

Cinemática

41.- El vector de posición de un móvil viene dado por: $\vec{r} = -2t^2 \vec{i} + (3 - \frac{3}{2}t^2) \vec{j}$ (S.I.)

Se pide:

- Ecuación de su trayectoria.
- Velocidad media durante los dos primeros segundos.
- Velocidad y aceleración en cualquier instante.
- Componentes intrínsecas de la aceleración.
- Tipo de movimiento que tiene el móvil.

a) Para determinar la ecuación de la trayectoria eliminamos el tiempo de las ecuaciones paramétricas del movimiento:

$$\begin{aligned} x &= -2t^2 \rightarrow t^2 = \frac{-x}{2} \\ y &= 3 - \frac{3}{2}t^2 \rightarrow y = 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{-x}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = 3 + \frac{3}{4}x} : \text{ec. de una recta.} \end{aligned}$$

b) la velocidad media relaciona el desplazamiento con el tiempo:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \quad \left| \quad \begin{aligned} \vec{r}_0(t=0) &= 3\vec{j} \\ \vec{r}(t=2) &= -8\vec{i} - 3\vec{j} \end{aligned} \right. \quad \vec{v}_m = \frac{-8\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{j}}{2} = \boxed{-4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ m/s}}$$

$$c) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \boxed{-4t\vec{i} - 3t\vec{j} \text{ m/s}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{-4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ m/s}^2}$$

d) Las componentes intrínsecas de la aceleración son las aceleraciones tangencial y normal:

$$\bullet \quad a_t = \frac{dv}{dt} \quad \left| \quad a_t = \boxed{5 \text{ m/s}^2} \right.$$

$$v = \sqrt{(-4t)^2 + (-3t)^2} = 5t \text{ m/s}$$

$$\bullet \quad \vec{a}_t = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad \left| \quad 5 = \sqrt{5^2 + a_n^2} \Rightarrow \boxed{a_n = 0} \right.$$

$$a = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5 \text{ m/s}^2$$

e) Las características del movimiento son las siguientes:

• trayectoria: rectilínea

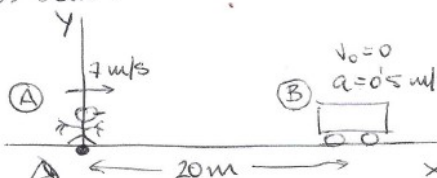
• velocidad $\left\{ \begin{array}{l} \text{módulo: variable} \\ \text{dirección y sentido: ctes.} \end{array} \right.$

• aceleración $\left\{ \begin{array}{l} a_t = \text{cte} \\ a_n = 0 \end{array} \right.$

Movimiento rectilíneo
uniformemente acelerado.

42.- Un tren arranca desde el reposo con una aceleración de 0.5 m/s^2 . Un pasajero que camina a 7 m/s se encuentra a 20 m de la última puerta del tren en el momento de comenzar éste a moverse. ¿Conseguirá subirse al tren? En caso afirmativo, indicar dónde y cuándo.

Realizamos un esquema del problema y anotamos los datos que nos dan:



El pasajero tiene una v_0 , y el tren, una a . Así pues:

(A) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \Rightarrow r_A = 7t$

(B) $\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \rightarrow r_B = 20 + 0.25 t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \rightarrow v_B = 0.5 t \end{cases}$

Cuando el pasajero alcance al tren, ambos se encontrarán a la misma distancia del observador:

$$r_A = r_B \Rightarrow 7t = 20 + 0.25 t^2 ; 0.25 t^2 - 7t + 20 = 0$$

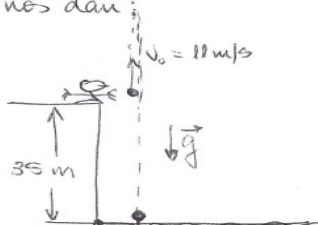
Resolviendo esta ecuación obtenemos dos valores para el tiempo que la persona y el tren se encuentran en la misma posición con respecto al observador:

$$t = 0.322 \text{ s} \quad t = 24.78 \text{ s}$$

El primer valor se corresponde con el momento en que la persona alcanza al tren; posteriormente, aunque la persona adelanta al tren, éste tiene cada vez mayor velocidad, por lo que alcanzará a la persona al cabo de 24.78 s después de haber iniciado su movimiento.

43.- Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde un puente situado a 35 m del agua con una velocidad de 11 m/s .

- ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al agua? ¿Con qué velocidad lo hará?
- Un segundo más tarde se lanza, desde el agua y en la misma vertical que la primera, otra piedra con una velocidad de 30 m/s . ¿Cuánto tiempo tardarán en chocar? ¿A qué altura lo harán? ¿Qué velocidad tendrá cada una en ese momento?

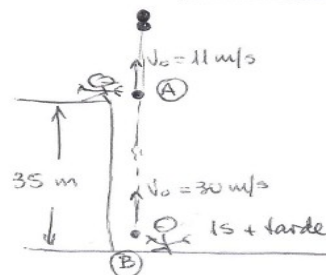


a) la piedra tiene una v_0 ; así pues:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \rightarrow 0 = r_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ 0 &= \vec{r}_0 + \vec{g} t \rightarrow -v_0 = v_0 - g t \\ 0 &= 35 + 11t - 5t^2 \rightarrow t = 3.97 \text{ s} \\ -v &= 11 - 10t \rightarrow v = -11 + 10 \cdot 3.97 = 28.65 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b) las ecuaciones del movimiento de ambas piedras son:

(A) $\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \rightarrow r_A = r_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t \rightarrow v_A = v_0 - g t \end{cases}$



$$\textcircled{B} \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \rightarrow r_f = v_{0f}(t-1) - \frac{1}{2} g_f(t-1)^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t \rightarrow v_f = v_{0f} - g_f(t-1) \end{cases}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\textcircled{A} \begin{cases} r_A = 35 + 11t - 5t^2 \\ v_A = 11 - 10t \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} r_B = 30(t-1) - 5(t-1)^2 \\ v_B = 30 - 10(t-1) \end{cases}$$

Cuando choquen ambas piedras, se encontrarán a la misma altura sobre el suelo:

$$r_A = r_B \Rightarrow 35 + 11t - 5t^2 = 30(t-1) - 5(t-1)^2 \Rightarrow \boxed{t = 2.41 \text{ s}}$$

La altura a la que se encuentran será:

$$r_A = r_B = 35 + 11 \cdot 2.41 - 5 \cdot 2.41^2 = \boxed{32.47 \text{ m}}$$

y la velocidad de cada una en el momento del choque serán:

$$v_A = 11 - 10 \cdot 2.41 = \boxed{-13.1 \text{ m/s} (\downarrow)}$$

$$v_B = 30 - 10 \cdot (2.41 - 1) = \boxed{15.9 \text{ m/s} (\uparrow)}$$

Cuando se encuentran, $\textcircled{A}$ está bajando y $\textcircled{B}$, subiendo.

44.- Un CD de 12 cm de diámetro tiene, en el transcurso de una canción, una frecuencia de 9 Hz. Se pide:

- Aceleración de un punto de su periferia.
- Velocidad de un punto situado a 1 cm del centro del CD.
- Ángulo, expresado en radianes, que habrá girado en 4 min.

Durante el transcurso de la canción el CD se mueve con m.c.u.:

$$R = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}$$

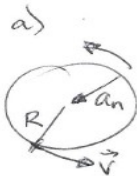
$$f = 9 \text{ Hz}$$

$$\text{a) } a = ?$$

$$\text{b) } v = ? \quad (R = 0.01 \text{ m})$$

$$\text{c) } \varphi = ?$$

$$t = 4 \text{ min} = 240 \text{ s}$$



$$\text{centrípeta: } a_n = \frac{v^2}{R}$$

La velocidad de un punto de la periferia cambia constantemente de dirección y sentido, por lo que tendrá aceleración normal, radial o

Calculamos la velocidad de dicho punto:

$$v = \omega R$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$v = 2\pi f R = 2\pi \cdot 9 \cdot 0.06 = \boxed{3.39 \text{ m/s}}$$

Sustituyendo:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{3.39^2}{0.06} = \boxed{19.127 \text{ m/s}^2}$$

b) De acuerdo con lo dicho en el apartado anterior:

$$v = \omega R$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$v = 2\pi f R = 2\pi \cdot 9 \cdot 0.01 = \boxed{0.57 \text{ m/s}}$$

$$\text{c) } \varphi = ?$$

$$t = 240 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \varphi = \omega t = 2\pi f t = 2\pi \cdot 9 \cdot 240 = \boxed{13571.68 \text{ rad}}$$

45.- Un volante que gira en torno a su eje a razón de 30 rpm es frenado y se para en 20 s. Calcular:

- La aceleración angular.
- El número de vueltas que da el volante hasta pararse.
- Si el radio del volante es de 10 cm, calcular las componentes intrínsecas de la aceleración en un punto de su periferia en el instante en que la rueda acaba de dar 2 vueltas.

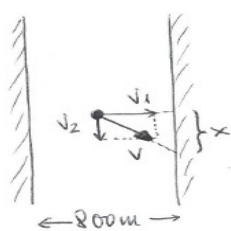
$\omega_0 = 30 \text{ rpm} = 314 \text{ rad/s}$
 $\omega = 0$
 $t = 20 \text{ s}$
 a) $\alpha = ?$
 b) $\varphi = ?$ (vueltas)
 c) $R = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$
 $a_t = ?$
 $a_n = ?$
 $\varphi = 2 \text{ vueltas} = 12.57 \text{ rad}$

a) El volante se mueve con m.c.u.a.; así pues:
 $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \rightarrow \varphi = 314 \cdot 20 + \frac{1}{2} \alpha \cdot 20^2$
 $\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow 0 = 314 + \alpha \cdot 20 \Rightarrow \alpha = -0.16 \text{ rad/s}^2$
 b) $\varphi = 314 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot (-0.16) \cdot 20^2 = 3142 \text{ rad} = 5 \text{ vueltas}$
 c) $a_t = \alpha \cdot R = -0.16 \cdot 0.1 = -0.016 \text{ m/s}^2$
 $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{11.85^2}{0.1} = 14042 \text{ m/s}^2$
 $v = \omega R = 11.85 \cdot 0.1 = 1.185 \text{ m/s}$
 $\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \omega = 12.57 + (-0.16) \cdot 4.5 = 11.85 \text{ rad/s}$
 $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \rightarrow 12.57 = 314t + \frac{1}{2} (-0.16) \cdot t^2 \Rightarrow t = 4.5 \text{ s}$

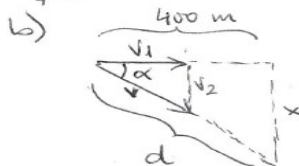
46.- En el punto medio de un río de 800 m de anchura se encuentra una balsa a la deriva. El agua del río baja con una velocidad de 4 m/s y existe un fuerte viento, perpendicular a la corriente, con una velocidad de 8 m/s. Calcular:

- Tiempo que tarda la balsa en tocar la orilla.
- Distancia que recorre la balsa hasta tocar la orilla.
- Distancia que se desvía la balsa río arriba.

Realizamos un esquema del problema y anotamos los datos que nos dan:



$v_1 = 8 \text{ m/s}$
 $v_2 = 4 \text{ m/s}$
 a) La balsa se mueve con m.r.u.; para calcular el tiempo que tarda en tocar la orilla, tenemos en cuenta que recorre, en la dirección horizontal, 400 m a 8 m/s, por lo que tardará 50 s.



El ángulo que forman v y v_1 se calcula de la siguiente manera:
 $\tan \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{8} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 26.57^\circ$

Así pues, la distancia "d" que recorre la balsa será:

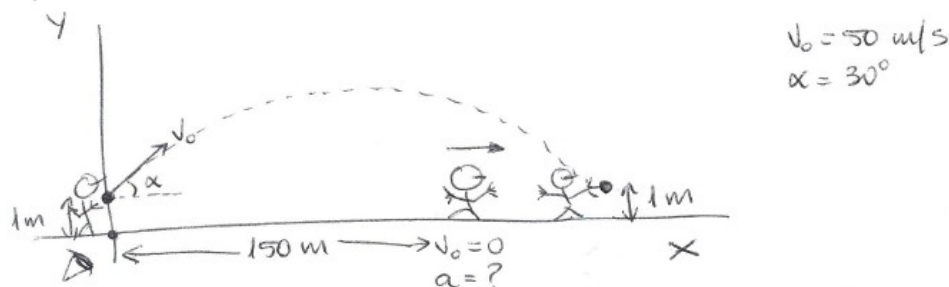
$$\cos \alpha = \frac{400}{d} \Rightarrow d = \frac{400}{\cos \alpha} = \frac{400}{\cos 26.57^\circ} = 447.21 \text{ m}$$

c) La distancia "x" que se desvía la balsa río arriba será:

$$\tan \alpha = \frac{x}{400} \Rightarrow x = 400 \cdot \tan \alpha = 400 \cdot \tan 26.57^\circ = 200 \text{ m}$$

47.- Un jugador de béisbol lanza una pelota con una velocidad de 50 m/s desde 1 m de altura sobre el suelo y un ángulo de elevación de 30° . Simultáneamente al lanzamiento, otro jugador situado a 150 m del primero en la misma dirección que lleva la pelota empieza a correr para intentar cogerla cuando esté a una altura de 1 m sobre el suelo. ¿Con qué aceleración deberá hacerlo?

Realizamos un esquema del problema y anotamos los datos que nos dan:



En primer lugar, calculamos el alcance de la pelota para saber si el jugador debe correr hacia la derecha o hacia la izquierda:

$$x = V_0 \cos \alpha \cdot t \quad \rightarrow \quad x = 50 \cdot \cos 30^\circ \cdot t$$

$$y = y_0 + V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad 0 = 1 + 50 \cdot \sin 30^\circ \cdot t - 5 t^2 \Rightarrow t = \underline{5.04 \text{ s}}$$

El alcance será: $x_{\max} = 50 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5.04 = \underline{218.22 \text{ m}}$

Así pues, el jugador deberá correr hacia la derecha.

Calculamos la posición de la pelota cuando se encuentra a 1 m sobre el suelo:

$$x = V_0 \cos \alpha \cdot t \quad \rightarrow \quad x = 50 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 = \underline{216.51 \text{ m}}$$

$$y = y_0 + V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad 1 = 1 + 50 \cdot \sin 30^\circ \cdot t - 5 t^2 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

El jugador debe desplazarse desde 150 hasta 216.51 m del observador; su movimiento es m.r.u.a.:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad \rightarrow \quad r t = r_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow r = r_0 + \frac{1}{2} a \cdot 5^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \quad \rightarrow \quad v t = a t \Rightarrow \cancel{v} = a \cdot 5$$

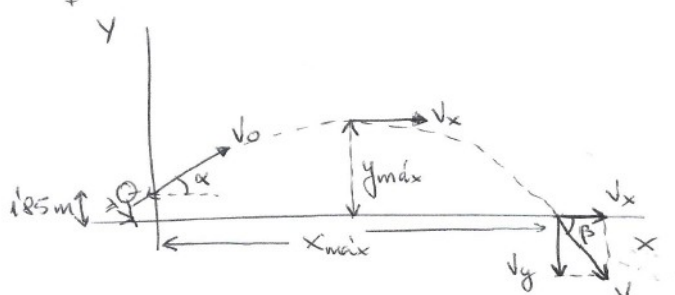
Hemos tenido en cuenta que el jugador dispone de 5 s para atapar el balón. Sustituyendo las posiciones inicial y final,

tendremos: $216.51 = 150 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5^2 \Rightarrow \boxed{a = 5.32 \text{ m/s}^2}$

48.- Un lanzador de jabalina realiza un lanzamiento con una velocidad que forma un ángulo de 50° con la horizontal a una altura, en el momento de soltar la jabalina, de 1'85 m sobre el suelo. Si el tiempo que tarda la jabalina en clavarse en el suelo es de 3 s, calcular:

- Velocidad con que se realizó el lanzamiento.
- Alcance de la jabalina.
- Altura máxima de la jabalina.
- Velocidad (módulo, dirección y sentido) con que la jabalina llega al suelo.

Realizamos un esquema del problema y anotamos los datos que nos dan:



$$t = 3'5 \text{ s}$$

$$\alpha = 50^\circ$$

$$a) v_0 = ?$$

$$b) y_{\max} = ?$$

a) El movimiento de la jabalina es parabólico:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad \longrightarrow \quad x = v_0 \cos 50^\circ \cdot 3$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \longrightarrow \quad 0 = 1'85 + v_0 \sin 50^\circ \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 \Rightarrow v_0 = 18'78 \text{ m/s}$$

b) El alcance ($x_{\max}$) de la jabalina será:

$$x_{\max} = 18'78 \cdot \cos 50^\circ \cdot 3 = 36'21 \text{ m}$$

c) Para calcular la altura máxima ($y_{\max}$) de la jabalina debemos tener en cuenta que, en dicho punto, la velocidad de la jabalina es horizontal, por lo que $v_y = 0$:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t = 18'78 \cdot \cos 50^\circ \cdot t \Rightarrow x = 12'07 t$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 1'85 + 18'78 \cdot \sin 50^\circ \cdot t - 5 t^2 \Rightarrow y = 1'85 + 14'39 t - 5 t^2$$

$$\Rightarrow \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = 12'07 t \vec{i} + (1'85 + 14'39 t - 5 t^2) \vec{j}$$

la velocidad de la jabalina será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{12'07 \vec{i}}_{v_x} + \underbrace{(14'39 - 10t) \vec{j}}_{v_y}$$

$$\text{En } y_{\max} \rightarrow v_y = 0 \Rightarrow 14'39 - 10t = 0 \Rightarrow t = 1'439 \text{ s}$$

$$\text{Sustituyendo: } y_{\max} = 1'85 + 14'39 \cdot 1'439 - 5 \cdot 1'439^2 = 12'2 \text{ m}$$

d) Cuando la jabalina llega al suelo las dos componentes de la velocidad son:

$$v_x = 12'07 \text{ m/s}$$

$$v_y = 14'39 - 10 \cdot 3 = -15'61 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{12'07^2 + (-15'61)^2} = 19'73 \text{ m/s}$$

El ángulo que forma dicha velocidad con el suelo será:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-15'6.1}{12'07} = -1'29 \Rightarrow \boxed{\beta = -52'22^\circ}$$

La jabalina llega al suelo con una velocidad de 19'73 m/s que forma un ángulo de 52'22° con el suelo.