20 □□□ Calcula la expresión de tg $3a$ en función de tg a. Aplícala para $a = 45°$.

Solución: $\text{tg } 135° = \text{tg } (3 \cdot 45°) = -1$

21 □□□ Halla sen $2x$ si $\text{sen } x - \cos x = 1/3$

Solución: 8/9

Ecuaciones trigonométricas

22 □□□ Resuelve:

a) $\text{tg } x = \sqrt{3}$

b) $\sec x = 2$

c) $\text{cotg } x = -1$

d) $\text{sen } (x/2) = \sqrt{2}/2$

e) $\cos (x - \pi/2) = -1$

f) $\text{cosec } (x + \pi) = -2\sqrt{2}$

Solución: En todos los casos $k \in \mathbb{Z}$. ***a)*** $x = 60° + k \cdot 180°$ ***b)*** $x = 60° + k \cdot 360°, x = 300° + k \cdot 360°$ ***c)*** $x = 135° + k \cdot 180°$ ***d)*** $x = 90° + k \cdot 720°, x = 270° + k \cdot 720°$ ***e)*** $x = 3\pi/2 + k \cdot 2\pi$ ***f)*** $x = \pi/4 + k \cdot 2\pi, x = 3\pi/4 + k \cdot 2\pi$

23 □□□ Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos 3x = \text{sen } 30°$

b) $\cos (4x - \pi) = -1/2$

c) $\text{sen } 2x = \cos x$

d) $2\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 1/2$

e) $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}$

f) $\cos x - \cos 3x = 0$

g) $\text{sen } x - \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

h) $\text{sen } x - \dfrac{1}{\text{sen } x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

i) $\text{sen } x + 2 = 3 \cos 2x$

j) $1 = \dfrac{\text{sen } 2x}{2} + \cos^2 x$

k) $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$

l) $\dfrac{\text{sen}^2 2x}{2} + \cos^2 x = 1$

m) $6 \cos^2 x + \cos 2x = 5$

n) $\cos x - \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 + \text{tg}^2 x} = 0$

Solución: En todos los casos $k \in \mathbb{Z}$. ***a)*** $x = 20° + k \cdot 120°, x = 100° + k \cdot 120°$ ***b)*** $x = 15° + k \cdot 90°, x = 75° + k \cdot 90°$ ***c)*** $x = \pi/6 + 2k\pi, x = 5\pi/6 + 2k\pi$ ***d)*** $x = 17{,}99° + 2k\pi, x = 306° + 2k\pi$ ***e)*** $x = 45° + k \cdot 360°$ ***f)*** $x = k \cdot 90°$ ***g)*** $x = 105° + k \cdot 360°, x = 165° + k \cdot 360°$ ***h)*** $x = 60° + k \cdot 360°, x = 120° + k \cdot 360°$ ***i)*** $x = 19{,}47° + k \cdot 360°, x = 160{,}53° + k \cdot 360°, x = 210° + k \cdot 360°, x = 330° + k \cdot 360°$ ***j)*** $x = k \cdot 180°, x = 45° + k \cdot 180°$ ***k)*** $x = 120° + k \cdot 360°, x = 240° + k \cdot 360°$ ***l)*** $x = k \cdot 180°, x = 45° + k \cdot 90°$ ***m)*** $x = 30° + k \cdot 180°, x = 150° + k \cdot 180°$ ***n)*** $x = 30° + k \cdot 360°, x = 150° + k \cdot 360°$

24 □□□ Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 5 \text{ sen } x + 15 \cos y = -1 \\ 10 \text{ sen } x - 20 \cos y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{sen}^2 \dfrac{x}{2} - \text{sen } y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2 \cos 2x = \text{tg } y \\ 4 \text{ sen}^2 2x - 2 \text{ tg } y = 1 \end{cases}$

Solución: En todos los casos $k \in \mathbb{Z}$. ***a)*** $x \cong 44{,}427° + k \cdot 360°, x \cong 135{,}573° + k \cdot 360°$ e $y \cong 107{,}458° + k \cdot 360°, y \cong 252{,}542° + k \cdot 360°$ ***b)*** $x = 120° + k \cdot 360°, x = 240° + k \cdot 360°$ e $y \cong 30° + k \cdot 360°, y \cong 150° + k \cdot 360°$ ***c)*** $x = 30° + k \cdot 180°, x = 150° + k \cdot 180°$ e $y \cong 45° + k \cdot 180°$

Resolución de triángulos. Teoremas del seno y del coseno

25 □□□ ¿Es posible resolver un triángulo sabiendo que $a = 30$ cm, $A = 110°$ y $B = 80°$? ¿Por qué?

26 □□□ Demuestra que el teorema del coseno equivale al teorema de Pitágoras cuando el triángulo es rectángulo.

27 □□□ Resuelve los triángulos de los siguientes casos, ayudándote de su construcción gráfica:

a) $a = 5$ $b = 4$ $c = 7$

b) $A = 45°$ $a = 8$ $b = 10$

c) $A = 35°$ $B = 48°$ $a = 11$

d) $A = 30°$ $B = 100°$ $C = 50°$

e) $A = 35°$ $B = 48°$ $c = 11$

Solución: ***a)*** $A \cong 44{,}42°, B \cong 34{,}05°, C \cong 101{,}54°$ ***b)*** $B \cong 62{,}11°, C \cong 72{,}89°, c \cong 10{,}81$ cm ***c)*** $C \cong 97°, b \cong 14{,}25$ cm, $c \cong 19{,}03$ cm ***d)*** Existen infinitos triángulos semejantes ***e)*** $C \cong 97°, a \cong 6{,}36$ cm, $b \cong 8{,}24$ cm

28 □□□ Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 10$ cm $b = 7$ cm $c = 13$ cm

b) $a = 10$ cm $b = 7$ cm $B = 30°$

c) $a = 10$ cm $b = 7$ cm $C = 80°$

d) $a = 10$ cm $B = 30°$ $C = 80°$

Solución: ***a)*** $A \cong 49{,}58°, B \cong 32{,}20°, C \cong 98{,}21°$ ***b)*** Primer triángulo: $A \cong 45{,}58°, C \cong 104{,}42°, c \cong 13{,}56$ cm, segundo triángulo: $A \cong 134{,}42°, C \cong 15{,}58°, c \cong 3{,}76$ cm ***c)*** $c \cong 11{,}17$ cm, $A \cong 61{,}84°, B \cong 38{,}11°$ ***d)*** $A = 70°, b \cong 5{,}32$ cm, $c \cong 10{,}48$ cm

29 □□□ Calcula una cualquiera de las alturas de los triángulos resueltos en el ejercicio anterior y utilízala después para calcular su área.

Solución: ***a)*** 34,65 cm^2 ***b)*** 33,9 cm^2 ***c)*** 34,45 cm^2 ***d)*** 26,2 cm^2

30 □□□ Calcula el área de cada uno de los triángulos siguientes, sabiendo:

a) $b = 30$ cm, $A = 50°$ y $B = 74°$

b) $a = 41$ cm, $C = 45°$, y $B = 75°$

c) $a = 18$ cm, $b = 15$ cm, $C = 19° 42'$

d) $a = 6$ cm, $b = 12$ cm, $A = 17° 30'$

e) $a = 33$ cm, $b = 24$ cm, $c = 20$ cm

Solución: ***a)*** 297,303 cm^2 ***b)*** 662,881 cm^2 ***c)*** 45,709 cm^2 ***d)*** d1: 29,298 cm^2, d2: 12 cm^2 ***e)*** 283,332 cm^2

31 □□□ Uno de los ángulos de un rombo mide 75°, y su diagonal mayor, 10 cm. Calcula su perímetro.

Solución: 25,2 cm

32 □□□ El ángulo entre los dos lados iguales de un triángulo isósceles es de 40° y el lado desigual tiene una longitud de 40 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los lados iguales del triángulo?

Solución: 58,48 cm cada uno

33 □□□ El ángulo agudo de un rombo mide 25°. El lado mide 13 cm. Calcula el área del rombo.

Solución: 142,84 cm^2

34 ☐☐☐ Los lados de un triángulo miden 8 cm, 11 cm y 13 cm, respectivamente. Calcula el valor del seno del ángulo más pequeño.

Solución: sen $\alpha \cong 0{,}612\,836\,428$

35 ☐☐☐ Los tres lados de un triángulo miden 6 cm, 8 cm y 9 cm. Calcula sus ángulos y su área.

Solución: $40{,}80^\circ$, $60{,}61^\circ$ y $78{,}59^\circ$, $23{,}52$ cm^2

36 ☐☐☐ Una araña ha tejido una tela octogonal de 7 cm de radio. Calcula el área que abarca la tela de araña.

Solución: $138{,}72$ cm^2

37 ☐☐☐ Calcula el radio de las circunferencias inscrita y circunscrita de un pentágono regular de 5 dm de lado.

Solución: $R_c \cong 4{,}25$ dm, $R_i \cong 3{,}44$ dm

38 ☐☐☐ En un triángulo ABC, conocemos los ángulos, $A = 34{,}5^\circ$, $B = 78^\circ$ y la suma de los lados, $a + b = 43$ cm. Calcula cuánto miden los lados a y b.

Solución: $a \cong 15{,}75$ cm, $b \cong 27{,}24$ cm

39 ☐☐☐ En un triángulo ABC, conocemos los lados $a = 15$ cm, $b = 11$ cm y la suma de dos de sus ángulos $A + B = 104^\circ$. Calcula cuánto miden los ángulos A y B.

Solución: $A \cong 63^\circ\, 8'23{,}36''$ y $B = 40^\circ\, 51'36{,}64''$

40 ☐☐☐ En un triángulo ABC dados $A - B = 16^\circ$, $a = 23$ cm y $b = 19$ cm. Calcula los ángulos del triángulo.

Solución: $A \cong 63^\circ\, 52'34{,}69''$, $B \cong 47^\circ\, 52'34{,}69''$ y $C \cong 68^\circ\, 14'50{,}62''$

41 ☐☐☐ Los ángulos de la base de un triángulo valen 35° y 95°, y la suma de los otros dos lados es 38 cm. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

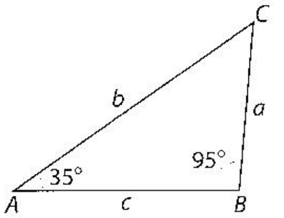

FIGURA 4.23.

Solución: $P \cong 56{,}54$ cm, $A \cong 128{,}25$ cm^2

42 ☐☐☐ Demuestra que en todo triángulo ABC, se cumple la igualdad:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}$$, conocida como **Teorema de Nepper.**

(Indicación: debes usar el teorema del seno para escribir la relación entre a y b)

43 ☐☐☐ En los lados de un triángulo ABC se cumple que $b - a = 1$ y $c - b = 1$, y se tiene que $\cos A = 0{,}6$. Calcula a, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{B}{2}\right)$ y sen $2C$.

Solución: $a = 1$, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{B}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $\operatorname{sen} 2C = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

44 ☐☐☐ De un triángulo se conocen los lados $b = 2{,}5$ cm y $c = 3{,}5$ cm y se sabe que el ángulo B es la mitad del ángulo C. Calcula a y los ángulos A, B y C.

Solución: $B \cong 45^\circ\, 34'22{,}79''$, $C \cong 91^\circ\, 8'45{,}57''$, $A \cong 43^\circ\, 16'51{,}64''$ y $a \cong 2{,}400$ cm

45 ☐☐☐ En un círculo de 10 cm de radio, dibujamos una cuerda que une los extremos de un arco que abarca un ángulo de 80°. Averigua la longitud de la cuerda que se estudia.

Solución: 12,86 cm

46 ☐☐☐ Halla el ángulo que forman las dos tangentes comunes a dos circunferencias exteriores cuyos radios miden, respectivamente, 10 cm y 18 cm.

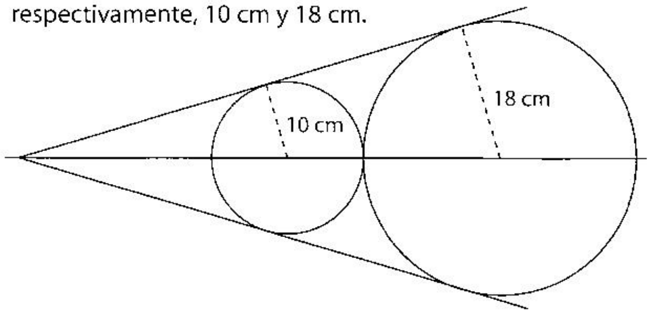

FIGURA 4.24.

Solución: 33,2°

47 ☐☐☐ Un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 6 cm, está inscrito en una circunferencia.

a) Calcula su perímetro.

b) Averigua su área.

Solución: *a)* $p \cong 21{,}21$ cm
b) $A \cong 35{,}79$ cm^2

48 ☐☐☐ En una circunferencia de radio 10 cm, hay inscrito un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 10 cm también. Calcula el área de dicho triángulo.

Solución: $A = 93{,}3$ cm^2

49 ☐☐☐ Determina el área de un triángulo que está inscrito en una circunferencia de radio 3 cm, sabiendo que dos de los lados del triángulo miden 2 cm y 4 cm, respectivamente.

Solución: Triángulo 1: $A \cong 3{,}51$ cm^2
Triángulo 2: $A \cong 1{,}52$ cm^2

50 ☐☐☐ Calcula el área del triángulo ABC representado en la siguiente figura si sabes que $AB = 25$ cm:

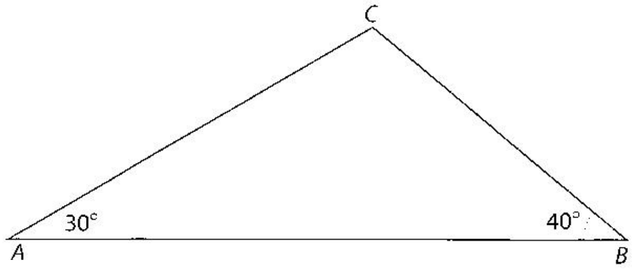

FIGURA 4.25.

Solución: A = 106,88 cm^2

51 ☐☐☐ Sabiendo que la longitud de las manecillas de un reloj de pared miden 10 y 12 centímetros, respectivamente.

a) ¿Cuál es la distancia entre sus extremos cuando son las 16:00?

b) ¿Qué área tiene el triángulo que determinan las manecillas a esta hora?

Solución: *a)* 19,09 cm
b) 51,96 cm^2

El área de un triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, tiene una superficie de 50 m^2. El ángulo *A* de este triángulo es de 45° y el ángulo *B* es de 30°. Sea *D* el pie de la altura desde el vértice *C*, es decir, el punto del segmento *AB* en que se cumple que *CD* es perpendicular a *AB*. Calcula la longitud de los segmentos *CD*, *AD*, *BD*, *AB*, *BC* y *AC*.

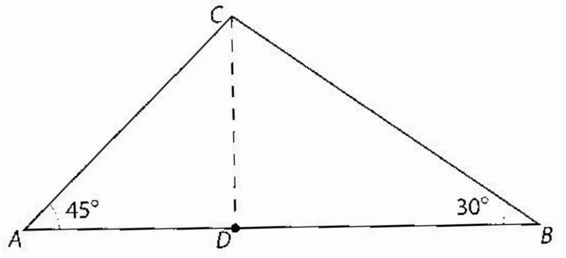

FIGURA 4.26.

Solución: $CD = AD = 6{,}05$ m; $BD = 10{,}48$ m; $AB = 16{,}53$ m; $BC = 12{,}10$ m; $AC = 8{,}56$ m

De un triángulo conocemos que $a + b = 11$ m; el ángulo $C = 30°$; y el área es 7 m^2. Calcula:

a) La longitud de cada uno de los lados del triángulo.

b) Los ángulos del triángulo.

Solución: *a)* 4 y 7 m, respectivamente *b)* 29,49°, 120,51° y $C = 30°$

Calcula el área de un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia de 30 cm de radio, y cuyo lado desigual mide 20 cm.

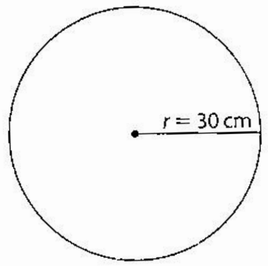

FIGURA 4.27.

Solución: 17,2 cm^2

Sobre una circunferencia de radio 1 m y centro en el punto *O*, consideramos los cinco vértices *A*, *B*, *C*, *D* y *E* de un pentágono regular. Calcula:

a) El ángulo que forma el radio que acaba en el vértice *A* con el lado *AB* y el ángulo que forman en el vértice *A* los dos lados que lo tienen como extremo.

b) La longitud de cada uno de los lados del pentágono.

c) La longitud de cualquiera de las diagonales.

d) El área del triángulo *EAB*.

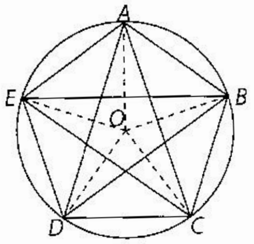

FIGURA 4.28.

Solución: *a)* 54°, 108°, respectivamente *b)* 1,176 m *c)* 1,902 m *d)* 0,657 m^2

El lado más largo de un paralelogramo mide 20 cm, su área es de 120 cm^2 y su ángulo menor, 30°. Determina:

a) El ángulo mayor del paralelogramo.

b) La longitud del lado menor.

Solución: *a)* 150° *b)* 12 cm

Aplicaciones de la trigonometría

En un cierto lugar de su recorrido un río tiene sus orillas paralelas. En ese punto se desea medir su anchura. Para ello desde dos puntos *A* y *B* de una de sus orillas, que están separados 25 m, se observa un punto *P* de la otra orilla, situado río abajo. Si las visuales desde *A* y *B* a *P* forman con la orilla unos ángulos de 39° 25′ y 52° 48′ respectivamente, averigua la anchura del río en ese punto.

Solución: 54,63 m

Si el extremo superior de una estatua es observado desde un punto situado a ras del suelo y a cierta distancia, con un ángulo de elevación de 35°, ¿cuál será el ángulo de elevación desde el triple de distancia?

Solución: 11,02°

Una rampa de 40 m de longitud y 10° de inclinación conduce al pie de una estatua. Calcula su altura sabiendo que, en el inicio de la rampa, el ángulo de elevación del punto más alto de la estatua es de 15°.

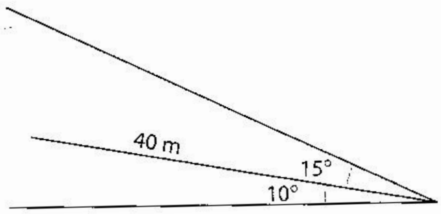

FIGURA 4.29.

Solución: 11,42 m

Una embarcación, *A*, se encuentra a 45 km al sureste de otro barco *B*, y una tercera embarcación, *C*, se halla a 57 km al sur de *B*.

a) ¿Qué distancia separa a los barcos *A* y *C*?

b) ¿Qué rumbo debería tomar el barco *C* para arribar al punto donde está situado *A*?

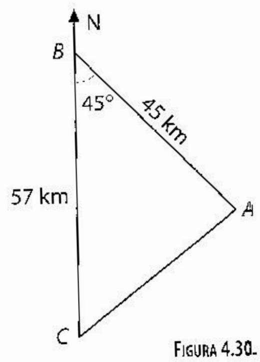

FIGURA 4.30.

Solución: *a)* 40,58 km *b)* Rumbo 51,64° Nor-este

Un golfista golpea la pelota de modo que su lanzamiento alcanza una longitud de 129 m. Si la distancia del golfista al hoyo es de 150 m y la pelota queda a una distancia de 40 m del hoyo, calcula el ángulo que forma la línea de unión del golfista con el hoyo y la dirección del lanzamiento.

Solución: 14,06°