1) (EBAU Cantabria 2022 Junio) Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, I50 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, A y B. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9800 €. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6400 € con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

A. [l PUNTO] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en €/kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.

B. [1,5 PUNTOS) Resuélvalo.

A. x: Precio del kg de cemento
y: Precio del kg de ladrillos
z: precio del kg de azulejos

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{400x+150y+120z=9800} \\ \mathbf{400\cdot\frac{x}{2}+150\cdot\frac{y}{3}+120\cdot\frac{z}{4}=3400} \\ \mathbf{z=2(y+x)} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \mathbf{40x+15y+12z=980} \\ \mathbf{20x+5y+3z=340} \\ \mathbf{2x+2y-z=0} \end{array}\right.$$

B. Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 40 & 15 & 12 & 980 \\ 20 & 5 & 3 & 340 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-10F_1]{F_2\to F_2-20F_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -25 & 32 & 980 \\ 0 & -15 & 13 & 340 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\to 3F_3-5F_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -25 & 32 & 980 \\ 0 & 0 & 31 & 1240 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y=12 \\ z=40 \end{array}\right.$$

El precio del kg de cemento es de 8€/kg.

El precio del kg de ladrillos es de 12€/kg.

El precio del kg de azulejos es de 40€/kg

2) **(EBAU Cantabria 2021 Junio) Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de las tarifas de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 € ; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 € .**

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las tres tarifas.

b) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

d) El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15% a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

a) x: tarifa de las entradas de adulto expresadas en euros
y: tarifa de las entradas de niño expresadas en euros
z: tarifa de las entradas de jubilado expresadas en euros

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+z=5y} \\ \boldsymbol{5x+3y+3z=222} \\ \boldsymbol{3x+2y+4z=168} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x-5y+z=0} \\ \boldsymbol{5x+3y+3z=222} \\ \boldsymbol{3x+2y+4z=168} \end{cases}$$

b) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12+10-45-9+100-6 = 62 \neq 0$ → Como $|A| \neq 0$ → rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

c) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1[er] Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

X = $\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 222 & 3 & 3 \\ 168 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{444-2520-504+4440}{62} = \dfrac{1860}{62} = 30$ Y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 222 & 3 \\ 3 & 168 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{888+840-666-504}{62} = \dfrac{558}{62} = 9$

Z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 168 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{504-3330+4200-444}{62} = \dfrac{930}{62} = 15$

2º Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -2 & 222 \\ 0 & 17 & 1 & 168 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to 17F_2 - 28F_3} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -2 & 222 \\ 0 & 0 & -62 & -930 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 9 \\ z = 15 \end{cases}$$

La tarifa de adulto será de 30€, la tarifa de niño será de 9€ y la tarifa de jubilado será de 15€

d) Pagarán 2· (0,85 · 30) +2· (0,85 · 9) + 3· (0,85·15) = 104,55 €

3) (EBAU Cantabria 2021 Julio) Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan. El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

A. [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el tiempo empleado por cada estudiante.

B. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

A. x: horas que ha empleado Cristina en realizar el trabajo

y: horas que ha empleado Juan en realizar el trabajo

z: horas que ha empleado Pedro en realizar el trabajo

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 1,4y \\ z = \dfrac{x+y}{2} \\ x + y + z = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 1,4y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 7y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = 18 \end{cases}$$

B. Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix}5 & -7 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad A^{*}=\begin{pmatrix}5 & -7 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 18\end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^{*}) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A|=\begin{vmatrix}5 & -7 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=5+0+14-0+7+10=36\neq 0$ → Como $|A|\neq 0$ → rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^{*}) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C. Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}5 & -7 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 18\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 18\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 5 & -7 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-5F_1]{F_2\to F_2-F_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 18\\ 0 & 0 & -3 & -18\\ 0 & -12 & -5 & -90\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=7\\ y=5\\ z=6\end{cases}$$

2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

X = $\dfrac{\begin{vmatrix}0 & -7 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 18 & 1 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{252}{36}=7$ Y = $\dfrac{\begin{vmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 18 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{180}{36}=5$ Z = $\dfrac{\begin{vmatrix}5 & -7 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 18\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{90+126}{36}=\dfrac{216}{36}=6$

El número de horas que emplea Cristina es de 7 horas, Juan emplea 5 horas y Pedro emplea 6 horas.

4) **(EBAU Cantabria 2020 Junio) Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B. A. [0,9 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor. B. [0,8 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema. C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.**

A) x: número de televisores del modelo A

y: número de televisores del modelo B

z: número de televisores del modelo C

Planteamos el sistema de ecuaciones:

Precio del televisor tipo A: 320 euros

Precio del televisor tipo B: 20% de descuento, el cliente pagará el 80% : $\frac{80}{100} \cdot 320 = 256$ euros

Precio del televisor tipo C: 10% de incremento, el cliente pagará el 110% : $\frac{110}{100} \cdot 320 = 352$ euros

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=750} \\ \boldsymbol{320x+256y+352z=230400} \\ \boldsymbol{x+z=2y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=750} \\ \boldsymbol{10x+8y+11z=7200} \\ \boldsymbol{x-2y+z=0} \end{cases}$$

B) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 10 & 8 & 11 & 7200 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 11 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 20 + 11 - 8 - 10 + 22 = 3 \neq 0 \rightarrow$ Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 10 & 8 & 11 & 7200 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - 10F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 0 & -2 & 1 & -300 \\ 0 & -3 & 0 & -750 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ z = 200 \\ y = 250 \end{cases}$$

2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 750 & 1 & 1 \\ 7200 & 8 & 11 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6000-14400-7200+16500}{3} = 300$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 750 & 1 \\ 10 & 7200 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7200+8250-7200-7500}{3} = 250$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 750 \\ 10 & 8 & 7200 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-15000+7200-6000+14400}{3} = 200$$

El número de televisores que se venden son: 300 televisores de tipo A, 250 televisores de tipo B y 200 televisores de tipo C.

5) **(EBAU Cantabria 2020 Julio) Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.**

A. [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

B. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

A) x: número de archivadores

y: número de cuadernos

z: número de carpetas

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{6x+3y+2z=600} \\ \boldsymbol{y=\frac{z}{4}} \\ \boldsymbol{x+z=165} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{6x+3y+2z=600} \\ \boldsymbol{4y-z=0} \\ \boldsymbol{x+z=165} \end{cases}$$

B) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 165 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24+0-3-8+0+0 = 13 \neq 0 \rightarrow \text{Como } |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 165 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to 6F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 390 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to 4F_3 + 3F_1]{} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 1560 \end{pmatrix} \begin{cases} x = 45 \\ y = 30 \\ z = 120 \end{cases}$$

2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 600 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 165 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2400-495-1320}{13} = 45$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 600 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 165 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-600+990}{13} = 30$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 600 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 165 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3960-2400}{3} = 120$$

El número de televisores que deben comprarse son: 45 archivadores, 30 cuadernos y 120 carpetas.

6) En una reunión hay 60 personas entre altas, medias y bajas. Se sabe que entre las bajas y las medianas duplican el número de altas. También se sabe que las altas y el doble de las medianas son el doble de las bajas.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de personas altas, medianas y bajas.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) **Resolverlo.**

a)

x : número de personas altas

y: número de personas medianas

z: número de personas pequeñas

Planteamos el sistema de ecuaciones → $\begin{cases} x + y + z = 60 \\ y + z = 2x \\ x + 2y = 2z \end{cases}$

B) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2+4-1+1+4+2 = 12 \neq 0 \rightarrow \text{Como } |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

<u>1[er] Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:</u>

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \rightarrow f3 - f1]{f2 \rightarrow f2 - 2f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -3 & -3 & -120 \\ 0 & 1 & -3 & -60 \end{array}\right) \xrightarrow{f3 \rightarrow 3f3 + f2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -3 & -3 & -120 \\ 0 & 0 & -12 & -300 \end{array}\right) \begin{cases} x = 20 \\ y = 15 \\ z = 25 \end{cases}$$

<u>2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:</u>

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2+4-1+1+4+2= 12\neq 0$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{120+120}{12} = 20 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-60+240}{12} = 15 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{240+60}{12} = 25$$

Por tanto habrá 20 personas altas, 15 personas medianas y 25 de personas pequeñas

7) **En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos:**

- **Sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros.**
- **Con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores.**
- **Con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto.**

Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen.

A) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de pantalones de cada clase.

B) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C) **Resolverlo.**

A) x: número de pantalones sin defecto

y: número de pantalones con defecto no apreciable

z: número de pantalones con defecto apreciable

Planteamos el Sistema de Ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=70 \\ 20x+20\cdot\frac{80}{100}\cdot y+20\cdot\frac{40}{100}\cdot z=1280 \\ y+z=\frac{40}{100}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=70 \\ 5x+4y+2z=320 \\ 2x-5y-5z=0 \end{cases}$$

B) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 5 & 4 & 2 & 320 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & -5 \end{vmatrix}=-20-25+4-8+25+10=-14\neq 0 \rightarrow \text{Como } |A|\neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) = número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&70\\5&4&2&320\\2&-5&-5&0\end{array}\right)\xrightarrow[f3=f3-2f1]{f2=f2-5f1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&70\\0&-1&-3&-30\\0&-7&-7&-140\end{array}\right)\xrightarrow{f3=f3-7f2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&70\\0&-1&-3&-30\\0&0&14&70\end{array}\right)\quad\begin{cases}x=50\\y=15\\z=5\end{cases}$$

2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\5&4&2\\2&-5&-5\end{vmatrix}=-20-25+4-8+25+10=-14\neq 0$$

$$X=\frac{\begin{vmatrix}70&1&1\\320&4&2\\0&-5&-5\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-700}{-14}=50\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&70&1\\5&320&2\\2&0&-5\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-1600+280-640+1750}{-14}=15\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&70\\5&4&320\\2&-5&0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-70}{-14}=5$$

Hay 50 sin defecto, 15 con defecto no apreciable y 5 con defecto apreciable.

8) En una papelería entran tres clientes: el primero compra cuatro lapiceros y seis gomas de borrar y paga 1,60 euros; el segundo compra cinco lapiceros y tres bolígrafos y paga 2,45 euros, y el tercero paga 1,30 euros por cinco gomas de borrar y dos bolígrafos.

A) Plantear el sistema de ecuaciones que nos permite calcular el precio de cada uno de los productos.

B) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C) **Resolverlo.**

D) ¿Cuánto deberá pagar otro cliente por cinco lapiceros, cinco gomas de borrar y diez bolígrafos?

x: precio de cada lapicero

y: precio de cada goma de borrar

z: precio de cada bolígrafo

A)

Planteamos el Sistema de Ecuaciones: $\begin{cases}4x+6y=1,6\\5x+3z=2,45\\5y+2z=1,3\end{cases}$

B) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\5&0&3\\0&5&2\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}4&6&0&1,6\\5&0&3&2,45\\0&5&2&1,3\end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -60 - 60 = -120 \neq 0$ → Como $|A| \neq 0$ → rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

<u>1er Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:</u>

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 0 & 1,6 \\ 5 & 0 & 3 & 2,45 \\ 0 & 5 & 2 & 1,3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0,8 \\ 5 & 0 & 3 & 2,45 \\ 0 & 5 & 2 & 1,3 \end{array}\right) \xrightarrow{f2 = 2f2 - 5f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0,8 \\ 0 & -15 & 6 & 0,9 \\ 0 & 5 & 2 & 1,3 \end{array}\right) \xrightarrow{f3 = 3f3 + f2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0,8 \\ 0 & -15 & 6 & 0,9 \\ 0 & 0 & 12 & 4,8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 0,25 \\ y = 0,1 \\ z = 0,4 \end{cases}$$

<u>2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:</u>

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = = -60 - 60 = -120$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1,6 & 6 & 0 \\ 2,45 & 0 & 3 \\ 1,3 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-30}{-120} = 0,25 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1,6 & 0 \\ 5 & 2,45 & 3 \\ 0 & 1,3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-12}{-120} = 0,1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1,6 \\ 5 & 0 & 2,45 \\ 0 & 5 & 1,3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-48}{-120} = 0,4$$

Cada lapicero cuesta 0,25€ , cada goma de borrar cuesta 0,10€ y cada bolígrafo cuesta 0,40€

D)

El nuevo cliente deberá pagar 5·0,25+5·0,10+10·0,40= 5,75€

9) En una población se han presentado dos partidos políticos A y B, a las elecciones municipales y se han contabilizado 6464 votos. Si 655 votantes del partido A hubiesen votado a B, ambos partidos habrían empatado a votos. La suma de votos no válidos y en blanco supone el 1% de los que han votado a A o a B.

A) Plantear el sistema de ecuaciones que nos permite calcular el número de votos obtenidos por cada partido y el número de votos en blanco.

B) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C) Resolverlo

A)

x: nº de votos al partido A

y: nº de votos al partido B

z: nº de votos en blanco

Planteamos el Sistema de Ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=6464 \\ x-655=y+655 \\ z=\frac{1}{100}(x+y) \end{cases}$

B) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -100 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6464 \\ 1 & -1 & 0 & 1310 \\ 1 & 1 & -100 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -100 \end{vmatrix} = 100+1+1+100 = 202 \neq 0 \rightarrow \text{Como } |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 6464\\ 1 & -1 & 0 & 1310\\ 1 & 1 & -100 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[f3=f3-f1]{f2=f2-f1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 6464\\ 0 & -2 & -1 & -5154\\ 0 & 0 & -101 & -6464\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}x=3855\\ y=2545\\ z=64\end{cases}$$

2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -100\end{vmatrix}=100+1+1+100=202$$

$$X=\frac{\begin{vmatrix}6464 & 1 & 1\\ 1310 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -100\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{778710}{202}=3855 \quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 6464 & 1\\ 1 & 1310 & 0\\ 1 & 0 & -100\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{514090}{202}=2545 \quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 6464\\ 1 & -1 & 1310\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{12928}{202}=64$$

El partido A ha obtenido 3855 votos, el partido B 2545 votos y el número de votos en blanco 64

10) (EBAU Cataluña 2022 Junio) En una fiesta familiar se han reunido 20 personas. Contando el total de hombres y mujeres juntos, se observa que hay el triple que de niños. Además, se sabe que, si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual al número de hombres.

a) Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños asistieron a la fiesta.

b) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado.

A) x: número de hombres
y: número de mujeres
z: número de niños

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x+y+z=20}\\ \boldsymbol{x+y=3z}\\ \boldsymbol{y+1=x}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{x+y+z=20}\\ \boldsymbol{x+y-3z=0}\\ \boldsymbol{x-y=1}\end{cases}$$

B) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 20\\ 1 & 1 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 3 - 1 - 3 = -8 \neq 0$ → Como $|A| \neq 0$ → rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

X = $\dfrac{\begin{vmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-3-1-60}{-8} = \dfrac{-64}{-8} = 8$ Y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1-60+3}{-8} = \dfrac{-56}{-8} = 7$

Z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1-20-20-1}{-8} = \dfrac{-40}{-8} = 5$

2º Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \\ 0 & -2 & -1 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -2 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \\ z = 5 \end{cases}$$

A la fiesta familiar asisten 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños

11) **(EBAU Comunidad Valenciana 2022 Junio) Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por lo que ha cobrado en total 1650 euros en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local 95% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler, al propietario del segundo local, el 90% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos.**
   - **A) Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler**
   - **B) Analice la compatibilidad de dicho sistema.**
   - **C) Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado.**

x: euros que cobra la agencia por el primer local
y: euros que cobra la agencia por el segundo local
z: euros que cobra la agencia por el tercer local

A) Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=1650 \\ 0,05x+0,1y+0,2z=132 \\ x=2(y+z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1650 \\ x+2y+4z=2640 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$$

B) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 1 & 2 & 4 & 2640 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-4-2+4-2+2+8=6\neq 0 \rightarrow \text{Como } |A|\neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) = número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

$$X=\frac{\begin{vmatrix} 1650 & 1 & 1 \\ 2640 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{6600}{6}=1100 \qquad Y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1650 & 1 \\ 1 & 2640 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1980}{6}=330$$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1650 \\ 1 & 2 & 2640 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1320}{6}=220$$

2º Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 1 & 2 & 4 & 2640 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 1F_1]{F_2 \to F_2 - 1F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 1 & 3 & 990 \\ 0 & -3 & -3 & -1650 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 1 & 3 & 990 \\ 0 & 0 & 6 & 1320 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1100 \\ y = 330 \\ z = 220 \end{cases}$$

La agencia cobra por el primer local 1100 €/mes, por el segundo local 330 €/mes y por el tercer local 220€/mes

12) Tres automóviles A, B y C salen del mismo punto en tres momentos distintos y los tres circulan a una velocidad constante de 100 km por hora. Actualmente la suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km y la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B.
SabemosA) que cuando pase media hora la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C.

A) Plantee un sistema de ecuaciones para hallar la distancia recorrida por cada uno de los tres automóviles.
B) Analice la compatibilidad de dicho sistema.
C) Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado.

A) x: distancia recorrida por A en la actualidad en Km
y: distancia recorrida por B en la actualidad en Km
z: distancia recorrida por C en la actualidad en Km

Planteamos el sistema de ecuaciones:

Cuando pase media hora, como la velocidad es de 100km/h habrán recorrido cada uno $100\frac{km}{h} \cdot 0{,}5h$ = 50km

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 800} \\ \boldsymbol{x = 3y} \\ \boldsymbol{x + 50 + y + 50 = z + 50 + 50} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 800} \\ \boldsymbol{x - 3y = 0} \\ \boldsymbol{x + y - z = 0} \end{cases}$$

B) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 1 + 3 + 1 = 8 \neq 0$ → Como $|A| \neq 0$ → rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

X = $\frac{\begin{vmatrix} 800 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2400}{8} = 300$ Y = $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 800 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{800}{8} = 100$

Z = $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 800 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3200}{8} = 400$

2º Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & -4 & -1 & -800 \\ 0 & 0 & -2 & -800 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 300 \\ y = 100 \\ z = 400 \end{cases}$$

La distancia recorrida por A en la actualidad es de 300km, por B es de 100km y por C de 400 km

13) EBAU (Comunidad Valenciana Junio 2021) En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4% el salario a los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10% el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2% inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

a) Plantee un sistema de ecuaciones para calcular el número de trabajadores de cada categoría que tiene la empresa.

b) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado.

a) x: número de trabajadores en la categoría A
y: número de trabajadores en la categoría B
z: número de trabajadores en la categoría C

Planteamos el sistema de ecuaciones:

Nuevo salario de la categoría A → 800 + $\frac{4}{100} \cdot 800 = 832€$
Nuevo salario de la categoría B → 1000€
Nuevo salario de la categoría C → 2000 - $\frac{10}{100} \cdot 2000 = 1800€$
Gasto de la empresa en salarios en el próximo mes → 62000 - $\frac{2}{100} \cdot 62000 = 60760€$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 57} \\ \boldsymbol{800x + 1000y + 2000z = 62000} \\ \boldsymbol{832x + 1000y + 1800z = 60760} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 57} \\ \boldsymbol{4x + 5y + 10z = 310} \\ \boldsymbol{104x + 125y + 225z = 7595} \end{cases}$$

b) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \\ 104 & 125 & 225 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 4 & 5 & 10 & 310 \\ 104 & 125 & 225 & 7595 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \\ 104 & 125 & 225 \end{vmatrix} = 1125 + 500 + 1040 - 520 - 900 - 1250 = -5 \neq 0$ → Como $|A| \neq 0$ → rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

c) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

X = $\dfrac{\begin{vmatrix} 57 & 1 & 1 \\ 310 & 5 & 10 \\ 7595 & 125 & 225 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-150}{-5} = 30$ Y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 57 & 1 \\ 4 & 310 & 10 \\ 104 & 7595 & 225 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-80}{-5} = 16$

Z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 57 \\ 4 & 5 & 310 \\ 104 & 125 & 7595 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-55}{-5} = 11$

2º Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 4 & 5 & 10 & 310 \\ 104 & 125 & 225 & 7595 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 104F_1}{\overset{F_2 \to F_2 - 4F_1}{--\to}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 21 & 121 & 1667 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - 21F_2}{--\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 0 & -5 & -55 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 30 \\ y = 16 \\ z = 11 \end{cases}$$

La empresa tendrá 30 trabajadores de la categoría A, 16 trabajadores de la categoría B y 11 trabajadores de la categoría C.

14) EBAU (Comunidad Valenciana Julio 2021) Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniata, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño.

a) Plantee un sistema de ecuaciones para calcular el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

b) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado.

a) x: porcentaje de café colombiano
y: porcentaje de café brasileño
z: porcentaje de café keniata

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=100\%} \\ \boldsymbol{1\cdot 10\cdot x+1\cdot 6\cdot y+1\cdot 8\cdot z=8,50} \\ \boldsymbol{x=3y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=1} \\ \boldsymbol{10x+6y+8z=8,50} \\ \boldsymbol{x-3y=0} \end{cases}$$

b) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 & 8,5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0-30+8-6-0+24=-4 \neq 0 \rightarrow$ Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) = número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

c) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

X = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8,5 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-1,5}{-4} = 0,375 \rightarrow 37,5\%$ Y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8,5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-0,5}{-4} = 0,125 \rightarrow 12,5\%$

Z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8,5 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-2}{-4} = 0,5 \rightarrow 50\%$

2º Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 & 8{,}5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 10F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1{,}5 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 0{,}375 \\ y = 0{,}125 \\ z = 0{,}5 \end{cases}$$

El porcentaje de café colombiano es del 37,5%, el porcentaje de café brasileño es del 12,5% y el porcentaje keniata es del 50%

15) (Ebau Comunidad Valenciana Septiembre 2020) Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo.

a) Plantee un sistema de ecuaciones para calcular el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos

b) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado.

a)

x: número de camiones
y: número de marionetas
z: número de rompecabezas

	Unidades	Kilos de madera	Horas/trabajo
Camiones	x	2x	3x
Marionetas	y	0,5y	4y
Rompecabezas	z	0,8z	3,5z
	89	91	313

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 89} \\ \boldsymbol{2x + 0,5y + 0,8z = 91} \\ \boldsymbol{3x + 4y + 3,5z = 313} \end{cases} \to \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 89} \\ \boldsymbol{20x + 5y + 8z = 910} \\ \boldsymbol{6x + 8y + 7z = 626} \end{cases}$$

b) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 20 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 20 & 5 & 8 & 910 \\ 6 & 8 & 7 & 626 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 20 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 160 + 48 - 30 - 140 - 64 = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Como } |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

c) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

1er Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 89 & 1 & 1 \\ 910 & 5 & 8 \\ 626 & 8 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{207}{9} = 23 \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 89 & 1 \\ 20 & 910 & 8 \\ 6 & 626 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{234}{9} = 26$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 89 \\ 20 & 5 & 910 \\ 6 & 8 & 626 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{360}{9} = 40$$

2º Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 20 & 5 & 8 & 910 \\ 6 & 8 & 7 & 626 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - 6F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - 20F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & -15 & -12 & -870 \\ 0 & 2 & 1 & 92 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 \rightarrow 15F_3 + 2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & -15 & -12 & -870 \\ 0 & 0 & -9 & -360 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = 26 \\ z = 40 \end{cases}$$

Las piezas producidas han sido 23 camiones, 26 marionetas y 40 rompecabezas

16) (Ebau Andalucía, junio 18)

a) [1,5 puntos] Justifica que es posible un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- **utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;**
- **se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;**
- **tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.**

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

x: número de monedas de 50 céntimos
y: número de monedas de 1 euro
z: número de monedas de 2 euros

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=30} \\ \boldsymbol{0,5x+1y+2z=34,50} \\ \boldsymbol{y=x+z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=30} \\ \boldsymbol{x+2y+4z=69} \\ \boldsymbol{x-y+z=0} \end{cases}$$

a) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 69 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1+4-2-1+4 = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Como } |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg(A) = 3}$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) = número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

Resolvemos el sistema de Ecuaciones

<u>1er Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:</u>

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 1 & 1 \\ 69 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{42}{6} = 7 \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 30 & 1 \\ 1 & 69 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{90}{6} = 15$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 69 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{48}{6} = 8$$

2º Método Lo resolvemos también por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 69 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 39 \\ 0 & -2 & 0 & -30 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 7 \\ z = 8 \\ y = 15 \end{cases}$$

El pago se hará con 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 euro y 8 monedas de 2 euros

b)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 30} \\ \boldsymbol{0,5x + 1y + 2z = 35} \\ \boldsymbol{y = x + z} \end{cases} \to \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 30} \\ \boldsymbol{x + 2y + 4z = 70} \\ \boldsymbol{x - y + z = 0} \end{cases}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & -2 & 0 & -30 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 6{,}7 \\ z = 8{,}3 \\ y = 15 \end{cases}$$

Como las soluciones tanto para x como para z no son enteras (piensa que son número de monedas) no es posible hacer el pago con 35€ con las restricciones indicadas.

17) **Un aficionado a los pájaros tiene un total de 30, entre canarios, periquitos y jilgueros. Tiene el doble que de canarios:**
Con estos datos ¿se puede saber el número de canarios que tiene?
Si además, se sabe que tiene el triple de canarios que de periquitos, ¿cuántos pájaros de cada tipo tiene?

a) $\begin{cases} \text{nº de canarios: x} \\ \text{nº de periquitos: y} \\ \text{nº de jilgueros: z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=30 \\ z=2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=30 \\ 2x-z=0 \end{cases}$

b) Nos encontramos con un sistema que tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo tanto el sistema será Compatible Indeterminado. No podremos saber el número de canarios con sólo estos datos.

c) $\begin{cases} x+y+z=30 \\ 2x-z=0 \\ x=3y \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x+y+z=30 \\ 2x-z=0 \\ x-3y=0 \end{matrix}$

1ª Opción : Gauss

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \to f3 - f1]{f2 \to f2 - 2f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -60 \\ 0 & -4 & -1 & -30 \end{array}\right) \xrightarrow{f3 \to f3 - 2f2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -60 \\ 0 & 0 & 5 & 90 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ z=18 \end{cases}$ Por lo tanto tendremos 9 canarios, 3 periquitos y 18 jilgueros.

2ª Opción: Cramer

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -6-1-3= -10\neq 0$$

$$X=\frac{\begin{vmatrix} 30 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-90}{-10}=9 \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 30 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-30}{-10}=3 \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 30 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-180}{-10}=18$$

Por lo tanto tendremos 9 canarios, 3 periquitos y 18 jilgueros.