000x$$

Para hallar el máximo de la función:

$$f'(x) = -1000x + 6000 = 0 \implies x = 6$$
$$f''(x) = -1000 \implies f''(6) = -1000 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = 6$$

Luego la máxima recaudación se obtendrá vendiendo las entradas a un precio de 6 euros y ascenderá a $f(6) = 18000$ euros.
Si descontamos el coste del ordenador rifado se podrá donar a la ONG la cantidad de $18000 - 600 = 17400$ euros.

Ejercicio 56 (2 *puntos*)

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

$$c(t) = te^{-t/2} \implies c'(t) = e^{-t/2} - \frac{t}{2}e^{-t/2} = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-t/2} = 0 \implies t = 2$$

$$c''(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2} - \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}e^{-t/2} = \left(-1 + \frac{t}{4}\right) \cdot e^{-t/2}$$

$$c''(2) = -\frac{1}{2e} < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Hay un máximo en } (2, c(2)) = (2, {}^{2}/{e})$$

Como en el máximo la concentración es $\frac{2}{e} = 0{,}736 < 1$ el paciente no estará en riesgo pues su concentración es menor que la concentración máxima admisible.

Ejercicio 57 (2 *puntos*)

Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 *euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es* 2 *euros, venderían* 5000 *papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán* 500 *papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?*
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción A)

Solución.

Si llamamos x al precio de cada papeleta, para hallar función de recaudación $f(x)$ hemos de tener en cuenta que:

- El número de papeletas vendidas será 5000 menos 500 por cada euro que el precio supere a 2, es decir $5000 - 500 \cdot (x - 2)$.
- el precio de cada papeleta es x

$$f(x) = [5000 - 500 \cdot (x - 2)] \cdot x = 6000x - 500x^2$$

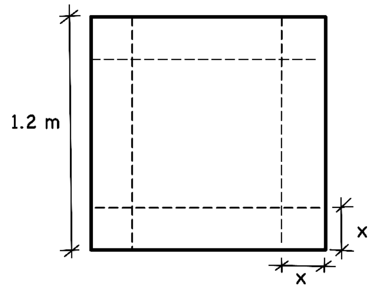
Para hallar el máximo sacamos los puntos singulares:

$$f'(x) = 6000 - 1000x = 0 \implies x = 6$$
$$f''(x) = -1000 < 0 \implies \text{ en } x = 6 \text{ hay un máximo}$$

Así que vendiendo la papeleta a 6€ obtendremos una recaudación de $f(6) = 18000$€, pudiendo donar a la ONG $18000 - 600 = 17400$€.

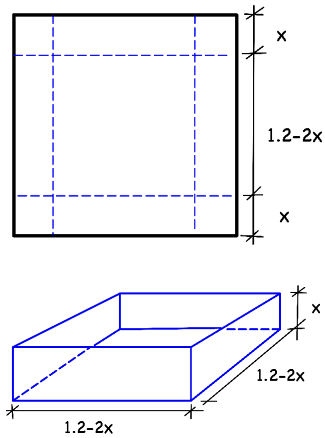
Ejercicio 58 (2 *puntos*)

Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1,2 metros. Determínense las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.



(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.



$$V(x) = (1{,}2 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 4{,}8x^2 + 1{,}44x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 9{,}6x + 1{,}44 = 0 \implies \begin{cases} x = 0{,}6 \\ x = 0{,}2 \end{cases}$$

$$V''(x) = 24x - 9{,}6 \implies \begin{cases} V''(0{,}6) = 5{,}2 > 0 \overset{(\cup)}{\Longrightarrow} Min \\ V''(0{,}2) = -4{,}8 < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} Max \end{cases}$$

El volumen máximo se produce para unas dimensiones de la caja de $0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}2$ y es igual a $V(0{,}2) = 0{,}128\, m^3$.

Ejercicio 59 (2,5 *puntos*)

> a) *(1.5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes:* $m_1 = 0{,}92$, $m_2 = 0{,}94$, $m_3 = 0{,}89$, $m_4 = 0{,}90$, $m_5 = 0{,}91$.
> *Se tomará como resultado el valor de* x *tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínimo. Es decir, el valor para el que la función* $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ *alcanza el mínimo. Calcule dicho valor* x.
>
> b) *(1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular* $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx$, *donde* ln *significa logaritmo neperiano.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A)*

Solución.

a) El mínimo de la función $E(x)$ se produce en $E'(x) = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned}
E(x) &= (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2 \\
E'(x) &= 2(x - m_1) + 2(x - m_2) + \cdots + 2(x - m_5) = 0 \\
\Longrightarrow\ 10x - 2(m_1 + \cdots + m_5) &= 0 \Longrightarrow x = \frac{m_1 + \cdots + m_5}{5} \\
\Longrightarrow\ x = \frac{0{,}92 + 0{,}94 + 0{,}89 + 0{,}90 + 0{,}91}{5} &\Longrightarrow \boxed{x = 0{,}912}
\end{aligned}$$

que efectivamente es un mínimo pues $E''(x) = 10 > 0$ $(\cup)$

b)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3}x^3 \ln x \Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^{\cancel{3}2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx \\
&= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 \ln 2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 \cancelto{0}{\ln 1}\right) - \frac{1}{9}x^3\Big]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\left(2^3 - 1^3\right) \\
&= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

Ejercicio 60 (2,5 *puntos*)

Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 ml de esencia pura más una cantidad variable, x, de alcohol. El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mlilitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide:

a) *(0.25 puntos) Determinar el precio del frasco de perfume en el caso $x = 0$ (el frasco sólo contiene los 12 ml de esencia).*

b) *(0.5 puntos) Expresar en función de x el precio del frasco que contiene $12 + x$ ml de mezcla.*

c) *(0.5 puntos) Deducir con qué valor de x el precio de la mezcla se hace cero.*

d) *(1.25 puntos) Sin tener en cuenta otros costes, determinar el valor de x para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en este caso la capacidad del frasco y el precio resultante.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Cuando $x = 0$ (no se añade alcohol) el precio del perfume será: $48 \cdot 12 = 576$ €

b) El precio del perfume será igual a la cantidad de perfume en mililitros por el precio de cada ml.

$$f(x) = (12 + x) \cdot (48 - 3x) = -3x^2 + 12x + 576$$

c) $f(x) = 0 \implies -3x^2 + 12x + 576 \implies x = \begin{cases} \cancel{x = -12} \\ x = 16 \end{cases}$

d) $f'(x) = 0 \implies -6x + 12 = 0 \implies x = 2$

$f''(x) = -6 \implies f''(2) = -6 < 0 \xrightarrow{(\cap)}$ Mínimo en $x = 2$

Por tanto se produce un máximo en el precio del perfume para $x = 2$ *ml* de alcohol añadido y tiene un valor de $f(2) = 588$ €

Ejercicio 61 (2,5 *puntos*)

La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2, en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función $c(t) = 80 - 6t + \dfrac{23t^2}{20} - \dfrac{t^3}{30}$ mg/m^3, *donde* $t \in [0, 30]$ *representa el tiempo, expresado en días, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.*

a) (0.5 puntos) ¿Qué nivel de NO_2, había a las 12 horas del día 10 de abril?

b) (1.25 puntos) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2?, ¿cuál fue ese nivel máximo?

c) (0.75 puntos) Calcule, mediante $\dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{30} c(t)\,dt$, *el nivel promedio del mes.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) Hasta las 12 horas del día 10 de abril han transcurrido $t = 9{,}5$ días.

$$c(9{,}5) = 80 - 6 \cdot 9{,}5 + \frac{23 \cdot 9{,}5^2}{20} - \frac{9{,}5^3}{30} = 98{,}21\ mg/m^3$$

b) Los puntos singulares se encuentran en $c'(t) = 0$

$$c'(t) = -6 + \frac{23t}{10} - \frac{t^2}{10} = 0 \implies t^2 - 23t + 60 = 0 \implies \begin{cases} x = 3 \\ x = 20 \end{cases}$$

$$c''(t) = \frac{23}{10} - \frac{t}{5} \implies \begin{cases} c''(3) = \dfrac{23}{10} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{17}{10} > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo} \\ c''(20) = \dfrac{23}{10} - \dfrac{20}{5} = -\dfrac{17}{10} < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo se da el día 20, siendo $c(20) = 80 - 6 \cdot 20 + \dfrac{23 \cdot 20^2}{20} - \dfrac{20^3}{30} = 153{,}33\ mg/m^3$

c)

$$\frac{1}{30}\int_0^{30} c(t)\,dt = \frac{1}{30}\int_0^{30}\left(80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30}\right)dt = \frac{1}{30}\left(80t - 3t^2 + \frac{23t^3}{60} - \frac{t^4}{120}\right)\Bigg]_0^{30}$$
$$= \frac{1}{30}\left(80 \cdot 30 - 3 \cdot 30^2 + \frac{23 \cdot 30^3}{60} - \frac{30^4}{120}\right) - (0) = 110\ mg/m^3$$

Ejercicio 62 (2,5 *puntos*)

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2 \cdot (10 - t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $$\left.\begin{array}{l} F'(t) = t^2 \cdot (10 - t) = 10t^2 - t^3 \implies F(t) = \displaystyle\int F'(t)\,dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C \\ F(0) = 6 \implies C = 6 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6}$$

b) Calculamos los puntos singulares: $F'(t) = 0 \implies t^2 \cdot (10 - t) = 0 \implies t = \{0, 10\}$

$$F''(t) = 20t - 3t^2 \implies \begin{cases} F''(0) = 0 \implies \text{Pto. Inflexión} \\ F''(10) = -100 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } t = 10 \implies F(10) = 839{,}33 \end{cases}$$

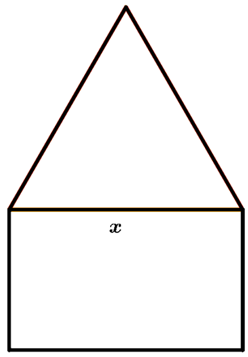
c) $F(t)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ que cumple:

$$\begin{array}{lllll} F(10) = 839{,}3 & \& & F(11) = 782{,}4 & \& & F(12) = 582 \\ F(13) = 189{,}1 & \& & F(14) = -451{,}3 & & \end{array}$$

Luego por el *Teorema de Bolzano* $\exists c \in (13, 14) \mid F(c) = 0$, lo que quiere decir que entre los días 13 y 14 el brote de la enfermedad terminará.

Ejercicio 63 (2,5 *puntos*)

Disponemos de 10 metros de una barra metálica. Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan 6 trozos de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida. Se pide:



a) *(0.5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x.*

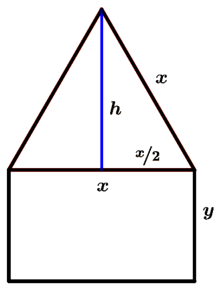
b) *(2 puntos) Determinar cómo debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) La altura del triángulo será:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \implies h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \implies h = x\frac{\sqrt{3}}{2}$$



b) Si llamamos y a la altura del rectángulo, la función a optimizar, que es el área encerrada por la figura, será:

$$\begin{cases} f(x,y) = A_{\triangle} + A_{\square} = \dfrac{xh}{2} + xy \\ Per = 4x + 2y = 10 \Rightarrow y = 5 - 2x \\ h = x\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2}\cdot x\frac{\sqrt{3}}{2} + x\cdot(5-2x) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 2\right)x^2 + 5x \end{aligned}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\right)x + 5 = 0 \implies x = \frac{5}{4 - \sqrt{3}/2} = \frac{80 + 10\sqrt{3}}{61} = 1{,}5954$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 < 0 \xrightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } \boxed{x = 1{,}5954} \implies \boxed{y = 1{,}8092}$$

$$f\left(\frac{80 + 10\sqrt{3}}{61}\right) \simeq 3{,}99\ u^2$$

Ejercicio 64 (2,5 *puntos*)

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, *donde* $t > 0$ *es el tiempo de funcionamiento.*

a) *(0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la portencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.*

b) *(0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.*

c) *(1.25 puntos) La energía total* $E(t)$ *generada por la pila hasta el instante* t, *se relaciona con la potencia mediante* $E'(t) = P(t)$, *con* $E(0) = 0$. *Calcular la energía producida por la pila entre el instante* $t = 0$ *y el instante* $t = 2$.

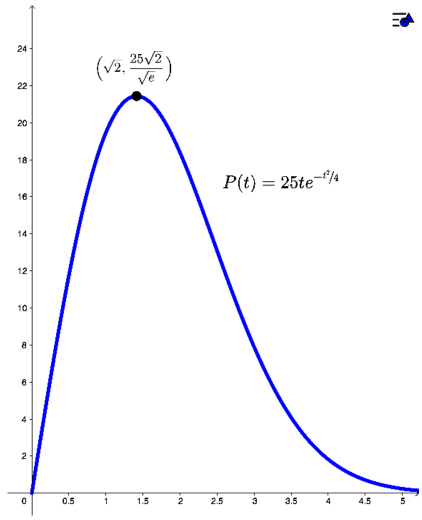
(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 25te^{-t^2/4} = [\infty\cdot 0] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{25t}{e^{t^2/4}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{25}{\frac{t}{2}e^{t^2/4}} = 0$

Lo que significa que, con el tiempo, la batería se termina agotando.

b)
$$P'(t) = 25e^{-t^2/4} + 25te^{-t^2/4}\cdot\left(-\frac{2t}{4}\right)$$
$$= e^{-t^2/4}\cdot\left(25 - \frac{25t^2}{2}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} e^{-t^2/4} \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \\ \dfrac{50-25t^2}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \cancel{-\sqrt{2}} \\ t = \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$
$$P''(t) = e^{-t^2/4}\left(\frac{25t^3}{4} - \frac{75t}{2}\right)$$
$$P''(\sqrt{2}) < 0 \xrightarrow{(\cap)} \text{Máximo}$$



Por lo que existe un máximo de potencia igual a $P(\sqrt{2}) = \dfrac{25\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$ en $t = \sqrt{2}$.

c)
$$E'(t) = P(t) \Longrightarrow E(t) = \int P(t)dt = \int 25te^{-t^2/4}\,dt = \left\{\begin{array}{l} u = -\dfrac{t^2}{4} \\ du = -\dfrac{t}{2}\,dt \Longrightarrow -\dfrac{2}{t}\,du = dt \end{array}\right\}$$
$$= -\int 25\cancel{t}e^u\cdot\frac{2}{\cancel{t}}\,du = -50e^u + C = -50e^{-t^2/4} + C$$
$$E(0) = 0 \Longrightarrow -50 + C = 0 \Longrightarrow C = 50 \Longrightarrow E(t) = -50e^{-t^2/4} + 50$$
$$E_0^2 = E(2) - E(0) = \left(-\frac{50}{e} + 50\right) - 0 = \frac{50}{e}\cdot(e-1) \simeq 31{,}606$$

Ejercicio 65 (2,5 *puntos*)

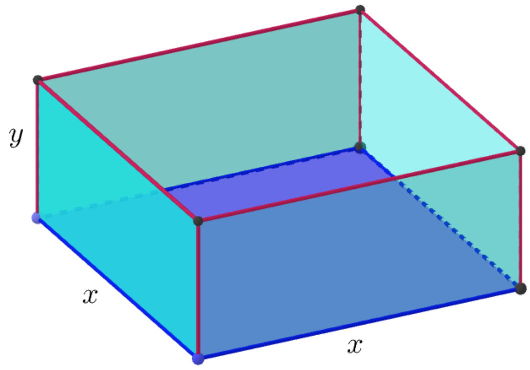
Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico y las caras verticales, de cristal. El metacrilato tiene un precio de 15 $euros/m^2$, el material metálico, de 90 $euros/m^2$, y el cristal, de 25 $euros/m^2$.

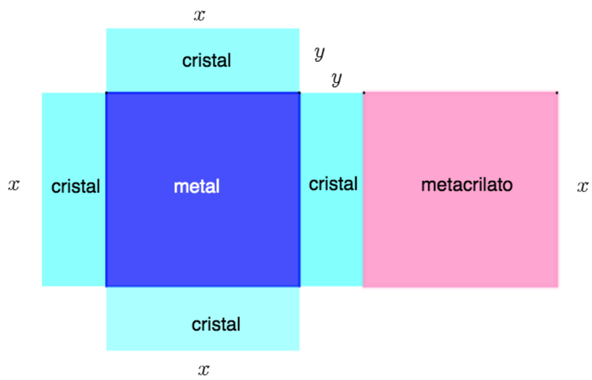
a) *(0.75 puntos) Exprese la altura del acuario en función del lado de la base, x, y del coste total del material utilizado, C.*

b) *(1.75 puntos) Con un presupuesto de 1260 $euros$, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.





a) Calculamos el coste del acuario, teniendo en cuenta el precio de los materiales:

$$C = 90x^2 + 15x^2 + 4 \cdot 25xy = 105x^2 + 100xy \implies y = \frac{C - 105x^2}{100x}$$

b) $C = 1260 \implies y = \dfrac{1260 - 105x^2}{100x}$

$$V(x, y) = x^2 \cdot y \implies V(x) = \cancel{x^2} \cdot \frac{1260 - 105x^2}{100\cancel{x}} = \frac{1260x - 105x^3}{100}$$

$$V'(x) = \frac{1260 - 315x^2}{100} = 0 \implies 1260 - 315x^2 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = -2} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$V''(x) = -630x \implies V''(2) = -1260 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } x = 2$$

Por lo que el volumen máximo del acuario con un presupuesto de 1260 euros se obtendrá con unas dimensiones de $x = 2\ m$ y $y = 4{,}2\ m$ y será de $V(2) = 16{,}8\ m^3$.