MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S.
Análisis

NOTA: Todos los resultados deben estar simplificados.

1) Dadas las funciones $f(x) = 2x - 5$ y $g(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{2x + 7}$, hallar $g \circ f$. *(1 punto)*

2) Hallar la función inversa de $f(x) = \dfrac{6 - 3x}{2x - 3}$ *(1 punto)*

3) Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 12}{x - 1}}$ *(2 puntos)*

4) Estudiar la continuidad de la función y clasificar las discontinuidades: *(2 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+4}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x-2}{x^2-4}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

5) Calcular $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - \sqrt{2x+3}}{2x^2 - 8x + 6}$ *(2 puntos)*

6) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{8x+6}}$ *(2 puntos)*

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 3 de Mayo de 2010
Análisis

SOLUCIONES

1) Dadas las funciones $f(x) = 2x - 5$ y $g(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{2x + 7}$, hallar $g \circ f$. *(1 punto)*

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x - 5) =$$

Llamando $z = 2x - 5$:

$$= g(z) = \frac{3z^2 - 2}{2z + 7} =$$

Deshaciendo el cambio de variable anterior:

$$= \frac{3(2x-5)^2 - 2}{2(2x-5)+7} = \frac{3(4x^2 - 20x + 25) - 2}{4x - 10 + 7} = \frac{12x^2 - 60x + 75 - 2}{4x - 3} = \boxed{\frac{12x^2 - 60x + 73}{4x - 3}}$$

2) Hallar la función inversa de $f(x) = \dfrac{6 - 3x}{2x - 3}$ *(1 punto)*

En la función inversa, si conocemos la imagen y de cierto x mediante f, tenemos que obtener, como resultado, el valor de ese x:

$$y = \frac{6 - 3x}{2x - 3} \Rightarrow y(2x - 3) = 6 - 3x \Rightarrow 2xy - 3y = 6 - 3x \Rightarrow 2xy + 3x = 6 + 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2y + 3) = 6 + 3y \Rightarrow x = \frac{6 + 3y}{2y + 3}$$

Pero los resultados de una función siempre se recogen en la variable y, siendo x quien recibe el valor de partida. Así que los intercambiamos:

$$\boxed{y = \frac{6 + 3x}{2x + 3}}$$

3) Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 12}{x - 1}}$ *(2 puntos)*

$$x \in D(f) \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 12}{x - 1} \geq 0$$

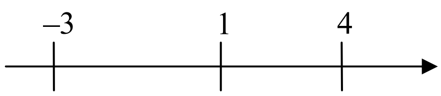
Para resolver esta inecuación, descomponemos factorialmente los polinomios que en ella intervienen. Como:

$$x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{1 - 7}{2} = -3 \\ = \dfrac{1 + 7}{2} = 4 \end{array} \right.$$

la inecuación se transforma en:

$$\frac{(x + 3)(x - 4)}{x - 1} \geq 0$$

El numerador se anula en -3 y en 4. El denominador lo hace en 1. Para evaluar el signo de la expresión del primer miembro, descomponemos $\mathbb{R}$ mediante estos tres números:



En cada uno de los intervalos resultantes, la expresión tiene siempre el mismo signo, por lo que, para averiguarlo, basta dar a x cualquier valor dentro del intervalo en estudio:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$x+3$	$-$	0	$+$	…	$+$	…	$+$
$x-1$	$-$	…	$-$	0	$+$	…	$+$
$x-4$	$-$	…	$-$	…	$-$	0	$+$
$\frac{(x+3)(x-4)}{x-1}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
¿Sirven? $\rightarrow$	No	Si	Si	No	No	Si	Si

Luego: $\boxed{D(f) = [-3, 1) \cup [4, +\infty)}$

4) Estudiar la continuidad de la función y clasificar las discontinuidades: *(2 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+4}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x-2}{x^2-4}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Intervalo $(-\infty, 0)$: f coincide con $y = \dfrac{2}{x+4}$, que no es continua únicamente en $x = -4$, punto que anula el denominador. Como -4 está en el intervalo, clasificamos la discontinuidad:

  1) $\nexists f(-4)$

  2) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{2}{x+4} = \left(\dfrac{2}{0}\right) = \infty$. Por lo que la discontinuidad es asintótica. Veamos si lo es de salto infinito:

  $$\lim_{x\to-4^-} \frac{2}{x+4} = \left(\frac{+}{-}\right) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-4^-} \frac{2}{x+4} = \left(\frac{+}{+}\right) = +\infty$$

  Luego sí lo es.

  En resumen, f es continua en $(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$, presentando en $x = -4$ una discontinuidad asintótica de salto infinito.

- Intervalo $(0, +\infty)$: f coincide con $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$, cuyas discontinuidades están en 2 y -2. Pero éste último no está en el intervalo, de modo que lo ignoramos. Estudiamos únicamente, pues, la discontinuidad en 2:

  1) $\nexists f(2)$

  2) $\exists \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$

  Por tanto, es una discontinuidad evitable.

  En resumen, f es continua en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$, con una discontinuidad evitable en $x = 2$.

- $x = 0$: 1) $\exists f(0) = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$.

  2) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{2}{x+4} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$

  3) Ambos valores coinciden

Por tanto, la función es continua en este punto.

En resumen, f es continua en $(-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, +\infty)$, con una discontinuidad asintótica de salto infinito en -4 y otra evitable en 2.

5) Calcular $\lim_{x\to 3} \dfrac{3-\sqrt{2x+3}}{2x^2-8x+6}$ *(2 puntos)*

$$\lim_{x\to 3} \frac{3-\sqrt{2x+3}}{2x^2-8x+6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3} \frac{3-\sqrt{2x+3}}{2x^2-8x+6}\,\frac{3+\sqrt{2x+3}}{3+\sqrt{2x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3^2-\left(\sqrt{2x+3}\right)^2}{(2x^2-8x+6)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{9-(2x+3)}{(2x^2-8x+6)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-2x+6}{(2x^2-8x+6)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)} =$$

Descomponemos factorialmente los polinomios que aparecen. En el numerador basta sacar $-4x$ factor común. En el denominador, por Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -8 & 6 \\ 3 & & 6 & -6 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-2(x-3)}{(2x-2)(x-3)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{-2}{(2x-2)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)} = \frac{-2}{4(3+3)} = \boxed{-\frac{1}{12}}$$

6) Calcular $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{8x+6}}$ *(2 puntos)*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{8x+6}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

En este tipo de límites, cuando tenemos un cociente de polinomios (alguno de los cuales puede estar dentro de raíces), los sustituimos por el término de mayor grado:

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-\sqrt{2x}}{\sqrt{8x}} = \lim_{x\to +\infty} \left(-\sqrt{\frac{2x}{8x}}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(-\sqrt{\frac{2}{8}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 26 de Mayo de 2.010
Análisis

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$, clasificando las discontinuidades:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{si } x<0 \\ x^2-2, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$ *(1,5 puntos)*

2) Derivar las siguientes funciones, simplificando los resultados: *(3 puntos)*
   a) $y=2e^{\cos 3x}$
   b) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{2x}$
   c) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{(2x-3)^2}{x-3}}$
   d) $y=3x\operatorname{tg}4x$
   e) $y=2\operatorname{sen}^2 3x$

3) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{4-x^2}{x-3}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y'=\dfrac{-x^2+6x-4}{(x-3)^2}$; $y''=\dfrac{-10}{(x-3)^3}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,5 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

SOLUCIONES

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$, clasificando las discontinuidades:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{si } x<0\\ x^2-2, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

(1,5 puntos)

- Intervalo $(-\infty, 0)$: f coincide con $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$, que no es continua únicamente en $x = -2$, punto que anula el denominador. Como -2 está en el intervalo, clasificamos la discontinuidad:

  1) $\nexists f(-2)$

  2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x-2)=-4.$

  Por tanto, la discontinuidad es evitable.

  En resumen, f es continua en $(-\infty, -2)\cup(-2, 0)$, presentando en $x=-2$ una discontinuidad evitable.

  Intervalo $(0, +\infty)$: f coincide con $y = x^2 - 2$, que no tiene discontinuidades, al ser polinómica. Luego f es continua en todo el intervalo.

- $x=0$: 1) $\exists f(0) = -2$.

  2) $\displaystyle\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-4}{x+2}=-2;\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2-2)=-2\ \Rightarrow$

  $\displaystyle\Rightarrow\ \exists\lim_{x\to0}f(x)=-2$

  3) Ambos valores coinciden

  Por tanto, la función es continua en este punto.

  En resumen, f es continua en $(-\infty, -2)\cup(-2, +\infty)$, presentando en $x=-2$ una discontinuidad evitable.

2) Derivar las siguientes funciones, simplificando los resultados: *(3 puntos)*

a) $y=2e^{\cos 3x}\ \Rightarrow\ y'=2e^{\cos 3x}(-\text{sen}\,3x)3=\boxed{-6\,e^{\cos 3x}\,\text{sen}\,3x}$

b) $y=\text{arctg}\sqrt{2x}\ \Rightarrow$

$$y'=\frac{\dfrac{2}{2\sqrt{2x}}}{1+\left(\sqrt{2x}\right)^2}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2x}}}{1+2x}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}}{1+2x}=\frac{\dfrac{\sqrt{2x}}{2x}}{1+2x}=\frac{\sqrt{2x}}{2x(1+2x)}=\boxed{\frac{\sqrt{2x}}{4x^2+2x}}$$

c) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{(2x-3)^2}{x-3}}=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(2x-3)^2}{x-3}=\dfrac{1}{3}\left[\ln(2x-3)^2-\ln(x-3)\right]=$

$=\dfrac{1}{3}\left[2\ln(2x-3)-\ln(x-3)\right]$. Derivando:

$$y'=\frac{1}{3}\left[2\frac{2}{2x-3}-\frac{1}{x-3}\right]=\boxed{\frac{1}{3}\left[\frac{4}{2x-3}-\frac{1}{x-3}\right]}$$

d) $y = 3x \operatorname{tg} 4x \quad \Rightarrow \quad y' = 3 \operatorname{tg} 4x + 3x \dfrac{4}{\cos^2 4x} = \boxed{3 \operatorname{tg} 4x + \dfrac{12x}{\cos^2 4x}}$

e) $y = 2 \operatorname{sen}^2 3x \quad \Rightarrow$

$y' = 4 (\operatorname{sen} 3x \cos 3x)\, 3 = 6 \cdot 2 \operatorname{sen} 3x \cos 3x = 6 \operatorname{sen} 2 \cdot 3x = \boxed{6 \operatorname{sen} 6x}$

3) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \dfrac{4 - x^2}{x-3}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y' = \dfrac{-x^2 + 6x - 4}{(x-3)^2}$; $y'' = \dfrac{-10}{(x-3)^3}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,5 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

Comenzamos derivando:

$$y' = \frac{-2x(x-3) - (4 - x^2)}{(x-3)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 4 + x^2}{(x-3)^2} = \boxed{\frac{-x^2 + 6x - 4}{(x-3)^2}}$$

$$y'' = \frac{(-2x+6)(x-3)^2 - (-x^2 + 6x - 4)2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(x-3)[(-2x+6)(x-3) - (-x^2 + 6x - 4)2]}{(x-3)^4} = \frac{-2x^2 + 6x + 6x - 18 + 2x^2 - 12x + 8}{(x-3)^3} =$$

$$= \boxed{\frac{-10}{(x-3)^3}}$$

a) Dominio: $\boxed{\mathbb{R} - \{ 3 \}}$, ya que ese valor anula el denominador.

b) Intersecciones con los ejes: $x = 0 \;\Rightarrow\; y = -4/3$: $\boxed{(0, -4/3)}$

$y = 0 \;\Rightarrow\; 4 - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = -2$ ó $x = 2$: $\boxed{(-2, 0);\ (2, 0)}$

c) Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{4 - (-x)^2}{-x-3} = \dfrac{4 + x^2}{-(x+3)}$ que no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$.

Por ello, no es par ni impar.

d) Asíntotas:

AH: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4 - x^2}{x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(-x) = \infty \quad \Rightarrow$ No tiene AH.

AV: Tomamos límite en el punto de discontinuidad: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4 - x^2}{x-3} = \left(\dfrac{-5}{0}\right) = \infty \quad \Rightarrow$

La recta $\boxed{x = 3}$ es AV.

AO: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4 - x^2}{x-3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4 - x^2}{x^2 - 3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4 - x^2}{x-3} - (-x)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - x^2 + x(x-3)}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4 - x^2 + x^2 - 3x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - 3x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{x} = -3$$

Por tanto, la recta $\boxed{y = -x - 3}$ es A.O.

e) Monotonía / Extremos relativos:

- Discontinuidades de f: 3

- Discontinuidades de f': 3
- $f'(x)=0$: $-x^2+6x-4=0 \Rightarrow x^2-6x+4=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{5}}{2}=3\pm\sqrt{5}$$

Dividimos R en intervalos mediante los dos puntos obtenidos:

	$(-\infty,\ 3-\sqrt{5})$	$3-\sqrt{5}$	$(3-\sqrt{5},\ 3)$	3	$(3,\ 3+\sqrt{5})$	$3+\sqrt{5}$	$(3+\sqrt{5},+\infty)$
f'	–	0	+	∄	+	0	–
f	↘	Mín	↗	∄	↗	Máx	↘

Tiene un mínimo en $(3-\sqrt{5}, -1.53)$ y un máximo en $(3+\sqrt{5}, -10.47)$.

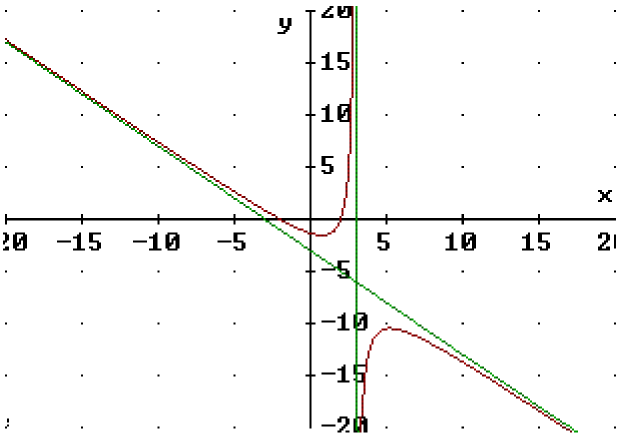
f) Curvatura / Puntos de inflexión:

- Discontinuidades de f, f': 3
- Discontinuidades de f'': 3
- $f''(x)=0$: No hay ningún valor

Dividimos R en intervalos mediante los dos puntos obtenidos:

	$(-\infty,\ 3)$	3	$(3,+\infty)$
f''	+	∄	–
f	∪ (convexa)	∄	∩ (cóncava)

g) Gráfica:



MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 2 de Junio de 2.010
Análisis

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$ según los valores de a, y clasificar las discontinuidades:

$$f(x)=\begin{cases} x+a, & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2x}{x-3}, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$ *(1,5 puntos)*

2) Derivar las siguientes funciones, simplificando los resultados: *(2 puntos)*

a) $y=2xe^{\operatorname{sen} 3x}$

b) $y=\ln \sqrt[3]{\dfrac{(4x-3)^2}{x-1}}$

c) $y=3x^{\cos 2x}$

d) $y=2\operatorname{sen}^2 3x$

3) Hallar la ecuación de la tangente a $y=x^3-6x^2$ en su punto de inflexión *(1 punto)*

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$, comprobando previamente que sus derivadas son $y'=\dfrac{-14x}{(x^2-4)^2}$ $y''=\dfrac{14(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$.

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,5 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

SOLUCIONES

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$ según los valores de a, y clasificar las discontinuidades:

$$f(x)=\begin{cases} x+a, & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2x}{x-3}, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$ *(1,5 puntos)*

- Intervalo $(-\infty, 1)$. f coincide con $y = x + a$, que es continua en todos los puntos de R, al ser una función polinómica. Por tanto, en particular, es continua en todo el intervalo.
- Intervalo $(1, +\infty)$. Aquí coincide con $y=\dfrac{2x}{x-3}$, quien, al ser una función racional, es continua en su dominio, esto es R – {3}, puesto que 3 anula el denominador. Por tanto, es continua en todos los puntos del intervalo salvo 3. Veamos qué discontinuidad hay en este punto.
  - $\nexists f(3)$
  - $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}=\left(\dfrac{6}{0}\right)=\infty$ por lo que la discontinuidad es asintótica. Como, además: $\lim_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}=\left(\dfrac{+}{-}\right)=-\infty$ y $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3}=\left(\dfrac{+}{+}\right)=+\infty$, la discontinuidad es asintótica de salto infinito.
- $x = 1$.
  - $\exists f(1)=\dfrac{2}{1-3}=-1$
  - $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+a)=1+a$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{x-3}=-1$

    Por tanto, si ambos valores coinciden, existirá el límite, y coincidirá, también, con $f(1)$, por lo que la función será continua en $x = 1$. Y esto sucede si: $1 + a = -1 \Rightarrow a = -2$. En caso contrario, los dos límites laterales existirían pero sin coincidir, por lo que presentaría una discontinuidad de salto finito.

En resumen, f es continua en todo R salvo en $x = 3$, donde presenta una discontinuidad asintótica de salto infinito, y si $a \neq -2$, tiene, además, una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

2) Derivar las siguientes funciones, simplificando los resultados: *(2 puntos)*

a) $y = 2xe^{\text{sen } 3x}$

$$y' = 2e^{\text{sen } 3x} + 2xe^{\text{sen } 3x}(\cos 3x)3 = \boxed{2e^{\text{sen } 3x}(1 + 3x\cos 3x)}$$

b) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{(4x-3)^2}{x-1}}$

Simplificando la expresión antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos:

$$y=\frac{1}{3}[\ln(4x-3)^2-\ln(x-1)]=\frac{1}{3}[2\ln(4x-3)-\ln(x-1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{3}\left(2\frac{4}{4x-3}-\frac{1}{x-1}\right)=\boxed{\frac{1}{3}\left(\frac{8}{4x-3}-\frac{1}{x-1}\right)}$$

c) $y = 3x^{\cos 2x}$

Tomamos ln antes de derivar: $\ln y = \ln 3x^{\cos 2x} = \ln 3 + \ln x^{\cos 2x} = \ln 3 + \cos 2x \ln x$

Derivando miembro a miembro:

$$\frac{y'}{y} = 0 + -2\text{sen } 2x \ln x + (\cos 2x)\frac{1}{x} = -2\text{sen } 2x \ln x + \frac{\cos 2x}{x} = \frac{-2x\text{sen } 2x \ln x + \cos 2x}{x}$$

$$\Rightarrow\ y' = 3x^{\cos 2x}\frac{-2x\text{sen } 2x \ln x + \cos 2x}{x} = \boxed{3x^{\cos 2x - 1}(\cos 2x - 2x\text{sen } 2x \ln x)}$$

d) $y = 2\,\text{sen}^2 3x$

$$y' = 2\cdot 2 \text{ sen } 3x\ (\cos 3x)\ 3 = 6 \cdot 2 \text{ sen } 3x \cos 3x = 6 \text{ sen } 2\cdot 3x = \boxed{6 \text{ sen } 6x}$$

3) Hallar la ecuación de la tangente a $y = x^3 - 6x^2$ en su punto de inflexión *(1 punto)*

Para no tener que estudiar la curvatura completa, usamos un teorema que dice que si en un valor de x se anula la segunda derivada pero no la tercera, en ese valor hay un punto de inflexión.

$f'(x) = 3x^2 - 12x$

$f''(x) = 6x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$f'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f'''(2) = 6 \neq 0.$

Luego en $x = 2$ hay un punto de inflexión, por lo que es ahí donde hay que calcular la tangente.

- Como $f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 = 8 - 24 = -16 \quad \Rightarrow \quad (2, -16)$ es el punto de tangencia.
- La pendiente es $m = f'(2) = 3\cdot 4 - 12\cdot 2 = 12 - 24 = -12$

La recta tangente es (en forma punto-pendiente): $y - (-16) = -12\,(x - 2) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ y + 16 = -12x + 24 \quad \Rightarrow \quad y = -12x + 24 - 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -12x + 8}.$$

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$, comprobando previamente que sus derivadas son $y' = \dfrac{-14x}{(x^2-4)^2}$ $\quad y'' = \dfrac{14(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$.

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,5 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

Comenzamos derivando:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x[(x^2-4)-(x^2+3)]}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^2-4-x^2-3)}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x(-7)}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-14(x^2-4)^2 + 14x2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)[-14(x^2-4)+14x4x]}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{14(-x^2+4+4x^2)}{(x^2-4)^3} = \frac{14(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

a) Dominio. $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}}$, ya que los valores de x que anulan el denominador son -2 y 2,

b) Par / Impar. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4} = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$ $\Rightarrow$ es $\boxed{\text{PAR}}$.

c) Intersecciones con los ejes.

- $x = 0 \Rightarrow y = -3/4$. $\boxed{\text{Corta en } (0, -3/4)}$.
- $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3 = 0$ (siempre que las soluciones no anulen, también, el denominador) $\Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Rightarrow$ $\boxed{\text{No corta al eje OY}}$.

d) Asíntotas.

- Asíntota horizontal: Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2-4} = 1$, puesto que la máxima potencia de x tanto del numerador como del denominador es 2, y los coeficientes de los términos correspondientes valen, ambos, 1, siendo su cociente, también, 1. Por tanto, la recta horizontal de ecuación $\boxed{y = 1}$ es A.H.
- Asíntota vertical: Hay dos discontinuidades para estudiar:

  $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\dfrac{7}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta vertical de ecuación $\boxed{x = -2}$ es A.V.

  $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\dfrac{7}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta vertical de ecuación $\boxed{x = 2}$ es A.V.
- Asíntota oblicua: Como tiene A.H. tanto por el lado del $+\infty$ como por el del $-\infty$, si intentamos calcular la A.O. obtendríamos otra vez la A.H.

e) Monotonía / Extremos relativos

- Discontinuidades de f: -2 y 2 (no están en el dominio)
- Discontinuidades de f': -2 y 2 (anulan el denominador, por lo que no tienen imagen)
- Puntos que anulan f': $-14x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos y averiguamos el signo de f' en cada uno de ellos, para lo que basta elegir un punto arbitrario del intervalo en cuestión y sustituirlo en f', anotando su signo, porque en todos los puntos del intervalo el signo de f' es el mismo (garantizado por el Teorema de Bolzano). Como el denominador de f' es el cuadrado de una expresión, siempre va a ser positivo, con lo que basta comprobar el signo del numerador:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
f	↗	$\nexists$	↗	Máx	↘	$\nexists$	↘

Como $f(0) = -3/4$, las coordenadas del $\boxed{\text{máximo relativo son } (0, -3/4)}$

f) Curvatura / Puntos de inflexión

- Discontinuidades de f, f', f'': -2 y 2 (no están en el dominio)
- Puntos que anulan f'': $14(3x^2 + 4) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4/3} \Rightarrow$ No hay.

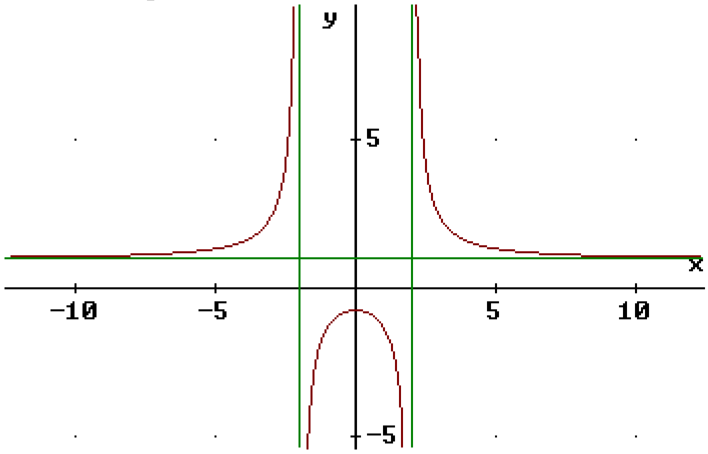
Dividimos el dominio en intervalos:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cup$	$\nexists$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

Por tanto, $\boxed{\text{no tiene puntos de inflexión}}$.

g) <u>Gráfica</u>

Hemos dibujado en color verde las dos asíntotas verticales y la asíntota horizontal. La gráfica queda como sigue, aprovechando los conocimientos que de la función tenemos merced al estudio que de ella hemos realizado:



MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S. 9 de Junio de 2.010

Análisis

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$ según los valores de a, y clasificar las discontinuidades:

$$f(x)=\begin{cases} x+a, & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2x}{x-4}, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$ *(1,5 puntos)*

2) Derivar las siguientes funciones, simplificando los resultados: *(2 puntos)*

a) $y=3xe^{\cos x^2}$

b) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{4x^2-3}{(x-1)^2}}$

c) $y=\text{arctg}\,\sqrt{3x}$

d) $y=3\cos^2 5x$

3) Hallar la ecuación de la(s) tangente(s) a $y=x^2-6x$ paralelas a $y=2x$. *(1 punto)*

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$, comprobando previamente que sus derivadas son $y'=\dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$ $y''=\dfrac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3}$.

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,5 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

SOLUCIONES

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$ según los valores de a, y clasificar las discontinuidades:

$$f(x)=\begin{cases} x+a, & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2x}{x-4}, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

(1,5 puntos)

- Intervalo $(-\infty, 1)$. f coincide con $y = x + a$, que es continua en todos los puntos de R, al ser polinómica. Por tanto, en particular, es continua en todo el intervalo.
- Intervalo $(1, +\infty)$. Aquí coincide con $y=\dfrac{2x}{x-4}$, quien, al ser una función racional, es continua en su dominio, esto es R – {4}, puesto que 4 anula el denominador. Por tanto, es continua en todos los puntos del intervalo salvo 4. Veamos qué discontinuidad hay en este punto.
  - $\nexists f(4)$
  - $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x}{x-4}=\left(\dfrac{8}{0}\right)=\infty$ por lo que la discontinuidad es asintótica. Como, además: $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x}{x-4}=\left(\dfrac{+}{-}\right)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x}{x-4}=\left(\dfrac{+}{+}\right)=+\infty$,

    la discontinuidad es asintótica de salto infinito.
- $x = 1$.
  - $\exists f(1)=\dfrac{2}{1-4}=-2/3$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+a)=1+a$; $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{x-4}=-\dfrac{2}{3}$

    Por tanto, si ambos valores coinciden, existirá el límite, y coincidirá, también, con $f(1)$, por lo que la función será continua en $x = 1$. Y esto sucede si: $1 + a = -2/3 \Rightarrow a = -5/3$. En caso contrario, los dos límites laterales existirían pero sin coincidir, por lo que presentaría una discontinuidad de salto finito.

En resumen, <u>f es continua en todo R salvo en $x = 4$, donde presenta una discontinuidad asintótica de salto infinito, y si $a \neq -5/3$, tiene, además, una discontinuidad de salto finito en $x = 1$</u>.

2) Derivar las siguientes funciones, simplificando los resultados: *(2 puntos)*

a) $y=3xe^{\cos x^2}$

$$y' = 3e^{\cos x^2} + 3xe^{\cos x^2}2x(-\text{sen } x^2) = \boxed{3e^{\cos x^2}(1 - 2x^2 \text{ sen } x^2)}$$

b) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{4x^2-3}{(x-1)^2}}$

Simplificando la expresión antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos:

$$y=\frac{1}{5}[\ln(4x^2-3)-\ln(x-1)^2] = \frac{1}{5}[\ln(4x^2-3)-2\ln(x-1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y'=\frac{1}{5}\left(\frac{8x}{4x^2-3}-2\frac{1}{x-1}\right)=\boxed{\frac{1}{5}\left(\frac{8x}{4x^2-3}-\frac{2}{x-1}\right)}$$

c) $y = \text{arctg}\sqrt{3x}$

$$y' = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}}{1+\left(\sqrt{3x}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}}{1+3x} = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{3x}(1+3x)}}$$

d) $y = 3\cos^2 5x$

$y' = 3\cdot 2 \cos 5x\,(-5 \text{ sen } 5x) = -15\cdot 2 \text{ sen } 5x \cos 5x = -15 \text{ sen } 2\cdot 5x = \boxed{-15 \text{ sen } 10x}$

3) Hallar la ecuación de la(s) tangente(s) a $y = x^2 - 6x$ paralelas a $y = 2x$. *(1 punto)*

Para ser paralela a la recta dada, la tangente (o tangentes) debe tener pendiente 2. Y, según la interpretación geométrica de la derivada, ésta es la derivada en la x del punto de tangencia. O sea:

$$f'(x) = 2x - 6 = 2 \;\Rightarrow\; 2x = 8 \;\Rightarrow\; x = 4$$

Luego la abscisa del punto de tangencia es 4. Así que dicho punto es:

$$f(4) = 16 - 24 = -8 \;\Rightarrow\; \text{El punto es } (4, -8)$$

Por tanto, en forma punto-pendiente, la recta tangente es:

$$y - (-8) = 2(x-4) \;\Rightarrow\; y + 8 = 2x - 8 \;\Rightarrow\; y = 2x - 8 - 8 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 2x - 16}$$

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$, comprobando previamente que sus derivadas son $y' = \dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$ $y'' = \dfrac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3}$.

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,5 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

Comenzamos derivando:

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1) - 2x2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2-1)^2 - (-2x^2-2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)[-4x(x^2-1) - (-2x^2-2)4x]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{-4x^3 + 4x - (-8x^3 - 8x)}{(x^2-1)^3} = \frac{-4x^3 + 4x + 8x^3 + 8x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3}$$

a) Dominio. $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$, ya que los valores de x que anulan el denominador son -1 y 1,

b) Par / Impar. $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)^2-1} = -\dfrac{2x}{x^2-1} = -f(x) \;\Rightarrow$ es $\boxed{\text{IMPAR}}$.

c) Intersecciones con los ejes.

- $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$. $\boxed{\text{Corta en } (0, 0)}$.
- $y = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 0$ (siempre que las soluciones no anulen, también, el denominador) $\Rightarrow\; x = 0$ (que no anula el denominador) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Corta en } (0, 0)}$.

d) Asíntotas.

- Asíntota horizontal: Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x} = \left(\dfrac{2}{\infty}\right) = 0 \;\Rightarrow$ la recta horizontal de ecuación $\boxed{y = 0}$ es A.H.
- Asíntota vertical: Hay dos discontinuidades para estudiar:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{La recta vertical de ecuación } \boxed{x = -1} \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \left(\frac{2}{0}\right) = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{La recta vertical de ecuación } \boxed{x = 1} \text{ es A.V.}$$

- Asíntota oblicua: Como tiene A.H. tanto por el lado del $+\infty$ como por el del $-\infty$, si intentamos calcular la A.O. obtendríamos otra vez la A.H.

e) Monotonía / Extremos relativos

- Discontinuidades de f: -1 y 1 (no están en el dominio)
- Discontinuidades de f': -1 y 1 (anulan el denominador, por lo que no tienen imagen)
- Puntos que anulan f': $-2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow -2 = 2x^2 \Rightarrow \pm\sqrt{-1} = x \Rightarrow$ No hay.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	$-$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$-$
f	↘	$\nexists$	↘	$\nexists$	↘

No tiene extremos relativos.

Si nos hubiésemos fijado en la primera derivada, veríamos que el signo del denominador es siempre negativo (o cero, fuera del dominio). En el numerador, tenemos el producto de un número siempre positivo o cero x^2 por un número negativo: -2, lo que siempre resulta negativo o cero; y al restarle 2 nos saldrá siempre negativo. Por tanto el cociente es, menos entre más, igual a menos, siempre. O sea, que si la derivada es negativa donde existe, la función siempre es decreciente, donde existe. Con esto, no tendríamos porqué haber estudiado el cuadro de monotonía anterior.

f) Curvatura / Puntos de inflexión

- Discontinuidades de f, f', f'': -1 y 1 (no están en el dominio)
- Puntos que anulan f'': $4x^3 + 12x = 0 \Rightarrow x^3 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + 3 = 0$ (que no es posible) ó $x = 0$.

Dividimos el dominio en intervalos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$	P.I.	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

Por tanto, $\boxed{(0, 0) \text{ es un punto de inflexión}}$.

g) Gráfica

Combinando los resultados anteriores, se obtiene: