**Análisis**

**NOTA: Todos los resultados deben estar simplificados.**

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$ clasificando las discontinuidades: *(2 puntos)*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{x-3}, & \text{si } x<1\\[2mm] \dfrac{2x}{x-2}, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

2) Calcular el dominio de la siguiente función: $y=\sqrt{-2x^3+7x^2-9}$ *(2 puntos)*

3) Calcular las asíntotas de: $y=\dfrac{2x^2}{x-4}$ *(1,2 puntos)*

4) Calcular: a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}3^{\frac{1}{x-2}}$ *(1,8 puntos)*

5) Calcular las derivadas de: *(3 puntos)*

a) $y=\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$

b) $y=\operatorname{arctg}(e^{-2x})$

c) $y=\operatorname{sen}^3 3x$

d) $y=\ln\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$

e) $y=x^3e^{-3x}$

# SOLUCIONES

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$ clasificando las discontinuidades: *(2 puntos)*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{x-3}, & \text{si } x<1\\ \dfrac{2x}{x-2}, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

- Intervalo $(-\infty, 1)$: $f$ coincide con la función $y=\dfrac{4x^2}{x-3}$, que es continua en todo R salvo en $x = 3$, único punto que no pertenece a su dominio. Pero $3\notin(-\infty, 1)$, luego no es una discontinuidad de $f$. Por tanto, $f$ es continua en todo el intervalo.
- Intervalo $(1, +\infty)$: $f$ coincide con $y=\dfrac{2x}{x-2}$. Ésta, al ser una función elemental, es continua en su dominio; es decir, lo es en R – {2}. Como 2 está en el intervalo, que es donde coincide $f$ con esta función, la discontinuidad lo es también de $f$. Veamos de qué tipo es.

  1) $\nexists f(2)$ (2 no está en el dominio).

  2) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x}{x-2}=\left(\dfrac{4}{0}\right)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x}{x-2}=\left(\dfrac{4}{0}\right)=+\infty$

  puesto que, en el primer caso, cuando $x$ está a la izquierda de 2 y muy próximo a él (es decir, es menor que 2), $x-2$ es negativo, mientras que $2x$ es positivo, por lo que el cociente resulta negativo; por tanto, el infinito al que tiende es $-\infty$. Y en el segundo límite, $x-2$ es positivo, al estar $x$ a la derecha de 2, manteniéndose $2x$ positivo para valores muy próximos a 2; luego el cociente resulta positivo.

  De ello se deduce que estamos ante una discontinuidad asintótica de salto infinito en $x=2$.
- x = 1:

  1) $\exists f(1)=\dfrac{2\cdot 1}{1-2}=-2$

  2) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4x^2}{x-3}=\dfrac{4}{1-3}=-2; \qquad \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x}{x-2}=\dfrac{2\cdot 1}{1-2}=-2$

  Por tanto, $\exists\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$

  3) Ambos resultados coinciden

  Por tanto, la función $f$ es continua en $x=1$.

| |
|---|
| En resumen $f$ es continua en R – {2} y presenta una discontinuidad asintótica de salto infinito en $x=2$. |

2) Calcular el dominio de la siguiente función: $y=\sqrt{-2x^3+7x^2-9}$ *(2 puntos)*

La única operación que presenta valores para los que no puede calcularse es la raíz cuadrada. Y para que exista la raíz cuadrada, el radicando debe ser positivo.

Por tanto, los valores de $x$ que están en el dominio son las soluciones de la inecuación:

$$-2x^3+7x^2-9\geq 0.$$

Para resolver esta inecuación, descomponemos factorialmente el polinomio, por Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | −2 | 7 | 0 | −9 |
| −1 | | 2 | −9 | 9 |
| | −2 | 9 | −9 | 0 |
| 3 | | −6 | 9 | |
| | −2 | 3 | 0 | |
| 3/2 | | −3 | | |
| | −2 | 0 | | |

Luego la inecuación anterior se transforma en:

$$-2(x+1)(x-3/2)(x-3) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(x+1)(x-3/2)(x-3) \leq 0}$$

Puesto que al pasar $-2$, que es negativo, dividiendo al segundo miembro cambia el sentido de la desigualdad. Dividiendo $\mathbb{R}$ en intervalos mediante los valores que anulan cada factor, que en orden son $-1$, $3/2$ y $3$, nos queda el siguiente cuadro, cuyos signos estudiamos dando a $x$ un valor cualquiera dentro de cada intervalo, ya que los signos no varían dentro de ellos:

| | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 3/2)$ | $3/2$ | $(3/2, 3)$ | $3$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | − | 0 | + | … | + | … | + |
| $x-3/2$ | − | … | − | 0 | + | … | + |
| $x-3$ | − | … | − | … | − | 0 | + |
| $(x+1)(x-3/2)(x-3)$ | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| ¿Sirven? → | Si | Si | No | Si | Si | Si | No |

Luego:

$$\boxed{D(f) = (-\infty, -1] \cup [3/2, 3]}.$$

3) Calcular las asíntotas de: $y = \dfrac{2x^2}{x-4}$ *(1,2 puntos)*

- Asintotas verticales: Sólo tenemos una discontinuidad, en $x = 4$ (que anula el denominador). Ahí es donde únicamente podríamos encontrar asíntota vertical. Veámoslo:

  $$\lim_{x \to 4} \frac{2x^2}{x-4} = \left(\frac{32}{0}\right) = \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{La recta } x = 4 \text{ es una asíntota vertical}}.$$

- Asíntota horizontal: $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} 2x = \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{No tiene A.H}}$.

- Asíntota oblicua: Puede que exista, porque no hay A.H.

  $$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x-4}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x(x-4)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2-4x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

  $$n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2}{x-4} - 2x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 2x(x-4)}{x-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 8x}{x-4} =$$

  $$= \lim_{x \to \infty} \frac{8x}{x-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{8x}{x} = 8$$

  Por tanto, $\boxed{\text{la recta } y = 2x + 8 \text{ es asíntota oblicua}}$.

4) Calcular: a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 2} 3^{\frac{1}{x-2}}$ *(1,8 puntos)*

a) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}} = \left(1^{\infty}\right) = e^{\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}\left(\frac{x+3}{2x+1}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}\left(\frac{x+3-(2x+1)}{2x+1}\right)} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}\left(\frac{x+3-2x-1}{2x+1}\right)} =$

$= e^{\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}\left(\frac{-x+2}{2x+1}\right)} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{3(-x+2)}{(x-2)(2x+1)}} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{(x-2)(2x+1)}} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{-3}{2x+1}} = \boxed{e^{\frac{-3}{5}} = \dfrac{1}{e^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}}}$

b) $\lim_{x\to 2} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left(3^{\infty}\right)$.

Pero la exponencial se comporta de distinta forma en $+\infty$ y en $-\infty$. Por tanto, distinguimos entre límite por la derecha y por la izquierda.

Cuando $x\to 2^{-}$ $\Rightarrow$ $x-2<0$ (porque $x$ es menor que 2, al estar a su izquierda). Por lo tanto, el exponente es negativo (más entre menos):

$$\boxed{\lim_{x\to 2^{-}} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left(3^{-\infty}\right) = 0}$$

En cambio, a la derecha de 2 tendremos $x-2>0$. Luego:

$$\boxed{\lim_{x\to 2^{+}} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left(3^{+\infty}\right) = +\infty}$$

Al no coincidir los límites laterales, $\boxed{\text{no existe el límite completo}}$.

5) Calcular las derivadas de: *(3 puntos)*

a) $y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{\cos x(1+\cos x)-\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} =$

$$= \frac{\cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2} = \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \boxed{\frac{1}{1+\cos x}}$$

b) $y=\operatorname{arctg}(e^{-2x})$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+(e^{-2x})^2} = \boxed{-\dfrac{2e^{-2x}}{1+e^{-4x}}}$

c) $y=\operatorname{sen}^3 3x$ $\Rightarrow$ $y' = 3\,(\operatorname{sen}^2 3x)\,(3\cos 3x) = \boxed{9\operatorname{sen}^2 3x\cos 3x}$

d) $y=\ln\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}} = \ln(x-2)^3 - \ln\sqrt{2x-1} = 3\ln(x-2)-\dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$ $\Rightarrow$

$$y' = 3\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2}\frac{2}{2x-1} = \frac{3}{x-2}-\frac{1}{1}\frac{1}{2x-1} = \boxed{\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2x-1}}$$

e) $y=x^3e^{-3x}$ $\Rightarrow$ $y' = 3x^2e^{-3x}+x^3(-3)e^{-3x} = 3x^2e^{-3x}-3x^3e^{-3x} =$

$= \boxed{3x^2e^{-3x}(1-x)}$