1. Calcula el término general de una progresión aritmética sabiendo que el segundo término es 6 y el noveno 34

2. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3}{n^2+3}\right)^{3n}$

3. Sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=1$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=\infty$, calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$

(Sol.: $e^{\lim b_n(a_n-1)}$)

4. En una población de 30.000 habitantes se declara una epidemia que afecta a 100 habitantes un día determinado y, cada día que pasa, se extiende a 5 personas más.

a) ¿Cuántas personas estarán afectadas al cabo de 15 días?

b) ¿En cuántos días la epidemia se habrá extendido a más del 10% de la población?

5. En cierto país hay, en un momento determinado, 125.000 analfabetos. Una campaña de alfabetización promovida por el gobierno permite reducir en un 10 % este número al cabo de un trimestre. Si se consigue mantener ese ritmo, es decir, cada trimestre se reduce el número de analfabetos en un 10%,

a) ¿Cuál es el término general de la sucesión que indica el número de analfabetos al cabo de ***n*** trimestres?

b) ¿Cuál es el término general de la sucesión que indica el número de alfabetizados en el trimestre ***n***?

c) ¿Cuántos analfabetos habrá al cabo de un año?

d) ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrá conseguido alfabetizar a la mitad de la población? (se supone que no se incorporan nuevos analfabetos a la población inicial)

6. Calcula la suma de los 25 primeros términos de una progresión geométrica de razón 0´5 cuya suma infinita es 20

(Sol.: $20(1-0{'}5^{25})$)

Soluciones:

4.

a_1 representa el nº de afectados el día 1: $\mathbf{a_1 = 100}$

a_2 representa el nº de afectados el día 2: $\mathbf{a_2 = 100 + 5 = 105}$

a_3 representa el nº de afectados el día 3: $\mathbf{a_2 = 105 + 5 = 110}$

Se trata, por tanto, de una progresión aritmética con primer término 100 y diferencia 5. El término general será:

$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)\, d \;=\; 100 + (n - 1)5 \;= 100 + 5n - 5 = 95 + 5n}$

a) El número de afectados al cabo de 15 días es el número que hay el día 16, por tanto, buscamos $a_{16} = 95 + 5 \,.\, 16 =$ **175 afectados**

b) Buscamos ***n*** de manera que $a_n > 0{'}1 \times 30.000 \Rightarrow 95 + 5n > 3.000 \Rightarrow 5n > 2.905$

⇨ $n > 2905 / 5 \Rightarrow n > 581$; es decir, estará afectada el 10% de la población el día

⇨ 582, o bien, al cabo de **581 días**.

5.

a)

a_1 representa el nº de analfabetos al principio del trimestre 1, es decir, el nº inicial: $\mathbf{a_1 = 125.000}$

a_2 representa el nº de analfabetos al principio del trimestre 2: $\mathbf{a_2 = 125.000 \times 0{'}9}$

(reducción en 10% sobre los que había al principio del trimestre anterior: 125000)

a_3 representa el nº de analfabetos al principio del trimestre 3:

$\mathbf{a_3} = 125000 \times 0{'}9 \times 0{'}9 = \mathbf{125.000 \times 0{'}9^2}$

(reducción en 10% sobre los que había al principio del trimestre anterior: 125000 x 0´9)

Se trata entonces de una progresión geométrica cuyo primer término es 125.000 y de razón 0´9.

$a_n = a_1 \,.\, r^n \Rightarrow$ ***$a_n = 125.000 \times 0{'}9^{n-1}$***

b)

b_1 representa el nº de alfabetizados al final del trimestre 1, es decir: $\mathbf{b_1 = 125.000 * 0{'}1 = 12.500}$

(el 10% de los analfabetos que había al principio del trimestre 1)

b_2 representa el nº de alfabetizados al final del trimestre 2, es decir:

$\mathbf{b_2} = (125.000 \times 0{'}9) \times 0{'}1 = \mathbf{12.500 \times 0{'}9}$

(el 10% de los analfabetos que había al principio del trimestre 2)

b_3 representa el nº de alfabetizados al final del trimestre 3, es decir:

$\mathbf{b_3} = (125.000 \times 0{'}9^2) \times 0{'}1 = \mathbf{12.500 \times 0{'}9^2}$

(el 10% de los analfabetos que había al principio del trimestre 3)

Se trata entonces de una progresión geométrica cuyo primer término es 12.500 y de razón 0´9.

$b_n = b_1 \,.\, r^n \Rightarrow$ ***$b_n = 12.500 \times 0{'}9^{n-1}$***

c) El final de 1 año será al cabo del trimestre 4 o al inicio del 5, por tanto, buscamos

$\mathbf{a_5 = 125.000 \times 0{'}9^4 =}$ **82.012 analfabetos**

d) Buscamos ***n*** de manera que el nº de analfabetos sea menor de la mitad, es decir,

$\boldsymbol{a_n} < 125000 / 2 = 62500$ => $\boldsymbol{125.000 \times 0{\acute{}}9^{n-1} < 62.500}$ => $0{\acute{}}9^{n-1} < \frac{62500}{125000} = \frac{1}{2} = 0{\acute{}}5$

=> $\log 0{\acute{}}9^{n-1} < \log 0{\acute{}}5$ => $(n-1) \cdot \log 0{\acute{}}9 < \log 0{\acute{}}5$ =>

=> $n - 1 > \frac{\log 0{\acute{}}5}{\log 0{\acute{}}9} = 6{\acute{}}5$ => $n > 7{\acute{}}5$ => ***n = 8; es decir al principio del trimestre 8, o dicho de otra manera, han de pasar 7 trimestres.***

(nota: cambia el sentido de la desigualdad porque $\log 0{\acute{}}9 < 0$)

Otra posibilidad es calcular cuando la suma de alfabetizados (b_n) supera los 62500, es decir, calcular $\boldsymbol{n}$ de manera que $S_n > 62500$, por tanto

$S_n = b_1 \frac{1-r^n}{1-r} = 12500 \frac{1-0{\acute{}}9^n}{1-0{\acute{}}9} = 125000(1 - 0{\acute{}}9^n) > 62500$ => $1-0{\acute{}}9^n > 0{\acute{}}5$ => $0{\acute{}}9^n < 0{\acute{}}5$ => (como antes se explicó $n > 6{\acute{}}5$ => ***n= 7; es decir, han de pasar 7 trimestres***)