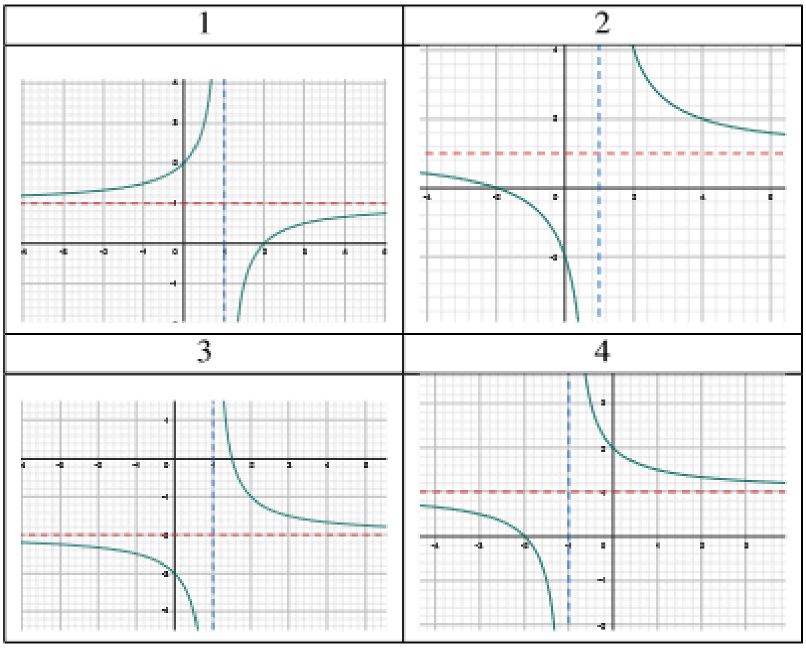
Ejercicio 1

Dadas las funciones: $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x+4}$

a) *(2 pt)* Decide **justificadamente** cuál es la representación gráfica de $f(x)$:



b) *(6 pt)* **Calcula** $f^{-1}(x), g^{-1}(x)$ y $g \circ f(x)$. ¿Dónde está **definida** $g^{-1}(x)$?

c) *(2 pt)* Comprueba que $f^{-1} \circ f(x) = x$.

a)

Hacemos un estudio de la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} = 1 + \dfrac{3}{x-1}$:

Dominio y recorrido: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.
Cortes con los ejes: Eje OX: $P_X(-2, 0)$, eje OY: $P_Y(0, -2)$.
Continuidad: $f(x)$ presenta una discontinuidad en $x = 1$.
Crecimiento: La función decrece en todo su dominio.
Asíntotas: Hay una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal en $y = 1$.

La representación gráfica de $f(x)$ es (2).

b)

INVERSA DE $f(x)$

Si nos fijamos, la función $f(x)$ es simétrica con respecto a la bisectriz del primer cuadrante, así que, en realidad, sin hacer cálculo alguno podemos concluir que es inversa de sí misma. $f^{-1}(x) = f(x)$. De todas maneras, lo calculamos explícitamente.

a) Intercambiamos los roles de la x y la y:

$$x = \frac{y+2}{y-1}$$

b) Despejamos la nueva y en función de x:

$$x(y-1) = y+2 \quad \Rightarrow \quad xy - x = y + 2 \quad \Rightarrow \quad xy - y = x + 2 \quad \Rightarrow$$

$$y(x-1) = x+2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x+2}{x-1}$$

c) Damos la expresión analítica:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

ALTERNATIVA

a) Intercambiamos los roles de la x y la y:

$$x = \frac{y+2}{y-1} \quad \Rightarrow \quad x = 1 + \frac{3}{y-1}$$

b) Despejamos la nueva y en función de x:

$$x - 1 = \frac{3}{y-1} \quad \Rightarrow \quad y - 1 = \frac{3}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y = 1 + \frac{3}{x-1} = \frac{x+2}{x-1}$$

c) Damos la expresión analítica:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

Inversa de $g(x)$

a) Intercambiamos los roles de la x y la y:

$$x = \sqrt{y+4}$$

b) Despejamos la nueva y en función de x:

$$x^2 = y+4 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 - 4$$

c) Damos la expresión analítica:

$$g^{-1}(x) = x^2 - 4$$

d) Damos el dominio de $g^{-1}(x)$. Para que $g^{-1}(x)$ definida en el paso anterior sea la inversa de $g(x)$ tenemos que restringir su dominio al intervalo $[0, \infty)$. Una manera de ver esto es dándose cuenta de que $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$.

Composición $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(1 + \frac{3}{x-1}\right) = \sqrt{1 + \frac{3}{x-1} + 4} = \sqrt{\frac{3}{x-1} + 5}$$

c)

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(1 + \frac{3}{x-1}\right) = 1 + \frac{3}{1 + \frac{3}{x-1} - 1} = 1 + \frac{3}{\frac{3}{x-1}} = 1 + x - 1 = x \quad \checkmark$$