1. Se supone que la cantidad de agua, en litros, recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 9 y media muestral 5,67 litros.

   a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95%.

   b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 95%.

   Variable aleatoria $X \sim N(\mu, 2)$

   a) Tamaño muestral: $n = 10$; Nivel de confianza $1-\alpha = 0'95$

   A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$

   El intervalo de confianza para la cantidad media de agua es:

$$I.C = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(5'67 - 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}}, 5'67 + 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I.C = (4'363, 6'976)$$

   b) $E < 1$; Nivel de confianza $1-\alpha = 0'95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1 \implies n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 2}{1}\right)^2 = 15'3664$$

   El tamaño muestral mínimo es de 16 días.

2. Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

   a) Se toma una muestra aleatoria simple de individuos y se obtiene el intervalo de confianza (251'6, 271'2) para μ, con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

   b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90%.

   Variable aleatoria $X \sim N(\mu, 45)$

   a) $I.C = (251'6,\ 271'2)$

   A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.

$$I.C = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\bar{x} - 1'96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}}\right) = (251'6, 271'2)$$

   de donde obtenemos el sistema lineal $\begin{cases} \bar{x} - 1'96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}} = 251'6 \\ \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}} = 271'2 \end{cases}$ en las incógnitas $\bar{x}$ y n.

   Resolviendo el sistema obtenemos:

   Media muestral: $\bar{x} = 261'4$; Tamaño muestral: $n = 81$

   b) Tamaño muestral: $n = 64$; Nivel de confianza: 90%

   A un nivel de confianza del 90% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'645$.

   El error máximo es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'645 \cdot \frac{45}{\sqrt{64}} = 9'253125$

3. El número de pulsaciones por minuto de los habitantes de una región sigue una variable $N(69,10)$. Se toma una muestra de tamaño 121 de esos habitantes.
   a) Hallar la probabilidad de que la media muestral esté entre 67 y 69 pulsaciones por minuto
   b) Si la media poblacional μ fuese desconocida, con la muestra anterior, calcula el nivel de confianza para estimar μ con un error inferior a 2 pulsaciones por minuto?
   a) $X \leadsto N(\mu = 69, \sigma = 10)$

   La distribución de las medias muestrales es $\bar{X} \leadsto N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, es decir $\bar{X} \leadsto N(69, \frac{10}{11})$

$$p(67 \leq \bar{X} \leq 69) = p\left(\frac{67-69}{\frac{10}{11}} \leq Z \leq \frac{69-69}{\frac{10}{11}}\right) = p(-2'2 \leq Z \leq 0) = p(Z \leq 0) - p(Z \leq -2'2) =$$

$$= 0'5 - p(Z > 22) = 0'5 - \left(1 - p(Z \leq 2'2)\right) = 0'5 - 1 + 0'9861 = 0'4861$$

   b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{10}{\sqrt{121}} = 2 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 2'2$

$$p(Z \leq 2'2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 0{,}9861 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0{,}0278$$

   Por tanto, el nivel de confianza $(1-\alpha)$ es del 97,22%

4. En una fábrica se observa que 3 de cada 10 de las piezas fabricadas son defectuosas. Si se realiza un pedido de 200 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 50 y 70 piezas defectuosas?
   Si se fabrican 200 piezas, se trata de una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n=200 y p=0,3. Como $n \cdot p = 200 \cdot 0{,}3 = 60 > 5$ vamos a utilizar la aproximación de la distribución Binomial a la distribución Normal. Así:

$$X \sim B(200, 0'3) \xrightarrow{APROXIMACIÓN} X_N \sim N(60, 6'48)$$

   Nos piden calcular $p(50 < X < 70)$, utilizaremos la aproximación anterior y las correcciones de Yates:

   (En lo que sigue, consideramos que Z~ $N(0,1)$)

$$p(50 \leq X \leq 70) = p(50 - 0{,}5 < X_N < 70 + 0{,}5) = p(49{,}5 < X_N < 70{,}5)$$

$$= p\left(\frac{49{,}5 - 60}{6{,}48} < Z < \frac{70{,}5 - 60}{6{,}48}\right) =$$

$$= p(-1{,}62 < Z < 1{,}62) = p(Z < 1{,}62) - p(Z < -1{,}62) = p(Z < 1{,}62) - p(Z > 1{,}62) =$$

$$= p(Z < 1{,}62) - \left(1 - p(Z < 1{,}62)\right) = p(Z < 1{,}62) - 1 + p(Z < 1{,}62) = 2 \cdot p(Z < 1{,}62) - 1$$

$$= 0{,}8948$$