

Análisis

NOTA: Todos los resultados deben estar simplificados.

1) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ (2 puntos)

2) Hallar: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3 - \sqrt{5x - 1}}$ (1 punto)

3) Derivar y simplificar: $y = \arctg 3x^2$; $y = \frac{x^2 e^{1-x}}{3}$; $y = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x-3}}$; $y = 2 \cos^2 4x$ (2 pts)

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$, comprobando previamente que sus

derivadas son: $y' = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2}$; $y'' = -\frac{2}{(x + 1)^3}$

Derivadas:	1 punto
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	0,5 puntos
Asíntotas:	1 punto
Monotonía/Extr.relativos:	1 punto
Curvatura/P.Inflexión:	0,5 puntos
Gráfica (tras estudio anterior):	1 punto

SOLUCIONES

1) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ (2 puntos)

- Intervalo $(-\infty, 1)$: f coincide con la función $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$, que es continua en todo $\mathbb{R}$

salvo en $x = -2$, único punto que no pertenece a su dominio. Como -2 está en el intervalo, que es donde coincide f con esta función, la discontinuidad lo es también de f . De modo que f es continua en todo el intervalo excluyendo $x = -2$. Veamos de qué tipo es la discontinuidad.

1) $\nexists f(-2)$ (-2 no está en el dominio).

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4$$

Por tanto, es una discontinuidad evitable la que presenta en $x = -2$.

- Intervalo $(1, +\infty)$: f coincide con $y = x^2 - 2$, que es continua siempre, al ser polinómica. Por tanto, f es continua en todo el intervalo.

- $x = 1$:

1) $\exists f(1) = 1^2 - 2 = -1$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{-3}{3} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2) = 1^2 - 2 = -1$$

Por tanto, $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

3) Ambos resultados coinciden

Por tanto, la función f es continua en $x = 1$.

En resumen f es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$ con una discontinuidad evitable en $x = -2$.

2) Hallar: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3 - \sqrt{5x - 1}}$ (1 punto)

Como presenta una indeterminación del tipo $0/0$, y en el denominador tenemos una diferencia en la que interviene una raíz, multiplicamos y dividimos por el conjugado de dicha diferencia:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3 - \sqrt{5x - 1}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3 - \sqrt{5x - 1}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5x - 1}}{3 + \sqrt{5x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)(3 + \sqrt{5x - 1})}{3^2 - (\sqrt{5x - 1})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)(3 + \sqrt{5x - 1})}{9 - (5x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)(3 + \sqrt{5x - 1})}{9 - 5x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)(3 + \sqrt{5x - 1})}{10 - 5x} = \end{aligned}$$

Como se sigue presentando la misma indeterminación, pero ya tenemos polinomios en el numerador y en el denominador, los descomponemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -2 & \\ 2 & & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} & -5 & 10 & \\ 2 & & -10 & \\ \hline & -5 & 0 & \end{array}$$

Y con ello:

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)(3+\sqrt{5x-1})}{-5(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(3+\sqrt{5x-1})}{-5} = \frac{3 \cdot (3+3)}{-5} = \boxed{-\frac{18}{5}}$$

3) Derivar y simplificar: $y = \arctg 3x^2$; $y = \frac{x^2 e^{1-x}}{3}$; $y = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x-3}}$; $y = 2 \cos^2 4x$ (2 pts)

- $y = \arctg 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{6x}{1+(3x^2)^2} = \boxed{\frac{6x}{1+9x^4}}$
- $y = \frac{x^2 e^{1-x}}{3} = \frac{1}{3} x^2 e^{1-x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3} (2x e^{1-x} + x^2 (-1) e^{1-x}) = \boxed{\frac{x e^{1-x} (2-x)}{3}}$
- $y = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x-3}} = \frac{1}{3} \ln \frac{(x-2)^2}{x-3} = \frac{1}{3} [\ln(x-2)^2 - \ln(x-3)] =$
 $= \frac{1}{3} [2 \ln(x-2) - \ln(x-3)] \Rightarrow y' = \frac{1}{3} \left(2 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) = \boxed{\frac{2}{3(x-2)} - \frac{1}{3(x-3)}}$
- $y = 2 \cos^2 4x \Rightarrow y' = 2 \cdot 2 (\cos 4x) (-\sin 4x) 4 = \boxed{-16 \sin 4x \cos 4x} =$
 $= -8 \cdot 2 \sin 4x \cos 4x = -8 \sin (2 \cdot 4x) = \boxed{-8 \sin 8x}$

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$, comprobando previamente que sus

derivadas son: $y' = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2}$; $y'' = -\frac{2}{(x+1)^3}$

Derivadas:	1 punto
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	0,5 puntos
Asíntotas:	1 punto
Monotonía/Extr.relativos:	1 punto
Curvatura/P.Inflexión:	0,5 puntos
Gráfica (tras estudio anterior):	1 punto

Comencemos derivando:

$$y' = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+2x+2-x^2-2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x+2)2(x+1)1}{[(x+1)^2]^2} = \frac{(x+1)[(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+2)2]}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x-4}{(x+1)^3} = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

a) Dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$ (se anula el denominador)

b) Par / Impar: $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 2(-x)}{-x+1} = \frac{x^2-2x}{-x+1} \Rightarrow$ Ni par ni impar.

c) Intersecciones con los ejes: $x=0 \Rightarrow y=0$: (0, 0).

$$y=0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2+2x}{x+1} \Rightarrow 0 = x^2+2x \Rightarrow 0 = x(x+2) \Rightarrow x=0 \text{ ó } x=-2.$$

Por tanto, corta en (0, 0) y en (-2, 0).

d) Asíntotas:

1) AH: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{x+1} = \infty \Rightarrow$ No tiene.

2) AV: Tenemos discontinuidad en $x=-1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x}{x+1} = \left(\frac{-1}{0} \right) = \infty$. Por tanto,

la recta $x=-1$ es A.V.

3) A.O.:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 2x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Luego la recta $y = x + 1$ es A.O.

e) Monotonía:

- Discontinuidades de f : $x = -1$.
- Discontinuidades de f' : $x = -1$.
- $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ que no tiene solución.

Como -1 es el único punto obtenido, tenemos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f'	+	$\nexists$	+
f	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$

No tiene extremos relativos.

f) Curvatura:

- Discontinuidades de f y f' : $x = -1$.
- Discontinuidades de f'' : $x = -1$.
- $f''(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow -2 = 0 \Rightarrow$ No es posible.

Como -1 es el único punto obtenido, tenemos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f''	+	$\nexists$	-
f	$\cup$ (convexa)	$\nexists$	$\cap$ (cóncava)

g) Gráfica: Las asíntotas se han dibujado de color verde. Combinando todos los resultados anteriores, se obtiene:

