1. Halla las siguientes derivadas **usando la definición del límite**:

a) Calcula $f'(1)$ si $f(x) = -x^2 + 3x + 5$	b) Calcula $f'(-1)$ si $f(x) = \frac{3x-2}{6}$

2. Halla la función derivada **usando la definición del límite**:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$	b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$

3. Halla la función derivada usando las reglas de derivación y simplifica si es posible:

01)	$f(x) = -x^2 + 3x + 5$	02)	$f(x) = 5x^3 + 7x$	03)	$f(x) = x - 3x^4$
04)	$f(x) = \dfrac{1}{3x}$	05)	$f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	06)	$f(x) = sen^2x + cos^2x$
07)	$f(x) = (5-x)^2$	08)	$f(x) = 1 - (x-2)^2$	09)	$f(x) = (x+1)^3 - 2x^2$
10)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$	11)	$f(x) = \dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$	12)	$f(x) = \dfrac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$
13)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}+x}{2x+3}$	14)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}-x}{2x+3}$	15)	$f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^3}}{5x}$
16)	$f(x) = \log(x-3)$	17)	$f(x) = 2^{x+3}$	18)	$f(x) = 1{,}5^x - 1$
19)	$f(x) = e^x - x$	20)	$f(x) = 2^x - x^2$	21)	$f(x) = x^3 - \log_3 x^2$
22)	$f(x) = \dfrac{3^x}{\ln x}$	23)	$f(x) = \dfrac{x^3}{3^x}$	24)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-1}}{e^x}$
25)	$f(x) = \sqrt[3]{x^2-2x+1}$	26)	$f(x) = \left(cos\dfrac{x}{3} - 3tgx\right)$	27)	$f(x) = \log_2\left(\dfrac{3x-5}{4-x}\right)$
28)	$f(x) = e^{2x-1}$	29)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}+x}{x}$	30)	$f(x) = (x^2-1)\cdot e^{\cos(\pi x)}$
31)	$f(x) = \sqrt{3}arcsen(2x)$	32)	$f(x) = \dfrac{tgx}{2}$	33)	$f(x) = tg^3x^2$
34)	$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}$	35)	$f(x) = cos\left(\dfrac{3x+\pi}{2}\right) + tg^2x$	36)	$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
37)	$f(x) = \ln(xe^{-x})$	38)	$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$	39)	$f(x) = e^{senx} + e^{cosx}$

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x)=\sqrt{x+1}$ para $x=0$	b) $f(x)=lnx$ para $x=e$
c) $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$ para $x=-1$	d) $f(x)=3x^2-2x+5$ para $x=1$

5. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

01) $f(x)=x^2-8x+3$	02) $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2$	03) $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$
04) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$	05) $f(x)=-\frac{1}{x^2}$	06) $f(x)=(5-x)^2$
07) $f(x)=(x^2-3x+1)e^x$	08) $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$	09) $f(x)=xlnx$

6. Determina la parábola $y=ax^2+bx+c$ que es tangente a la recta $y=2x-3$ en el punto $A(2,1)$ y que pasa por el punto $B(5,-2)$.

7. Halla a, b y c en $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x=-4$ y en $x=0$, y que pase por el punto $(1,1)$.

8. Calcula el valor de a para que $f(x)=ln\left(\frac{x^2}{x+a}\right)$ verifique que $f'(2)=0$.

9. Dada la función $f(x)=ax^3+bx$, halla a y b para que f pase por el punto $(1,3)$ y en ese punto la tangente sea paralela a la recta $y=4x+1$.

10. Estudia y representa las siguientes funciones:
    a) Crecimiento y decrecimiento
    b) Máximos y mínimos
    c) Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas

a) $f(x)=x^3-3x^2+1$	b) $f(x)=x^4+4x^3$
c) $f(x)=\frac{x}{x^2-16}$	d) $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+2}$

11. La función $f(x) = \frac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros y x en años).
    a) Represéntala gráficamente.
    b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?
    c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

12. Los costes de producción de un producto (en €) de una empresa vienen dados por $C = 40000 + 20q + q^2$, donde q es el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520€.
    a) Expresa en función de q el beneficio de la empresa cuando se venden todas las unidades.
    b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

13. Halla dos números cuya suma sea 34 y su producto sea máximo.

14. Con una barra de hierro de 10 m queremos construir una portería. ¿Cuáles serán sus dimensiones para que su área sea máxima?

15. Halla dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima.

16. El área de un rectángulo es 180 cm^2. ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo?

17. De todos los rectángulos de 36 m de perímetro, halla las dimensiones del que tiene la mayor superficie.

18. Halla la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, cuya área sea la mayor posible.

19. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & si \quad x < 3 \\ \sqrt{x-2} & si \quad x \geq 3 \end{cases}$	b) $f(x) = \begin{cases} e^x + 2 & si \quad x < 0 \\ x^2 + x + 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

20. Determina el valor de a y b para que la siguiente función sea derivable en el punto donde cambia la función:

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & si \quad x \leq 2 \\ 4x - b & si \quad x > 2 \end{cases}$	b) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 3 & si \quad x < 1 \\ 2bx - 4 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

SOLUCIONARIO

1. Halla las siguientes derivadas **usando la definición del límite**:

a)	$f'(1) = \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{-x^2+3x-2}{x-1} = 1$
b)	$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \dfrac{3x+3}{6x+6} = \dfrac{1}{2}$

2. Halla la función derivada **usando la definición del límite**:

a)	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{hx(x+h)} = \dfrac{1}{x^2}$
b)	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^2+2xh+7h}{h} = 2x+7$

3. Halla la función derivada usando las reglas de derivación y simplifica si es posible:

01)	$f'(x) = -2x+3$	02)	$f'(x) = 15x^2+7$	03)	$f'(x) = 1-12x^3$
04)	$f'(x) = \dfrac{-1}{3x^2}$	05)	$f'(x) = \dfrac{2}{x^3}$	06)	$f'(x) = 0$
07)	$f'(x) = 2x-10$	08)	$f'(x) = -2x-4$	09)	$f'(x) = 3x^2+2x+3$
10)	$f'(x) = \dfrac{-x-6}{2x^2\sqrt{x+3}}$	11)	$f'(x) = \dfrac{5x+3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$	12)	$f'(x) = \dfrac{100}{3\sqrt[3]{x^2}}$
13)	$f'(x) = \dfrac{3x+3\sqrt{x^2-4}+8}{(2x+3)^2\sqrt{x^2-4}}$	14)	$f'(x) = \dfrac{3x-3\sqrt{x^2-4}+8}{(2x+3)^2\sqrt{x^2-4}}$	15)	$f'(x) = \dfrac{2x-3}{15x^2\sqrt[3]{x}} + \dfrac{x-3}{15x^2\sqrt[3]{x^2}}$
16)	$f'(x) = \dfrac{\log e}{x-3}$	17)	$f'(x) = 2^{x+3}\cdot ln2$	18)	$f'(x) = 1{,}5^x \cdot ln1{,}5$
19)	$f'(x) = e^x - 1$	20)	$f'(x) = 2^x \cdot ln2 - 2x$	21)	$f'(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x^3}\log_3 e$
22)	$f'(x) = \dfrac{3^x \cdot ln3 \cdot lnx - \frac{3^x}{x}}{\ln^2 x}$	23)	$f'(x) = \dfrac{3x^2 - x^3\cdot ln3}{3^x}$	24)	$f'(x) = \dfrac{-2x^3+3x^2+2}{2\sqrt{x^3-1}e^x}$
25)	$f'(x) = \dfrac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x+1)^2}}$	26)	$f'(x) = \dfrac{-1}{3} sen\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{cos^2 x}$	27)	$f'(x) = \dfrac{7\log_2 e}{(3x-5)(4-x)}$
28)	$f'(x) = 2\,e^{2x-1}$	29)	$f'(x) = \dfrac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$	30)	$f'(x) = (2x - \pi(x^2-1)sen(\pi x))\cdot e^{\cos(\pi x)}$
31)	$f'(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-4x^2}}$	32)	$f'(x) = \dfrac{1}{2cos^2 x}$	33)	$f'(x) = \dfrac{6x\cdot tg^2 x^2}{cos^2 x^2}$
34)	$f'(x) = \dfrac{\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}}$	35)	$f'(x) = -\dfrac{3}{2} sen\left(\dfrac{3x+\pi}{2}\right) + \dfrac{2tgx}{cos^2 x}$	36)	$f'(x) = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

37) $f'(x) = \frac{1-x}{x}$	38) $f'(x) = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$	39) $f'(x) = cosx \cdot e^{senx} - senx \cdot e^{cosx}$

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal en cada uno de los siguientes casos:

a) $Tangente: y = \frac{x}{2} + 1$ $Normal: y = -2x + 1$	b) $Tangente: y = \frac{x}{e}$ $Normal: y = -\frac{x}{e} + 2$
c) $Tangente: y = -x$ $Normal: y = x + 2$	d) $Tangente: y = 4x + 2$ $Normal: y = \frac{-x+25}{4}$

5. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

Función	Creciente	Decreciente	Máx. relativos	Máx. absoluto	Mín. relativos	Mín. absoluto
01)	$(4, +\infty)$	$(-\infty, 4)$	$\nexists$	$\nexists$	$(4, -13)$	$(4, -13)$
02)	$(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$	$(0,6)$	$(0,0)$	$\nexists$	$(6, -36)$	$\nexists$
03)	$\mathbb{R} - \{-2\}$	-	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
04)	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$\nexists$	$(2,4)$	$\nexists$
05)	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
06)	$(5, +\infty)$	$(-\infty, 5)$	$\nexists$	$\nexists$	$(5,0)$	$(5,0)$
07)	$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$	$(-1,2)$	$\left(-1, \frac{5}{e}\right)$	$\nexists$	$(2, -e^2)$	$(2, -e^2)$
08)	$(0,2)$	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$	$\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$	$\nexists$	$(0,0)$	$(0,0)$
09)	$(e^{-1}, +\infty)$	$(-\infty, e^{-1})$	$\nexists$	$\nexists$	(e^{-1}, e^{-1})	(e^{-1}, e^{-1})

6. La función es $y = -x^2 + 6x - 7$.

7. La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

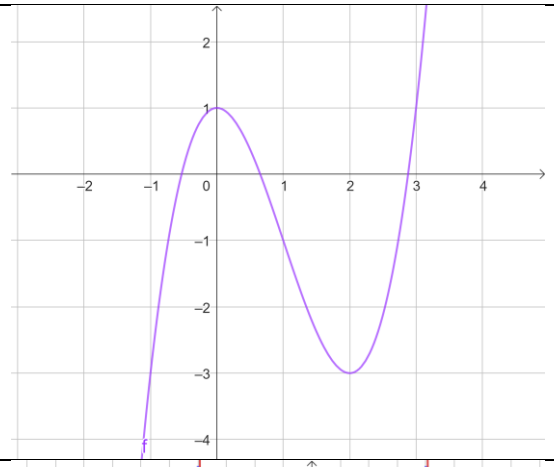
8. Será $a = -1$.

9. Será $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{5}{2}$.

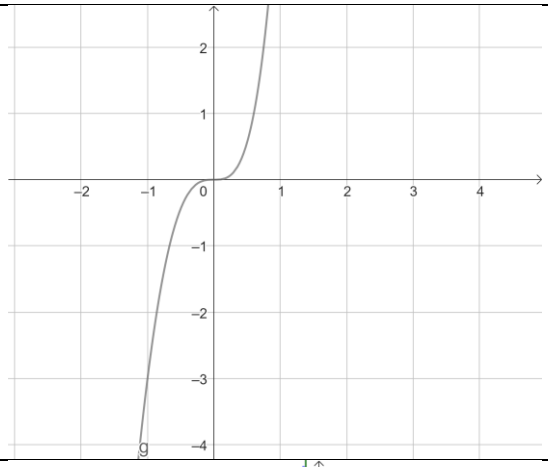
10. Estudia y representa las siguientes funciones:
    a) Crecimiento y decrecimiento
    b) Máximos y mínimos
    c) Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas

	Creciente	Decreciente	Máx. relativos	Máx. absoluto	Mín. relativos	Mín. absoluto	AH	AV	AO
a)	$(-\infty, 0)$ $\cup (2, +\infty)$	$(0,2)$	$(0,1)$	$\nexists$	$(2, -3)$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
b)	$\mathbb{R}$	-	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
c)	-	$\mathbb{R} - \{-4,4\}$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$y = 0$	$x = -4$ $x = 4$	$\nexists$
d)	$(-\infty, -5)$ $\cup (1, +\infty)$	$(-5,1) - \{-2\}$	$(-5, -12)$	$\nexists$	$(1,0)$	$\nexists$	$\nexists$	$x = -2$	$y = x - 4$

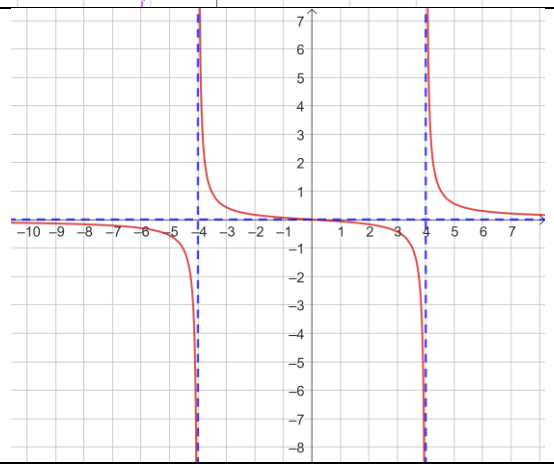
a)



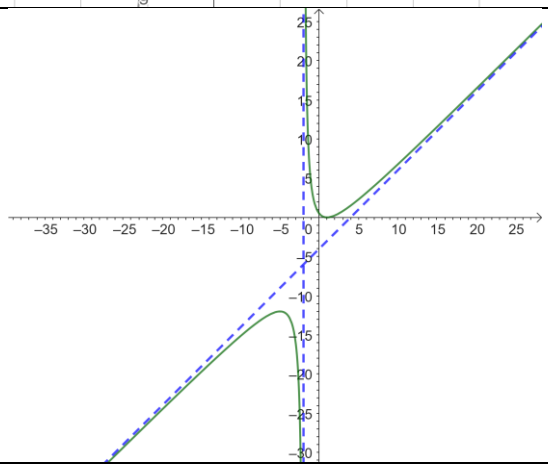
b)



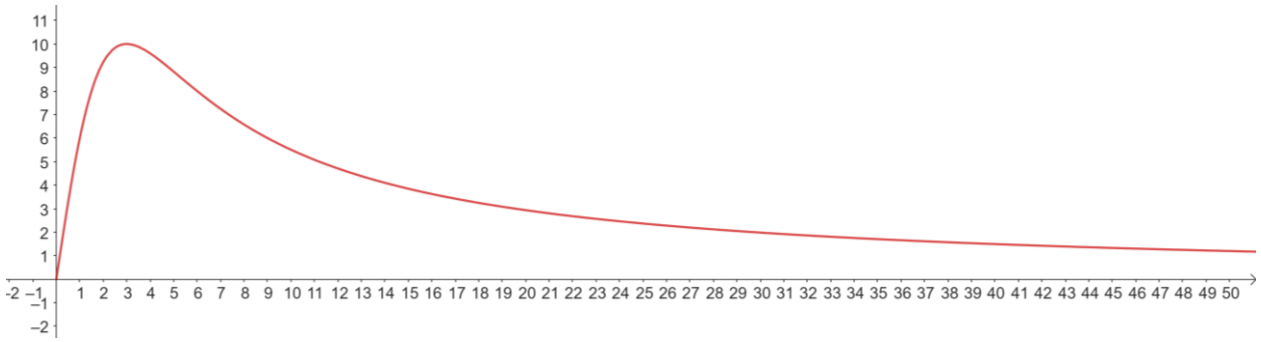
c)



d)



11. a) La función no se puede representar para valores menores que 0, porque son AÑOS.

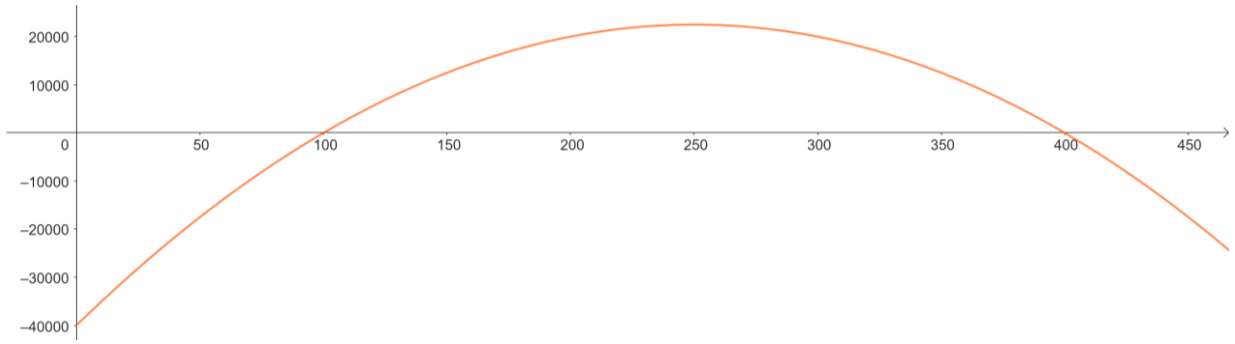


b) Al cabo de 3 años. El beneficio es de 10.000€.

c) No, porque aunque la función decrece, nunca es menor que 0.

12. a) El beneficio se obtiene al restar las ventas menos los costes. Por tanto la función beneficio es:

$$\left.\begin{array}{l} Coste: C(x) = 40000 + 20x + x^2 \\ Venta: V(x) = 520x \end{array}\right\} \Rightarrow B(x) = 520x - (40000 + 20x + x^2) = -x^2 + 500x - 40000$$



b) 250 unidades.

EJERCICIOS DE OPTIMIZACIÓN

Ej.	Variables	Condición	Función	Derivada	Solución
13	x: primer nº z: segundo nº	$x + z = 34$	$f(x) = x \cdot z \Rightarrow$ $f(x) = 34x - x^2$	$f'(x) = 34 - 2x$	$x = 17$ $z = 17$
14	x: poste z: travesaño	$2x + z = 10$	$f(x) = x \cdot z \Rightarrow$ $f(x) = 10x - 2x^2$	$f'(x) = 10 - 4x$	$x = \frac{5}{2} m$ $z = 5\ m$
15	x: primer nº z: segundo nº	$x \cdot z = 100$	$f(x) = x + z \Rightarrow$ $f(x) = \frac{x^2 + 100}{x}$	$f'(x) = \frac{x^2 - 100}{x^2}$	$x = 10$ $z = 10$
16	x: base z: altura	$x \cdot z = 180$	$f(x) = 2x + 2z \Rightarrow$ $f(x) = \frac{2x^2 + 360}{x}$	$f'(x) = \frac{2x^2 - 360}{x^2}$	$x = \sqrt{180} = 13{,}42\ cm$ $z = \sqrt{180} = 13{,}42\ cm$
17	x: base z: altura	$2x + 2z = 36$	$f(x) = x \cdot z \Rightarrow$ $f(x) = 18x - x^2$	$f'(x) = 18 - 2x$	$x = 9m$ $z = 9m$
18	x: media base z: lado	$2x + 2z = 30$	$f(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{z^2 - x^2}}{2} \Rightarrow$ $f(x) = x\sqrt{225 - 30x}$	$f'(x) = \frac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}}$	$Base = 10m$ $Altura = 8{,}66m$

19. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a)	Continua en $\mathbb{R}$ Derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$	b)	Continua en $\mathbb{R}$ Derivable en $\mathbb{R}$

20. Determina el valor de a y b para que la siguiente función sea derivable en el punto donde cambia la función:

a)	$a = 1$ $b = 3$	b)	$a = 1$ $b = 2$