1. *(2 ptos.)*

a) Halla el dominio de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}}$

$D(f)=\{\ x\in\mathbb{R}\ \ /\ \ \dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}\geq 0\ \ y\ \ x^2-4x+3\neq 0\}$

Resolviendo la ecuación $x^2-4x+3=0$ se deduce que las soluciones son $\boldsymbol{x=1}$ y $\boldsymbol{x=3}$ (también se podría deducir teniendo en cuenta que $1+3=4$, $1\cdot 3=3$), por tanto, podemos escribir $x^2-4x+3=(x-1)\cdot(x-3)$

Por tanto, $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\dfrac{(x+3)\cdot\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cdot\cancel{(x-3)}}=\dfrac{(x+3)}{(x-1)}$

Hay que tener en cuenta que la simplificación se puede hacer siempre *que* $x-3\neq 0$, es decir, $\boldsymbol{x\neq 3}$.

Estudiemos el signo de $\dfrac{(x+3)}{(x-1)}$

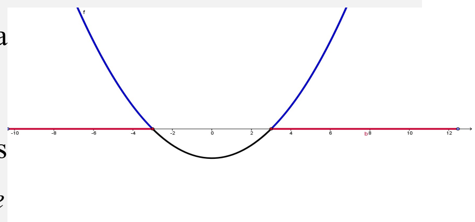
	(-∞, -3)	-3	(-3, 1)	1	(1, ∞)
$x+3$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
$\dfrac{(x+3)}{(x-1)}$	+	*0*	-	$\nexists$	+

En consecuencia **$D(f)$=** $(-\infty,-3]\cup(1,3)\cup(3,\infty)$

a) Halla el dominio de la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-4x+3}$

$D(f)=\{\ x\in\mathbb{R}\ \ /\ x^2-9\geq 0\ \ \ y\ \ x^2-4x+3\neq 0\}$

Es fácil deducir en el gráfico adjunto que la parábola $\boldsymbol{y=x^2-9}$ es positiva en $(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$



Por otra parte, resolviendo la ecuación $x^2-4x+3=0$ se deduce que las soluciones son *1 y 3 (también se podría deducir teniendo en cuenta que 1+3= 4 , 1·3= 3).* Por tanto, esos dos valores no pertenecen al dominio, así que habrá que eliminarlos de los intervalos anteriores.

En consecuencia **$D(f)$=** $(-\infty,-3]\cup(3,\infty)$

b) Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2}{x+2} & si\ x\leq 0\\ e^{\frac{x}{x^2-1}} & si\ x>0\end{cases}$

***Caso I.* (-∞ , 0)**

La función es continua por ser elemental excepto $\boldsymbol{x=-2}$ donde no está definida.

$\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+2}{x+2}=\left(\dfrac{6}{0}\right)=\infty$ Por tanto, hay una discontinuidad de salto infinito en $x=-2$

Caso II. (0, ∞)

La función es continua por ser elemental excepto $x = 1$ donde no está definida. Téngase en cuenta que el valor $-1 \notin (0, \infty)$

$\lim_{x\to 1^{+}} e^{\frac{x}{x^2-1}} = e^{+\infty} = \infty$ Por tanto, hay una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$

Caso III. x = 0

$$\lim_{x\to 0^{-}} f(x) = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{x^2+2}{x+2} = \left(\frac{2}{2}\right) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^{+}} f(x) = \lim_{x\to 0^{+}} e^{\frac{x}{x^2-1}} = e^0 = 1 \qquad f(0) = \frac{0+2}{0+2} = 1$$

Por tanto, como $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ f es continua en $x = 0$

En consecuencia, ***f es continua en*** $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

2. (1'5 ptos.) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} (1 + 3 \cdot sen\,x)^{\cot x}$

$$\lim_{x\to 0} (1+3\cdot sen\,x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0} \left(\left(1 + \frac{3}{\frac{1}{sen\,x}}\right) \right)^{\cot x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{3}{\frac{1}{sen\,x}}\right)^{\frac{1}{sen\,x}\cdot sen\,x \cdot \cot x} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1 + \frac{3}{\frac{1}{sen\,x}}\right)^{\frac{1}{senx}} \right]^{sen\,x\cdot \cot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(1 + \frac{3}{\frac{1}{senx}}\right)^{\frac{1}{senx}} \right]^{\cancel{sen\,x}\cdot \frac{\cos x}{\cancel{sen\,x}}} = (e^3)^{\lim_{x\to 0} \cos x} = (e^3)^1 = e^3$$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\cdot(\sqrt{x+3}+1)}{(\sqrt{x+3}-1)\cdot(\sqrt{x+3}+1)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\cdot(\sqrt{x+3}+1)}{(\sqrt{x+3})^2 - 1^2} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(\cancel{x+2})\cdot(\sqrt{x+3}+1)}{(\cancel{x+2})} = \lim_{x\to -2} (\sqrt{x+3}+1) = (\sqrt{-2+3}+1) = 1+1 = 2$$

3.*(1'5 ptos.)* Halla la ecuación de la recta tangente a la curva ***f(x) = 2x³ + 5x² - 2*** en el punto de abscisa ***x = -2***.

La ecuación de la recta que buscamos es, en forma punto pendiente ***y = m·x + b***

Por ser tangente a la curva, su pendiente es la derivada en el punto. Es decir, ***m = f ´(-2)***

f ´(x) = 6x² + 10x → ***f ´(-2) = 24 - 20 = 4***

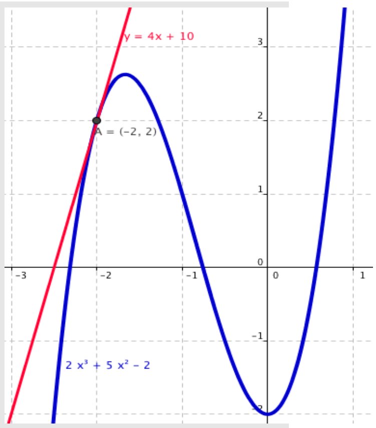
Como la recta tangente y la curva pasan por el punto de abscisa ***x = -2*** y

f(-2) = 2·(-8) + 5·4 - 2 = 2, entonces la recta pasa por el punto ***(-2, 2)***

Es decir, sabemos que ***y = 4·x + b*** y además que la recta pasa por ***(-2, 2)*** , de donde se deduce que ***2 = 4·(-2) + b*** → ***b = 10***

Por tanto, la recta buscada es ***y = 4·x + 10***

(Un gráfico aclarará la situación)



4. *(1'5 ptos.)* Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = sen^2(2x^3 + 2x)$

$y' = 2 \cdot sen\,(2x^3 + 2x) \cdot cos\,(2x^3 + 2x) \cdot (6x^2 + 2)$

b) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{\sqrt{1+x}\cdot(-1-x-1+x)}{2\cdot\sqrt{1-x}\cdot(1+x)^2} = \frac{\sqrt{1+x}\cdot(-\cancel{2})}{\cancel{2}\cdot\sqrt{1-x}\cdot(1+x)^2} =$$

$$= \frac{(-1)}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{(1+x)^3}} = \frac{(-1)}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot(1+x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(1+x)}$$

c) $y = e^{x^2} \cdot tg\,x$

$$y' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot tg\,x + e^{x^2} \cdot \frac{1}{cos^2 x}$$

5. *(3'5 ptos.)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x+1}$

a)*(1 pto.)* Estudia el dominio, continuidad y puntos de corte con los ejes

D(f) = $\mathbb{R}$ - {-1} ya que $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

f es continua en $\mathbb{R}$ - {-1} por ser una función elemental

Corte con el eje OX: $y = 0$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1} = 0 \rightarrow \quad x^2 + 3x = 0 \rightarrow x\cdot(x+3) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x = 0 \\ x + 3 = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x = 0 \\ x = -3 \end{pmatrix} \rightarrow \textbf{(0, 0) (-3, 0)}$$

Corte con el eje OY: $x = 0$

f(0) = 0 → ***(0, 0)***

b)*(1 pto.)* Estudia la monotonía y calcula los extremos relativos de ***f(x)***

$$f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot(x+1) - (x^2+3x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \rightarrow$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow$ $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$ Por tanto, la función derivada no se anula nunca. Además, el numerador es una parábola convexa (coeficiente principal positivo) sin cortes con el eje OX, siempre es positiva y el denominador es un cuadrado, por tanto siempre positivo. En consecuencia, f' es siempre positiva.

monotonía	↗		↗
signo f'	+	-1	+

Por tanto, ***f es creciente en*** $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

Como la función es derivable en todo el dominio y no hay puntos con derivada nula, ***no hay extremos relativos.*** (También se podría justificar diciendo que la función es siempre creciente)

c)*(1 pto.)* Halla las asíntotas de la función

Asíntotas horizontales

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x+1}=-\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{x+1}=\infty$ (por ser un cociente de polinomios con mayor grado en el numerador) Por tanto, ***no hay asíntotas horizontales***

Asíntotas oblicuas

Buscamos una ecuación del tipo $\boldsymbol{y} = m{\cdot}x + b$

Por la izquierda: $m=\lim_{x\to-\infty} f\frac{(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x\cdot(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x^2+x}=1$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-m\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2+3x}{x+1}-1\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)-(x^2+x)}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=2$$

Por tanto, ***y = x + 2 es asíntota oblicua por la izquierda (cuando x → - ∞)***

De la misma forma se prueba que ***y = x + 2 es asíntota oblicua por la derecha (cuando x → ∞)***

Asíntotas verticales

Solo puede haberlas en los puntos en los que la función no es continua, en este caso, ***x = -1***

$\lim_{x\to<-1^-}\frac{x^2+3x}{x+1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty \qquad \lim_{x\to<-1^+}\frac{x^2+3x}{x+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

Por tanto, ***x = -1 es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha***

d) *(0'5 ptos.)* Con los datos anteriores, dibuja la gráfica de la función

En primer lugar se dibujan los puntos de corte y las asíntotas. Luego los extremos relativos, si los hay. Teniendo en cuenta la monotonía, se deduce que la gráfica sería: