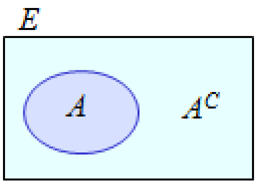
Probabilidad

Experimentos aleatorios
Un experimento se llama aleatorio cuando no se puede predecir su resultado; además, si se repitiese el mismo experimento en condiciones análogas, los resultados pueden diferir.
Los experimentos aleatorios pueden ser simples o compuestos.
(Los experimentos en los que puede predecirse el resultado se llaman deterministas. Si uno de estos experimentos se repite con idénticas condiciones, el resultado es el mismo).

Ejemplos:
a) Es aleatorio cualquier juego de azar: el lanzamiento de una moneda, de un dado o la extracción de una carta en una baraja; la lotería...
Lanzar un dado con las caras numeradas y apuntar el número que se sale es un experimento simple. Lanzar dos dados y apuntar sus resultados sería compuesto.
b) Es determinista averiguar el tiempo que tarda en llegar al suelo una pelota que se deja caer desde una altura de 10 metros; o con qué velocidad impactará.

Espacio muestral
Es el conjunto de sucesos elementales a que da lugar la realización de un experimento aleatorio; suele designarse por la letra *E*.
Un suceso es todo subconjunto de *E*. Si está determinado por un solo resultado se llama elemental; si está formado por varios se llama compuesto. Los sucesos suelen denotarse por letras mayúsculas.
Suceso seguro: es el que ocurre siempre**.** Suele denotarse por *E*, como el espacio muestral.
Suceso imposible, denotado por $\varnothing$: no ocurre nunca.
Suceso contrario de *A*, que se denota por A^C o $\overline{A}$, es el suceso que se verifica cuando no se cumple *A*. Está formado por los sucesos elementales que no son de *A*; es el subconjunto complementario de *A*, respecto a *E*. Por tanto, si ocurre A^C no ocurre *A*, y viceversa.
Los diagramas de Venn, como el de la derecha, permiten representar los distintos tipos de sucesos.



Ejemplos:
a) Los sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado corriente, con las caras numeradas, son {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}. Así pues, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Un suceso compuesto puede ser "obtener un número par": $P = \{2, 4, 6\}$. El suceso *P* se cumple cuando el resultado del lanzamiento del dado es 2, 4 o 6.
El suceso contario de "obtener un número par" es "obtener número impar".

b) Al extraer una carta de una baraja española, el espacio muestral está formado por 40 sucesos, uno por cada una de las cartas de la baraja: 10 de cada *palo* (oros, copas, espadas y bastos).
En este experimento se pueden considerar los sucesos: *B* = "obtener una carta de bastos" y *F* = "obtener una figura", se tiene:
→ suceso *B*: está formado por las 10 cartas de bastos,
$B = \{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B, S_B, C_B, R_B\}$,
donde S_B, C_B y R_B denotan las figuras sota, caballo y rey de bastos, respectivamente; el subíndice B indica bastos.
→ suceso *F*: está formado por las 12 cartas que son figuras, 3 de cada uno de los *palos*,
$F = \{S_O, C_O, R_O, S_C, C_C, R_C, S_E, C_E, R_E, S_B, C_B, R_B\}$,
donde los subíndices O, C, E y B indican oros, copas, espadas y bastos, respectivamente.

Probabilidad: definiciones y propiedades

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que se cumpla un suceso aleatorio determinado. La probabilidad de un suceso es un número, comprendido entre 0 y 1.

- Si un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, la probabilidad de un determinado suceso se identifica con la frecuencia relativa de tal suceso.

$\rightarrow$ La frecuencia relativa de un suceso es el cociente entre el número de veces que se ha cumplido el suceso y el número total de veces que se ha realizado el experimento.

Ejemplo:

a) Si se pregunta a 400 personas, elegidas al azar, sobre la práctica del deporte y, de ellas, 125 afirman practicar algún tipo de deporte, se admite que la probabilidad de que una persona de ese grupo practique algún deporte es de $\frac{125}{400} = 0,3121$.

b) Si una moneda se lanza 1500 veces y en 720 ocasiones ha salido cara, se admitirá que la probabilidad de obtener cara para esa moneda es $P(C) = \frac{720}{1500} = 0,48$ $\rightarrow$ (sospecharemos que esa moneda está trucada o mal construida).

Regla de Laplace

Cuando los sucesos elementales del experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad del suceso A se calcula aplicando la regla de Laplace, que dice:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos posibles}}$$

Ejemplos:

a) Si en una bolsa hay 5 bolas de color verde (V) y 3 de color rojo (R), todas de igual peso y tamaño, la probabilidad de extraer al azar una bola verde o una bola roja es:

$$P(V) = \frac{5}{8};\ P(R) = \frac{3}{8}.$$

b) En el experimento de extraer una carta de una baraja española, se tienen las siguientes probabilidades:

$\rightarrow$ De obtener una carta de bastos: $P(B) = \frac{10}{40} = 0,25$.

$\rightarrow$ De obtener una figura: $P(F) = \frac{12}{40} = 0,3$. (Hay 12 figuras entre las 40 cartas).

$\rightarrow$ De NO obtener una carta de bastos: $P\left(\overline{B}\right) = \frac{30}{40} = 0,75$. ($P\left(\overline{B}\right) = 1 - P\left(B\right) = 1 - \frac{10}{40} = \frac{30}{40} = 0,75$).

$\rightarrow$ De obtener una figura de bastos: $P(F) = \frac{3}{40} = 0,3$. (Hay 3 figuras de bastos entre las 40 cartas).

c) El espacio muestral asociado al experimento compuesto, consistente en el lanzamiento de dos monedas equilibradas y observar sus resultados es: $E = \{CC, CX, XC, XX\}$.

Los sucesos posibles son: 2 caras, $\{CC\}$; 2 cruces, $\{XX\}$; 1 cara y 1 cruz, $\{CX, XC\}$. Con esto, las probabilidades de obtener 2 caras, 2 cruces o 1 cara y 1 cruz serán:

$$P\left(CC\right) = \frac{1}{4};\ P\left(XX\right) = \frac{1}{4};\ P\left(CX, XC\right) = \frac{2}{4}.$$

Técnicas de recuento
La asignación de la probabilidad de un suceso, mediante la regla de Laplace, exige conocer el número de casos totales que pueden darse en el experimento y el número de casos favorables a dicho suceso. Hay varias técnicas de recuento que facilitan esos cálculos; aquí veremos el principio multiplicativo.

Principio multiplicativo
Es el método básico de recuento. Se enuncia como sigue: "Si un suceso puede darse de *m* maneras distintas en primera opción y a continuación puede suceder de *n* modos diferentes, entonces tiene $m \times n$ maneras de suceder".
Por tanto, para contar el número de casos hay que determinar cuántas elecciones hay que hacer y cuántas opciones hay en cada elección sucesiva.

Ejemplos:
a) Si una persona tiene 5 camisas y 4 pantalones, puede vestirse de $5 \times 4 = 20$ formas diferentes.

b) Con los dígitos del 0 al 9 se pueden formar, por ejemplo, números de cuatro cifras, repetidas o no. El número 0005 se considera de 4 cifras; igualmente 0126; y naturalmente, 7603 o 5555.
→ Si no puede repetirse ningún dígito, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda, 9 opciones (elegido un dígito, el siguiente puede ser cualquiera de los 9 restantes); en la tercera, 8; y en la cuarta 7. En total, los números de 4 cifras no repetidas son $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{5040}$.
→ Si pueden repetirse, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda, los mismos 10; así como en la tercera y cuarta elección, sigue habiendo 10 opciones. En total, los números de 4 cifras con dígitos, repetidos o no, son $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$.

c) Si se lanza una moneda 4 veces consecutivas y se observa la secuencia de resultados (cara, cruz), como en cada lanzamiento hay 2 opciones, el número total de secuencias posibles será $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. (Este experimento es equivalente a lanzar 4 monedas a la vez y observar el resultado).

Asignación de probabilidades a partir de una tabla
En algunas ocasiones se da la información de un suceso mediante una tabla de datos. En estos casos, la asignación de probabilidades puede resultar muy sencilla.

Ejemplo:
En un centro escolar, la distribución de los alumnos de 2º de ESO, por sexo y grupo, se da en la tabla adjunta.
A partir de esos datos, si se elige al azar, un alumno o alumna de 2º de ESO, se pueden asignar las siguientes probabilidades:

Grupo	2º A	2º B	2º C	Totales
Chicas (*M*)	14	12	13	39
Chicos (*H*)	12	13	11	36
Total	26	25	24	75

→ De que sea chico (suceso *H*): $P(H) = \frac{36}{75} = 0,48$. Hay 75 alumnos en total; de ellos, 36 son chicos.

→ De que sea de 2º C: $P(2^{\text{o}}\,\text{C}) = \frac{24}{75} = 0,32$. Hay 75 alumnos en total; de ellos, 24 son de 2º C.

→ De que sea una chica de 2º C: $P(M \text{ y } 2^{\text{o}}\,\text{C}) = \frac{13}{75} \approx 0,1733$. Hay 75 alumnos en total; de ellos, 13 son chicas de 2º C.

→ De que sea una chica si se sabe que es de 2º C: $P(M \text{ si es de } 2^{\text{o}}\,\text{C}) = \frac{13}{24} \approx 0,5417$. Hay 24 alumnos/as de 2º C; de ellos, 13 son chicas.