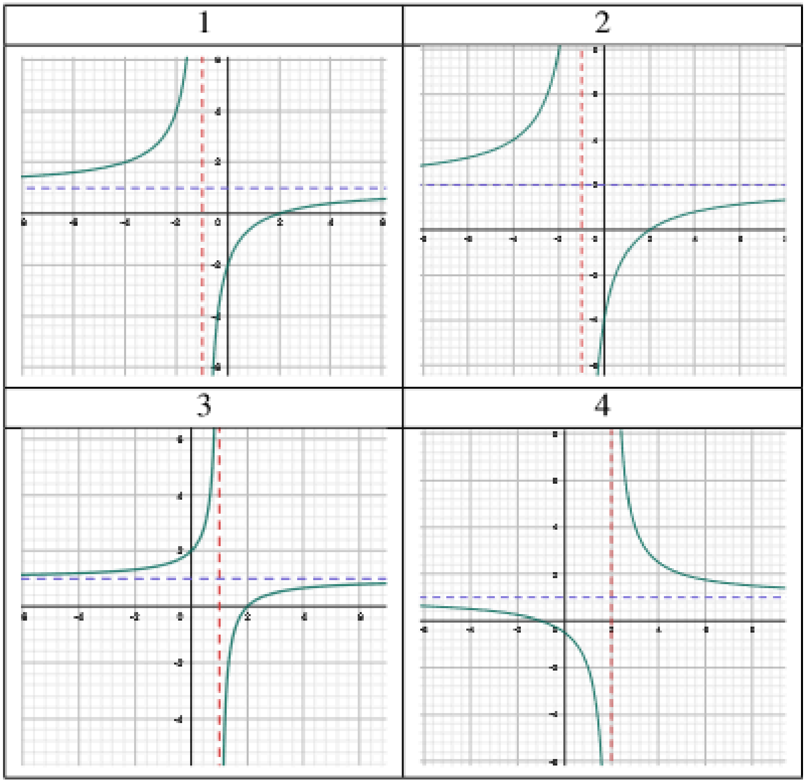
Ejercicio 1

Dadas las funciones: $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1} \qquad g(x) = \sqrt{x-4}$

a) *(2 pt)* Decide **justificadamente** cuál es la representación gráfica de $f(x)$:



b) *(6 pt)* **Calcula** $f^{-1}(x), g^{-1}(x)$ y $g \circ f(x)$. ¿Dónde está **definida** $g^{-1}(x)$?

c) *(2 pt)* Comprueba que $f^{-1} \circ f(x) = x$.

a)

Hacemos un estudio de la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1} = 1 - \dfrac{3}{x+1}$:

Dominio y recorrido: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.
Cortes con los ejes: Eje OX: $P_X(2,0)$, eje OY: $P_Y(0,-2)$.
Continuidad: $f(x)$ presenta una discontinuidad en $x = -1$.
Crecimiento: La función crece en todo su dominio.
Asíntotas: Hay una asíntota vertical en $x = -1$ y una asíntota horizontal en $y = 1$.

La representación gráfica de $f(x)$ es (1).

Nota: No hace falta hacer un estudio tan exhaustivo para decidir cuál es la correcta. Además, hay otras maneras de resolver este ejercicio. Por ejemplo, se puede hacer una tabla de valores, y comprobar cuál es.

b)

INVERSA DE $f(x)$

a) Intercambiamos los roles de la x y la y:

$$x = \frac{y-2}{y+1}$$

b) Despejamos la nueva y en función de x:

$$x(y+1) = y-2 \quad \Rightarrow \quad xy + x = y - 2 \quad \Rightarrow \quad yx - y = -x - 2 \quad \Rightarrow$$

$$y(x-1) = -x-2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-x-2}{x-1}$$

c) Damos la expresión analítica:

$$f^{-1}(x) = \frac{-x-2}{x-1}$$

ALTERNATIVA

a) Intercambiamos los roles de la x y la y:

$$x = \frac{y-2}{y+1} \quad \Rightarrow \quad x = 1 - \frac{3}{y+1}$$

b) Despejamos la nueva y en función de x:

$$x - 1 = -\frac{3}{y+1} \quad \Rightarrow \quad -y-1 = \frac{3}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y = -1 - \frac{3}{x-1} = \frac{-x-2}{x-1}$$

c) Damos la expresión analítica:

$$f^{-1}(x) = \frac{-x-2}{x-1}$$

Inversa de $g(x)$

a) Intercambiamos los roles de la x y la y:

$$x = \sqrt{y-4}$$

b) Despejamos la nueva y en función de x:

$$x^2 = y - 4 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + 4$$

c) Damos la expresión analítica:

$$g^{-1}(x) = x^2 + 4$$

d) Damos el dominio de $g^{-1}(x)$. Para que $g^{-1}(x)$ definida en el paso anterior sea la inversa de $g(x)$ tenemos que restringir su dominio al intervalo $[0, \infty)$. Una manera de ver esto es dándose cuenta de que $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$.

Composición $(g \circ f(x))$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(1 - \frac{3}{x+1}\right) = \sqrt{1 - \frac{3}{x+1} - 4} = \sqrt{-\frac{3}{x-1} - 3}$$

c)

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(1 - \frac{3}{x+1}\right) = -1 - \frac{3}{1 - \frac{3}{x+1} - 1} = -1 + \frac{3}{\frac{3}{x+1}} = -1 + x + 1 = x$$